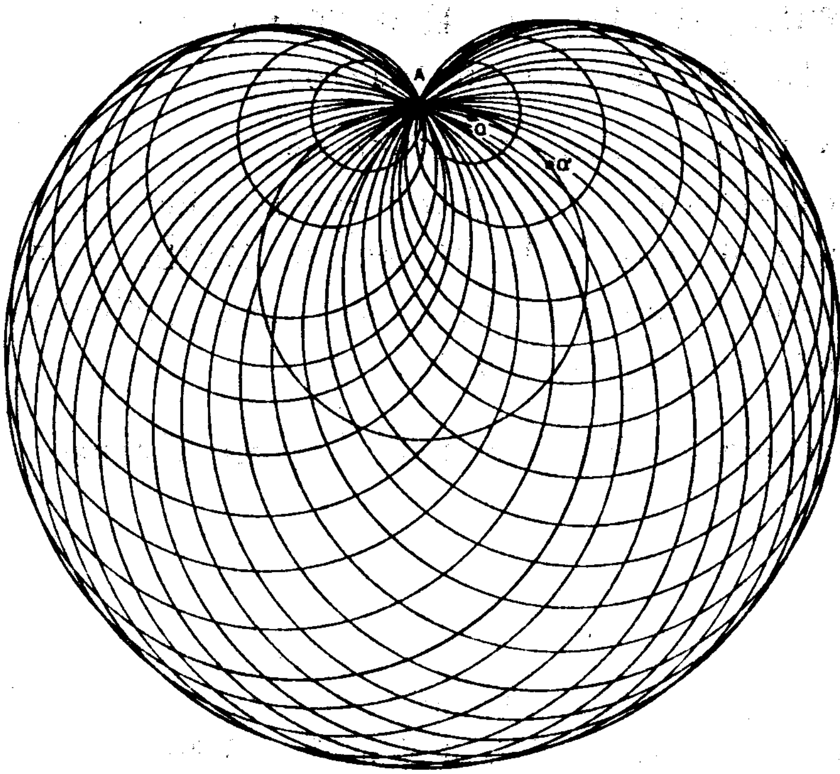
REVISTA DEL SEMINARIO de ENSEÑANZA Y TITULACION

AÑO II NUM E4

EL PROGRAMA DE ERLANGEN

FELIX KLEIN



OCTUBRE DE 1985

SUSCRIPCION. Todas las personas que deseen una suscripción, deberán manifestarlo por escrito, enviando su nombre y dirección a:

- Maestría en Educación en Matemáticas, Edificio Oficinas Administrativas Núm. 2, 1er. Piso, Av. Universidad 3000, Cd. Universitaria.
- Departamento de Matemáticas, Cubículo 239 y 240. Facultad de Ciencias, UNAM. Ciudad Universitaria.

Dicha suscripción será gratuita y anual, mientras esto sea posible.

Los artículos firmados no representan necesariamente la opinión del Seminario.

Si deseas la impresión de algún material, puedes solicitarlo con cualquier miembro del Seminario o enviandolos a la dirección arriba anotada, al igual que todo tipo de correspondencia relacionada con el Seminario.

ESTE NUMERO DE LA REVISTA FUE IMPRESO EN LOS TALLERES DE IMPRESION DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, PLANTEL AZCAPOTZALCO. SE TIRARON 600 EJEMPLARES.

OCTUBRE DE 1985. MEXICO, D.F.

Presentación.

En los números especiales de nuestra revista publicaremos artículos sobre el conocimiento matemático y su enseñanza, que a nuestro juicio, proporcionen, a los profesores de matemáticas, elementos que mejoren y amplien su concepción sobre tales aspectos. En esta ocasión publicamos el discurso sustentado por Felix Klein (matemático alemán 1849 - 1925) al recibir el nombramiento para formar parte de la Facultad de Filosofia y de la Junta Directiva de la Universidad de Erlangen. Este trabajo es, en cierta forma, un parteaguas en la historia del conocimiento matemático. Está basado en trabajos desarrollados por él mismo y por Sophus Lie sobre la teoría de grupos, y establece la definición de *una geometría*, como una forma de estructurar un cuerpo sistemático y una metodología para el estudio de *todas* las geometrías de la época, abriendo nuevas rutas para el estudio de las mismas y de las matemáticas en general.

La traducción de este trabajo, fué realizada por el Dr. Flavio Cocho, profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM, y preparada para su publicación en "Comunicaciones Internas" de la misma facultad, pero quedó rezagada durante años. Agradecemos al responsable de "Vinculos Matemáticos", nuevo nombre de "Comunicaciones Internas" el habernos proporcionado este material.

ADVERTENCIA PRELIMINAR DEL TRADUCTO[illegible]

El "Programa de Erlangen" de Felix Klein [illegible] do tan importante papel en la evolución del pen[illegible] to matemático, que su presentación en español [illegible] ciertas aclaraciones previas.

A fines del siglo XIX se produce en Alemania la reunificación política y, en ese contexto, lo que ha venido llamándose la 2a. revolución industrial. Es la época de un Bismarck, "canciller de hierro", al frente del recién unificado Estado Alemán. Consecuencia y característica de este proceso es el desarrollo sistemático de las universidades y centros de investigación, muy en particular en lo que atañe a las llamadas ciencias naturales y exactas, tanto a nivel de lo que se llamaría hoy de "frontera" como en lo que respecta a los estudios e investigaciones "Técnicas". El continuo desarrollo del aparato productivo industrial alemán obligaba conpulsivamente a ello.

A nivel ideológico, todo este proceso social va acompañado (y es coherente) con la tendencia a la creación de *un* saber científico, *totalizador*, y [illegible], tanto más abstracto cuanto que se esperaba de [illegible] especie de panacea científica universal capaz [illegible] hecho mismo de ser "absoluto", de dar respues[illegible] to problema técnico y científico planteaba [illegible] te el continuo cambio cualitativo del apara[illegible] vo alemán. La historia cultural de Alemania también empujaba en ese sentido, en particular la influencia ideológica dominante de la llamada escuela (filosófica) idealista alemana, cuyos máximos exponentes habían sido Kant y Hegel.

De todo lo anterior fue ejemplo paradigmático la matemática alemana: tendencia a unificar *todo* el saber matemático sobre una base única, abstracta, haciendo por tanto a un lado la "intuición", en el sentido en que, pro ejemplo, en Francia, lo entendía un positivista como Poincaré. Uno de los momentos culminantes de esta evolución matemática es el "programa de Erlangen", que en 1872 presentará Felix Klein.

En el marco anterior, ¿qué representa "técnicamente" el programa de Klein?, veamos:

1) Pretende poner las bases para *unificar todo el conocimiento geométrico del siglo 19*: desde la llamada Geometría proyectiva hasta las diferentes Geometrías métricas (euclidianas, y curvas), sin ahí olvidar el "análisis situs", la Geometría infinitesimal;

2) La base de esta unificación será, conforme a los trabajos de Lie, la noción de "grupo de transformación" (proyectiva), y, en última instancia, en base a la noción algebraica abstracta de grupo;

3) En última instancia, la intuición geométrica -

> **se disolverá literalmente en términos del Algebra abstracta, situación que aún hoy perdura en la mayor parte de las concepciones matemáticas actuales;**

Digámoslo simplemente con Klein, Las diferentes geometrías, más o menos intuitivas y concretas, *desaparecen* en términos de el álgebra, lo abstracto.

Sería muy interesante hacer un estudio cuidadoso, sin olvidar los obligados parámetros sociales, de cómo todo lo anterior se realizó paso a paso, detalladamente. Pero un estudio de esta naturaleza sólo puede ser la obra, no de una persona, sino de un colectivo de investigación, incluso interdisciplinario.

Aquí nos conformamos con presentar en español el "aspecto técnico" del problema: el texto íntegro de Klein. Se ha tratado de efectuar la traducción en base a dos compromisos: hacerlo comprensible gramaticalmente en español---respetando íntegramente el texto original de Klein. No ha sido un problema trivi[illegible] el lector deberá juzgar los resultados del int[illegible]

Dr. Flavio Cocho [illegible]

"EL PROGRAMA DE ERLANGEN"

CONSIDERACIONES COMPARATIVAS SOBRE LAS INVESTIGACIONES GEOMETRICAS MODERNAS

FELIX KLEIN (1)

Programa publicado en ocasión del ingreso a la Facultad de Filosofía y al Senado de la Universidad de Erlangen, en 1872.

- - - - -

Entre los trabajos efecutados desde hace cincuenta años en el dominio de la Geometría, el desarrollo de la Geometría proyectiva ocupa el primer lugar (ver nota I). Si, al principio, ha podido parecer que las relaciones llamadas *métricas* no podían serle accesibles, porque no son proyectivas, se ha aprendido recientemente a concebirlas también desde el punto de vista proyectivo, de suerte que el método proyectivo abraza hoy la totalidad de la Geometría. Más no obstante, las propiedades métricas no aparecen ahí como propiedades intrínsecas de los seres del espacio, sino más bien como relaciones de éstos con un elemento fundamental, el círculo imaginario al infinito.

Si se comparan las nociones de la Geometría elemental con esta manera, poco a poco adquirida, de considerar los seres del espacio, se es conducido a investigar un principio general según el cual se puedan edificar los dos métodos. Este problema parece [illegible] más importante cuanto que, al lado de la Geometría [illegible] mental y de la Geometría proyectiva, toman lugar [illegible] métodos, seguramente menos desarrollados, a [illegible] hay que otorgar el mismo derecho a una existencia [illegible] pia. Tal es el caso de la Geometría de los radios [illegible] tores recíprocos, la Geometría de las [illegible] racionales, etc., geometrías que, [illegible] rán también mencionadas y expuestas.

Al emprender aquí el establecimiento de tal principio, no desarrollamos seguramente ningún pensamiento particularmente nuevo: no hacemos más que dar una expresión clara y neta a aquello que muchos han pensado de una forma más o menos precisa. Sin embargo, la publicación de consideraciones destinadas a establecer tal liga ha parecido tanto más justificada cuanto que la Geometría, muy a pesar de ser una por esencia, no ha hecho más que escindirse demasiado, en razón del rápido desarrollo que ha sufrido en estos últimos tiempos, es disciplinas casi separadas (Ver Nota I) [illegible] cada una continúa desarrollándose [illegible] mente de las otras. Hemos [illegible] particular de exponer los [illegible] puntos [illegible] ta que Lie y yo hemos desarrollado en recientes [illegible] jos. A pesar de la diversidad de sus objetos, [illegible] trabajos se han unificado en la manera general [illegible] ta aquí de considerar las cosas; por consigui[illegible] sido de alguna manera necesario discutir igual[illegible] aquélla (manera general), para caracterizarlos en cuanto a sus objetos y a sus tendencias.

Si hasta aquí no hemos hablado más que de investigaciones geométricas, es preciso comprender junto con ellas aquéllas relativas a las multiplicidades con un número arbitrario de dimensiones, surgidas de la Geometría cuando se hace abstracción de las figuras que, desde el punto de vista puramente matemático, no son de ninguna manera esenciales (Ver Notas III y IV). El estudio de las multiplicidades comprende *tantos géneros diferentes como el de la Geometría*, y hay lugar, como para esta última, para poner en evidencia aquello que tienen de común y de diferente las investigaciones emprendidas independientemente una de la otra. Al punto de vista abstracto, no ha habido necesidad, en lo que sigue, de hablar más que de multiplicidades de varias dimensiones; pero, relacionando la exposición con las nociones más familiares del espacio, esta se vuelve más simple y más inteligible. Partiendo de la consideración de los seres geométricos y desarrollando sobre ella , como ejemplo, las ideas generales, seguimos la vía que ha tomado la ciencia en su desarrollo y que es la más aprovechable al adoptarla como una base de nuestra exposición.

Una indicación preliminar del contenido de lo que sigue no es posible aquí, puesto que no puede ya ser llevado a una forma más concisa (2); los títulos de los parágrafos darán idea de la marcha general [illegible]. He añadido al final una serie de Notas, en [illegible] he desarrollado puntos particulares cuando [illegible] parecido útil para la exposición general del [illegible] bién me he esforzado en separar el punto de v[illegible] mático abstracto, que es el [illegible] para [illegible] raciones del texto, de puntos de vista [illegible] ciados.

