PROBLEMARIO DE MATEMÁTICAS PARA ESTUDIANTES DEL AREA DE CIENCIAS BIOLÓGICAS Y DE LA SALUD

POR MANUEL FALCONI Y JOAQUIN DELGADO

CONTENIDO

1. INTRODUCCION

LOS AUTORES DEL PRESENTE TRABAJO CREEMOS QUE EL ESTUDIANTE DE CIENCIAS DEL ÁREA DE CBS* DEBE TOMAR CONCIENCIA DE LA UTILIDAD DE LAS MATEMÁTICAS COMO HERRAMIENTA INDISPENSABLE TANTO EN EL ASPECTO TEÓRICO COMO EN EL EXPERIMENTAL E INCLUSIVE COMO MERO LENGUAJE EN SU LABOR INTERDISCIPLINARIA.

EL CONTENIDO DE LOS CURSOS DE MATEMÁTICAS EN CBS ES ABORDADO POR LOS ESTUDIANTES EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR, LA MAYORÍA DE LAS VECES CON GRAVES DEFICIENCIAS. EN EL MEJOR DE LOS CASOS EL ALUMNO CONOCE ESTE MATERIAL, PERO SU HABILIDAD PARA APLICAR ESTOS CONOCIMIENTOS ES CASI NULA. ESTO CREEMOS, SE DEBE A QUE POR LO REGULAR LAS MATEMÁTICAS SE ENCUENTRAN DESLIGADAS DE LOS PROBLEMAS CONCRETOS QUE DAN ORIGEN AL PROBLEMA MATEMÁTICO QUE EN ESE MOMENTO ESTUDIA. ALGUNOS PROFESORES RECONOCEN ESTA DEFICIENCIA E INCLUYEN "APLICACIOCIONES" QUE SON MEROS EJERCICIOS DE SUSTITUCIÓN EN FÓRMULAS Y CÁLCULOS DESARROLLADOS EN CLASE. MUCHOS ALUMNOS CON EL AFAN DE DESHACERSE LO MÁS PRONTO DE ESTOS CURSOS ADOPTAN EL ESQUEMA RÍGIDO DE PENSAR: "PRIMERO EL CONCEPTO MATEMÁTICO, DESPUÉS LAS APLICACIONES".

EN ESTA LINEA DE PENSAMIENTO EL "PROBLEMARIO" QUE AHORA SE PONE EN LAS MANOS DEL LECTOR PRETENDE ENFOCAR UN PUNTO DE VISTA DISTINTO AL MATERIAL EQUIVALENTE A UN PRIMER CURSO TRIMESTRAL DE "MATEMÁTICAS A" DEL ÁREA DE CBS. EL TRABAJO ESTÁ DIVIDIDO EN DOS GRANDES PARTES. LA PRIMERA CONSTA DE

---

*) CIENCIAS BIOLÓGICAS y de la SALUD.

UNA SERIE DE ARTÍCULOS QUE ENFOCAN ALGUNOS ASPECTOS GENERALES DE LA DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS BIOLÓGICOS A PARTIR DE LOS CUALES SURGEN LAS RELACIONES MATEMÁTICAS MÁS SENCILLAS COMO SON LAS DEL TIPO LINEAL, POTENCIAL, EXPONENCIAL, ETC.

EN LA PRIMERA PARTE HEMOS INTRODUCIDO UN RESUMEN BREVE Y MUY GENERAL DE LA MODELAICÓN DE LOS PROCESOS DE CRECIMIENTO EN POBLACIONES E INDIVIDUOS. ESTE ARTÍCULO PRETENDE MOTIVAR EL USO DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA DESCRIBIR COMPORTAMIENTOS CUALITATIVOS EN LA EVOLUCIÓN DEL TAMAÑO DE LA POBLACIÓN. NO HEMOS PROFUNDIZADO MAS EN ELLO DEBIDO A QUE ALGUNAS TÉCNICAS DEL CALCULO DIFERENCIAL SERÍAN AJENAS AL LECTOR EN UNA INTRODUCCIÓN.

EN EL SEGUNDO ARTÍCULO ESTUDIAMOS EL CRECIMIENTO NO EN RELACIÓN AL TIEMPO SINO A LA FORMA. ALLÍ APARECEN FUNCIONES DEL TIPO POTENCIAL $Y=AX^{B}$ EN UN EJEMPLO SENCILLO DE CRECIMIENTO ISOMÉTRICO. CONVIENE QUE EL LECTOR LEA CON CIERTO DETALLE LOS ARTÍCULOS TITULADOS "TASAS DE CRECIMIENTO" Y "AJUSTE DE CURVAS" YA QUE ALGUNOS CONCEPTOS QUE AHÍ SE INTRODUCEN SE MANEJAN A LO LARGO DE TODO EL PROBLEMARIO Y TAMBIÉN LA TÉCNICA DE AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS. AL RESPECTO QUISIMOS REPRODUCIR EL TRABAJO REALIZADO POR EL ALUMNO (AHORA BIÓLOGO) CARLOS MARTÍNEZ SAUL, COMO EJEMPLO DEL TIPO DE TRABAJOS QUE PODRÍAN REALIZARSE DURANTE EL CURSO.

FINALMENTE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS SE HAN DIVIDIDO EN

TRES SECCIONES. EN LA PRIMERA REUNIMOS PROBLEMAS SOBRE PROPORCIONES, PORCENTAJES Y PROBLEMAS DE CONTEO, ALGUNOS CON FRANCO ENFOQUE A LA PROBABILIDAD. EN LA SEGUNDA PARTE ESTÁN LOS PROBLEMAS SOBRE RELACIONES LINEALES Y LINEALIZACIÓN A TRAVÉS DE CAMBIOS DE VARIABLES. EN LA TERCERA PARTE MOSTRAMOS ALGUNOS PROBLEMAS SOBRE RELACIONES POLINOMIALES, BÁSICAMENTE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO, RELACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

LAS RELACIONES DEL TIPO LINEAL DEBERÁN ESTUDIARSE CON MUCHO DETENIMIENTO, NO SOLO LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA RECTA EN EL PLANO, SINO EL AJUSTE DE RECTAS A UNA COLECCIÓN DE DATOS. LA RAZÓN NO ES SOLO LA SENCILLEZ, SINO QUE ALGUNAS OTRAS RELACIONES ENTRE VARIABLES (CRECIMIENTO DE POBLACIONES, INDIVIDUOS, CONCENTRACIONES, ETC.) PUEDEN REDUCIRSE AL ESTUDIO DE RELACIONES LINEALES HACIENDO CAMBIOS DE VARIABLES ADECUADOS.

UNA CLASE DE PROCESOS DE SUMA IMPORTANCIA SON LOS FENÓMENOS PERIÓDICOS COMO POR EJEMPLO LOS RITMOS CIRCÁDICOS, CIERTAS REACCIONES QUÍMICAS, FORMACIÓN DEL SONIDO, ETC., SIN EMBARGO EL ESTUDIO DE PROCESOS PERIÓDICOS EN BIOLOGÍA ES RECIENTE; EN PARTE MOTIVADO POR EL ESTUDIO CUALITATIVO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES. LOS EJEMPLOS A PROBLEMAS QUE PODRÍAMOS HABER INCLUIDO EN ESTA PARTE O SON DEMASIADO TRIVIALES O DEMASIADO ELABORADOS, ASÍ QUE PREFERIMOS OMITIR UNA SECCIÓN CORRESPONDIENTE A "FUNCIONES PERIODICAS" POR CONSI-

DERAR QUE DE OBLIGARNOS A ELLO ROMPERIAMOS CON EL ESPIRITU DE ESTE PROBLEMARIO. DE TODOS MODOS NO DUDAMOS QUE LA TRIGONOMETRIA Y EL ALGEBRA SON INDISPENSABLES EN LA FORMACIÓN DEL ESTUDIANTE.

EL IDEARIO DE ESTE "PROBLEMARIO PUEDE RESUMIRSE ASÍ: UN PRIMER CURSO DE MATEMÁTICAS DEBE CENTRARSE EN LA DESCRIPCIÓN DE PROCESOS (BIOLÓGICOS POR EJEMPLO).

FINALMENTE, ESPERAMOS CONTINUAR LA ELABORACIÓN DE MATERIAL SEMEJANTE A ESTE PARA CURSOS POSTERIORES ATENDIENDO A LAS SUGERENCIAS CRÍTICAS QUE SE TOMEN LA MOLESTIA DE HACERNOS LLEGAR.

LOS AUTORES
MANUEL FALCONI (FC. UNAM, SABÁTICO UAM-I)
JOAQUÍN DELGADO (UAM-I)

2.- MODELOS DE CRECIMIENTO

En la biología de poblaciones se pretende contar, estimar y predecir tamaños de poblaciones, así como estudiar sus ciclos naturales y de cosechamiento óptimo con base en modelos matemáticos. El tamano de una población está descrita por una variable "x" que podría ser el tamaño total de la población, la proporción de individuos adultos o alguna otra variable relacionada suceptible de ser medida. Si la observación de la población puede hacerse en cualquier instante, x será una función continua del tiempo t; $x(t)$, en otros casos, ya sea por limitaciones técnicas del proceso experimental o por la naturaleza misma de la poblacion, solo es posible medir X a intervalos regulares de tiempo cuya duración conviene tomar como unidad de tiempo - tal es el caso de ciertas poblaciones de roedores de la región ártica, cuya población decae durante el invierno y se reproduce vertiginosamente en primavera; el estudio de los cambios poblacionales de estas especies se pueden realizar con base en las observaciones primaverales - ; x es entonces una cantidad (variable) que cambia en instantes discretos de tiempo, i.e. es una función de variable discreta $x: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x(n)$ se acostumbra denotar por x_n, $n = 0,1,2,\ldots$

Veamos como se construyen algunos modelos de crecimiento de poblaciones en las que el tamaño de la población x_n es una variable discreta.

Si x_0 es una población inicial, después de una unidad de tiempo apropiada (vida media de los individuos, edad promedio de maduración sexual, por ejemplo) los individuos adultos habrán engendrado nuevos individuos que junto con los que hayan individuos de la siguiente generación, el nuevo tamaño poblacional será denotado por x_1. En las siguientes generaciones los tamaños poblacionales serán x_2, x_3, etc. Así, x_n denotará el tamaño de la población después de transcurridas n unidades de tiempo. Si la población está aislada no existen relaciones de interacción con otras especies que afecten su tamaño. Por otro lado existen otro tipo de factores que regulan el tamaño de la población y que podrían clasificarse en denso-dependientes - como son las enfermedades, fertilidad, conducta social, etc. -, y aquéllos que solo dependen de su intensidad, como por ejemplo cuando la temperatura aumenta en 10° grados y produce que el x % de la población muera. En tal caso el tamaño de la población al tiempo n+1 depende solo de los tamaños poblacionales anteriores lo cual se denota funcionalmente por

$$x_{n+1} = F(x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \dots (1)$$

La dependencia de F en los valores $x_0, x_1, \dots, x_n$, representan efectos acumulativos del número de individuos en las generaciones anteriores sobre el tamaño actual de la población: padres, abuelos, etc. que no han muerto hasta la generación n+1. Tambien puede representar efectos de retardo en la respuesta al crecimiento de la población. Por ejemplo en cierto momento un tamaño mermado de población puede deberse a una enfermedad que entre otros efectos puede provocar una generación más débil cuyas consecuencias en la población se sentirá en generaciones mas tarde.

En un modelo simplificado, supongamos que los padres engendran individuos hijos después de lo cual mueren antes de que la siguiente generación este apta para reproducirse de modo que no hay traslape entre generaciones sucesivas. Diremos entonces que las generaciones son separadas. La relacion (1) se escribiria en tal caso como

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad \dots (2)$$

Por definición la X es una variable no negativa de modo que F es una función $F: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$. Un metodo gráfico para describir la forma como evolucionan el tamaño poblacional con el tiempo es hacer la gráfica de F, también llamada curva de crecimiento. Empezando con un valor inicial x_0 en el eje horizontal, levantamos una recta vertical hasta cortar la gráfica de F. La ordenada de este punto es el valor poblacional x_1 de acuerdo a (2) pues tomando n=0 nos diria que

$$x_1 = F(x_0)$$

Si sobreponemos la recta de pendiente 1 sobre la gráfica de F podemos representar a x_1 nuevamente en el eje horizontal como se muestra en la figura (1) y repetir el algoritmo para obtener a x ,x_2 y así sucesivamente.

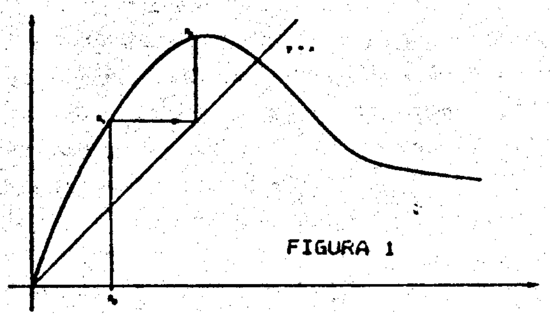


FIGURA 1

Convenimos en llamar al eje horizontal el eje "x_n " y al eje vertical el eje "x_{n+1} ". Al final, la figura que obtenemos al repetir el algoritmo el suficiente numero de veces es la de una "telarña" tejida entre las dos graficas.

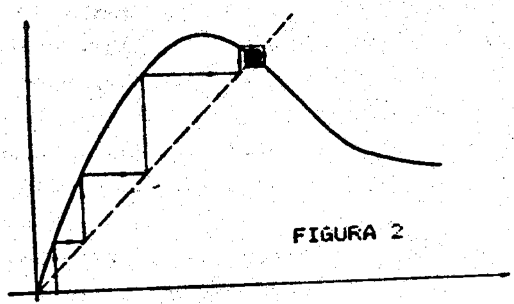


FIGURA 2

Ensayando con distintas curvas de crecimiento podemos obtener diversos tipos de comportamiento cualitativo en el crecimiento de poblaciones desde un punto de vista teórico. Otras veces la forma explícita de F puede obtenerse a través de datos experimentales y ajustes estadisticos.