§I.- *Grupos de Transformaciones del espacio. Grupo Principal. Problema General.*

De las nociones necesarias para las consideraciones que van a seguir, la más esencial es la de *grupo* de transformaciones del espacio.

La composición de un número arbitrario de transformaciones del espacio ([3]) vuelve a dar siempre una tal transformación. Supongamos ahora que un conjunto dado de transformaciones tenga la propiedad de que toda transformación resultante de la composición de un número arbitrario de ellas pertenezca también al conjunto, éste constituye lo que se llama un *grupo de transformaciones* ([4]),([5]).

El conjunto de los desplazamientos ([illegible] derado cada desplazamiento como una opera[illegible]da sobre la totalidad del espacio) ofrece [illegible] de un grupo de transformaciones. Un grupo [illegible] en el anterior está formado, por ejemplo, [illegible] ciones alrededor de un punto ([6]). Un grupo [illegible] trario, lo contiene está formado por el conjunto de las transformaciones homográficas. Por el contrario, el conjunto de las transformaciones dualísticas no forma grupo, puesto que dos de tales transformaciones vuelven a dar, cuando se las compone, una transformación homográfica; pero, se obtiene de nuevo un grupo asociando las transformaciones dualísiticas y las homográficas.(7).

Hay transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Por su propia naturaleza, estas propiedades son, en efecto, independientes de la situación ocupada en el espacio por la figura considerada, de su magnitud absoluta, y, en fin, también del sentido(8) según el cual están dispuestas sus partes. Los desplazamientos del espacio, sus transformaciones por dimilitud y aquellos más por simetría no alteran pues las propiedades de las figuras, ni tampoco las transformaciones compuestas con los procedentes. Llamaremos *grupo principal* de transformaciones del espacio al conjunto de todas estas transformaciones(9); *las propiedades geométricas no son alteradas por transformaciones del grupo principal.* Lo recíproco es igualmente cierto: *las propiedades geométricas están caracterizadas por su invariancia respecto a las transformaciones del grupo principal.* Si, en efecto, se considera un instante, que el espacio no puede desplazarse, etc., como una multiplicidad fija, cada figura posee una individualidad propia; de las --

propiedades que ésta posee como individuo, sólo son propiamente geométricas aquellas que las transformaciones del grupo principal no alteran. Esta prueba, formulada aquí un poco vagamente, se desprenderá más netamente en la exposición que sigue.

Hagamos ahora abstracción de la figura material que, al punto de vista matemático, no es esencial, y no veamos en el espacio más que una multiplicidad de varias dimensiones, por ejemplo, ateniéndolos a la representación tradicional del punto como elemento del espacio, y como una multiplicidad de tres dimensiones. Por analogía con las transformaciones del espacio, podemos hablar de transforaciones de la multiplicidad; éstas forman también *grupos*. Pero ya no hay, como en el caso del espacio, un grupo que se distinga de los otros por su significado; un grupo arbitrario no es ni más ni menos que cualquier otro. Como generalización de la Geometría se plantea así el problema general que sigue:

Dadas una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad, estudiar los seres al punto de vista de las propiedades que no son alteradas por las transformaciones del grupo.

Si se adopta la manera actual de hablar, [illegible], es cierto, no se emplea más que para un grupo determinado, el de las transformaciones lineales; [illegible] se puede expresar así:

Se da una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad; desarrollar la teoría de las invariantes relativos a este grupo.

Tal es el problema que abarca no solamente la Geometría ordinaria, sino también los métodos geométricos modernos a los que vamos a pasar revista y las diferentes maneras de estudiar las multiplicidades de un número arbitratio de dimensiones. Lo que sobretodo hace falta señalar, es lo arbitrario que subsiste en la elección del grupo de transformaciones adjunto a la multiplicidad y la facultad que se desprende de aceptar igualmente todos los métodos de tratamiento una vez que estos satisfacen la concepción general.

§II.- Coordinación de los grupos de Transformación en Los Cuales Uno Contiene Al otro. Los Diferentes Tipos de Investigaciones Geométricas y sus Relaciones Mutuas.

Puesto que las propiedades geométricas de los seres del espacio permanecen inalteradas bajo *todas* las transformaciones del grupo principal no tiene evidentemente ningún sentido buscar aquellas propiedades que no son invariantes más que respecto a una parte de estas transformaciones. Sin embargo, este problema es legítimo, al punto de vista, al menos, de las fórmulas, si se estudian las figuras del espacio en sus relaciones con ciertos elementos supuestos fijos. Consideremos, por ejemplo, como en trigonometría esférica, los seres del espacio con distinción particular de un punto. El problema que se plantea es ante todo el siguiente: desarrollar las propiedades invariantes, relativamente al grupo principal, no ya de los seres en sí del espacio, sino del sistema que éstos forman con un punto dado. Pero se puede también plantear de forma diferente: estudiar los seres en sí del espacio al punto de vista de las propiedades que permanecen inalteradas bajo las transformaciones del grupo principal que subsisten, cuando se supone fijo el punto. En otros términos: viene siendo lo mismo que estudiar, en el sentido del grupo principal, las figuras del espacio adjuntándoles el punto dado, o sin adjuntarles ningún punto, pero reemplazando el grupo principal por el grupo, en él contenido, de transformaciones que no cambian ese punto.

Se tiene aquí un principio frecuentemente empleado en todo lo que sigue y que, a causa de esto, queremos enunciar desde ahora en toda su generalidad.

Se da una multiplicidad y, para hacer su estudio, uno de sus grupos de transformaciones. Propóngase ahora estudiar los seres de la multiplicidad, de uno de ellos cuenta habida.

Se puede entonces, o bien adjuntar éste al conjunto de los seres y buscar, en el sentido del grupo dado, las propiedades del sistema completo, o bien no adjuntar nada, pero limitar las transformaciones tomadas co *mo base del estudio a aquellas del grupo dado que no - alteren el ser considerado (y que forman necesariamente un grupo).*

Abordemos ahora el problema inverso del planteado al comienzo de esta sección y que se percibe inmediatamente. Se trata de encontrar las propiedades de los seres del espacio que permanecen inalteradas por las transformaciones de un grupo que contiene al grupo principal. Toda propiedad obtenida en esta búsqueda es una propiedad geométrica intrínseca del ser, pero el recíproco no es cierto. Para este recíproco, el principio que acabamos de establecer entra en vigor, y ahí el grupo principal juega el papel del grupo más restringido. Se obtiene así este teorema:

Si se reemplaza el grupo principal por un grupo más extenso, solamente una parte de las propiedades geométricas se conserva. Las otras propiedades no aparecen más como propiedades intrínsecas de los seres geométricos, sino como propiedades del sistema obtenido adjuntándoles un ser especial. Este ser especial, en tanto que está en general determinado[10]*, está definido por la condición que nos dice que, suponiéndolo fijo, las únicas transformaciones, entre las del grupo dado, que pueden todavía aplicarse al espacio son las del grupo principal.*

En este terorema se encuentra aquello que caracteriza los métodos geométricos modernos que vamos a estudiar y los liga al método elemental. (Estos métodos)-

Están, en efecto, caracterizados por el hecho [illegible] sus consideraciones, en lugar de apoyarse sobre el grupo principal, reposan sobre grupos de transformación más extensos. Desde el momento en que los grupos se contienen uno al otro, una ley análoga establece sus relaciones recíprocas. Esto se aplica también a las diferentes formas de tratar las multiplicidades de varias dimensiones que tenemos que considerar. Vamos a ahora para cada método particular, y los teoremas resestablecerlo ahora para cada método particular, y los -- teoremas respectivos al caso general, de este parágrafo y del precedente, van así a encontrar su aclaración por la aplicación a objetos concretos.

§III.- *La Geometría Proyectiva.*

Cada transformación del espacio que no pertenece al -- grupo principal puede emplearse para transportar a nuevas figuras propiedades de figuras conocidas. Se utiliza así la Geometría plana para la Geometría de las - superficies representables en el plano; así, mucho antes del nacimiento de la verdadera Geometría proyectiva, se concluían las propiedades de una figura dada, a partir de las propiedades de aquéllas que se deducen de ella por proyección. Pero la Geometría proyectiva no ha nacido más que cuando nos hemos acostumbrado a - considerar como enteramente idénticas la figura primitiva y todas aquéllas que pueden deducirse de ella por proyección; y cuando nos hemos acons[illegible] enunciar las propiedades proyectivas de manera [illegible] en evidencia su independencia frente a modificaciones aportados por la proyección. Se trataba de tomar como base de las consideraciones, en el sentido del parágrafo -- §I, *el grupo de transformaciones proyectivas*, y por este camino se iba creando la diferencia entre las Geometrías proyectiva y ordinaria.

Para cada especie de transformación del espacio, se puede imaginar una marcha de desarrollo parecida a la que acabamos de describir, es un punto sobre el cual volveremos todavía frecuentemente. En lo que concierne a la Geometría proyectiva, esta marcha se continúa todavia en dos direcciones. Un primer paso en la ampliación de las nociones ha sido realizado admitiendo en el grupo fundamental de transformaciones las --- transformaciones *por vía de dualidad*. Al punto de vista moderno, hay que considerar dos figuras correlativas ya no como dos figuras diferentes, sino como - una sola y misma figura. Un segundo paso consiste en la extensión dada al grupo fundamental de transformaciones homográficas y dualísticas, al admitir ahí las transformaciones imaginarias correspondientes. Esto - exige que se haya ante todo, ampliado el círculo de -- los elementos propios del espacio admitiendo ahí los - elementos imaginarios; así como la admisión de las --- transformaciones por dualidad en el grupo fundamental tiene por consecuencia la introducción simultánea del punto y del plano como elemento del espacio. No es este el sitio indicado para extenderse sobre la utilidad de la introducción de los elementos imaginarios, [illegible] medio por el cual se llega a hacer corresponder [illegible] mente la ciencia del espacio con el dominio, que [illegible] do adoptado como modelo, de las operaciones del Álge-bra; no obstante, es preciso insistir particularmente sobre el hecho de que es justamente en la consideración de estas operaciones que residen las razones de esta introducción, y no en el grupo de transformaciones proyectivas y dualísticas. De la misma forma que en éstas podemos limitarnos a las transformaciones reales, dado que las transformaciones homográficas y por dualidad que son reales forman un grupo, de esa misma forma podemos introducir elementos imaginarios, incluso cuando no nos colocamos en el punto de vista proyectivo, y debemos hacerlo en el caso en el cual, sobretodo, tenemos en vista el estudio de los seres algebraicos.

El teorema general del parágrafo precedente muestra como, al punto de vista proyectivo, deben ser concebidas las propiedades métricas. Es preciso considerarlas como relaciones proyectivas relativas a un elemento que tiene la propiedad de no ser transformado en sí mismo más que por medio de aquellas transformaciones del grupo proyectivo que son también transformaciones del grupo principal. Este teorema, que nos contentamos con enunciar, amerita aún un complemento indispensable que proviene de limitar las consideraciones habituales a los elementos reales del espacio (y transformaciones reales). Para estar completamente de acuerdo con este punto de vista, se debe aún adjuntar expresamente, al círculo imaginario al infinito, el sistema de elementos reales (puntos) del espacio. Las propiedades que, en el sentido de la Geometría elemental, son proyectivas, son propiedades intrínsecas de las figuras, sean relaciones relativas a este sistema de elementos reales, o al círculo imaginario al infinito, o bien, en fin, simultáneamente a los dos.

Se puede todavía recordar aquí como Von Staudt, en su Geometría de situación, construye la Geometría proyectiva, es decir, la Geometría proyectiva cuyo grupo fundamental no comprende más que las transformaciones reales proyectivas y por dualidad.(12)

Se sabe cómo, en esta obra, él no utiliza, del material de las consideraciones habituales, más que aquello que permanece inalterado por la aplicación de las transformaciones proyectivas. Si se quisiera así ir hasta la consideración de las propiedades métricas, sería justamente necesario introducirlas como relaciones relativas al círculo imaginario al infinito. La marcha de las ideas, completada de esta forma, es, para las consideraciones aquí presentadas, de una gran importancia, puesto que es posible construir, en forma análoga, la Geometría en el sentido de cada uno de los métodos que nos quedan por estudiar.