Un modelo teórico sencillo es el modelo exponencial o modelo de Malthus. En el se supone que existe una relación constante entre el número de individuos padres e hijos

$$x_{n+1}/x_n = r \qquad n = 0,1,2,...$$

luego

$$x_{n+1} = r\, x_n$$

y la curva de crecimiento es la gráfica de la función lineal F(x) = r x.

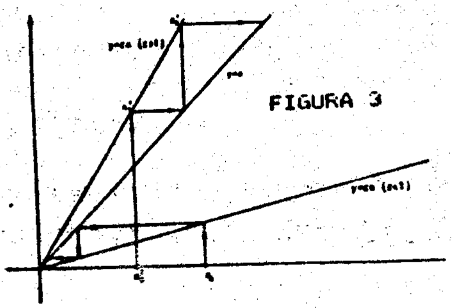


FIGURA 3

Si aplicamos el algoritmo iterativo para $F(x) = r x$ con $r > 1$ y la población inicial x_0 es estríctamente positiva entonces la población crece de manera explosiva sin importar que tan pequeña es la población inicial. De hecho no es dificil convencerse que $x_n = x_0 r^n$, y como $r > 1$ entonces r^n crece exponencialmente con n. Un argumento similar muestra que si $r < 1$ la población siempre se extingue, es decir, x_n tiende a cero cuando n crece. El valor $x_0 = 0$ es un valor especial pues en cualquiera de los dos casos $x_0 = 0$ implica que $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, lo cual es de esperarse pues si inicialmente la población es cero seguirá siendo cero siempre.

En un modelo más elaborado debido a Beverton y Holt la forma de la curva de crecimiento se muestra en la figura (4)

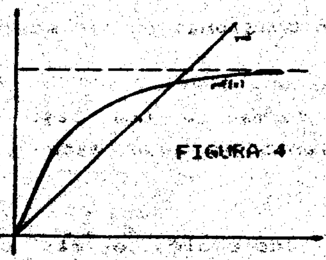


FIGURA 4

Aquí la población x_n siempre tiende a un valor de equilibrio x^* que corresponde a la intersección de la curva con la recta de pendiente 1. Los valores $x = 0$ y $x = x^*$ se llaman puntos de equilibrio por la sencilla razón de que si empezamos con un valor inicial x_0 igual a cualquiera de estos valores, entonces el tamaño de la población tendrá siempre el mismo valor.

El carácter cualitativo de estos puntos es sin embargo muy distinto ya que si por alguna razón el valor inicial x_0 se modifica apenas un poco, los valores sucesivos $x_1, x_2, \ldots$ tienden a alejarse del valor de equilibrio $x = 0$ y se acercan al valor $x = x^*$. Por ello a $x = 0$ se le llama un punto de equilibrio inestable y a x^* se le llama un punto de equilibrio estable.

Modelos tan simples como los dos anteriores pueden explicar teóricamente situaciones tan complicadas como la siguiente: Consideremos una curva de crecimiento que es una modificación de la de Beverton y Holt, como se muestra en la figura (5).

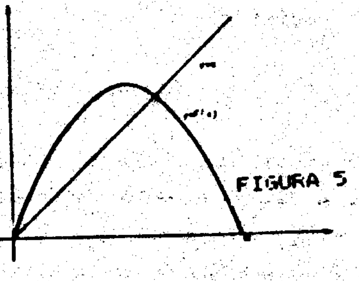


FIGURA 5

Aquí M representa la capacidad de carga de la población que si es excedida en algún momento conlleva a la extinción total de la especie - por ejemplo porque hay demasiados adultos que compiten por el alimento impidiendo que los individuos jóvenes lleguen a su madurez sexual -. El ángulo de interseccióon de la curva de crecimiento y la recta de pendiente 1 sobre el punto de equilibrio x^* es menor de 90° . Esto hace que x^* sea un punto de equilibrio inestable al igual que el valor $x = 0$. La gráfica de x como función de n puede seguir una trayectoria tan azarosa como la que se muestra en la figura (6) de modo que no distinguiriamos a x_n de una variable aleatoria.

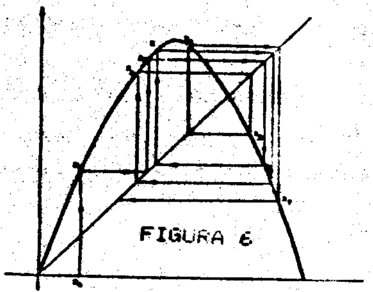


FIGURA 6

En ocasiones es más adecuado plantear una ecuación de crecimiento en la forma de una tasa de crecimiento ya que ésta tiene un significado biológico más directo. Tendríamos entonces un modelo equivalente a (2)

$$(x_{n+1} - x_n)/x_n = f(x_n) \quad \ldots(4)$$

donde f proviene de un modelo teórico o bien se determina experimentalmente. Como ejemplo, consideremos una tasa de crecimiento constante

$$(x_{n+1} - x_n)/x_n = k \quad \ldots(5)$$

luego se sigue

$$x_{n+1} = (1 + k)\, x_n$$

que es un modelo exponencial con $r = 1 + k$.

Otra posibilidad es que la tasa disminuya cuando la población aumenta, por ejemplo en poblaciones con recursos limitados. La ecuación logística

$$(x_{n+1} - x_n)/\, x_n = k - x_n \quad \ldots(6)$$

es la forma más sencilla de crecimiento limitado pues si $x_n < k$ entonces en la siguiente generación $x_{n+1} > x_n$ pero entonces la nueva tasa $k - x_{n+1}$ es menor que la tasa $k - x_n$ de la generación anterior. La expresión equivalente a (2) se obtiene despejando a

x_{n+1}. Obtenemos entonces

$$x_{n+1} = x_n(1 + k - x_n).$$

La curva de crecimiento para $F(x) = x\ (1 + k - x)$ es una parábo invertida que cruza al eje horizontal en $x = 0$ y en $x = 1 + k$. ángulo de intersección de la curva de crecimiento con la recta pendiente 1 está controlado por el parametro k y se pue demostrar utilizando técnicas conocidas del cálculo diferencíal que ángulo de intersección es siempre mayor de 90^{o} siempre que $0 < k < 1$ con lo que se asegura que el punto x^* es un equilibrio estable y hay comportamientos caóticos como en el modelo de la figura (7).

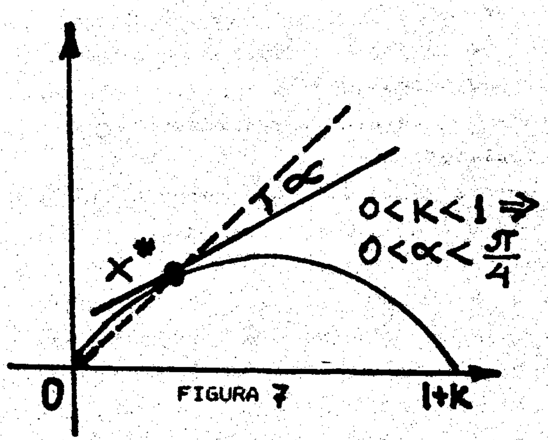


FIGURA 7

Otra forma de crecimiento limitado es el modelo de crecimiento Gompertz:

$$(x_{n+1} - x_n)/x_n = \ln(k/x_n)$$

donde ln es el logaritmo natural.

* Observación: Sí x_n es el tamaño de la población y $x_n < k$, entonces $k - x_n$ es lo que le falta por crecer antes de llegar a la saturación. Deberíamos escribir la ecuación logistica (6) como

$$(x_{n+1} - x_n)/\ x_n = (k - x_n)/\ b$$

donde b es un factor de escala, o sea que $(k - x_n)/\ b$ es lo que falta por crecer en unidades de b. Esta última expresión también puede escribirse como

$$\frac{(x_{n+1}/b) - (x_n\ /\ b)}{x_n\ /\ b} = (k\ /\ b) - (x_n\ /\ b)$$

así que renombrando $\bar{x}_n = \tilde{x}_n\ /\ b$, $\bar{x}_{n+1} = \tilde{x}_{n+1}\ /\ b$, $\tilde{k} = K\ /b$. la ecuación (7) se puede escribir como en (6). Un argumento análogo se puede aplicar a la ecuación de Gompertz

$$(x_{n+1} - x_n)/x_n = \ln(K/x_n)$$

3.-CRECIMIENTO ALOMÉTRICO E ISOMÉTRICO

El crecimiento de los seres vivos sigue determinadas reglas de distribución de la forma y el volúmen. En última instancia la constitución actual del organismo está determinada por el aprovechamiento óptimo de los recursos, vgr.: Luz solar, sustancias nutritivas, espacio, etc. En el sentido más abstracto un organismo es un sistema termodinámico en el que ocurren constantemente intercambios de materia y energía con el medio ambiente así que un estudio preciso de tal distribución es bastante complicado. Aquí analizaremos algunos aspectos elementales de la forma y tamaño que adoptan los seres vivos. A pesar de ello, algunas conclusiones a partir de modelos sencillos pueden extrapolarse y ser de alguna utilidad práctica sobre todo desde un punto de vista cualitativo.

Tomaremos en cuenta solo dos aspectos en nuestro modelo. El primer aspecto se refiere a la disipación de calor del organismo como energía sobrante del proceso catabólico. La disipacióon se lleva a cabo en su totalidad a través de la frontera del sistema, como membranas celulares, o piel en organismos compuestos. En un medio ambiente que no cambie drásticamente, los mecanismos reguladores como el vello, escamas, plumas, etc. contribuyen en una disipación neta de calor proporcional a la superficie del organismo. En el segundo aspecto, la energía necesaria para ejecutar las actividades normales del individuo como son la reproducción, el transporte y en general el trabajo mecánico, es alamcenada en las células componentes en forma de compuestos químicos complicados (ATP, ADN, carbohidratos) que se liberan en la presencia de enzimas para producir energía química. La energía promedio almacenada es entonces proporcional al tamaño o masa celular y por ende al peso del individuo.

Estos dos aspectos sobre la distribución de la materia viva pueden simularse en el siguiente modelo que nos servirá de discusión para lo que sigue.

Imaginemos un cubo sólido de lado ℓ. El Area y el volúmen son entonces $A = \ell^2$ y $V = \ell^3$ respectivamente. Supongamos que disponemos de un volúmen dado digamos 9 cm^3 en forma de 9 cubos de 1 cm^3 cada uno. ¿ Cual de las tres disposiciones que se muestran abajo ofrece una menor Area externa ?

*** VER FIGURA 1 ***

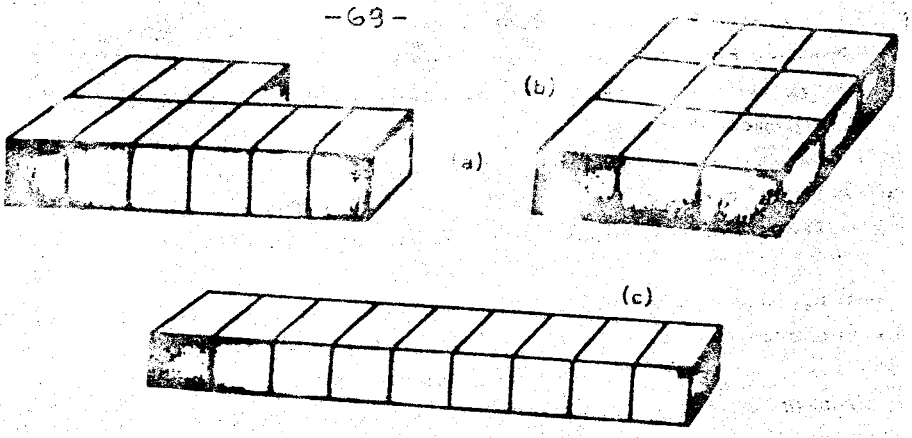


FIG. 1

Cada una de las disposiciones (a), (b), (c) simularía distintas pacidades de disipación calorífica tratándose de un organismo. aún ando todas ellas tendrían la misma cantidad de energía almacenada. quisieramos minimizar el área expuesta es fácil ver que la sposición (c) es la óptima. La máxima área expuesta se obtendría si nsideramos cada cubo por separado como en la figura 2.

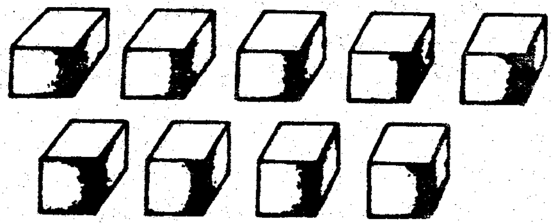


FIG. 2

La selección de la distribución óptima es un proceso complejo de evolucióny adaptación. A grosso modo hay dos factores que intervienen en la selección de la configuración que son encierta forma antagónicos. Por un lado se gasta energia en la construcción de una configuración pero a la vez se almacena en forma de energia potencial.

Simulemos ahora el crecimiento de un organismo agregando más y más cubos del mismo tamaño. Necesitamos entonces tres variables para describir la forma del cuerpo: Largo (x), ancho (y) y altura (z). Si despreciamos protuberancias del cuerpo, el volúmen será

$$V = x\cdot y\cdot z\ .$$

Si ademas la densidad es aproximadamente constante, entonces el peso será proporcional al volumen, y por lo tanto al producto $x\cdot y\cdot z$.

$$(\text{peso})\quad w \propto x\cdot y\cdot z\ .$$

Veamos ahora un caso particularmente simple de crecimiento en el que el cociente de cualesquiera de las dimensiones x, y, z permanece constante con el tiempo

$$x/y = K_1\ ,\ y/z = K_2\ ,\ z/x = K_3$$

este tipo de crecimeiento se llama un crecimiento isométrico. En tal caso tenemos

$$w \propto \ell^3$$

siendo ℓ cualquiera de las dimensiones lineales x, y ó z. Notamos que la formula $w \propto \ell^3$ es la misma que para un cubo de lado ℓ de densidad constante. Esto significa que en el crecimiento isométrico el peso y cualquiera de las dimensiones lineales están en la misma relación que el peso y el lado de un cubo. Por ejemplo, si la dimensión ℓ se duplica, el peso se octuplica, si la dimensión ℓ se triplica el volúmen se multiplica por 27 etc.