§IV.- *Correlación establecida por medio de una transformación de la multiplicidad fundamental.*

Antes de pasar a la exposición de los métodos geométricos que se presentan al lado de las Geometrías elemental y proyectiva, podemos desarrollar, en general, algunas consideraciones que se reproducirán constantemente en lo que sigue, y para las cuales las teorías abordadas hasta aquí proporcionan un número ya suficiente de ejemplos. Este parágrafo y el siguiente los dedicaremos a esto.

Considérese el estudio de una multiplicidad A, tomando por base un grupo B. Si, por una transformación arbitraria, se transforma A en otra multiplicidad A', el grupo B de transformaciones que reproducen A se vuelve un grupo B', cuyas transformaciones se reportan a A'. Es entonces un principio evidente el que *la manera de tratar A, tomando B como base, conduce a la de tratar A' tomando B' como base*, es decir, que dada propiedad que posea, relativa al grupo B, un ser de A, da una propiedad, relativa al grupo B', del ser correspondiente de A'.

Supongamos, por ejemplo, que A sea una recta, y B la triple infinidad de transformaciones lineales que la reproducen. El estudio de A es entonces justamente lo que, en Algebra moderna, se llama *la teoría de las formas binarias*. Ahora, se puede establecer una co---

rrespondencia entre los puntos de la recta y los de - una cónica del plano, proyectando cada uno de los puntos de esta última. Se muestra fácilmente que las -- transformaciones lineales B que reproducen la recta - se vuelven las transformaciones lineales B' que reproducen la cónica es decir las transformaciones de la - cónica que corresponden a las transformaciones lineales del plano que reproducen la cónica.

Pero, según el principio del segundo parágrafo ([13]), viene a ser lo mismo estudiar la Geometría sobre una cónica suponiéndola fija y no considerando más -- que las transformaciones lineales del plano que la reproducen, o bien estudiar la Geometría sobre la cónica considerando todas las transformaciones lineales del plano, y dejando a la cónica modificarse con ellas. Las propiedades que descubrimos en los sistemas de -- puntos de la cónica son pues proyectivas en el sentido habitual de la palabra. Uniendo esto con el resultado precedente, se ve que :

La teoría de las formas binarias y la Geometría proyectiva de los sistemas de puntos de una cónica son equivalentes, es decir, que a cada teorema relativo a las formas binarias corresponde uno relativo a esos - sistemas de puntos, y viceversa([14]).

He aquí otro ejemplo adecuado para aclarar este tipo de consideraciones. Si se proyecta estereográficamente una cuádrica sobre un plano se presenta ---- entonces un punto fundamental sobre la superficie: el punto de vista (nota.- el punto a partir del cual se - hace la proyección); se presentan dos sobre el plano: las trazas de las generatrices que pasan por el punto de vista. Ahora bién, se ve inmediatamente que las -- transformaciones lineales del plano, que no alteran -- los dos puntos fundamentales, se vuelven, por representación, aquellas transformaciones de la cuádrica que la reproducen, sin, a la vez, cambiar el centro de proyección. (Por transformaciones lineales que reproducen - la superficie hay que entender aquí las transformaciones que sufre la superficie cuando se efectúan trans-- formaciones lineales del espacio que la llevan a recubrirse ella misma). Así se vuelven idénticos el estudio proyectivo de un plano, con dos puntos fundamentales, y el de una cuádrica con un punto fundamental. Pero, si se hace empleo de elementos imaginarios, el - primero no es más que el estudio del plano en el sentido de la Geometría elemental. El grupo principal de transformaciones del plano se compone, en efecto, precisamente de transformaciones lineales que no alteran un par de puntos (los puntos cíclicos); de tal suerte que, finalmente,

La Geometría elemental del plano, y el estudio -- proyectivo de una cuádrica con un punto fundamental, - son idénticos.

Se pueden multiplicar a voluntad estos ejemplos - [15]. Hemos adoptado los dos que acaban de ser desarrollados, porque, en lo que sigue, tendremos todavía la ocasión de volver a ellos.

§V.- *De lo arbitrario en la elección del elemento del espacio. Principio de correlación de Hesse. Geometría en el espacio reglado.*

Como elemento de la recta, del plano, del espacio, etc., y en general de una multiplicidad a estudiar, se puede emplear, en lugar del punto, todo elemento que forme parte de la multiplicidad: un grupo de puntos, en particular una curva, una superficie, etc., (*Ver* Nota IV). Como, *a priori*, no hay nada determinado respecto al número de parámetros arbitrarios de los que se hará depender este elemento, la línea, el plano, el espacio, etc., aparecen, según el elemento elegido, como provistos de un número arbitrario de dimensiones. Pero, *en tanto se tome por base del estudio geométrico el mismo grupo de transformaciones, nada se modifica en esta Geometría*, es decir, que toda proposición obtenida con cierto elemento del espacio sigue siendo aún una proposición para cualquier otra elección de este elemento, cambiando solamente el orden de los teoremas y su concatenación.

Lo que es esencial es, pues, el grupo de transformaciones; el número de dimensiones atribuídas a la multiplicidad aparece como algo secundario.

La unión de esta observación y del principio del parágrafo precedente conduce a una sucesión de bellas aplicaciones, algunas de las cuales pueden ser desarrolladas aquí. Más que cualquier largo análisis, estos ejemplos parecen, en efecto, adecuados para explicar el sentido de las consideraciones generales.

Según el parágrafo precedente, la Geometría proyectiva sobre la recta (la teoría de las formas binarias) equivale a la Geometría proyectiva sobre una cónica. Podemos ahora sobre esta última considerar como elemento, en lugar del punto, el par de puntos. Pero una correspondencia puede establecerse entre el conjunto de los pares de la cónica y el conjunto de las rectas del plano, haciendo corresponder cada recta al par de puntos en donde encuentra a la cónica. Por medio de esta representación, las transformaciones lineales que reproducen la cónica se vuelven las transformaciones lineales del plano (considerado como compuesto de rectas) que dejan inalterada a la cónica. Ahora bien, según el (parágrafo) §11, considerar el grupo formado por estas últimas transformaciones, o partir de la totalidad de las transformaciones lineales del plano adjuntando siempre la cónica a la figura plana a estudiar, son cosas equivalentes. Resulta de todo esto que:

La teoría de las formas binarias y la Geometría proyectiva del plano con una cónica fundamental son equivalentes.

En fin, puesto que, a causa de la identidad de los grupos, la Geometría proyectiva del plano con una cónica fundamental coincide con la Geometría métrica proyectiva que se puede establecer en el plano sobre una cónica (*Ver* Nota V), podemos aún decir que:

La teoría de las formas binarias y la Geometría - métrica proyectiva general del plano son una sola y -- misma Geometría.

Se podría, en el análisis precedente, sustituir - la cónica del plano por una cúbica izquierda, etc; pero podemos dispensarnos de estos desarrollos. La conexión que acabamos de exponer entre la Geometría del -- plano, y después del espacio, o de una multiplicidad - con un número arbitrario de dimensiones, se acuerda -- (coincide) esencialmente con el principio de correla-- ción propuesto por Messe (*Journal de Borchardt, t.LXVI*).

La Geometría proyectiva del espacio, o, dicho de otra forma, la teoría de las formas cuaternarias, ofrece un ejemplo completamente de la misma naturaleza. Tomemos la recta como elemento del espacio y, como la geometría del espacio reglado, determinémosla por seis coordenadas homogéneas ligadas por una ecuación de segundo grado; las transformaciones lineales y por dualidad del espacio se ofrecen entonces como aquellos de las (respectivas a) transformaciones lineales de las - seis variables supuestas independientes, (y) que transforman en sí misma la ecuación que las liga entre sí.

Por una sucesión de deducciones cómo las que acabamos de desarrollar, se obtiene entonces este teorema:

La teoría de las formas cuaternarias se acuerda - (coincide) con la determinación métrica proyectiva en *la multiplicidad engendrada por seis variables homogé-neas.*

Para más detalles sobre estas nociones, enviaré a una Memoria aparecida recientemente en los *Math. Annalen (t. VI): Bever dio sogonannte Nicht - Euclidische Geometrie (zweite Abhandlung)*, así como a una nota colocada al final de este trabajo (*Ver* Nota VI).

Añadiremos aún dos observaciones a las consideraciones precedentes; la primera, es cierto, se encuentra ya implícitamente contenida en lo que se ha dicho, pero es necesario desarrollarla, por que el objeto al cual se aplica ha sido sujeto a demasiados malos entendidos.

Si se introducen seres arbitrarios como elementos del espacio, éste adquiere un número arbitrario de dimensiones. Pero si entonces nos colocamos en el punto de vista habitual (elemental o proyectiva), el grupo que, para la multiplicidad de varias dimensiones, debemos tomar como base, está dado *apriori*: no es otro que el grupo principal o el grupo de las transformaciones proyectivas. Si quisiéramos tomar por grupo fundamental otro grupo, deberíamos abandonar el punto de vista elemental o proyectivo. Así, en tanto es cierto que por una elección conveniente del elemento del espacio éste representa multiplicidades con un número arbitrario de dimensiones, también es importante añadir que *con esta representación, es necesario, en vista al es* *tudio de la multiplicidad, tomar por base un grupo determinado* a priori, *o si no, hará falta, para disponer a voluntad del grupo, adaptar ahí convenientemente nuestras concepciones geométricas.* Si no se hiciera esta observación, se podría, por ejemplo, buscar una representación de la geometría del espacio reglado de la manera siguiente. En esta geometría, una recta tiene seis coordenadas; es también el número de coeficientes de una cónica del plano. La reproducción de la geometría del espacio reglado sería así la geometría de un sistema de cónicas, distinguido del conjunto de las cónicas mediante una relación cuadrática entre los coeficientes. Esto es justo, si el grupo tomado como base de la Geometría plana es el grupo formado por el conjunto de las transformaciones representadas por las transformaciones lineales de los coeficientes de una cónica que reproducen la ecuación cuadrática de condición. Pero si conservamos la manera de ver elmental o proyectiva de la Geometría plana, no obtenemos *absolutamente ninguna representación.*

La última observación se refiere a la noción siguiente. Sea dado, en el espacio, un grupo arbitrario, por ejemplo el grupo principal. Escojamos una figura particular, como un punto, o una recta, o aún un elipsoide, etc, y efectuemos sobre ella todas las transformaciones del grupo fundamental. Se detiene así un conjunto varias veces infinito con un número de dimensiones en general igual al número de los parámetros arbitrarios contenidos en el grupo; en ciertos casos particulares, este número es más pequeño, a saber, cuando la figura escogida ante todo tiene la propiedad de ser reproducida por un número infinito de transformaciones del grupo. Cada conjunto engendrado así se llama, relativamente al grupo generador, *un cuerpo*(16). Si ahora, por una parte, queremos estudiar el espacio en el sentido del grupo, y, con este fin, especificar como elementos del espacio ciertas figuras determinadas; si, por otra parte, no queremos que ciertas cosas equivalentes sean representadas de manera diferente, *deberemos evidentemente escoger los elementos del espacio de tal manera que su conjunto forme un sólo cuerpo o pueda ser descompuesto en cuerpos*(17). Haremos más tarde (§ IX) una aplicación de esta observación evidente. La noción misma de cuerpo se presentará todavía una vez más, en el último parágrafo, asociada a nociones de la misma naturaleza.

§VI.- *Geometría de los radios vectores recíprocos. Interpretación de x+iy.*

Volvamos ahora a la discusión de las diferentes clases de investigaciones geométricas, comenzada en los §§*II*,*III*. Desde varios puntos de vista, se puede considerar como análoga al género de consideraciones de la Geometría proyectiva, una categoría de consideraciones geométricas en donde se hace uso constante de la transformación por radios vectores recíprocos; como en las investigaciones relativas a lo que se llaman las cíclidas y las superficies analagmáticas, la teoría general de los sistemas ortogonales, y después en investigaciones del potencial, etc. Si no se han todavía reunido en una Geometría particular las consideraciones de estas teorías, como se ha hecho para las proyectivas, *Geometría en la cual sería necesario tomar por grupo fundamental el conjunto de transformaciones obtenido reuniendo el grupo principal y la transformación por radios vectores recíprocos*, hay que atribuirlo a la circunstancia fortuita de que estas teorías no han sido hasta aquí todavía el objeto de una exposición sistemática; los diferentes autores que han trabajado en este sentido no han estado alejados de tal consideración metódica.