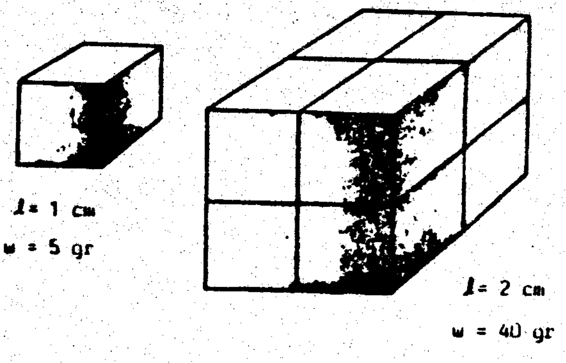


FIG. 3

Afirmamos que para un crecimiento isométrico la superficie del cuerpo es proporcional al cuadrado de la dimensión lineal ℓ (la de mayor orden de magnitud). El siguiente argumento muestra por qué: si las tres dimensiones son del mismo orden de magnitud, el cuerpo puede aproximarse por un paralelepípedo, cuya área crece proporcionalmente al cuadrado de cualquiera de las dimensiones. Si una de las dimensiones es mucho menor que las otras digamos z entonces el área total es aproximadamente el doble del área subtendida por las dimensiones x e y.

$$s = 2(ab+bc+ac)$$

$$a \sim b \sim c \Rightarrow s \sim 6a^2$$

ó

$$s \sim 6b^2$$

ó

$$s \sim 6c^2$$

FIG. 4

Resumiendo tenemos que para un crecimiento isometrico con densidad constante el peso w y el área a varían como $w \propto \ell^3$ y $A \propto \ell^2$

En el crecimiento isométrico, como su nombre lo indica, la forma del cuerpo en un instante dado es una "copia fiel" del anterior. Esto se aprecia mejor en el crecimiento de un cubo

CRECIMIENTO ALOMETRICO

En muchos casos se ha observado experimentalmente una relació del tipo

$$w = a\,\ell^{b} \qquad a,b \quad \text{ctes.} \quad b \approx 3 \quad \ldots(1)$$

entre el peso w y la longitud ℓ del individuo. Estos resultado son compatibles con la hipótesis de crecimiento isométrico, luego un buena manera de verificar la hipótesis de crecimiento isométrico e graficando w contra ℓ esperando una relación como la mostrad arriba. En general una relación del tipo $y = a\,x^{b}$ se llama una relación de alometría. Si $b = 1$ se le llama un crecimiento isométric de la variable y respecto a x, lo cual es consistente con l definición de isometría dada antes ya que $y = ax$ es equivalente a $y/x = a$ (cte.).

Tanto la longitud ℓ como el peso w dependen del tiempo t. Tomando en cuenta la relación de alometría $w = a\,\ell^{b}$ podemos obtener el comportamiento de $w(t)$ si conocemos a $\ell(t)$. Por ejemplo si la longitud en función de la edad sigue un patrón exponencial

$$\ell(t) = \ell_0\, e^{kt}$$

entonces por la ecuación (1). w también crece exponencialmente con t

$$w(t) = a\,\ell_0^{\,b}\, e^{kbt}$$

En el modelo de Gompertz,

$$\ell(t) = \ell_0 \exp((\ell_0/\ell_\infty)\, e^{-t})$$

luego $$w(t) = a\,\ell^{b}_0 \exp((b\,\ell_0/\ell_\infty)\, e^{-t})$$

La relación del área al peso determina la eficiencia (e) del organismo. Para un crecimiento alométrico

$$e \propto 1/\ell$$

de modo que individuos pequeños disipan calor en proporción mayor que los grandes en relación a su peso. Esto explica que por ejemplo un ratón necesite ingerir una gran cantidad de alimentos para compensar ésta perdida. Los niños pequeños necesitan más agua que los adultos para compensar esta pérdida de calor (y agua a través de la sudoración).

Otros aspectos menos entendidos de la forma de los seres viv siguen patrones similares. Tal es el caso por ejemplo de la longit total (ℓ) y sus dimensiones parciales (s) como la longitud del tóra extremidades, ancho del cuerpo, etc. obedecen relaciones del ti alométrico

$$\ell = a\, s^{b}.$$

4.- TASAS DE CRECIMIENTO

A veces hablar del valor de una cierta cantidad no nos dice mucho, por ejemplo si estamos estudiando el crecimiento de los cerdos en una granja y decimos que en el mes de julio su peso promedio fue de 40 kg., sin otra referencia, este dato no permite decidir si los cerdos tienen buen peso o no; lo mismo ocurre, por ejemplo si estamos tratando con con el rendimiento agrícola de cierta zona geográfica y solo mencionamos las toneladas totales producidas. En el primer caso podemos relacionar, por ejemplo, el peso con la edad y extraer información acerca de las edades en que los cerdos ganan más peso y si comparamos esto con la cantidad de alimento que consumen podemos decidir sobre la edad mas adecuada para sacrificarlos; en la segunda situación mencionada, resulta muy importante relacionar la producción total con el número de hectáreas cultivadas, número de campesinos, tractores, etc. lo cual permite estimar por ejemplo el incremento de la producción por tractor, beneficio por campesino, etc.

Las anteriores son situaciones distintas donde variables de interés (x, y, z, ... ,w) aparecen relacionadas, cada una como función de las otras, es decir

$$x = f(x,y,z,\ldots,w) \;;\; y = g(x,y,z,\ldots,w) \;;\; w = h(x,y,z,\ldots,w)$$

o brevemente $F(x, y, z, \ldots, w) = 0$

y se quiere estudiar el cambio de una de ellas con respecto a las otras.

A continuación daremos el enunciado matemático de esta cuestión restringiéndonos al caso de dos variables que denotaremos por x e y. Supongamos que y viene dada en función de x mediante f, esto es $y = f(x)$. Dados dos valores de la variable independiente x, $x + \Delta x$, se obtienen dos valores de y no necesariamente distintos $y(x)$ y $y(x+\Delta x)$. A la cantidad $y(x+\Delta x) - y(x)$ se le llama incremento de y, el cual se denota por $\Delta y(x;\Delta x)$ indicando la dependencia de este incremento del valor de x, y de su incremento Δx, aunque si ésto se sobre entiende puede escribirse simplemente Δy. La razón de cambio de y respecto a x correspondiente a un incremento Δx se define como el cociente

$$\Delta y(x,\Delta x)\ /\Delta x \qquad \ldots (1)$$

Si $\Delta x > 0$ entonces la tasa de cambio es positiva si y solo si al incremento $\Delta y(x,\Delta x)$ es > 0, o sea si $y(x+\Delta x;\Delta x)$ es mayor que $y(x)$; así, una tasa de cambio positiva para cualquier incremento Δx positivo implica que y es una función creciente de x. Si la variable independiente es el tiempo, a $\Delta y/\Delta x$ lo llamaremos rapidez de crecimiento de y. Si y es la magnitud de una variable B y x es la magnitud de otra variable A, entonces la razón de cambio (1) se interpreta como la cantidad en que crece B por unidad de A en promedio, cuando A varia de x a $x + \Delta x$.

Ejemplos

a) Del principio de Pascal se obtiene que la presión P dentro de un liquido es proporcional a su profundidad h. Esto quiere decir que P es una función de h y que el valor de P a una profundidad h es $c \cdot h$ con $c > 0$ una constante $\therefore P(h) = c\ h$. La presión a una profundidad $h + \Delta h$ es $P(h+\Delta h) = c\ (h+\Delta h)$, entonces el incremento de P es

$$\Delta P(h,\Delta h) = c(h+\Delta h) - c \cdot h = c\Delta h$$

La tasa de cambio es

$$\Delta P(h,\Delta h)/\Delta h = c\Delta h/\Delta h = c\ .$$

Esto significa que la presión aumenta c unidades de presión por cada unidad de longitud con que crece la profundidad. Debemos notar que en este ejemplo la razón de cambio es constante y no depende de h ni de Δh.

b) Un cuerpo en caida libre recorre en un tiempo t una distancia $x(t) = g\ t^2/2$. El tiempo t se mide en segundos y la distancia x en metros. Si en $t = 0$, $x(0) = 0$, tomamos un incremento $\Delta t = 1$ seg. entonces $x(0+\Delta t) = x(\Delta t) = x(1) = g/2$, por lo tanto la distancia recorrida al cabo del primer segundo es $x(1) - x(0) = \Delta x(0;1) = g/2$ metros y la tasa de cambio es

$$\Delta x(0;1)/1 = g/2 \text{ m/seg.}$$

Esto se interpreta como que el cuerpo cayó en el primer segundo a razón de $g/2$ metros por segundo. Al término de 2 segundos el cuerpo ha caido una longitud igual a $x(2) = g \cdot 2^2/2 = 2 \cdot g$; entre el segundo 1 y el segundo 2 , se recorrió una distancia

$$x(2) - x(1) = \Delta x(1;1) = 2g - g/2 = 3g/2 \text{ metros}$$

$$\therefore x(1;1)/1 = 3g/2 \text{ m/seg.}$$

lo cual significa que el cuerpo cayó a razón de $3g/2$ m/seg.

A diferencia del ejemplo anterior , aquí la razón $\Delta x/\Delta t$ depende de valor de t y de su incremento Δt; de hecho

$$x(t;\Delta t)/\Delta t = g\ t + g\ \Delta t/2$$

como se puede verificar de inmediato:

$$\begin{aligned} x(t;\Delta t)/\Delta t &= [x(t + \Delta t) - x(t)]/\Delta t \\ &= [(g/2)(t + \Delta t)^2 - (g/2)t^2]/\Delta t \\ &= [(g/2)(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - (g/2)t^2]/\Delta t \\ &= [(g/2)(2t)(\Delta t) + (g/2)(\Delta t)^2]/\Delta t \\ &= gt + (g/2)\Delta t. \end{aligned}$$

c) El número de bacterias N en condiciones favorables crece de acuerdo a la fórmula

$$N(k+1) = r\ N(k)\ ,\ k = 0,1,2,.. \quad (2)$$

El tiempo lo consideramos discreto, bajo la hipótesis de que los organismos se biparten pasado un lapso fijo, que digamos tiene duración de 1 seg.

Si inicialmente hay No organismos, es decir $N(0) = No$, sustituyendo en la fómula (2) obtenemos el número de de individuos al cabo de

1 segundo $N(1) = r\ No$

2 segundos $N(3) = r\ N(1) = r\ (r\ No) = r^2No$

3 segundos $N(3) = r\ N(2) = r\ (r^2\ No) = r^3No$

.

.

k segundos $N(k) = r\ N(k-1) = r\ (r^{k-1}No) = r^kNo$

$$N(k) = r^kNo \quad ...(3)$$

N es una función exponencial del tiempo - el tiempo aparece como exponente -. Con la expresión (3) podemos calcular la rapidez de crecimiento de N para un incremento $\Delta k = 1$ seg.

$$\Delta N/\Delta k = (No\ r^{k+\Delta k} - No\ r^{k})/\Delta k$$
$$= (No\ r^{k+1} - No\ r^{k})/\ 1 \quad (seg^{-1})\ \text{entonces}$$

$$\Delta N/\Delta k = No\ r^{k}(r - 1) = (r - 1)_{.}\ N(k) \quad \ldots(4)$$

por tanto a los k segundos la población crece a razón de $(r-1)N(k$ individuos por segundo. De (4) se puede ver que si $r > 1$, el número de individuos de la población crece conforme pasa el tiempo y ésta corresponde a una rapidez de crecimiento positiva; si $r > 1$ la población decrece y la rapidez de crecimiento es negativa; por último, $r = 1$ significa que $N(k) = No$,o sea que el número de individuos permanece fijo y de (3) se obtiene que la rapidez de crecimiento es cero. De hecho se puede hacer la siguiente observación general:

Si y es función de x , y ésta varía en el intervalo [a,b] entonces

i) Si la razón de cambio de y es positiva en cualquier subintervalo de [a,b] entonces y es función creciente de x.

ii) Si la razón de cambio de y es cero en todo subintervalo entonces y es constante. Por ultimo ,

ii) y es decreciente si la razón de cambio es negativa en cualquier subintervalo.

Los recíprocos de estos enunciados también se cumplen. Otro cóciente importante es lo que llamaremos tasa de cambio y la definimos como

$$\Delta y(x;\Delta x)/\Delta x/y(x) \ldots \quad (5)$$

y no es mas que la rapidez de cambio de y respecto a x , por unidad de y. A menudo el incremento Δx se toma de una unidad y en ese caso el cociente (5) se convierte en

$$(y(x+1) - y(x))/y(x)$$

Cuando x es el tiempo, a la tasa de cambio se le acostumbra llamar tasa de crecimiento. Mostraremos el significado de este concepto con algunos ejemplos.

d) En el ejemplo (c) la rapidez de crecimiento correspondiente a un incremento $\Delta k = 1$ seg. es $N(k)(r - 1)$ bacterias/seg. entonces la tasa de crecimiento es

$$\Delta N(k;1)/N(k) = (N(k+1) - N(k))/N(k) = (r-1)\ \text{seg}^{-1}\ .$$

esta tasa de crecimiento es constante y significa que la población crece cada segundo $(r - 1)$ indivduos por cada indviduo que haya en la población.

e) La siguienta tabla muestra el número de habitantes en México acuerdo con los censos siguientes

año	# ca habitantes
1900	13 607 259
1910	15 160 369
1920	14 334 780
1930	16 552 772
1940	19 653 532
1950	25 791 017
1960	34 923 129
1970	48 225 238
1980	69 902 000

El número de habitantes N se puede suponer función del tiempo, t, $N = N(t)$, pero desconocemos la regla de correspondencia $N(t)$. De acuerdo a la tabla conocemos sus valores correspondientes a las décadas 1900 , 1910 , ..., 1980 y, bajo algunas suposiciones se pueden estimar las poblaciones en los años faltantes. El incremento en la década 1900 - 1910 es $N(1910) - N(1900) = 1,553,110$. Si suponemos que la rapidez de crecimiento fué constante en esa década, entonces tomando como unidad de tiempo el año encontramos que la rapidez de crecimiento fué de 155,311 individuos/año ; por lo tanto

$$N(1904) = N(1900) + (155,311 \text{ ind./año}) \times 4 \text{ años}$$
$$= 13,607,259 + 621,344 = 14,228,603 \text{ ind.}$$

¿ Cuántos nuevos individuos produjo, en promedio, cada habitante de 1900 en la decada 1900 - 1910 ?. Para saberlo solo tenemos que calcular la tasa de crecimiento, tomando como unidad 10 años, así

$$\frac{\dfrac{N(1910) - N(1900)}{1 \text{ decada}}}{N(1900)} = \frac{(15\ 160\ 369 - 13\ 607\ 259\ )\ \text{hab/decada}}{13\ 607\ 259}$$

$$= 0.114 \text{ década}^{-1}$$

ésto quiere decir que cada habitante produjo, en promedio, en es década 114 milésimos de individuo. Si este número se multiplica po 100 se obtienen lo que generaron 100 individuos que en este cas resulta en 11.4 ; dicho de otro modo la población de México creció una tasa de 11.4 % en ésa década. En caso de haberse mantenido es tasa durante la década siguiente, en 1920 el número de habitante habrian sido de 16 88 651 . En efecto , si en 1910 habia 15 160 36 , cada uno produciria 0.114 individuos por década y en tota procrearian 15 160 369 x 0.114 = 1 728 282 nuevos individuos . Si estos individuos les agregamos la cantidad en 1910 , se obtiene l cifra correspondiente a 1920. Observemos que en realidad la població decayó a 14 334 780 en 1920 y la tasa para 1910 - 1920 fué d -0.054 , o expresado porcentualmente -5.4 % por década. ¿ Qué tas anual constante q se necesita para que la población crezca del nivel dado en 1900 al de 1910 ?. Para resolver el problema debemo expresar los niveles de población en términos de q ; Cada individuo produce en 1 año q nuevos individuos, por lo tanto

$$N(1901) = N(1900) + q\,N(1900) = (1 + q)\ N(1900)$$
$$N(1902) = N(1901) + q\,N(1901) = (1 + q)^2\,N(1900)$$
$$N(1903) = N(1902) + q\,N(1902) = (1 + q)^3\,N(1900)$$

siguiendo así concluimos que

$$N(1910) = (1 + q)^{10}\,N(1900) \quad \ldots\ (6)$$

Despejando de la ecuación (6) se obtiene el valor de q

$$q = \left[N(1910)/N(1900)\right]^{1/10} - 1 \quad \ldots\ (7)$$

el valor de q se puede relacionar con el valor de la tasa por década q_d como sigue: por definición

$$q_d = (N(1910) - N(1900))/N(1900)$$

Por la ecuación (6) resulta

$$q_d = \frac{N(1900)(1+q)^{10} - N(1900)}{N(1900)}$$

$$q_d = (1+q)^{10} - 1$$

Esta ecuación es la solución de un caso particular del siguiente

PROBLEMA 1 Se tienen s intervalos de tiempo t_0, $t_1, \dots, t_s$, y ciertas tasas conocidas en cada intervalo $q_1 = (x_1 - x_0)/x_0$, $q_2 = (x_2 - x_1)/x_1, \dots, q_s = (x_s - x_{s-1})/x_s$ donde x_i representa el valor de x al tiempo t_i, es decir $x_i = x(t_i)$. Calcular la tasa en el intervalo de t_0 a t_s.

RESPUESTA Se calculan primero los valores intermedios

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + q_1 x_0 = (1+q_1)x_0 \\
x_2 &= x_1 + q_2 x_1 = (1+q_2)x_1 = (1+q_2)(1+q_1)x_0 \\
x_3 &= x_2 + q_3 x_2 = (1+q_3)x_2 = (1+q_3)(1+q_2)(1+q_1)x_0 \\
&\vdots \\
x_s &= x_{s-1} + q_s x_{s-1} = (1+q_s)x_{s-1} = (1+q_s)(1+q_{s-1})\dots(1+q_1)x_0
\end{aligned}$$

o en notación abreviada

$$x_s = x_0 \prod_{k=1}^{s} (1+q_k) = x_0(1+q_1)(1+q_2)\dots(1+q_s)$$

Se toma x_i = valor inicial,
x_f = valor final

luego la tasa en el intervalo $[t_0, t_s]$ es

$$q = (x_s - x_0)/x_0 = \prod_{k=1}^{s}(1+q_k) - 1$$

Un caso particular es cuando $q_k = p$, i.e. todas las tasas son iguales, luego

$$1 + q = \prod_{k=1}^{s}(1+p) = (1+p)^s$$

PROBLEMA 2 Sea q la tasa calculada en un intervalo de tiempo

$$q_{10} = q_{anual} = (1 + q_d)^{1/10} - 1 = 0.0108150$$

Si la tasa mensual se mantiene constante durante la década entonces

$$q_{120} = q_{mensual} = (1 + q_d)^{1/120} - 1 = 0.008964$$

ya que 10 años = 120 meses. Si la tasa semanal es constante toda la década.

$$q_{3650} = q_{diaria} = (1 + q_d)^{1/3650} - 1 = 0.000031$$

Notemos sin embargo un hecho curioso :

$$10 \times q_{10} = 0.1081500$$
$$120 \times q_{120} = 0.1075680$$
$$520 \times q_{520} = 0.1138800$$

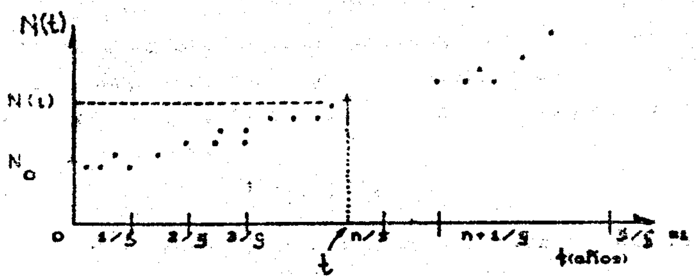
es decir, aun cuando q_s tiende a cero cuando s crece, el producto $s\ q_s$ tiende a un valor fijo aproximadamente de 0.1138. Matemáticamente ésto se expresa así

$$\lim_{s \to \infty} s\ q_s = 0.1138$$

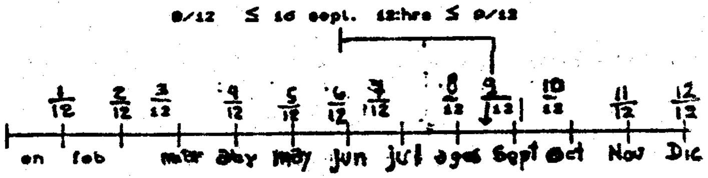
idealizando las cosas al máximo supongamos que la tasa se mantiene constante en cada subdivisión del año [illegible] puede depender del número de subdivisiones. Podemos preguntarnos cuál es la población como función del tiempo N(t) si inicialmente es N_0. En lo que sigue fijemos un año arbitrario. Dado un instante t en ese año subdividamos éste en s partes - iguales para simplificar los cálculos - . El tiempo t estará entonces localizado entre n s-ésimos y n+1 s-ésimos,

$$n/s \leq t \leq (n+1)/s$$

Tratamos de reprtesentar esta situación en la siguiente figura



Por ejemplo , si queremos encontrar la población el 16 de septiembre a las 12:00 hrs., al hacer la división del año en meses entonces un mes corresponde a 1/12 de año, dos meses a 2/12 de año , etc. entonces



Entre más grande sea s más fina será la subdivisión y mejor será la proximación $n/s \simeq t$. Ya que la tasa en cada subintervalo es q_s y han transcurrido n subintervalos de tiempo tendríamos que

$$N(t) \simeq No\ (1 + q_s)^n$$

Sustituyendo $(1 + q_s) = (1 + q)^{1/s}$

$$N(t) \simeq No\ (1 + q)^{1/s})^n = No\ (1 + q)^{n/s}$$

q es dado, de modo que la aproximación a N(t) depende solamente de la aproximación $n/s \simeq t$ haciendo que s crezca ondefinidamente y seleccionando a n adecuadamente podemos hacer que $n/s \rightarrow t$ de modo que tendriamos con toda exactitud

$$N(t) = No\ (1 + q)^t$$

Esta se llama una relación exponencial entre N y t , o se dice que N crece exponencialmente con t ya que la variable independiente aparece como exponente. En general una expresión de la forma

$$y = b^x$$

se llama una función exponencial con base b . Por comodidad se prefiere utilizar como base ciertos números especiales como el número e , la base 10 , etc. Podemos pasar de una base a otra utilizando los logaritmos como sigue : Si por ejemplo queremos expresar una exponencial con base b como exponencial en base 10 escribimos

$$b^t = 10^{a\,t}$$

donde a es una constante a determinar. Tomando $t = 1$, obtenemos

$$b = 10^a$$

tomando logaritmos base 10,

$$\log b = a$$

Por lo tanto

$$b^t = 10^{t \log b}$$

Análogamente para pasar a una base $e = 2.7182818..$ ponemos

$$b^t = e^{Q\,t}$$

luego,

$$b = e^Q$$

Al tomar $t = 1$, obtenemos

$$\ln b = Q$$

donde ln es el logaritmo base e.

El número e aparece con naturalidad en problemas de tasas de crecimiento. Por ejemplo volviendo al problema de la población en México donde teníamos

$$N(t) = No\,(1 + q)^n$$

Como habíamos observado, el producto $s\,q_s$ tiende a un número finito digamos $Q \simeq 0.1138$. Entonces

$$N(t) = No\,((1 + s\,q/s)^s)^{n/s}$$

o aproximando $s\,q_s \simeq Q$

$$N(t) \simeq No \left[(1 + Q/s)^s \right]^{n/s} \quad ... \ (7)$$

Se puede demostrar que si tomamos $s \to \infty$, la cantidad $(1 + Q/s)^s$ se acerca a un número finito. Este número es precisamente e^Q. Por ejemplo. tomando $Q = 1$ y haciendo sucesivamente $s = 1, 10, 100, 1000$ obtenemos la siguiente tabla

s	$(1 + 1/s)^s$
1	2
10	2.5937425
100	2.7048138
1000	2.7169239
10000	2.7181459

de donde se advierte que tiende a $e \approx 2.7182818$.

En el ejemplo de la población de México en la década 1910 - 1920 de acuerdo con la ecuación (7) y recordando que $n/s \approx t$

$$N(t) = No\ e^{0.1138t}$$

5.- AJUSTE DE CURVAS

En las ciencias experimentales, a menudo se tiene una serie de mediciones que describen el proceso en estudio y una de las etapas de la investigación es encontrar una relación funcional entre ellas, por ejemplo:

a) En el crecimiento de los organismos de una población se podrían medir el peso promedio P , la longitud promedio L de los organismos de edad 1,2,3,... etc. El conjunto de datos consistirá de ternas (i,P_i, L_i) . A menudo se propone como relación entre L y P una función de la forma

$$(1) \quad P = aL^b$$

Para cada pareja de parámetros (a,b) se tiene una relación distinta de modo que la cuestión es ¿ cómo elegir a y b de modo que la función resultante coincida lo mejor posible con nuestros datos ?

b) Supongamos que se tienen datos mensuales en una zona marina de salinidad S , evaporación E e intensidad de radiación solar I , durante los últimos 12 meses y de la temperatura superficial T solo desde hace 8 meses. Si se quiere estimar T para los primeros 4 meses. una forma de hacerlo es encontrar a T como función de (S,E,I)

$$(2) \quad T = f(S,E,I)$$

sustituyendo en esta expresión los valores de S,E,I de los primeros 4 meses encontramos los valores rerqueridos de T. Las características del problema sugieren que T debe ser función creciente de cada una de sus variables y se puede buscar a la función f lineal , por ejemplo, es decir

$$T = a + bS + cE + dT \qquad ...(3)$$

Con objeto de tener cierta confianza en la extrapolación que se haga para los primeros 4 meses, los parámetros **a,b,c** y **d** se deben elegir de modo que la relación (3) coincida lo mejor posible con los datos observados.

c) La ley de enfriamiento de Newton establece que en un cuerpo que se está enfriando, la rapidez q con que la temperatura T cambia es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura constante To que lo rodea

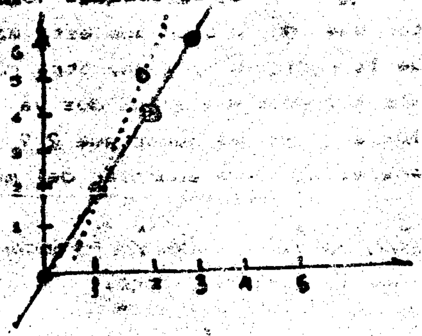
$$q = K (T - To) \quad \ldots (4)$$

La constante K depende del cuerpo que se está enfriando. Si se tienen dos medidas exactas de T y su correspondiente q, se puede calcular K. Sin embargo las mediciones generalmente no son exactas, por lo que aún cuando la ley se considere verdadera, más de dos observaciones (q,T) no serán colineales de modo que solo podemos encontrar K con la propiedad de que (4) coincida lo mejor posible con los datos.

b) Ahora analizaremos detalladamente el caso en que se tienen dos variables x & y relacionadas linealmente, esto es

$$y = a x + b$$

y se quieren encontrar los valores de a y b para que la gráfica correspondiente pase "lo más cerca posible a un conjunto de puntos dados". El ejemplo (c) es de este tipo. Supóngase que se tienen las siguientes tres parejas de puntos (datos): (1,2), (2,4), (3,6), ¿ cuál es la pendiente a y la ordenada al origen b de la recta que pasa lo más cerca posible de estos 3 puntos ? En este caso los 3 puntos dados son colineales y la gráfica de y = 2 x pasa por los tres puntos, así que el valor buscado de a es 2 y el de b es 0.



es obvio que cualquier otra recta pasará más lejos de al menos dos puntos. Por ejemplo la recta dibujada punteada es la gráfica de

$y = 3x - 1$. En $x = 1$, el valor dado de $y = 2$ y el calculado con la regla $y = 3x - 1$ es $y(1) = 3(1) - 1 = 2$. Por lo que respecta a $x = 2$, el valor dado de $y = 4$ y el calculado es $y = 3(2) - 1 = 5$; el error entre el valor calculado y el valor dado es de $5 - 4 = 1$.