La analogía entre la Geometría de los radios vectores recíprocos y la Geometría proyectiva se nos hace evidente por sí misma en cuanto se propone compararlas y, en consecuencia, sin entrar en el detalle, nos bastará llamar la atención sobre los puntos siguientes:

Las nociones elementales de la Geometría proyectiva son las respectivas al punto, a la recta, y al plano. La circunferencia y la esfera no son más que cosas de las secciones cónicas y de las superficies de segundo grado. El infinito se presenta ahí como un plano; la figura fundamental que corresponde a la Geometría elemental es una sección cónica imaginaria al infinito.

Las nociones elementales de la Geometría de los radios vectores recíprocos son las respectivas al punto, a la circunferencia, y la esfera. La recta y el plano son casos particulares de estas dos últimas, caracterizados por el hecho de que contienen cierto punto, el punto al infinito, que, por lo demás, en el sentido del método, no es un punto más especial que los otros. Se obtiene la Geometría elemental desde el momento que se supone a este punto fijo.

La Geometría de los radios vectores recíprocos puede ser representada de manera que tome su lugar al lado de la teoría de las formas binarias y de la Geometría del espacio reglado, siempre y cuando se trate a éstas como se indicó en los parágrafos precedentes. Podemos ante todo, para llegar a este resultado, limitarnos a la Geometría plana y, a continuación, a la Geometría de lo radios vectores recíprocos en el plano (18).

Hemos ya insistido en la conexión que existe entre la Geometría plana elemental y la Geometría proyectiva de una superficie de segundo grado en donde un punto es especificado particularmente.

Si se hace abstracción de este punto particular y se considera, en consecuencia, la Geometría proyectiva sobre la superficie en sí, se tiene la representación de la Geometría plana de los radios vectores recíprocos. Es, en efecto, fácil convencerse (19) que al grupo de transformaciones por radios vectores recíprocos corresponde, por medio de la representación de la superficie de segundo grado, el conjunto de las transformaciones lineales de ésta en si misma. En consecuencia:

La Geometría de los radios vectores recíprocos en el plano y la Geometría proyectiva sobre una superficie de segundo grado son una sola y misma cosa.

y en forma similar:

La Geometría de los radios vectores recíprocos en el espacio es idéntica al estudio proyectivo de una multiplicidad representada por una ecuación cuadrática entre cinco variables homogéneas.

La Geometría en el espacio es así, por intermedio de la Geometría de los radios vectores recíprocos, identificada con el estudio de una multiplicidad de cinco dimensiones, por intermedio de la Geometría proyectiva del espacio reglado.

No preocupándonos más que de las transformaciones reales, la Geometría de los radios vectores recíprocos nos da todavía, por otro lado, una representación y una aplicación interesantes. Si, en efecto, se representa de manera habitual la variable compleja $x + iy$ en el plano, a sus transformaciones lineales corresponde el grupo de los radios vectores recíprocos, limitado, como hemos dicho, a las transformaciones reales[20].
Pero el estudio de las funciones de una variable compleja, a la que se supone sometida a transformaciones

lineales arbitrarias, no es otra cosa más que lo que, con un método de exposición un poco diferente, se llama la *teoría de las formas binarias*. Así:

La teoría de las formas binarias encuentra su representación en la Geometría de los radios vectores recíprocos, y de tal manera que los valores complejos de las variables son también representados.

Desde el plano podemos, para llegar al dominio de representación más habitual de las transformaciones proyectivas, pasar a la superficie de segundo grado. Puesto que no consideramos más que elementos reales del plano, la elección de la superficie ya no es indiferente; es evidentemente necesario que no sea reglada. En particular, podemos, como por otra parte se hace también para la interpretación de una variable compleja, suponer que sea una esfera, y obtenemos así este teorema:

La teoría de las formas binarias de variables complejas encuentra su representación en la Geometría proyectiva de una superficie esférica real.

He creído mi deber mostrar aún en una Nota (*Ver* Nota VII) hasta que punto esta representación aclara la teoría de las formas binarias y bicuadráticas.

§VII.- *Generalización de todo lo que precede. Geometría de la esfera de Lie.*

A la teoría de las formas binarias, a la Geometría de los radios vectores recíprocos y a la del espacio reglado, cuya coordinación acabamos de mostrar, y que parecen no diferir más que por el número de variables se añaden ciertas generalizaciones que vamos ahora a exponer. Servirán ante todo para aclarar, con nuevos ejemplos, la idea de que el grupo que fija la manera de tratar un dominio dado puede ser generalizado a voluntad; pero, además, nuestra meta ha sido el presentar, en sus relaciones con las ideas aquí expuestas, las consideraciones desarrolladas por Lie en una reciente memoria[21]. La vía por medio de la cual llegaremos a su Geometría de la esfera, difiere de la que (Lie) ha adoptado en la medida (o en tanto) que se refiere a nociones de la Geometría del espacio reglado; para conformarnos (o ajustarnos) aún más a la intuición geométrica ordinaria, y para permanecer en conexión con lo que precede, nuestra exposición supondrá, al contrario, un número menor de variables. Como ya lo ha puesto en evidencia Lie (*Göttinger Nachrichten*, *1871, No. 7,22*), las consideraciones son independientes del número de variables. Pertenecen al círculo extenso de investigaciones relativas al estudio proyectivo de las ecuaciones cuadráticas con un número arbitrario de variables, investigaciones que frecuentemente -

ya hemos tocado y que volveremos a encontrar varias veces (*Ver* entre otros el § X).

Parte de la correspondencia obtenida por proyección estereográfica entre el plano real y la esfera.

Haciendo corresponder a la recta del plano el par de puntos donde corta una cónica, hemos ya relacionado la Geometría del plano con la Geometría sobre la cónica. Podemos de la misma manera, establecer una correspondencia entre la Geometría del espacio y la Geometría sobre la esfera, haciendo corresponder a cada plano del espacio la circunferencia según la cual éste corta a la esfera. Si ahora, por proyección estereográfica, transportamos la Geometría establecida sobre la esfera al plano (y entonces cada circunferencia es transformada en una circunferencia), se ve ahí que hay correspondencia entre:

La Geometría del espacio, que tiene por elemento el plano y por grupo las transformaciones lineales que transforman una esfera en ella misma, y

La Geometría plana, que tiene por elemento la circunferencia y por grupo el grupo de radios vectores recíprocos.

Queremos ahora extender de dos maneras la primera de estas Geometrías, tomando, en lugar de su grupo, un grupo más general. La generalización que resulta se transporta entonces inmediatamente, por medio de la representación, a la Geometría plana.

Hagamos la fácil modificación de escoger, en lu-- gar de transformaciones lineales del espacio, considerado como formado de planos y que transforman la esfera en ella misma, o bién el conjunto de las transformaciones lineales del espacio, o bien el conjunto de --- transformaciones de planos del espacio que dejan [en - un sentido que va a ser todavía precisado] a la esfera inalterada; en el primer caso, se hace abstracción de la esfera; en el segundo, (se hace abstracción) del carácter lineal de las transformaciones a emplear. La - primera generalización se concibe inmediatamente; podemos pues examinarla inicialmente y estudiar (o seguir) las consecuencias para la Geometría plana. Volveremos inmediatamente sobre la segunda, en donde ante todo -- hay que determinar la transformación más general correspondiente.

Todas las transformaciones lineales del espacio - transforman haces y conjuntos de haces de planos en, - respectivamente, haces y conjuntos de haces de planos. Sobre la esfera, el haz de planos da un haz de circunferencias, es decir una sucesión simplemente infinita de circunferencias cortándose en los mismos puntos; el conjunto de haces de planos, da un conjunto de haces - de circunferencias, es decir una sucesión doblemente - infinita de circunferencias ortogonales a una circunferencia fija (la circunferencia cuyo plano tiene por polo el punto por el cual pasan los planos). A las transformaciones lineales del espacio corresponden pues sobre la esfera y, en consecuencia, en el plano, las transformaciones circulares caracterizadas por la propiedad de transformar haces y conjuntos de haces de circunferencias en haces y en conjuntos de haces de circunferencias([22]). *La Geometría del plano obtenida adoptando este grupo de transformaciones es la representación de la Geometría proyectiva ordinaria del espacio.* En esta Geometría, no se podrá hacer uso del punto como elemento del plano, puesto que los puntos, para el grupo de transformaciones escogido, no forman un cuerpo (§ V), pero se escogerán como elementos las circunferencias.

Para la segunda extensión de la que hemos hablado, es ante todo necesario preguntarse la naturaleza del grupo correspondiente de transformaciones. Se trata de encontrar transformaciones tales que todo [haz de planos cuyo eje es tangente a la esfera] se vuelva un [haz] temiendo también esta disposición. Podremos, para abreviar el lenguaje, transformar ante todo la cuestión por dualidad, y además descender un grado en el número de dimensiones; deberemos así encontrar las transformaciones puntuales del plano que, a cada tangente de una cónica dada, hagan corresponder una tangente a la misma cónica. Para llegar ahí, consideremos el plano, y la cónica que esta ahí situada, como la proyección de la cuádrica hecha a partir de un punto de vista (Nota.- punto desde el cual se hace la proyección) que no está sobre la superficie, y de tal manera que la cónica sea la curva de contorno aparente. A las tangentes a la cónica corresponden las generatrices de la superficie y el problema es transformado en el de encontrar el conjunto de transformaciones puntuales que reproducen la superficie, las generatrices permaneciendo generatrices.

Hay tantas transformaciones así como se quiera, puesto que basta considerar el punto de la superficie como intersección de las generatrices de cada sistema y transformar en sí mismos, de una manera arbitraria, cada uno de estos sistemas. Entre estas transformaciones se encuentran, en particular, aquéllas que son lineales: son las únicas que vamos a considerar. Si tuviéramos, en efecto, no una superficie, sino una multiplicidad de varias dimensiones, representada por una ecuación cuadrática, sólo subsistirían las transformaciones lineales, y las otras desaparecerían[23].

Reportadas sobre el plano por proyección (no estereográfica), estas transformaciones lineales que reproducen la superficie se vuelven transformaciones puntuales en dos dimensiones, tales que a cada tangente a la cónica de contorno aparente corresponde de nuevo una tangente, pero también, tales que a cualquier otra recta corresponde, en general, una cónica que tiene un doble contacto con la cónica de contorno aparente. Se puede muy bien caracterizar este grupo de transformaciones basando sobre esta última una determinación métrica proyectiva. Las transformaciones tienen entonces las propiedades de cambiar puntos que, en el sentido de la determinación métrica, están a una distancia nula uno de otro, o puntos que están a una distancia constante de otro punto, en otros para los cuales sucede lo mismo.

Todas estas consideraciones pueden extenderse a un número arbitrario de variables; en particular, pueden ser empleadas para el problema planteado al inicio, relativo a la esfera y al plano, que son entonces tomados (considerados) como elementos. En este caso, se puede dar al resultado una forma particularmente intuitiva, porque el ángulo que forman dos planos, en el sentido de la determinación métrica basada sobre la esfera, es igual al ángulo que forman, en el sentido ordinario, las circunferencias de intersección en la esfera.

Obtenemos pues sobre la esfera, y en consecuencia sobre el plano, un grupo de transformaciones circulares que tienen la propiedad de *transformar círculos tangentes (formando un ángulo nulo) y círculos que cortan otro bajo un mismo ángulo, respectivamente, en círculos que satisfacen las mismas condiciones*. A este grupo de transformaciones pertenecen las transformaciones lineales sobre la esfera y las transformaciones por radios vectores recíprocos en el plano(24).

La Geometría del círculo que puede fundarse sobre este grupo es la análoga de la *Géométrie de la Sphere* propuesta por Lie para el espacio, y que parece de una importancia excepcional en las investigaciones sobre la curvatura de las esferas. Comprende la Geometría de los radios vectores recíprocos, en el mismo sentido en que ésta a su vez comprende a la Geometría elemental.