Consideremos ahora el caso en el que el resultado del experimento es como muestra la tabla de abajo:

P_i	x	y
P_1	1	2
P_2	2	5
P_3	3	6
P_4	4	10

La grafica de la función $y = 2x$ es una recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por P_1 y P_2; para $x = 2$, el error $\mathcal{E}_2$ entre el valor observado y el calculado es el valor absoluto de la diferencia

$$\mathcal{E}_2 = |\hat{y} - y| = |5 - 2(2)| = 1$$

el error $\mathcal{E}_4$ es

$$\mathcal{E}_4 = |\hat{y} - y| = |10 - 2(4)| = 2$$

La grafica de la función $y = \frac{5}{2}x$ es una recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por P_2 y P_4, en este caso $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_4 = 0$, pero

$$\mathcal{E}_1 = |\hat{y} - y| = |2 - \tfrac{5}{2}(1)| = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathcal{E}_3 = |6 - \tfrac{5}{2}(1)| = \tfrac{3}{2}$$

En el caso de la recta $\mathcal{L}_1$ la suma de los errores F es igual a 3 y con la recta $\mathcal{L}_2$, $F = 2$ y decimos que $\mathcal{L}_2$ es una mejor aproximación a los datos que $\mathcal{L}_1$ o bien que está más próxima a los cuatro puntos dados que la recta $\mathcal{L}_1$. ¿Hay otra recta que sea una mejor aproximación a los 4 puntos que estas dos ya mencionadas, es decir que la suma de los errores sea menor que 2?

El problema en general se puede enunciar del modo siguiente:

PROBLEMA :

Dados n puntos $(x_1, \hat{y}_1), (x_2, \hat{y}_2), \ldots, (x_n, \hat{y}_n)$ encontrar la función $y = ax + b$ de modo que la suma de errores

$$F = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i$$

sea lo menor posible.

A continuación vamos a resolver este problema con el error definido como

$$\mathcal{E}_i = (y(x_i) - \hat{y}_i)^2 = (a x_i + b - \hat{y})^2$$

y por consiguiente

$$F(a.b) = \sum_i (a x_i + b \quad y_i)^2$$

Por el momento está fuera de nuestro alcance justificar el porqué de la definición del error de esta manera y no como $|a x_i + b - y_i|$. pero se puede encontrar en algún libro de estadística.

La solución la daremos en tres pasos como sigue

1) Para cada a fija encontramos b tal que F es mínimo (alcanza su valor mínimo). Este valor de b es función de a y lo denotamos por B.

2) Sustituímos en la expresión de F el valor b y F es entonces función de a.

3) Encontramos a tal que F es mínimo.

Paso 1): Sea a fija

$$F_a = F(a,b) = \Sigma (a x_i + b - \hat{y}_i)^2$$

$$= \Sigma \{ b^2 + 2 b(a x_i - \hat{y}_i) + (a x_i - y_i)^2 \}$$

Sea $A_i = a x_i - \hat{y}_i$ entonces

$$F = n b^2 + 2 (\Sigma A_i) b + \Sigma A_i^2$$ completando cuadrados

$$= n (b + \frac{\Sigma A_i}{n})^2 + (\Sigma A_i - \frac{(\Sigma A_i)^2}{n})$$

F es de la forma $g(x) = r (x + k)^2 + C$ con $r = n$, $k = \frac{\Sigma A_i}{n}$, $\Sigma A_i^2 - \frac{(\Sigma A_i)^2}{n}$, por lo tanto es una parábola que se abre hacia arriba y alcanza su mínimo en

$$b = - \frac{\Sigma \hat{A}_i}{n} = - \frac{\Sigma \hat{a} x_i - y_i}{n} = \frac{\Sigma y_i}{n} - \frac{a \Sigma x_i}{n}$$

$$= \bar{\bar{y}} - a \bar{x} \quad \ldots\ldots (5)$$

donde la barra significa promedio.

Paso 2): Sustituímos b en la expresión de F

$$F = \Sigma\ (a\ x_i + \bar{\hat{y}} - a\bar{x} - \hat{y}_i)^2 = \Sigma\ (a\ (x_i - \bar{x}\ ) + (\bar{\hat{y}} - y_i))^2$$

$$= a^2\ \Sigma\ (x_i - \bar{x}\ )^2 + 2a\ \ (\Sigma\ (x_i - \bar{x}\ )(\bar{\hat{y}} - \hat{y}_i)) + \Sigma\ (\bar{\hat{y}} - \hat{y}_i\ )^2$$

haciendo lo mismo que en el caso de B obtenemos

$$F = \Sigma\ (x_i - \bar{x}\ )^2 (a + \frac{\Sigma(\bar{x}_i - \bar{x}\ )(\hat{y} - y_i)}{n}\ ) + cte.$$

La expresión anterior de F como función de a es una parabola que alcanza su minimo en

$$a = -\frac{\Sigma(x_i - \bar{x}\ )(\hat{y} - y_i)}{\Sigma\ (x_i - \bar{x}\ )^2} = \frac{\Sigma\ (x_i - \bar{x}\ )(y_i - \bar{\hat{y}}\ )}{\Sigma\ (x_i - \bar{x}\ )^2} \quad ...(6)$$

Así pues, la recta que resuelve el problema tiene parametros a y b dados por las formulas (5) y (6).

A diferencia del caso tratado, si y no es función lineal de x, se pueden presentar serias dificultades teóricas para encontrar los parámetros de y que minimizan la suma de los errores

$$F = \Sigma\ (y(x_i) - \hat{y}_i)^2$$

Sin embargo en algunas ocasiones, a través de una transformación de las variables podemos lograr que los parámetros aparezcan enforma lineal. Para explicar ésto, tomemos el ejemplo (a). Aquí tenemos una expresión del tipo

$$7)\ P = b\,L^{a}$$

$$8)\ F = \Sigma\ (b\,L_i^{a} - \hat{P}_i)^2$$

A fin de encontrar a y b que minimicen F , se necesita del calculo avanzado, pero aplicando logaritmos en (7) obtenemos

$$\log(P) = a\ \log(L) + \log(b)$$

de modo que la variable $y = \log(P)$ depende linealmente de la variable $x = \log(L)$:

$$y = A\,x + B \quad \text{con} \quad A = a\ ,\ B = \log(b) \qquad ...(8)$$

Dados n datos $(L_i, \hat{P}_i)$, los transformamos en n datos $(x_i, \hat{y}_i)$ por medio de $x_i = \log(L_i)$, $\hat{y}_i = \log(\hat{L}_i)$, después calculamos A y B con las formulas (5) y (6) , y por último estimamos a y b mediante las relaciones 8).

Vale la pena observar que a y b así estimados no son los que minimizan (8). Para un estudio más detallado debe consultarse un libro avanzado de estadística.

6.- ALGUNOS EJEMPLOS ..

PROBLEMA # 1

En la unidad de producción de Aquiles Serdán, Campeche, se sembraron 200 000 langostinos Machro brachium rosembergii. Considerando la fecha de siembra como el día cero, al cabo de 210 días se cosecharon 100 000 animales con un peso promedio de 64.42 g.

Tomando como base el modelo de crecimiento exponencial de crecimiento

$$W(t) = W_o\, e^{Qt}$$

Donde: $W(t)$ = peso en el tiempo t (g)
W_o = peso inicial (g)
t = tiempo (dias)
Q = tasa instantanea de crecimiento.

*Calcular la velocidad de crecimiento (tasa instantánea de crecimiento) de M. rosembergii a partir de los datos que se presentan a continuación, correspondientes a los muestreos realizados cada 30 días desde la siembra hasta la cosecha.

DATOS

t(dias)	W(g)
0	1.20
30	2.13
60	3.84
90	7.02
120	13.10
150	25.15
180	40.26
210	64.42

1° Linealizar el modelo:

$$W(t) = W_o\, e^{Qt}$$

a) Sacar logaritmos en ambos lados :

$$\ln(W(t)) = \ln(W_o\, e^{Qt}) \quad , \text{ pero : } \quad \ln(a\, b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(W(t)) = \ln(W_o) + \ln(e^{Qt}), \text{ Como: } \ln(a^b) = b\, \ln(a)$$

$$\ln(W(t)) = \ln(W_o) + Q\, t\, \ln(e)$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ y}}{\ln(W(t))} = \underset{\substack{\downarrow\\ b}}{\ln(W_o)} + \underset{\substack{\downarrow\\ m}}{Q}\; \underset{\substack{\downarrow\\ x}}{t} \quad \text{, ya que: } \ln(e) = 1$$

Nota: Dado que la relación es exponencial, al linealizarla se utilizar logaritmos naturales y para el calculo de la pendiente y la ordenada por mínimos cuadrados es entonces el ln de la ordenada $(\ln(W_0))$ por lo que para conocer W_0 habra de sacarse el antilogaritmo natural.

La tasa Instantanea de crecimiento es el valor de la pendiente

2°Calcular la pendiente m y la ordenada al origen b por mínimos cuadrados donde:

$$m = \frac{N\,\Sigma\,xy \;-\; \Sigma x\;\Sigma y}{N\,\Sigma\,x^2 - (\Sigma x)^2} \qquad b = \frac{\Sigma y\;\Sigma x^2 \;-\; \Sigma x\;\Sigma y}{N\,\Sigma\,x^2 - (\Sigma x)^2}$$

donde

N = número de datos

$x = t$

$y = \ln(W)$

ordenada:

$\ln(W_0) = 0.2014$

$W_0 = 1.2231$

pendiente:

$Q = 0.0194$

entonces

$$W(t) = 1.2231\, e^{0.0194\,t}$$

En seguida se compararan los valores predichos por el modeloanterior y los valores experimentales

t	experimental	modelo
0	1.20	1.22
30	2.13	2.19
60	3.84	3.91
90	7.02	7.00
120	13.10	12.52
150	25.15	22.39
180	40.26	40.04
210	64.42	71.62

Véase también la gráfica 1

PROBLEMA # 2

En la unidad de producción de Huingó Araró, Mich. se presenta la siguiente situación:

Sembraron Carpa Espejo (Cyprinus carpio specularis) con un peso promedio de 10 g y esperan cosechar al cabo de 220 días a cada carpa con un peso de 1 090 g. Por otra parte se sabe que el factor de conversión alimenticia (FCA) para esta especie bajo condiciones de cultivo similares a las que se pretenden llevar a cabo es de 0.661 y además se espera una sobrevivencia del 92.5 % .

Se sembraron 33 400 carpas repartidas en 23 estanques de 1 250 m^2 c/u.

Calcular:

a) Tasa instántanea de crecimiento (TIC)

b) Tasa instantánea de mortalidad (TIM)

c) Número final de organismos o producción.

d) Cantidad de alimento que debe ser suministrado mensualmente desde la siembra hasta la cosecha.

Datos:

$Wo = 10$ g (peso inicial)

$Wf = 1090$ g (peso final)

$T = 220$ dias

$FCA = 0.661$

sobrevivencia = 92.5 %

mortalidad = 7.5 %

superficie = 1250 m^2 x 23 estanques

a) Calcular la tasa instantánea de crecimiento (TIC). Suponiendo un modelo exponencial para el peso en función del tiempo.

$$W(T) = Wo\, e^{TIC(T)}$$

donde

$$W(T) = Wf = 1\,090 \text{ g}$$

$$Wo = 10 \text{ g}$$

$$T = 220$$

$$TIC = ?$$

Linealizando la ecuación.

$$\ln(W(T)) = \ln(Wo) + (TIC)(T)$$

desspejando TIC

$$TIC = \frac{\ln(W(T)) - \ln(W_o)}{T}$$

$$= \frac{\ln(1090) - \ln(10)}{220}$$

$$TIC = 0.0213$$

b) Cálculo de la tasa instantánea de mortalidad (TIM). Suponiendo un modelo exponencial para el número de individuos con el tiempo.

$$N(T) = N_o\, e^{-TIM(T)}$$

Donde:

$T = 220$

$N_o = 33\ 400$

$N(T) = 30\ 895$ (ya que sobreviven el 92.5 %)

TIM = tasa instantánea de mortalidad

linealizando la ecuación

$$\ln(N(T)) = \ln(N_o) - TIM(T)$$

despejando TIM

$$TIM = \frac{\ln(N_o) - \ln(N(T))}{T}$$

$$= \frac{\ln(33400) - \ln(30895)}{220}$$

$$= 0.00035$$

c) Cálculo de la producción .

Si el peso promedio de cosecha (Wf) es de 1 090 g y se cosecharan 30 895 (N(T)) carpas entónces

$$\text{producción} = (1\ 090 \text{ g})(30\ 895)$$

$$= 33\ 675\ 550 \text{ g}$$

d) Cálculo de la cantidad de alimento a suministrar cada 30 días

1° Calcular el peso promedio desde la siembra hasta la cosecha en intervalos de 30 días

$$W(t) = W_o\, e^{TIC(t)}$$

donde

$W_o = 10$ g

$TIC = 0.0213$

$t = 30, 60, 90, \ldots, 220$

t	W(t)
0	10
30	18.95
60	35.89
90	68.01
120	128.84
150	244.10
180	462.47
210	76.19
220	1084.19

2° Calcular el número de carpas desde la siembra hasta la cosecha en intervalos de 30 días

$$N(t) = No\ e^{-TIM(t)}$$

Donde

No = 33 400

TIM = 0.00035

t = 30, 60,....,220

t	N(t)
0	33 400
30	33 046
60	32 697
90	32 697
120	32 009
150	31 671
180	31 336
210	31 005
220	30 895

3° Calcular la biomasa en carpas desde la siembra hasta la cosecha en intervalos de 30 días.

BIOMASA = No. DE ORGANISMOS X PESO PROMEDIO

t	W(t)	N(t)	biomasa (kg)
0	10.0	33 400	334.0
30	18.95	33 046	626.23
60	35.89	32 697	1 173.50
90	68.01	32 351	2 291.73
120	128.84	32 009	4.124.04
150	244.10	31 671	7 730.89
180	462.47	31 336	14 491.96
210	876.19	31 005	27 166.27
220	1 084.19	30 895	33 496.05

Si se sabe que

$$FCA = \frac{CAS}{\Delta B}$$

Donde:

FCA = Factor de conversión de alimento

CAS = Cantidad de alimento suministrado

ΔB = Incremento en biomasa

Despejando CAS,

$$CAS = \Delta B \times FCA$$

$$FCA = 0.661$$

SEGUNDA PARTE

1.- Problemas de Conteo. Conjuntos. Proporciones. Porcentaje

Problema Nº 1

a) Determine cual de las siguientes series es geométrica o aritmética

1) 3.1 , 2.5 , 1.9, . . .
2) 3.0 , 4.5 , 6.75, . .
3) 1.1 , 275 , 548.9, . . .
4) 0.35 , 1.05 , 3.15,

identifique la razón de cada una

b) Encuentre el 1er. término y la suma de los primeros 5 términos de las siguientes series

1) 4º término = 17.8 , 10º termino = 20.8 (serie aritmética)

2) 6º término = 25.6 , 10º termino = 103.5 (serie geométrica)

Problema Nº 2.-

Un cubo de 1 cm tiene una área de 6 cm . Sí este cubo se parte en cubos de 1 mm de lado

a) ¿Cuántos cubos resultan?
b) ¿Cuál es el área total de los cubos?
c) ¿Cuál es el volumen total de los cubos?
d) ¿Cuál es la respuesta a las preguntas anteriores si se divide el cubo de 1 cm en cubos de 1 micra de lado?
e) Si el cubo de 1 cm se divide en cubos de 1/k cm de lado encuentra el numero de cubos, el área y el volumen total de estos.
f) ¿Qué suceda con el numero de cubos, el área y el volumen totales cuando k crece indefinidamente?

Problema Nº 3.-

El sabor ácido del café se debe en buena parte a la oxidación por efecto del aire. El mecanismo de oxidación se lleva a cabo en proporción directa al área expuesta. Explique porque el café molido se vuelva mas ácido que el café en grano en las mismas condiciones de humedad y temperatura.

(sugerencia : consulte el problema anterior)

Problema No 4.-

La ley de Charles establece que el volumen de un gas es proporcional a la temperatura absoluta (K° denota grados kelvin).

a) Haga una gráfica cualitativa de volumen contra temperatura.

A 273 K° el volumen de una molecula-gramo es de 22.4 litros y aumenta 1/273 de su volumen por cada grado que aumenta la temperatura.

b) ¿ Cuál es el volumen del gas si la temperatura aumenta a 274 K°, 275 K°, 276 K°, 277 K°?

c) ¿ Cuál es el volumen del gas a 373 K°? . Ilustre el calculo en la gráfica.

Problema No 5.-

Odum (1972) considera que existen varios niveles de integración de los diversos elementos que conforman a la biosfera,asi que varios individuos de una misma especie conforman una población,varias poblaciones una comunidad,una cantidad de comunidades relacionadas un ecosistema y todos los ecosistemas la biosfera. Represente esta clasificación en notación de conjuntos,definiendo con precisión los conjuntos involucrados y haga un diagrama de Venn.

Problema No 6.-

En la tabla de abajo se muestran los valores de de oxigeno por litro de agua de mar , medido en diversas localidades (estaciones) y a tres profundidades distintas estimadas con base en la penetración de la luz. Así , 100% de penetración significa que la muestra se obtuvo en la superficie.

	PORCENTAJE DE PENETRACION		
ESTACION	1%	50%	100%

1	1.4	1.8	1.9
2	1.5	1.3	1.4
3	2.5	2.1	2.9
4	1.4	1.8	3.0
5	1.6	1.2	1.2
6	1.9	1.8	2.0
7	1.3	1.3	2.3
8	1.9	1.4	[illegible]
9	2.1	2.2	2.3

Liste el conjunto de estaciones cuyas concentraciones de oxigeno:

a) Esta entre 1.3 y 1.6 inclusive , a una profundidad de 1%

b) Esta entre 1.5 y 2.3 , para una profundidad del 50% o del 100%

c) Es mayor que 2.0 en la superficie

fondo

d) Disminuye con la profundidad

e) Esta entre 1.3 y 1.8 inclusive , en alguna de las tres profundidades

Problema No 7.-

500 individuos de la especie Lubeo bicolor (tiburón cola [illegible]) fueron sometidos a una dosis especifica de un mutageno que actuaba sobre el aparato branquial y las aletas . El 25% de la poblacion sufrio alteraciones en las aletas y 18% en el aparato branquial. Si el 25% de la muestra experimentó ambas alteraciones ;

a) Haga un diagrama de conjuntos donde aparezca la distribución de individuos afectados

b) Encuentre la proporción de individuos que sufrieron alteracion solo en las aletas

c) La proporcion de los que sufrieron alteración solo en el aparato branquial

d) La proporcion de los que no sufrieron cambio alguno

e) Exprese los resultados anteriores en numero de individuos

Problema No 8.-

Cierta cantidad de Radio emitió 2.8×10^{18} partículas α en un año. En ese mismo lapso de tiempo se formó un volumen de Helio de 0.001 mm^3. Suponiendo que las partículas α se transformen en He :

a) ? Cual es el número de moléculas de He en 22.4 litros?
(el número así obtenido se llama número de Avogadro)

b) Dibujar una gráfica del número de moleculas de He en funcion del volumen (litros)

c) ? Por qué es valida la "regla de tres" que se aplico en (a) ?

d) Investigue qué significa la "Hipotesis de Avogadro"

Problema No 9.-

La probabilidad de ocurrencia de un evento es la proporción de casos en los que ocurre el evento entre el número total de casos (esta es la definición frecuentista de probabilidad. Hay otras).

En un conjunto universal Ω (espacio muestral), cada punto de Ω representa un caso posible y los casos favorables al evento forman un subconjunto que llamaremos A ; la probabilidad del evento lo denotaramos por P(A).

Justifique las siguientes afirmaciones utilizando la definición dada

a) $P(\Omega) = 1$

b) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A (se puede interpretar como un porcentaje)

c) Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ($\emptyset$ denota el conjunto vacio.

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Nótese que no se supone que $A \cap B = \emptyset$

e) $P(\emptyset) = 0$

f) ? Qué eventos representan los conjuntos Ω y $\emptyset$? ¿Cuándo ocurren?

g) Dada la siguiente tabla de ocurrencia de los eventos A y B complete la tabla de ocurrencia de los eventos compuestos $A \cup B$.

Problema No. 10.-

En el lanzamiento de un dado el espacio muestral es

$$\phi = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

pensando que cada dígito representa al evento de obtener ese número de puntos . La probabilidad de cada evento elemental $\{1\}$, $\{2\}$. $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, es por definición $P = 1/6$ (definición equiprobable de los eventos elementales)

Se define la probabilidad de cualquier evento compuesto , como

$$P(A) = n(A)/6$$

donde $n(A)$ es el número de eventos elementales que contiene A , porejemplo $P(\{1,2,3\}) = 3/6$, $P(\{2,4\}) = 2/6$, etc.

a) Revise que las propiedades (1)-(5) del ejercicio anterior aún son válidas , considerando algunos eventos particulares del espacio muestral Ω.

b) ¿Cuál es el conjunto correspondiente a obtener un número par de puntos ? , ¿ cuál es su probabilidad ?

c) ¿ Cuál es la probabilidad de obtener no menos de 2 puntos ?

d) ¿ Cuál es la probabilidad de obtener 8 puntos ?, ¿ que conjunto le corresponde al evento "obtener 8 puntos" ?

e) Escriba el espacio muestral para el lanzamiento de dos dados , digamos uno rojo y otro blanco . ¿ Qué probabilidad se asignaría a cada evento elemental ?

f) Haga lo mismo para el lanzamiento de tres dados distinguibles

Problema No 11.-

En una muestra de sangre de una población homogénea se obtuvieron las siguintes proporciones de cada tipo de sangre A , B , AB , O (¡ probabilidades frecuentistas !)

A——— 1/3
B——— 1/4
AB——— 1/6
O——— ?

donde la presencia del antigeno AB significa que ambos antigenos A y B están presentes , mientras que el "antigeno" O en realidad indica ausencia de antigenos del tipo A o B

a) Haga un diagrama de conjuntos para representar cada tipo de sangre

b) ¿ Que proporción tienen tipo O ?

c) ¿ Que proporción tiene tipo A o B ?

d) ¿ Que proporción tiene tipo A pero no B ?

e) ¿ Que proporción tiene tipo B pero no A ?

f) ¿ Que proporción tiene alguno de los tipos A o B , pero no ambos ?

g) Si la muestra total fue de 120 individuos , ¿ cuál es la respuesta a los incisos (a)-(f) , en número de individuos ?

Problema No 12.-

a) En una muestra al azar la relación de catadores (personas sensibles a la fenifiocarbamida) a no catadores fué de 1139 : 461 . Calcule los porcentajes de cada grupo

b) El 15% de los miembros de una población fueron afectados por una epidemia de dengue . El 8% de las personas afectadas sufrieron dengue hemorrágico (mortal) . Calcule el porcentaje de mortalidad de la población total

Problema No 13.-

Los artículos de primera necesidad aumentaron de 1975 a 1977 en los siguientes porcentajes anuales: 29% , 26% , 33% respectivamente. Mientras tanto los salarios aumentaron en 5.5% , 13% , y 18% respectivamente ; En el trienio de 1975-77 :

a) ¿ Cual fué el porcentaje de aumento de los precios en los básicos ?

b) ¿ Cuál fué el porcentaje de aumento de salarios

c) Si un kilo de huevo costaba $60.00 en 1975 , ¿ cuanto costaba en 1977 ?

d) Suponga que se tienen tres porcentajes anuales p , q y r como en el problema . ¿ Cómo se calcula el porcentaje anual en términos de p , q, r ?

e) Encuentre una fórmula que permita calcular el porcentaje en n intervalos de tiempo regulares , dado que en cada lapso se tienen los porcentajes p_1 , p_2 , p_3 , ... , p_n .

Problema No. 14.-

El banco A ofrece el 20% de interès anual y otro banco B ofrece el 2% mensual . Si se va a depositar un capital durante 1 año

a) ¿ Qué banco ofrece más ganancia ?

b) Si A ofrece un interès anual q_A y B ofrece un interès mensual q_B , ¿ que desigualdad permite decidirse por uno u otro ?

c) En un plano q_A-q_B , determine la región de decisión por el banco A , por el banco B y también la región de decisión neutral

Problema No 15.

El isótopo de Radio ^{228}Ra pierde el 9.8% de su intensidad de radiación cada año ; si I_0 es la intensidad original , ¿ cual es la intensidad después de

a) un año

b) dos años

c) n años

Problema No 16.-

Un potro tiene un peso inicial de 50 kg . La tasa mensual de crecimiento varia durante los primeros 10 meses , como sigue:

mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tasa mensual	20%	25%	19%	15%	10%	5%	1%	0%	0%	0%

a) Calcule el peso del potro después de cada mes y haga una gráfica del peso contra el número de meses

b) ¿ Cuánto pesa el potro a los 8 meses y después de 8 meses ?

c) Suponga que la tasa mensual varía como $q_n = (0.5)^n$. Aproximando hasta tres cifras decimales , calcule el peso final del potro

Problema No 17.-

Sea W^* el peso de equilibrio que alcanza un individuo . Si W_n es el peso después de n meses , $W^* - W_n$ es lo que le falta por crecer. Haga un modelo en el que la tasa disminuya proporcionalmente a lo que le falta por crecer ; Suponga que la constante de proporcionalidad es la misma cada mes

a) calcule el pesos W_{n+1} en términos de W_n

b) Suponga que $W_0 = 50$ kg , $W^* = 120$ kg y llame a la constante de proporcionalidad α . Calcule el peso hasta antes de llegar al valor de equilibrio W^* para cada valor de la constante $\alpha = 1.0$, 0.1 , 0.01 , 0.001

c) ¿ Cual es el orden de magnitud más sensato para los valores $W_0 = 50$ y $W^* = 120$?

d) Haga la gráfica de W_n contra n , para $\alpha = 0.01$

Problema No. 18.-

En 500 lanzamientos de monedas se obtuvo 48.8 % de Águilas

a) ¿ Cuantos soles cayeron ?

b) Cinco personas lanzan cada una 100 monedas . ¿ Cómo se calcula el porcentaje de águilas en los 500 lanzamientos , en términos de los cinco porcentajes individuales ?

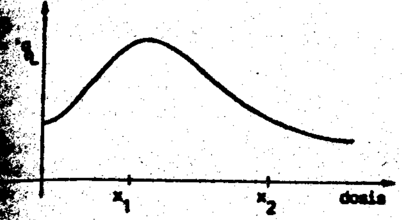
c) cinco personas lanzan cada una 50, 100, 140, 115, 95 monedas respectivamente, con un total de 500 lanzamientos . ¿ Que relación hay entre los porcentajes individuales y el porcentaje total de águilas ?

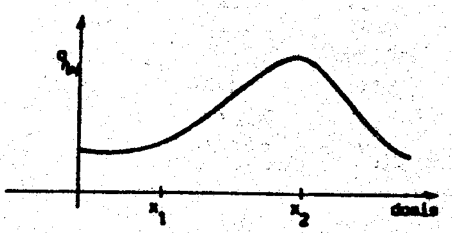
d) n personas lanzan cada una K_1, K_2, ...,K_n monedas respectivamente , con un total de $K = K_1 + \dots + K_n$ lanzamientos . Si los porcentajes individuales de águilas son $P_1, \dots, P_n$ con $0 \le P_1 \le 1$, ... , $0 \le P_n \le 1$, escriba una fórmula que permita calcular el porcentaje total de águilas P en términos de P_i , K_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Problema No. 19.-

Varios grupos de cerdos fueron sometidos a diversas dietas , variando en cada una la cantidad (dosis) de cierto nutriente con l fin de determinar el efecto de éste sobre el crecimiento en lla (L) y peso (W) de estos animales.

e midieron las razones de crecimiento de la talla (q_L) y del so (q_W) (aumento en la talla o el peso por unidad de tiempo a terminada edad) para cada dosis con los resultados cualitativos strados en las gráficas de abajo





Analice las gráficas y explique el comportamiento del peso y la lla en relación con la dosis

Si la densidad del animal permanece constante ¿ Cual es el ecto de la dosis entre x_1 y x_2 ?