Las transformaciones circulares (esféricas) que acabamos de obtener tienen, en particular, la propiedad de transformar circunferencias (esferas) tangentes en otras que también lo son. Considerando todas las curvas (superficies) como envolventes de circuferencias (esferas), se ve que dos curvas (superficies) tangentes serán transformadas siempre en curvas (superficies) igualmente tangentes. Las transformaciones en cuestión pertenecen pues a la categoría, que estudiaremos más tarde en general, de las *transformaciones de contacto*, es decir transformaciones tales que el contacto de las figuras sea una propiedad invariante.
Las transformaciones circulares mencionadas en primer lugar en este parágrafo, al lado de las cuales se pueden colocar transformaciones esféricas análogas, no son transformaciones de contacto.

Los dos tipos de extensiones de las que no nos hemos ocupado más que en el caso de la Geometría de los radios vectores recíprocos, se pueden también hacer de forma análoga para la Geometría del espacio reglado, y, en general, para el estudio proyectivo de una multiplicidad caracterizada por una ecuación cuadrática; es lo que ya hemos indicado y sobre lo que no es necesario insistir más.

§VIII.- *Enumeración de otros métodos que tienen por base un grupo de transformaciones puntuales.*

La Geometría elemental, la de los radios vectores recíprocos, e incluso la Geometría proyectiva, cuando se hace abstracción de las transformaciones por dualidad que aportan con ellas un cambio del elemento del espacio, no son más que algunos ejemplos particulares entre los numerosos métodos de tratamiento imaginables, en donde se toman por base algunos grupos de transformaciones puntuales. No señalaremos aquí más que los tres métodos siguientes, que, con los que acabamos de nombrar, participan de este carácter. A pesar de que estos métodos están todavía lejos de haberse desarrollado, al mismo grado que la Geometría proyectiva, en disciplinas que les son propias, es fácil, no obstante, reconocer que ocupan un lugar en las investigaciones modernas([25]).

1.- *El grupo de las transformaciones racionales.*- Respecto a las transformaciones racionales, hay que distinguir cuidadosamente si son racionales para todos los puntos del campo en el cual se opera, como el espacio, el plano, etc, o bien si lo son solamente para los puntos de un conjunto que pertenezca al campo, como una superficie, una curva. Sólo son aplicables las primeras si se trata de construir, en el sentido aquí entendido, una Geometría del espacio, del plano; las - últimas, desde el punto de vista en que nos hemos colocado, no adquieren importancia más que si se trata de estudiar la Geometría sobre una superficie, o una curva dadas. La misma distinción se aplica para el *análisis situs* del que pronto nos vamos a ocupar.

Cualquiera que sea el caso, las investigaciones - realizadas acá y allá hasta hoy se refieren esencialmente a las transformaciones del segundo tipo. Como - en ellos no se propone el estudio de la Geometría sobre la superficie, ni sobra la curva, sino que más - bién se trata de encontrar (criterios) para que dos superficies, dos curvas, puedan transformarse una en la otra, estas investigaciones escapan al dominio de las que hemos considerado aquí(26). El esquema general expuesto en este trabajo ciertamente no abarca la totalidad de las investigaciones matemáticas: aquí solamente se encuentran reunidas ciertas vías bajo un mismo - punto de vista.

Al respecto de una Geometría de las transformaciones racionales, que se utilice cuando se tome como base las transformaciones del primer tipo, no existen -- hasta hoy más que los principios. En el campo de primer grado, sobre la recta, estas transformaciones racionales son idénticas a las transformaciones lineales, y no dan en consecuencia nada nuevo. En el plano se -

conocen, es verdad, todas las transformaciones racionales (transformaciones de Cremona); se sabe que son consecuencia de la composición de transformaciones cuadráticas. Se conocen también caracteres invariantes de las curvas planas, sin género, la existencia de los módulos; pero estas consideraciones no se han aún realmente desarrollado en una Geometría del plano en el sentido que lo entendemos aquí. Para el espacio, la teoría apenas nace. No se conocen hasta hoy más que un pequeño número de transformaciones racionales, y se las utiliza para referir, por representación, superficies desconocidas a superficies conocidas.

2.- *El Análisis Situs*.- En lo que se llama el *análisis situs* se estudia la invariancia, frente a transformaciones, que resultan de la composición de transformaciones infinitamente pequeñas. Como ya lo hemos dicho, es aún aquí necesario distinguir si se debe considerar el campo total, por ejemplo el espacio, sometido a la transformación, o bien si solamente un conjunto que se separa (del campo total), es decir una superficie. Son, las transformaciones del primer tipo que podrían tomarse como fundamento de una Geometría del espacio. Su grupo se constituiría de forma completamente diferente a como lo están los considerados hasta aquí. Como comprende todas las transformaciones puntuales, infinitamente pequeñas y supuestas reales, (el grupo considerado) se limita por sí mismo, por su origen, a los elementos reales del espacio, y corresponde al dominio de la función de definición arbitraria. Se puede muy también extender este grupo de transformaciones añadiéndolo a las transformaciones homográficas reales, que también modifican los elementos al infinito.

3.- *El grupo de todas las transformaciones puntuales*.- Si relativamente a este grupo, ninguna superficie posee propiedades individuales, ya que cada una de ellas puede transformarse en cualquier otrr por (aplicación de) las transformaciones del grupo, existen no obstante todo, elementos de orden más elevado en cuyo estudio puede ventajosamente emplearse el grupo. De acuerdo a la manera de entender la Geometría, que constituye la base de este trabajo, poco importa que estos elementos hayan sido considerados hasta hoy, no tanto como elementos geométricos, si no sobretodo como elementos analíticos que, fortuitamente, encuentran una aplicación geométrica, y que al estudiarlos se hayan empleado métodos (precisamente como transformaciones puntuales arbitrarias) que solamente en nuestro días se conciben apenas como transformaciones geométricas. A estos elementos analíticos pertenecen, en primer lugar, las expresiones diferenciales homogéneas y después las ecuaciones en derivadas parciales. Parece, no obstante, como lo mostrará el parágrafo siguiente, que, para el estudio general de estas últimas, sea aún preferible emplear el grupo de todas las transformaciones de contacto.

La proposición fundamental de la Geometría, que tiene por base el grupo de todas las transformaciones puntuales, consiste en que *tal transformación es siempre, para una parte infinitamente pequeña del espacio, equivalente a una transformación lineal.* Los desarrollos de la Geometría proyectiva son pues aplicables a lo infintamente pequeño, cualquiera que, por otra parte, pueda ser el grupo tomado como base de tratamiento de las multiplicidades, y *en esto tiene un carácter admirable el método proyectivo.*

Ya fué tratada anteriormente la relación que existe entre los modos de tratamiento que reposan sobre grupos que se contienen unos a otros, pero daremos aquí todavia un ejemplo de la teoría general del parágrafo II. Podemos preguntarnos cómo hay que concebir, al punto de vista del "conjunto de las transformaciones puntuales", las propiedades proyectivas, y queremos aquí hacer abstracción de las transformaciones por dualidad, que forman propiamente parte del grupo de la Geometría proyectiva. El problema no difiere de este otro: ¿bajo que condición el grupo de transformaciones lineales se separa del conjunto de las transformaciones puntuales?. Lo que caracteriza a las primeras es el hecho de que a todo plano corresponde un plano. Son las transformaciones que no cambian el conjunto de planos, o, lo que es una consecuencia de esto, el conjunto de rectas. *De la Geometría basada sobre las transformaciones puntuales se deduce, por adjunción* *del conjunto de planos, la Geometría proyectiva, así como de la Geometría proyectiva, por adjunción del círculo imaginario al infinito, se deduce la Geometría elemental.* En particular, debemos concebir desde el punto de vista de las transformaciones puntuales, la cualidad de una superficie consistente en ser algebraica y de un cierto orden, como una relación invariante frente al conjunto de los planos. Esto se manifiesta enteramente cuando, con *Grassmann*, se une (o se adjunta) la generación de los elementos algebraicos a su contrucción por medio de la regla.

§ IX.- *El grupo de las Transformaciones de contacto.*

Hace ya largo tiempo que se han considerado, en casos particulares, transformaciones de contacto; Jacokí incluso ha hecho uso, en sus investigaciones analíticas, de la transformación de contacto más general. Sin embargo, éstas no han sido colocadas dentro del rango de las concepciones geométricas corrientes más que por obra de recientes trabajos de Lie(27). No es pues de ninguna manera inútil exponer aquí claramente lo que es una transformación de contacto, limitándonos, como siempre, al espacio puntual de tres dimensiones.

Por transformaciones de contacto hay que entender, desde el punto de vista analítico, toda transformación en donde los valores de las variables x,y,z

en donde los valores de las variables x, y, z y las derivadas parciales $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy}$ q, se expresan en función de cantidades análogas x', y', z', p', q'. Es evidente que, en general, superficies que se tocan son así transformadas en superficies que se tocan, lo que justifica el nombre de *transformaciones de contacto*. Si se parte del punto como elemento del espacio, las transformaciones de contacto se dividen en tres clases: aquéllas que, a la triple infinidad de puntos, hacen corresponder nuevos puntos (son las transformaciones puntuales que acabamos de considerar), aquéllas que las transforman curvas, y en fin, aquéllas que las transforman en superficies. No hay que considerar esta división como esencial, ya que, al hacer uso de otros elementos del espacio en número triplemente infinito, como los planos, se llega también a una división en tres grupos; pero que no coincide con la división que se obtiene partiendo de puntos.

Si se aplican a un punto todas las transformaciones de contacto, se obtiene la totalidad de los puntos, de las curvas y de las superficies. Es pues necesaria la totalidad de los puntos, de las curvas y de las superficies, para formar un cuerpo de nuestro grupo. Se puede concluir en una regla general, que diga que, en el sentido de las transformaciones de contacto, es erróneo tratar un problema (como, por ejemplo, la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales que vamos inmediatamente a estudiar) empleando coordenadas de punto o de plano, ya que, justamente, entonces los elementos del espacio escogidos por base no forman un cuerpo.

Pero, si se quieren conservar los métodos habituales, la introducción, como elementos del espacio, de todos los individuos comprendidos en el cuerpo en cuestión, no es practicable ya que su número es un número infinito de infinitas veces. De aquí se desprende la necesidad de introducir como *elemento del espacio*, en estas consideraciones, no el punto, ni la curva, ni la superficie, sino el *elemento de superficie*, es decir el sistema de valores x,y,z,p,q. Por medio de una transformación de contacto cualquiera, cada elemento de la superficie se transforma en otro; el quíntuple infinito de elementos de superficie forma pues un cuerpo.

Desde este punto de vista, es necesario concebir el punto, la curva y la superficie, simultáneamente, como agregados de elementos de superficie, y como agregados de una doble infinidad de estos elementos. La superficie es, en efecto, envuelta por ∞^2 elementos, un número igual son tangentes a una curva, y es también éste, el número de los que pasan por un punto. Pero estos agregados de elementos, doblemente infinitos, tienen todavía una propiedad característica común. Si, para dos elementos de superficie consecutivos x,y,z,p,q y $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $p+dp$, $q+dq$, se tiene

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

los llamaremos asociados en posición. Entonces el punto, la curva, la superficie son *conjuntos, doblemente infinitos, de elementos cada uno estando asociado con aquéllos, en número simplemente infinito, que le son vecinos.* El punto, la curva, la superficie, son así caracterizados de una misma manera, y es igualmente así que deben ser representados analíticamente si se quiere tomar por base al grupo de las transformaciones de contacto.

La asociación en posición de dos elementos consecutivos es una relación invariante respecto a toda transformación de contacto. Pero, recíprocamente, se pueden también definir las transformaciones de contacto *como las sustituciones de cinco variables* x, y, z, p, q, *tales que la relación* $dz - pdx - qdy = 0$ *se transforme en sí misma.* En estas investigaciones, el espacio debe ser considerado como una multiplicidad de cinco dimensiones, y se debe estudiar esta multiplicidad tomando como grupo fundamental el conjunto de las transformaciones de las variables que dejan inalterada una relación diferencial determinada.