Problema No. 20.-

agregar leguminosas a los cereales se obtiene una dieta más ica en proteínas , como se aprecia en la tabla de abajo , tenida de un estudio realizado en Guatemala.

MEZCLA		PROTEINA EN LA DIETA %		PROTEINA UTILIZABLE %
100 % arroz	.....	6.9	....	4.01
90 % arroz + 10 % frijol	....	7.9	....	4.96
100 % maíz	......	8.5	....	2.41
90 % maíz + 10 % frijol	.....	10.3	....	4.10
100 % sorgo	......	7.7	....	2.23
90 % sorgo + 10 % frijol	....	8.5	....	3.93
100 % avena	....	13.8	....	8.22
90 % avena + 10 % frijol	....	14.6	....	8.73

Se observa que el maíz y el sorgo son los que tienen proteinas de más baja calidad ya que el porcentaje utilizable es bajo en comparación con el de la dieta . Asimismo , es sobre éstos donde el frijol actua más favorablemente .

a) Para cada cereal , encuentre el porcentaje en que se enriquece su contenido de proteína utilizable al agregarle frijol

b) ¿ Es cierta la afirmación de que entre más baja calidad tiene el cereal , mayor es el beneficio que se logra al agregarle el frijol ?. Pruebe su respuesta

---

* Decimos que el cereal A es de calidad inferior a B si la proporción entre proteína utilizable y la proteina en la dieta para A es menor que para B.

Problema No. 21.-

Segun la FAO , la captura pesquera mundial en 1968 fuè de 5,700 x 10^4 tons. distribuidas como sigue:

VER LA TABLA EN LA SIGUIENTE HOJA

I)	Atlántico Oeste	....	400	
II)	Atlántico Este	....	1,700	
		Subtotal		2,100
III)	Indico	....	200	200
IV)	Pacífico Oeste	....	1,900	
V)	Pacífico Este	....	1,500	
		Subtotal		3,400
		Total		5,700

a) ¿ Cuál es el porcentaje de captura en cada zona ?

b) ¿ Què proporción le corresponde al Ocèano Atlántico ? realice el cálculo de dos maneras

i) tomando en cuenta la captura total en el atlántico

ii) combinando los dos porcentajes de pesca en las dos regiones este y oeste

c) 5 de cada 19 toneladas se pescaron en el pacifico . ¿ por què ?

d) En 1969 , los porcentajes de pesca se mantuvieron excepto que la pesca total fuè de 7,000 x 10^4 tons. Calcule los nuevos porcentajes

Problema No. 22.-

Se han realizado tres experimentos de saturación de un liquido a diferentes temperaturas , cuyos resultados se registran en la tabla de abajo.

C \ T	5	15	25	35	45	55
exp. 1	76	80	90	100	105	115
exp. 2	75	81	91	99	103	116
exp. 3	76	82	92	98	104	115

donde C es la saturación , medida en gramos y

T es la temperatura de saturación , medida en °C

a) Dibuje las gráficas de C contra T para cada experiento

b) Determine graficamente los parámetros de la relación lineal que mejor se ajuste a los datos de los experimentos.

Problema No. 23.-

Al elaborar una maqueta a escala 1:50 se ocuparon dos pliegos de papel cascarón , cada uno de 1 m x 1.20 m . Cada pliego cuesta $500.00

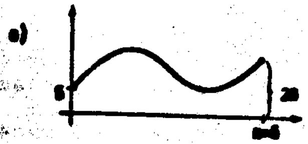
a) ¿ Cuánto papel se necesita para elaborar la misma maqueta a escala 1:20 ?

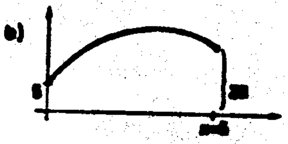
b) ¿ Cuántos pliegos deben comprarse ? . ¿ Cuál es el costo ?
c) Si se dispone solamente de un pliego , ¿ que escala debe ogerse a fin de optimizar el material ? . (La respuesta a esta última pregunta podría no ser del todo fácil)

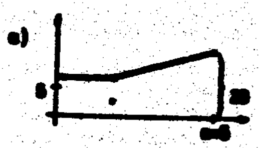
2.-RELACIONES LINEALES. Y LINEARIZACION A TRAVÉS DE CAMBIOS DE VARIABLE

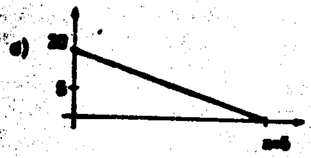
Problema No. 1.-

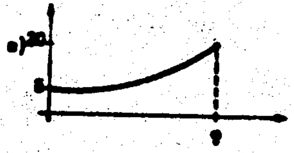
Suponga que Z es función creciente de x en el intervalo [0,5] Además Z(x) ≤ 5 + 3x . ¿ Cuáles de las siguientes gráficas corresponden a esta situación ?

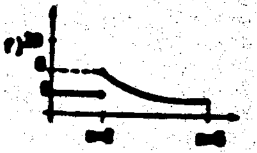




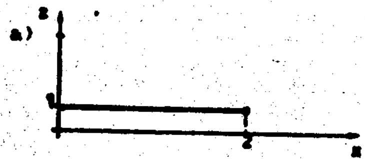


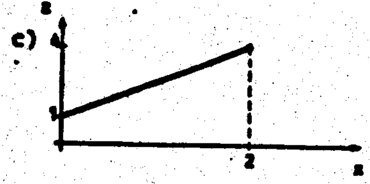


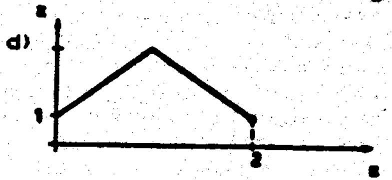




Considere ahora Y una función de x cuyos valores son inversamente proporcionales a los de Z. Dadas las siguientes gráficas de Z contra x , haga un esbozo de la gráfica de Y contra x.







Problema No. 2.-

Un alambre de cobre se expande al aumentar la temperatura . Su longitud L [cm] varía linealmente con T [°C] para temperaturas entre 0 y 50 °C inclusive .

a) Encontrar la ecuación que relaciona a L como función de T . si a 20 °C la longitud es de 76.547 cm y a 90 °C es de 77.240 cm

b) Haga la gráfica en papel milimétrico utilizando una escala adecuado

Problema No. 3.-

Al nivel del mar el agua se congela a 32 °F y 0 °C , mientras que hierve a 212 °F y a 100 °C . La dependencia entre grados Farenheit y Celsius es lineal.

a) Escriba a °F en función de °C y viceversa ; haga las gráficas correspondientes

b) Si cierta temperatura es de 68 °F . ¿ Cual es en °C ?

c) El agua se congela a 32 °F y a 0°C al nivel del mar y por cada grado de aumento en la temperatura en °F , la temperatura en °C aumenta 5/9 de su valor. Encuentre la relación entre °C y °F

Problema No. 4.-

a) Si Y es directamente proporcional a X , escriba una relación matemática entre x y Y.

b) Y es directamente proporcional a x y además Y = 3 cuando x=4 , ¿ Cuánto vale Y cuando x = 4 ? . Justifique por qué es válida la "re gla de tres " , tomando en cuenta la relación matemática del i ciso (a)

c) Si Y varia <u>linealmente</u> con x , ¿ es válida la regla de tres ? Investigue la relación entre la escala de temperaturas Farenheit y Ce sius. Si 0 °C es a 32 °F , ¿ cuanto es a 15°C? . Compare con su respuesta inicial.

d) Resuma con palabras la diferencia entre una relación lineal y un relación directamente proporcional.

Problema No. 5

Trace tres rectas al azar en papel milimetrico . Encuentre los puntos de intersección con los ejes , las pendientes y las ecuaciones de las rectas . Determine los puntos de intersección de las rectas a partir de sus ecuaciones y muéstrelos en las gráficas

Problema No.6.-

a) Dibuje en gráficas por separado (grosso modo) de
   i) una relación exponencial creciente
   ii) una relación del tipo potencial (alométrica)
   iii) una relación exponencial decreciente
   iv) una relación hiperbólica

b) ¿ Que propiedad de la gráfica distingue una relación exponencial decreciente de una hiperbóolica ?

d) Escriba la ecuación Y = f(x) para cada una de las relaciones mencionadas en el inciso (a) . ¿ Cuantos parámetros se necesitan a fin de especificar completamente la relación en cada caso ?

Problema No. 7.

Haga corresponder la relación descrita entre Y y x con su tipo poniendo el número del tipo en el paréntesis adecuado.

[illegible]) la gráfica de Ln(Y) contra Ln(x) es una recta --------- ( )
[illegible]) la gráfica de Ln(Y) contra x es una recta --------- ( )
[illegible]) la gráfica de Y contra x en papel semilog. es una recta ( )
[illegible]) la gráfica de Y contra X en papel log-log es una recta ( )

[illegible]) $Y = ab^{x}$ --------- ( )
[illegible]) $Y = ce^{Kx}$ --------- ( )

[illegible]) $ax + by = 0$ --------- ( )

[illegible]) la gráfica de Ln(Y) contra Ln(x) tiene pendiente negativa ( )
[illegible]) la grafica Ln(y) contra Ln(x) tiene pendiente uno ---- ( )

Problema No. 8.-

[illegible] el estudio "Algunos parámetros de la dinámica de la población [illegible] camarón blanco (Peneaus vanamei) , en el sistema lagunar [illegible]metla-Teacapán" de M. Nieves y P. Piña (UAS) se obtuvieron las lecturas siguientes para longitud total L [cm] , longitud del cefalotórax C [cm] y el peso W [gr] de 22 camarones .

6.1, 6.8, 6.7, 7.1, 7.3, 7.7, 8.5, 9.5, 10.1, 11.0, 11.4, 11.5
11.9, 12.2 12.4, 12.7, 12.8, 12.9, 13.3, 13.7, 13.8, 14.9

2.1, 2.4, 2.2, 2.3, 2.5, 3.0, 3.4, 3.3, 3.4, 3.7, 4.0, 3.8, 4.
4.1. 4.3, 4.3, 4.4, 4.5, 4.4, 4.7, 4.7, 5.0

1.4, 2.1, 2.5, 3.8, 3.5, 2.7, 4.9, 7.0, 8.2, 10.7, 12.3, 12.9
16.0, 15.6, 16.5, 17.5, 17.2, 17.6, 17.8, 18.8, 20.2, 25.2

[illegible]) Grafique los datos de la longitud del cefalotórax contra la longitud total, asimismo los datos de peso contra longitud total [illegible] ajuste a ojo una recta a cada gráfica y determine las ecuaciones correspondientes

[illegible]) Haga el ajuste por mínimos cuadrados y compare estas ecuaciones con las obtenidas en el inciso anterior

[illegible]) ¿ Qué tan bueno es el modelo lineal en cada caso? . ¿ Es satisfactorio ?

Problema No. 9.-

En algunos casos , una relación no lineal $y = f(x)$ puede reducirse a una relación lineal haciendo cambios de variables adecuados .

a) $y = a + bx^{2}$, graficando y contra x^{2} se espera una relación lineal . En este caso el cambio de variables ha sido $X = x^{2}$,$Y = y$
En cada uno de los siguientes casos , encuentre el cambio de variables que nos da una relación lineal

b) $y = a + bx^{n}$

c) $y = \frac{x}{a + bx}$

d) $y = a + bx + cx^2$

Problema No. 10.-

El calor especifico del cloroformo líquido tiene los valores

T [°C]	2.0	3.0	4.0	5.0
C [cal]	0.2311	0.2341	0.2371	0.2401

a) grafique C contra T en una escala adecuada
b) Suponiendo que existe una relación del tipo

$$C = a + bT + cT^2$$

entre el calor especifico y la temperatura , haga el cambio de variables adecuado para obtener una relación lineal y determine los parámetros a ,b y c por el método de mínimos cuadrados

Problema No. 11.-

La distancia recorrida por un cuerpo que cae libremente dió los siguientes resultados

T [seg]	0	1	2	3	4	5
S [m]	0	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5

a) Haga la gráfica de S contra T , ¿ què tipo de relación se sugiere ?
b) Haga el cambio de variable adecuado para llevar la ecuación una lineal y determine la relación de S como función de T (como antes use el método de mínimos cuadrados)

Problema No. 12.-

La substancia conocida como creatinina es producida por los músculos y eliminada del cuerpo exclusivamente a través de la orina. La cantidad excretada en un periodo de 24 hrs. varía de persona a persona pero sigue un patrón regular en función del peso. Algunos resultados se muestran en la figura siguiente

Peso (kg)	20	50	70	100
excrecion (mg/24 hrs.)	390	998	1402	1999

a) Dibuje una gráfica de excreción de creatinina (EC) contra (W)
b) ¿ Que tipo relación existe entre EC y W ?. Determine completamente la relación
c) Suponga que el criterio para detectar una disfunción renal es el siguiente : Dado el peso del paciente , se compara el valor teórico de la excreción de creatinina EC_{teo} , y el valor observado EC_{obs} . Si

$$\left|\frac{EC_{teo} - EC_{obs}}{EC_{teo}}\right| = d \geq 0.05 \quad \text{entonces}$$

el paciente sufre una disfunción renal.
Establezca el diagnóstico de acuerdo con el criterio anterior para [illegible] pacientes siguientes según el valor del coeficiente de disfunción d.