Los conjuntos representados por una o varias ecuaciones (establecidas) entre las variables, es decir, *las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden y sus sitemas*, se presentan sobre todo como sujetos de estudio. Es un problema capital saber como, de conjun tos de elementos que satisfacen ecuaciones dadas, se - pueden deducir sucesiones simplemente y doblemente infinitos de elementos, tales que cada uno de sus elementos esté asociado en posición con el vecino. A un problema análogo se reduce, por ejemplo, el problema de - la resolución de una ecuación en derivadas parciales - de primer orden. Se puede formularlo así: deducir de la cuádruple infinidad de elementos, que satisfacen a - la ecuación, todos los conjuntos doblemente infinitos de la natruraleza indicada. En particular, el problema de la resolución completa toma, desde ese momento, esta forma precisa: distribuir la cuádruple infinidad de elementos que satisfacen a la ecuación en una doble infinidad de tales elementos.

No podemos tener aquí la intención de empujar más lejos estas consideraciones sobre las ecuaciones en derivadas parciales; a este respecto envío a los trabajos de Lie, que hemos citado. Señalemos solamente aún que al punto de vista de las transformaciones de contacto, una ecuación en derivadas parciales de primer orden no tiene ningún invariante, que cada una de ellas puede transformarse en otra, y que en consecuencia, en particular, las ecuaciones lineales ya no se - distinguen más de los otros. No es más que cuando se llega al punto de vista de las transformaciones puntuales que se presentan distinciones.

Los grupos de transformaciones de contacto, --

de transformaciones puntuales, y, en fin, de transformaciones proyectivas, pueden caracterizarse de una manera común que aquí no puedo pasar bajo silencio(28).

Hemos definido ya las transformaciones de contacto como las que conservan la asociación en posición de dos elementos consecutivos. Las transformaciones puntuales tienen, al contrario, la propiedad característica de transformar elementos de recta consecutivos y asociados en posición, en otros de la misma naturaleza. En fin, las transformaciones homográficas y por dualidad conservan la asociación en posición de dos elementos conexos. Por elemento conexo entiendo el conjunto de un elemento de superficie y un elemento de recta contenido en él; elementos conexos consecutivos se llaman asociados en posición cuando no solamente el punto, sino incluso el elemento de recta de uno está contenido en el elemento de superficie del otro. La denominación (por otra parte, provisional) de *elemento conexo* se refiere a los nuevos seres introducidos en Geometría por *Clebsch*(29), que se definen por medio de una ecuación conteniendo, a la vez, coordenadas de punto, de plano y de recta, y cuyo análogo en el plano ha recibido de *Clebsch* el nombre de conexo.

§X.- *Sobre las multiplicidades con un número arbitrario de dimensiones.*

Ya hemos señalado varias veces que al referirnos, en lo que hasta aquí hemos dicho, a las nociones del espacio, no hacemos más que consentir al deseo de facilitar el desarrollo de las nociones abstractas apoyándolas sobre ejemplos claros. En el fondo, estas consideraciones son independientes de la representación sensible, y pertenecen al dominio general de estudios matemáticos que se llaman la *Théorie des multiplicités* de varias dimensiones, o, brevemente (según Grassmann), la *théorie de l'étendu* (*Ausdehnungslehre*). La manera según la cual hay que proceder para referir, lo que hemos dicho del espacio, a la pura noción de multiplicidad, se concibe a partir de ella misma. Señalemos solamente, una vez más, que, en el estudio abstracto, frente a la Geometría, tenemos la ventaja de poder escoger enteramente el grupo de transformaciones a tomar como base, en tanto que en Geometría un grupo completamente determinado, el grupo principal, se daba *a priori*.

No abordaremos aquí, y aun esto muy ligeramente, más que los tres métodos de tratamiento siguientes:

I. *Método de tratamiento proyectivo o Algebra moderna (Teoría de las invariantes)*.- Su grupo se compone del conjunto de las transformaciones lineales y por dualidad de las variables empleadas para representar el elemento de la multiplicidad: es la generalización de la Geometría proyectiva. Hemos ya señalado cómo este método encuentra empleo en la discusión de lo infinitamente pequeño de una multiplicidad que tiene una dimensión de más. Comprende los dos métodos de tratamiento que debemos aún indicar, en el sentido de que su grupo comprende los grupos que deben tomarse por bases en estos dos métodos.

II. *La multiplicidad de curvatura constante*.- En *Riemann* la noción de tal multiplicidad resulta de la noción más general de una multiplicidad en la cual está dada una expresión diferencial de las variables. Allí el grupo se compone del conjunto de las transformaciones de las variables que dejan inalterada la expresión dada. Se llega de otra manera a la noción de una multiplicidad de curvatura constante cuando se establece, en el sentido proyectivo, una determinación métrica basada en una ecuación cudrática dada entre las variables. Este método, coincidiendo en esto con el de Riemann, permite la generalización consistente en que las variables pueden suponerse complejas; se puede entonces limitar la variabilidad del campo real. Es a esta rama que pertenece la extensa sucesión de investigaciones que hemos abordado en los parágrafos V, VI, VII.

III. *La multiplicidad plana.*- Riemann designa por multiplicidad plana la multiplicidad de curvatura constante nula. Su teoría es la generalización inmediata de la Geometría elemental. Su grupo puede, como el grupo principal en Geometría, ser separado del grupo proyectivo manteniendo una figura representada por dos ecuaciones, una lineal y otra cuadrática. Si uno quiere adaptarse a la forma de acuerdo a la cual la teoría se presenta habitualmente, debe distinguirse entre lo real y lo imaginario. La Geometría elemental misma, figura en el primer rango de esta teoría, y después vienen las generalizaciones recientemente desarrolladas por la teoría ordinaria de la curvatura, etc.

Observaciones finales

Para terminar, haremos dos observacions que guardan relación íntima con lo que hemos dicho hasta aquí: la primera concierne el algoritmo a emplear para la representación de las nociones desarrolladas hasta aquí; en la segunda indicaremos algunos problemas que parece importante y fecundo tratar de acuerdo a los puntos de vista que hemos dado.

Se ha frecuentemente hecho a la Geometría analítica el reproche de poner delante (de todo), por la introducción del sistema de coordenadas, elementos arbitrarios, y este reproche alcanza igualmente a toda manera de tratar multiplicidades en las cuales el elemento se caracteriza por los valores de las variables. Si este reproche no estuviera más que justificado, debido a la manera defectuosa según la cual se manejaba, sobre todo en el pasado, el método de las coordenadas, se desvanecería en cuanto se emplease racionalmente el método. Las expresiones analíticas que pueden presentarse en el estudio de una multiplicidad en el sentido de un grupo deben ser, en razón de su significado, independientes del sistema de coordenadas, en tanto que este sea arbitrario; se trata simplemente de también poner en evidencia esta independencia *en las fórmulas*. El Algebra moderna muestra que esto es posible y cómo se hace; la noción de invariante de la que aquí se trata se pone de relieve de la manera más evidente. Tiene una ley de formación general y perfecta de las expresiones invariantes, y se restinge a no operar más que con ella. Lo que es necesario es que proporcione también el tratamiento analítico cuando se toman por base otros grupos que no son el grupo proyectivo(30). Es bien necesario, en efecto, que el algoritmo se adapte a lo que se desea, que se le emplee como una expresión clara y precisa de la concepción, o (bien) que se le pueda utilizar para penetrar en campos aún no explorados.

Se es así conducido a plantear los problemas, respecto de los cuales queríamos aún hablar, por medio de la comparación entre las ideas que hemos expuesto y lo que se llama *la théorie des équations de Galois*.

En la teoría de *Galois* como aquí, todo el interés reside en los grupos de transformaciones. Pero los objetos a los que se refieren las transformaciones son bien diferentes: allá se trata de un número limitado de elementos distintos, aquí de un número indefinido de elementos de un conjunto contínuo; pero se puede, por la identidad de la noción de grupo, llevar más lejos la comparación([31]), y lo indicaremos aquí tanto más voluntariamente cuanto que así se encuentra caracterizado el lugar, que es preciso atribuir a ciertas investigaciones comenzadas, por Lie y yo([32]), en el sentido de los puntos de vista desarrollados aquí.

En la teoría de Galois, tal y como ésta es expuesta, por ejemplo, en el *Traité d' Algebre supérieure* de *Serret*, o en el *traité des substitutions* de C. *Jordan*, lo que propiamente cosntituye el objeto de las investigaciones, es la teoría misma de grupos o de sustituciones; la teoría de las ecuaciones se desprende como aplicación. Por analogía, querríamos una *théorie des transformations*, una teoría de los grupos que puedan ser engendrados por transformaciones de una naturaleza dada. Las nociones de conmutatividad, de similitud, etc, encontrarían empleo en la teoría de las sustituciones. El tratamiento de una multiplicidad obtenido de la consideración de un grupo fundamental de trans--

formaciones aparece como una aplicación de la teoría de las transformaciones.

En la teoría de las ecuaciones son ante todo las funciones simétricas de los coeficientes las que ofrecen interés, e inmediatamente después las expresiones que permanecen inalteradas, si no frente a todas las permutaciones de las raíces, al menos sí para un gran número de ellas. En el tratamiento de una multiplicidad con un grupo tomado como fundamental, querríamos ante todo, por analogía, determinar los cuerpos (§VI), las figuras que permanecen inalteradas ante todas las transformaciones del grupo; pero hay figuras que no admiten todas las transformaciones del grupo, sino únicamente algunas de ellas, y estas figuras, en el sentido del tratamietno basado sobre el grupo, son particularmente interesantes, puesto que gozan de propiedades admirables. Es así, pro ejemplo, que en el sentido de la Geometría ordinaria, se distingue entre cuerpos simétricos y regulares, entre superficies de revolución y helicoidales. Si uno se coloca en el punto de vista de la Geometría proyectiva, y en particular se pide que las transformaciones que llevan a las figuras a (coincidir con) sí mismas sean permutables, se llega a las figuras consideradas por Lie y yo en la Memoria citada, y al problema que ahí se planta en el §6. En los §1,3 se encuentra la determinación de todos los grupos encerrando una infinidad de transformaciones lineales, permutables en el plano; en una parte de la teoría general de las transformaciones sobre las -- cuales acabamos de hablar ([33]).

Apéndice.- Notas al pie de página, de Klein, en su texto.

([1]) Después de la aparición, hace aproximadamente un - año, en los *Annali di Matématica*, de una traducción -- italiana de mi programa de Erlangen, he aceptado tanto más voluntariamente la proposición de M. Padé de publi car también una traducción francesa, cuanto que, actual mente, la teoría de los grupos parece, más que nunca, ocupar la atención en Francia, y que, consecuentemente, el contenido de mi programa motivará allí quizás algún interés. En la traducción italiana, había aportado al texto un pequeño número de modificaciones y añadido al gunas notas rectificativas; han pasado aquí sin modifi cación, y han sido igualmente puestas en evidencia en el texto por medio de paréntesis [ ]. De trabajos pos teriores, no he citado ninguno, no importa cuán cerca hagan referencia al sujeto; sucede que un reporte sis- temático de los trabajos aparecidos después de 1872 es una tarea a largo plazo, que no me parece realizable - sin una puesta a punto completa y detallada de las --- ideas emitidas en mi programa; puedo esperar cumplirlo en un futuro más lejano.

(2) Esta concisión de la forma es un defecto de nuestra exposición, y hay lugar para temer que vuelva la inteligencia sensible más penosa. Yo no hubiera podido de todas formas poner ahí remedio más que con una exposición mucho más extensa en donde habrían sido desarrolladas en detalle las teorías particulares que no son aquí más que tocadas.

(3) Entendemos que las transformaciones son siempre aplicadas a la totalidad de los elementos del espacio, y hablamos en consecuencia pura y simplemente de transformaciones del espacio. Las transformaciones, como por ejemplo, las de dualidad, pueden introducir, en lugar de puntos, elementos nuevos.

(4) [Esta definición amerita aún el complemento que sigue. Se supone implícitamente, en los grupos del texto, que toda operación que ahí figure va acompañada de la operación inversa; pero, en el caso en que hay una infinidad de operaciones, esto no es de ninguna manera consecuencia de la noción misma de grupo; se trata pues de una hipótesis que debe expresamente añadirse a la definición de grupo, tal como está dada en el texto].

(5) La noción y la denominación se toman prestadas de la teoría de las sustituciones en donde se trata, no de transformaciones de un campo continuo, sino de permutaciones de un número finito de magnitudes discretas.

(6) Camille Jordan ha determinado todos los grupos contenidos en el grupo de los desplazamientos: Sur les --

groupes des movvementes (*Annali di matemática*, T. II)

([7]) Por otra parte no es en manera alguna necesario, a pesar de que sea así para todos los grupos que hemos -- mencionado, que las transformaciones de un grupo se -- presenten ahí en sucesiones continuas. Por ejemplo, - los desplazamientos en número limitado que llevan a un cuerpo regular a recubrirse forman un grupo; lo mismo sucede, en número ilimitado, con aquéllas que llevan - una sinusoide a superponerse.

([8]) Por sentido, hay que entender aquí la propiedad de orden según la cual una figura se distingue de su simé trica (imagen reflejada). Es así que, por el sentido, una hélice destrógiva se distingue de una hélice - levógira.

([9]) Por definición, esas transformaciones forman necesariamente un grupo.

([10]) Se engendra por ejemplo tal ser cuando se aplican las transformaciones del grupo principal a un elemento inicial arbitrario que no reproduce ninguna de las --- transformaciones del grupo dado.

([11]) Esta concepción debe ser considerada como una de - las más bellas obras [de la escuela francesa]; sólo -- ella da un sentido preciso a la distinción, que gusta colocarse al principio de la Geometría proyectiva, entre las propiedades métricas y las propiedades descriptivas.

(12) No es más que en los *Beiträge zur Geometrie de --- Lage* que Von Staudt toma por base el grupo más extendido en donde también figuran transformaciones imaginarias.

(13) Si se quiere, este principio es aplicado aquí en - una forma un poco más general.

(14) En lugar de una cónica del plano, se puede también tomar una cúbica izquierda y, en general, proceder en forma parecida para el caso de *n* dimensiones.

(15) Para otros ejemplos y también, en particular, para la extensión a un mayor número de dimensiones, *ver* la exposición hecha en una de mis Memorias: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometria* (*Math. Annalen, t. V, 2*); ver también los trabajos de Lie que acabamos inmediatamente de citar.

(16) Este nombre ha sido escogido por Dedekind quién, - en la Teoría de los números, da a un conjunto de números el nombre de *cuerpo*, cuando resulta (cuando se obtiene), por medio de operaciones dadas, de elementos - dados (última edicción de las *Leçons* de Dedekind).

(17) [En el texto, se señala suficientemente que el grupo propuesto puede contener los que se llaman sub-grupos *excepcionales*. Si una figura geométrica permanece inalterada por las operaciones de un sub-grupo excepcional, sucede lo mismo con todas aquéllas que se deducen a partir de las operaciones del grupo total, y en

concecuencia, de todos los elementos del cuerpo que resulte. Ahora, un cuerpo formado así es totalmente impropio para la representación de las operaciones del grupo.

No se deben pues tomar en cuenta en el texto más que cuerpos que resultan de elementos del espacio que no se conservan inalterados bajo la aplicación de ningún sub-grupo excepcional del grupo propuesto] .

(18) La geometría de los radios vectores recíprocos sobre la recta equivale al estudio proyectivo de la recta, puesto que las transformaciones son las mismas en un caso y en otro. En la Geometría de los radios Vectores recíprocos, se puede pues hablar también de *la relación anarmónica* de cuatro puntos de una recta, y después de una circunferencia.

(19) *Ver* el trabajo ya citado: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie (Math. Ann, T. V)*.

(20) [La manera de expresarse del texto no es exacta. Todas las transformaciones lineales

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\text{donde } z' = x' + \lambda y', \ z = x + \lambda y)$$

corresponden a las solas transformaciones del grupo de radios vectores recíprocos que no invierten los ángulos (las cuales no permutan entre sí los puntos cíclicos del plano). Para abarcar en entero al grupo de los radios vectores recíprocos, es necesario, a las transformaciones precedentes, añadir aún éstas (que no son menos importantes): $z' = \alpha\bar{z} + \beta$, donde se tiene toda vía que $z' = x' + iy'$, $\gamma\bar{z} + \delta$ pero donde $\bar{z} = x - iy$].

([21]) *Prtielle Differentialgleichungen und Complexe ---* (*Math. Annalen, T. V*).

([22]) Grassmann en su *Ausdehnungslehre* considera fortuitamente estas transformaciones (edicción de *1862*).

([23]) Si se proyecta estereográficamente la multiplicidad, se obtiene este conocido teorema: *Fuera de las transformaciones del grupo de los radios vectores recíprocos, no existe, en los campos de varias dimensiones* (*y ya en el espacio*), *ninguna transformación puntual conforme. En el plano, al contrario, existen uan infinidad. Ver* también los trabajos citados de Lie.

([24]) [Las fórmulas siguientes harán mucho más claras las consideraciones del texto. Sea

$$x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 + x_4^2 = 0$$

la ecuación, en coordenadas tetraédricas ordinarias, de la esfera que es reportada estereográficamtne al plano. Las x que satisfacen a esta ecuación de condición adquieren entonces para nosotros el significado de coordenadas tetracilíndricas en el plano, y

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

se vuelve la ecuación general del círculo en el plano. Si se calcula el radio de este círculo, se encuentra la raíz cuadrada

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

que representaremos por $i u_5$. Podemos ahora considerar los círculos como elementos del plano. Entonces el grupo de radios vectores recíprocos se presenta como el conjunto de las transformaciones lineales homogéneas de u_1, u_2, u_3, u_4, tales que

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

se reproduce, abstración hecha de cierto factor. El grupo más extenso que corresponde a la Geometría de la esfera de Lie, se compone de las transformaciones lineales de las cinco variables u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 que, abstracción hecha de un factor, reproducen a

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2.]$$

([26]) [En tanto que, en los ejemplos precedentes, se trataba de grupos a un número limitado de parámetros, llegamos ahora a la consideración de los grupos llamados *infinitos*].

([27]) [Se relacionan, por otra parte, y de la manera más feliz con nuestras consideraciones, lo que yo no conocía aún en 1872. Dada una forma algebraica arbitraria (curva, superficie, etc), reportémosla, introduciéndo como coordenadas las relaciones

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p = du_1 : du_2 : \ldots : du_p,$$

donde u_1, u_2,---,u_p son las integrales abelianas de primera especie asignada a la curva, a un espacio de or--

den superior. No hay más que tomar por base de las consideraciones relativas a este espacio el grupo de transformaciones lineales homogéneas de las φ. *Ver* diversos trabajos de los Srs. Brill, Noether y Weber, así como mi reciente Memoria: *Zur Theorie dor Abel'schen Functionen*, en el tomo XXXVI de los *Math. Annalen.*]

(27) *Ver* en particular el trabajo citado: *Ueber partielle Differentialgleichungen und complexe* (*Math. Annalen*, *T. V*). Los desarrollos dados en el texto, respectivos a las ecuaciones en derivadas parciales, se deben esencialmente a Comunicaciones orales de Lie. *Ver* su Nota: *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen* (*Göttinger Nachrichten*, octubre *1872*).

(28) Debo estas definiciones a una observación de Lie.

(29) *Gött. Abhandlungen, T. XVII; 1872: Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie*, y también - - *Gött. Nachrichten, No. 22; 1872: Ueber ein Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene.*

(30) Por ejemplo, para el grupo de las rotaciones del espacio de tres dimensiones alrededor de un punto fijo, tal algoritmo está dado por los cuaterniones.

(31) Recordaré aquí que Grassmann, ya en la introducción de la primera edición de su *Ausdehnungslehre* (*1844*), estableció un paralelo entre el Análisis combinatorio y la *Théorie de l'étendue* (*Ausdehnungslehre*.

(32) *Ver* nuestra Memoria: *Ueber diejenigon ebenen cur--*

ven, welche durch ein geschossenes system von einfach unendlich rielen Vertanschbaren linearen Transformatio nen in sich Übergehen (*Math. Annalen, T. IV*)

([33]) Debo rehusarme a mostrar cuán fructuosa es, para la teoría de las ecuaciones diferenciales, la consideración de las transformaciones infinitamente pequeñas. En el (parágrafo) § 7 del trabajo citado, Lie y yo hemos mostrado que: ecuaciones diferenciales ordinarias que admiten las mismas transformacione infinitamente pequeñas presentan las mismas dificultades de integración. Lie, en diferentes lugares y, en particular, en la Memoria citada más arriba (*Math. Annalen, T. V*), ha hecho ver, con varios ejemplos, como estas consideraciones pueden ser aplicadas a las ecuaciones en derivadas parciales (*Ver* también, en particular, comunicaciones a la Academia de Christiania, mayo 1872).

[Puedo, hoy, indicar el hecho de que los dos problemas mencionados en el texto han precisamente continuado orientando una gran parte de los trabajos ulteriores de Lie y de mí mismo. En lo que concierne a Lie, debemos, sobre todo citar su *Théorie des groupes continus de transformations*, cuya exposición sistemática constituye hasta hoy el objeto de dos volúmenes (*Leipzig*, T. I, 1888; T. II, 1890). Entre mis investigaciones posteriores al presente escrito puedo indicar las que se refieren a los cuerpos regulares, a las funciones modulares elípticas, y, en general, a las funcio nes uniformes que admiten transformaciones lineales. Ya, en 1884, expuse las primeras en una obra especial: *Vorlesungen der dos Ikosaeder und die Auflösung der -- Gleichungen voni fünften Grade (Leipzig)*; poco después ha aparecido el primer volumen de una exposición (en - el cual esl Sr. Fricke me ha prestado una ayuda esen-- cial) de la *Théorie des fonctions modulaires ellipti-- ques* (Leipzig, 1890)].

NOTAS DE F. KLEIN AL FINAL DEL TEXTO:

NOTAS

I. Sobre la oposición, en la Geometría moderna, de los métodos sintético y analítico.

Actualmente, ya no se puede más considerar esen- cial la diferencia entre las Geometrías sintética y -- analítica modernas, puesto que las materias estudiadas y el modo de discusión ahí empleado se han vuelto poco a poco similares. También hemos escogido la palabra - *Geometría proyectiva*, para designar tanto la una como la otra en el texto. Si el método sintético procede - sobre todo por la intuición del espacio, dando así a - sus primeras teorías elementales un atractivo particu- lar, el campo de tal intuición no está por esto cerra- do al método analítico, y se pueden concebir las fórmu- las de la Geometría analítica como una expresión clara

y precisa de relaciones geométricas. Por otro lado, no hay que despreciar, para las investigaciones ulteriores, el provecho que procura, adelantándose de alguna manera al pensamiento, un algoritmo bien apropiado.
De todas formas no hay que alejarse de la prescripción que nos dice que una cuestión matemática no debe ser considerada como completamente agotada en tanto no se haya vuelto aún intuitivamente evidente; descubrir por medio del Análisis, en dar un paso muy importante, pero no es más que dar el primer paso.

II. Escisión de la Geometría moderna en disciplinas.

Si, por ejemplo, se observa cómo el físico matemático rechaza generalmente la ventaja que obtendría, en muchos casos, a partir de una intuición proyectiva incluso poco desarrollada; y se observa cómo, por otro lado, el que cultiva la geometría proyectiva aborda poco la rica mina de verdades matemáticas de donde ha nacido la teoría de la curvatura de las superficies, se es forzado a considerar el estado actual del estudio de la Geometría como muy imperfecto, y, según toda apariencia, como transitorio.

III. Sobre la importancia de la intuición del espacio.

Cuando, en el texto, hablamos de la intuición del espacio como de algo accesorio, no lo hacemos en razón de la naturaleza puramente matemática de las consideraciones a formular: para éstas (la intuición) no tiene más que el valor de un método que vuelve las cosas sen sibles, método que, por otra parte, desde el punto de vista pedagógico, debe ser estimado de gran valor. Es así que un modelo geométrico es, desde este punto de - vista, de los más interesantes y de los más instructivos.

Pero es totalmente diferente si se trata de la importancia de la intuición del espacio en general. Yo la considero como subsistiendo por sí misma. Existe - una Geometría propiamente dicha que no puede ser, como las investigaciones que nos han ocupado, más que una - forma sensible de consideraciones abstractas. Ahí hay que concebir las figuras del espacio en la plena verdad de su forma y (esto que constituye el lado matemático) percibir sus relaciones como consecuencias evidentes - de los postulados de la intuición del espacio. Para - esta Geometría, un modelo, que sea ejecutado y examinado o solamente figurado con fuerza, no es un medio para alcanzar un fin, sino la cosa en sí.

Cuando colocamos así, con una existencia propia, la Geometría al lado de las matemáticas puras y sin -- que de ellas dependa, hacemos nada menos que algo nuevo. Es, no obstante todo, deseable poner en evidencia este punto una vez más, puesto que las investigaciones recientes la pierden casi completamente de vista. Es así igualmente, recíprocamente, que los métodos de investigación nuevos han sido raramente aplicados, cuando hubieran podido serlo, al estudio de las relaciones de forma de los seres del espacio, y no obstante, en esta vía, parece que serían particularmente fecundos.

IV. *Sobre las multiplicidades con un número arbitrario de dimensiones.*

Que el espacio considerado como lugar de puntos no tenga más que tres dimensiones, es algo que, desde el punto de vista matemático, no tiene necesidad de ser discutido; pero no se sabría tampoco, desde el mismo punto de vista, impedir a no importa quien afirmar que tiene cuatro o un número arbitrario, si bien nosotros no podemos percibir más que tres. La teoría de las multiplicidades de varias dimensiones, tal como se desprende más y más de las investigaciones matemáticas modernas es, por su naturaleza, completamente independiente de tal afirmación. No obstante, se ha establecido ahí una manera de hablar que, seguramente, emerge de esa idea. En lugar de elementos de un conjunto continuo, se habla de puntos de un espacio superior, etc. En sí misma, esta manera de expresarse tiene mucho de bueno porque, recordando las concepciones geométricas, facilita la (labora) inteligencia. Pero ha tenido la enojosa consecuencia consistente en que, para muchos, las investigaciones sobre las multiplicidades de varias dimensiones son consideradas como no haciendo más que un todo con las ideas que acabamos de recordar sobre la naturaleza del espacio. Nada es menos fundado que esta creencia. Si estas ideas fueran justas, estas investigaciones encontrarían una aplicación geométrica; pero su valor como su objetivo, plenamente independientes de él, se encuentra en su naturaleza puramente matemática.

Otra cosa distinta es la forma indicada por *Plücker* de considerar el verdadero espacio como una multiplicidad con un número arbitrario de dimensiones introduciendo como elemento (ver §V del texto) una figura (curva, superficie, etc) que depende de un número arbitrario de parámetros.

Es en el *Ausdehnungslehre* de *Grassmann (1844)* que se encuentra desarrollada, por primera vez, esta manera de ver, en donde se considera el elemento de una multiplicidad con un número arbitrario de dimensiones como el análogo del punto del espacio. *Grassmann* no se preocupa nulamente de las ideas que hemos recordado sobre la naturaleza del espacio; estas ideas remontan a observaciones hechas de pasada por Gauss, y se han extendido como consecuencia de investigaciones de *Riemann* sobre las multiplicidades de varias dimensiones, investigaciones con las cuales se encuentran mezcladas.

Las dos maneras de ver, tanto la de *Grassmann* como la de *Plücker*, tienen sus ventajas particulares; se emplean ambas, tanto una como otra, con provecho.

- V. Sobre la Llamada Geometría no euclidiana.

Como lo han mostrado recientes investigaciones, -

la Geometría métrica proyectiva, de la cual se trata en el texto, coincide esencialmente con la Geometría métrica que se obtiene cuando se rechaza el postulado de las paralelas y que, bajo el nombre de *Geometría no euclidiana*, es actualmente el objeto de frecuentes debates y discusiones. Si, en lo que precede, no hemos, en general, empleado esta locución, es por una razón que se refiere a las consideraciones de la Nota precedente. Se asocia al nombre de Geometría no euclidiana una multitud de ideas que no tienen nada de matemáticas, aceptadas, por un lado, con tanto mayor entusiasmo cuanto que ellas provocan repulsión de todas las demás ideas con las cuales, en todos los casos, nuestras consideraciones exclusivamente matemáticas no tienen absolutamente ninguna relación. Por medio de las consideraciones que siguen hemos querido aportar alguna aclaración sobre esta distinción.

Las investigaciones en cuestión sobre la teoría de las paralelas y sus desarrollos sucesivos tienen, por dos lados, una importancia matemática precisa:

Muestran ante todo, y se puede considerar la cosa como definitivamente decidida, que el axioma de las paralelas no es una consecuencia matemática de las axiomas generalmente colocados antes que él, sino que es la expresión de un hecho intuitivo esencialmente nuevo dejado intacto por las investigaciones que le preceden. Una discusión parecida podría y debería ser realizada, incluso fuera de la Geometría, respecto a cada axioma; se ganaría ahí en visión sobre las respectivas situaciones de éstos.

En segundo lugar, estas investigaciones nos han dado una noción matemática preciosa, la de la multiplicidad de curvatura constante. Está relacionada, como ya lo hemos señalado y más ampliamente desarrollado en el §X, de la manera más estrecha, con la determinación métrica proyectiva desarrollada independientemente de toda teoría de las paralelas. Si, en sí misma, el estudio de esta determinación métrica ofrece en gran interés matemático y permite numerosas aplicaciones, comprende también, como caso particular la determinación métrica dada en la Geometría y aprende a considerarla desde un punto de vista más elevado.

Absolutamente independiente de estas consideraciones es el problema de saber sobre qué reposa el axioma de las paralelas, si debe ser considerado como dado de una forma absoluta, lo que quieren unos, o como establecido sólo aproximativamente por la experiencia, como pretenden otros. Si hubiera razones de aceptar esta última forma de ver, las investigaciones matemáticas en cuestión nos mostrarían cómo debe entonces ser construida una Geometría más exacta. Pero ésta es evidentemente una cuestión filosófica que atañe a los principios más generales de nuestro entendimiento. No interesa al matemático *como tal*, y él puede desear que sus investigaciones no sean consideradas como dependientes de la respuesta que, de un lado o de otro, pueda ----- dársele.

VI. La Geometría del espacio reglado como estudio de una multiplicidad de curvatura constante.

Unificando la Geometría del espacio reglado con - la determinación métrica proyectiva en una multiplicidad de cinco dimensiones, debemos prestar atención al hecho de que las rectas no nos ofrecen (en el sentido de la determinación métrica) más que los elementos al infinito la multiplicidad. Se vuelve así necesario - examinar cuál es el valor de una determinación métrica proyectiva, por sus elementos al infinito; vamos a desarrollar aquí esta cuestión para aislar las dificultades que se oponen a la concepción de la Geometría del espacio reglado como Geometría métrica. Referimos estos desarrollos al ejemplo intuitivo que ofrece la determinación métrica proyectiva basada sobre una superficie de segundo grado.

Dos puntos tomados arbitrariamente en el espacio tienen, respecto a la superficie, un invariante absoluto: la relación anarmónica que forman con los dos puntos de intersección de la recta que los une y la superficie; pero, si los dos puntos vienen a colocarse sobre la superficie, la relación anarmónica tiende hacia cero independientemente de la posición de los puntos, excepto en el caso en el que los dos puntos vengan a -

colocarse sobre una generatriz, en cuyo caso ésta se vuelve indeterminada; éste es el único caso particular al cual da lugar su posición respectiva si éstos no coinciden; tenemos así este teorema:

La determinación métrica proyectiva que se puede basar en el espacio sobre una superficie de segundo grado no proporciona ninguna determinación métrica para la Geometría sobre esta superficie.

A esto se añade el hecho de que no se puede, por transformaciones lineales de la superficie en sí misma llevar tres puntos arbitrarios a coincidir con otros tres[1].

Para tener sobre la superficie en sí una determinación métrica, es necesario restringir el grupo de las transformaciones, y a eso llega teniendo fijo un punto arbitrario del espacio (o su plano polar). Supongamos ante todo que el punto no esté sobre la superficie. Desde este punto se la proyecta entonces sobre un plano lo que da una cónica como curva de contorno aparente. Sobre esta cónica se basa,en el plano, una determinación métrica proyectiva que se reporta inmediatamente sobre la superficie. Esta es una determinación métrica propiamente dicha, de curvatura constante, y se tiene así este teorema:

Una determinación métrica de curvatura constante se obtiene sobre la superficie desde el momento que se tiene fijo un punto que no está sobre la superficie.

Se encuentra de la misma forma que:

Tomando por punto fijo un punto sobre la superfi *cie en sí, se obtiene sobre ésta una determinación métrica de curvatura nula.*

En lo que concierne a todas estas determinaciones métricas sobre la superficie, las generatrices son líneas de longitud nula. Las expresiones del elemento de arco de la superficie no difieren pues, en las diferentes determinaciones, más que por un factor constante. No hay sobre la superficie un elemento de arco absoluto, pero se puede muy bien hablar del ángulo que forman sobre la superficie dos direcciones.

Ahora todos estos teoremas y todas estas consideraciones pueden ser inmediatamente aplicados por la Geometría del espacio reglado. Para el espacio reglado en sí, no existe *a priori* ninguna determinación métrica propiamente dicha. No se obtiene una más que cuando se tiene fijo un complejo lineal, y entonces tiene una curvatura constante o nula según que el complejo sea general o particular (una recta). A la elección de este complejo está también ligada la existencia de un elemento de arco absoluto. Cualquiera que sea esta elección, la distancia de dos rectas infinitamente vecinas que se cortan es nula, y se puede también hablar del ángulo que forman entre sí dos rectas infinitamente vecinas de una recta dada[2].

VII. Sobre la interpretación de las formas binarias.

Mostraremos aquí qué representación simple se puede obtener, por medio de la interpretación de $x + iy$ so bre la esfera, para los sistemas de formas que se refieren a la forma binaria cúbica y a la forma binaria bicuadrática.

Una forma binaria cúbica f tiene un covariante cúbico Q, un cuadrático Δ y un invariante R[3]. Con f y Q se forma toda una sucesión de covariantes del segundo grado

$$Q^2 + \lambda R f^2,$$

entre los cuales figura igualmente Δ^3. Se puede demostrar[4] que cada covariante de la forma cúbica se descompone en tales sistemas de seis puntos. Pudiendo tomar λ valores complejos, hay una dobe infinidad.

El conjunto de formas así definido puede ser representado sobre la esfera de la forma siguiente[5]: por una transformación lineal conveniente, llevemos los tres puntos representados por f a tres puntos equidistantes sobre un círculo máximo. Este círculo máximo puede tomarse por ecuador; las longitudes de los tres puntos f situados sobre él son $0°$, $120°$, $240°$. Q es entonces representado por los puntos del ecuador cuyas longitudes son $60°$, $180°$, $300°$, Δ lo es por los dos polos. Cada forma $Q^2 + \lambda R f^2$ está representada por seis puntos cuya latitud y longitud están contenidas en la tabla siguiente, donde α y β designan números arbitrarios

α	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$
β	$120° + \beta$	$240° + \beta$	$-\beta$	$120° - \beta$	$240° - \beta$

Es interesante ver, examinando la sucesión de estos sistemas de puntos sobre la esfera, cómo se deducen f y Q contados dobles, y Δ contado triple.

Una forma bicuadrática tiene un covariante H también bicuadrático, un covariante del sexto grado T, y dos invariantes i y j. El conjunto de formas bicuadráticas $iH + \lambda j f$, las que corresponden todas al mismo T, es particularmente señalable; a este conjunto pertenecen los tres factores cuadráticos en los cuales se puede descomponer T, cada uno de ellos habiendo sido contado doblemente.

Tracemos ahora, por el centro de la esfera, tres ejes rectangulares Ox, Oy, Oz. Los seis puntos de intersección con la esfera conforman la forma T.

Designando por x, y, z las coordenadas de un punto cualquiera de la esfera, los cuatro puntos que corresponden a una bicuadrática $iH + \lambda j f$ están dados por la tabla

$$\begin{array}{ccc} x, & y, & z, \\ x, & -y, & -z, \\ -x, & y, & -z, \\ -x, & -y, & z, \end{array}$$

Estos cuatro puntos son siempre los vértices de un tetraedro simétrico cuyos lados opuestos están divi