PACIENTE	A	B	C	D	E	F
PESO (Kg.)	35	40	60	70	80	90
EC (mg/24h)	450	600	1200	1300	1800	1810

Problema No. 13.-

Cierta cantidad de sulfato radioactivo inyectado en el torrente sanguíneo se elimina a una tasa constante. La tabla de abajo muestra los resultados de un experimento.

T (min)	8	11	20	42	78	120	160	240
S (mc)	9.75	8.90	8.00	6.35	4.00	2.50	1.50	0.62

Aquí S es la cantidad de sulfato radioactivo tomada en muestras de sangre a intervalos de tiempo cada vez más largos (en minutos)
a) Bosqueje una gráfica de S contra T . ¿Es una relación hiperbólica o una relación exponencial decreciente?
b) Haga una gráfica de Ln(S) contra T y otra de Ln(S) contra Ln(T) a fin de decidir que tipo de relación es
c) Determine los parámetros desconocidos linealizando el modo lo propuesto.
d) ¿Cual fué la dosis en la muestra inmediatamente después de inyectada?

Problema No. 14.-

Los datos siguientes describen la formación de gas a través del tiempo, a una temperatura fija, para dos substancias distintas. La primera es la reacción (llamada de primer orden) de cloroformato de triclorometilo convirtiendose en fosgeno (gas). La segunda, de la reacción de etilamina en etileno y amonia. La presión (A) en mm de Hg varia con el tiempo, de acuerdo con los datos de las siguientes tablas.

t seg	0	51	206	454	751	1132	1572	2215
A	15.03	14.58	13.32	11.49	9.73	7.79	6.08	4.17

Primera reacción

t	0	1	4	10	30	40
A	55	50	38	21	3	1.5

segunda reaccion

a) Dibuje una gráfica en papel milimétrico.
b) Proponga un modelo A = f(t) , linealice y verifique si el modelo propuesto es correcto al comparar con las propiedades de la gráfica .
c) Determine los parámetros desconocidos ; escriba explicitamente la ecuación A = f(t) y compare los valores predichos con los observados.

Problema No. 15.-

En un experimento para determinar el gasto de energía de un adul caminando a distintas velocidades , se obtuvieron los dat siguientes

Velocidad (Km/h) X	1.25	1.75	2.00	2.75	3.4	4.5	4.7	5.5	5.75	6.75	8
g. ener.(kcal/m) Y	2.1	2.75	2.4	2.75	3.3	3.9	4.1	4.9	5.2	6.6	8

a) Mediante el método de mínimos cuadrados encuentre una relaci entre Y y x.

b) Encuentre el gasto de energía a una velocidad de 6 Km/h.

Problema No. 16.-

Mysis relica es un crustáceo de agua dulce que habita en lag profundos de aguas frías y es un alimento importante de la truchas. En un estudio sobre su tolerancia a la luz se obtuviero los resultados siguientes

Exposición a la luz (semanas) X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sobrevivencia (%) Y	99	96	89	82	78	65	57	48	40	33	25	19

a) Grafique estos datos en el plano

b) ¿ Que relación entre x y Y se aprecia del inciso (a) ?

c) ¿ Cuantas semanas de exposición a la luz se requieren para qu 50% de Mysis relica sobrevivan ?

Problema No. 17.-

La vida media del C^{14} es de 5730 años . Una muestra de pino recién cortado exhibe una radioactividad de 15.3 dpm/gC (desintegraciones por minuto por gramo de carbono).

a) ¿ Cuál será su radioactividad después de 5730 años ?. ¿ Después de 11460 años ?

b) En cualquier instante t, la radioactividad presente en la muestra es

$$Y = 15.3\left(1/2\right)^{\frac{t}{5730}} \quad \text{dpm/gC}$$

c) Encuentre la radioactividad del pino a los

i) 2000 años de edad   ii) 1550 años

d) Determine la edad de las muestras de pino que tienen radioactividades de

i) 10 dpm/g ; ii) 8 dpm/g ; iii) 1.5 dpm/g ; iv) 14 dpm/g

Problema No. 18.

Supongamos que se llena un tanque cilíndrico a razón de 5 litros por minuto . De acuerdo con la definición de crecimiento isométrico ,

a) ¿ Es verdad que el volumen de agua crece isométricamente ? ¿ y si se llena a razón de 10 litros por minuto ?

b) Haga una gráfica del volumen en función de cada una de las dimensiones x= diámetro de la base, z= altura del volumen de agua

c) Si el cilindro tiene un radio de 20 cm y lo llenamos con agua a razón de 5 litros por minuto, calcule el área, el volumen, y la altura del agua a los 0, 1, 2, 3 y 4 minutos. Compare los resultados entre sí, por ejemplo ¿ Cuál es la tasa de cambio del área, y la altura entre el minuto 0 y el 1, entre 1 y 2, entre 3 y 4 ?

d) Con los mismos datos que en el inciso (c), encuentre el volumen, el área y la altura como función del tiempo.

e) Si al radio r lo permitimos variar de modo que el cociente

$$\frac{\text{altura}}{\text{radio}} = \frac{2}{8\pi} \quad \text{(constanteeneltiempo)}$$

encuentre r y h como función de t

Problema No. 19.-

a) Un rectángulo de ancho a y longitud ℓ crece de modo que la razón entre ℓ y a es constante e igual a 2. Además $\ell(t) = 0.3 + 2t$ (t medido en minutos). ¿ Cuánto vale a en t=0 , en t=1 ?

b) Supongase ahora que $\ell(t) = 50-2t$ y $S(1) = 2219$ = superficie en t=1 . Si la proporción entre ℓ y a permanece constante , encuentre a como función de t y también S(t) . ¿ La figura crece o decrece ? Dibuje sus gráficas

Problema No. 20.-

Considere ahora una población cuyo número de individuos N para cada instante t está dado por N(t) = 3 + 2t y su disponibilidad de alimento A en cada momento t es A(t) = 100 + 3t (A medida en Kg)

a) Si cada individuo consume 3 Kg de alimento ¿ Existirá un momento a partir del cual la disponibilidad A es menor que las necesidades ? , si es así calcule ese instante

3.- POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES. FUNCIONES EXPONENCIALES y LOGARITMICAS.

Problema No. 1.-

En un estudio de cruza de chicharos se encontró que la caracteristica de piel suave (s) es dominante sobre la caracteristica de piel rugosa (r). Esto significa que si un progenitor aporta un gen dominante y el otro progenitor un gen cualquiera, dominante o recesivo, en la progenie aparecerá la caracteristica dominante

Originalmente, en la población, se tiene una proporción p de genes dominantes y una proporción q de recesivos, luego $p+q = 1$ y $p,q \geq 0$. Si los apareamientos ocurren al azar, las proporciones de individuos que tienen las siguientes combinaciones de genes se presentan en la tabla de abajo (Mendel)

SS	p^2
Sr ó rS	$2pq$
rr	q^2

donde $p^2+2pq+q^2 = (p+q)^2 = 1$

a) Muestre que la proporción de hijos que posee la caracteristica dominante de cáscara suave es $2p-p^2$

b) ¿Conqué frecuencia p de padres con cáscara suave se obtiene la mayor proporciónde chicharos hijos con cáscara suave si la proporción q de padres con cáscara rugosa es mayor que 0.25 ?

Problema No. 2.-

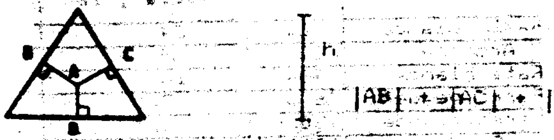
En ciertas polillas, las hembras atraen a los machos expeliendo una sustancia especial. Con el fin de utilizar este hecho en el control de la población de polilla, se colocó en trampas adecuadas diferentes cantidades de aroma. Los resultados se muestran en la tabla

X Cantidad de sustancia (mg)	N Número de polillas atrapadas
0.1	3
1.0	7
10.0	11
100.00	20

a) Muestre que $N = A\ x^{B}$ (aproximadamente). Sugerencia : transforme los datos utilizando logaritmos.

Problema No. 3.-

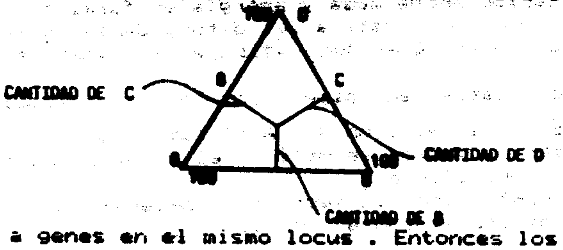
En un triángulo equilátero la suma de las distancias de un punto interior a los lados del triángulo es una constante, de hecho es igual a la altura del triángulo (véase figura)



$$|AB| + |AC| + |AD| = h$$

a) Demuestre la propiedad geométrica mencionada.

Esta propiedad permite representar en un triángulo a tres cantidades que varían de modo que su suma permanece constante



b) Sean A y a genes en el mismo locus . Entonces los individuos son AA, aa (homocigotos) .o Aa (heterocigotos) . Si P_{AA} , P_{aa} y P_{Aa} son los porcentajes de los tres genotipos en una población , entonces

$$P_{AA} + P_{Aa} + P_{aa} = 100\ \%$$

y estas proporciones se pueden representar en un triángulo.

Si el apareamiento es aleatorio , la ley de Hardy-Weinberg afirma que

$$P_{Aa}^2 = 4P_{AA}\ P_{aa}$$

Represente esta relación en el triángulo (note que representa una parábola)

b) Sean p y q las frecuencias relativas de A y a respectivamente. Entonces los tres genotipos se presentan con frecuencias (ley de Hardy-Weinberg) p^2 ,2pq , q^2 . Representar estas frecuencias para

i) $p = 0.2$, $q = 0.8$ ---- ii) $p = 0.4$, $q = 0.6$
iii) $p = 0.35$, $q = 0.75$ -- iv) $p = 1$, $q = 0$

Problema No. 4.-

Se midió el gasto de energia al correr, para varias especies. Sea E la energia gastada al transportar un gramo de peso corporal , un kilómetro y M la masa del cuerpo . La tabla muestra algunos resultados (Schmidt-Nelsen; 1972)

Animal	masa (g)	energia (joule/g. km)
Ratón blanco	21	54
Ardilla	226	15
Rata blanca	384	18
Perro pequeño	2600	7.1
Perro grande	18000	3.9
Oveja	39000	2.4
Caballo	580000	0.63

Encuentre la relación entre masa y energia en forma exponencial o de potencia que mejor se ajuste a los datos, de dos maneras:

a) linealizando al tomar logaritmos, (dibuje la gráfica en papel milimètrico)

b) graficando los datos en papel log-log y calculando las constantes A y B en la relación $M = A\ e^{B}$ como sigue: Ln M = B Ln e +

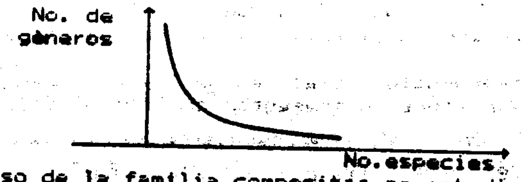
i) tomando un par de puntos se calcula el valor de la pendiente . Este valor es B . Justifique

ii) Tomando un punto sobre la recta para determinar Ln A

c) Compare sus resultados con el inciso (a)

Problema No. 5.-

En la naturaleza se observa para cada familia , que los gèneros monotípicos - con una sola especie - son los más numerosos; los dipicos-con dos especies- son los dela frecuencia siguiente . Gèneros con muchas especies son sucesivamente menos numerosos . Por lo general , la gráfica de número de gèneros contra número de especies es hiperbólica.



a) En el caso de la familia compositae se estudiaron 1143 gèneros con los siguientes resultados

446	gèneros	de	1	especie
140	"	de	2	especies
97	"	de	3	"
43	"	de	4	"
55	"	de	5	"

Sea x el número de especies de un gènero , z el númwero de gèneros que tienen x especies . Supongamos que la relación entre ellas es

$$xz^{a} = b$$

Mediante logaritmos encuentre por minimos cuadrados el valor de a y b , para la tabla anterior

Problema No. 6.-

En el caso de poblaciones vegetales , es razonable suponer que la competencia por el alimento que contiene el suelo afectará l distribución espacial de la población . Así , si los individuos

tienen una gran capacidad de absorción de materia nutritiva , habrá pocos en una área relativamente grande , en tanto que si los individuos consumen poco , habrá más por unidad de superficie. En los datos siguientes P representa el número de individuos (pinos blancos) por unidad de área (acre) y d representa el grosor promedio del tronco (pulg.) . Nota : d es una medida de la capacidad de absorción de materia nutritiva del árbol .
a) ¿ Que tipo de relación esperaría usted entre P y d -cualitativamente-?

P	1.0	1.4	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
d	4000	2700	1300	710	450	310	230
P	7.0	8.0	9.0	10.0			
d	185	150	120	100			

b) Haga una gráfica de P contra d en papel milimètrico y discuta lo inadecuado o adecuado de la respuesta dada al inciso (a) (responda primero el inciso (a) y solo hasta que esté seguro pase al inciso (b))

c) Proponga un modelo de la relación de P con d . Linealice para determinar completamente el modeloy compare con los datos experimentales .

Problema No. 7.-

El caracol Purpura pansa , es una especie marina que produce un tinte utilizado por los indigenas de la costa Oaxaqueña para colorear sus prendasceremoniales . En un estudio reciente se ha determinado que la biomasa B de los organismos de edad t , es una función cuadrática de la edàd , es decir

$$(*) \qquad B(t) = a(t-b)^2 + c$$

y la cantidad de tinte P producido por un individuo es proporcional a su edad .

$$(**) \qquad P(t) = dt$$

(a , b, c, d son constantes positivas)

a) La biomasa de los organismoa de edad cero se supone igual a cero , i.e. B (0) = 0 . Encuentre el valor del parámetro c en términos de a y b .

b) Del inciso anterior se concluye que B solo depende de los parámetros a y b . Determine el dominio de valores de t para los que B (t) en (*) es negativa . ¿ Que interpretación biológica tiene b ?

c) Haga las gráficas de (*) y (**)

d) Encuentre la edad óptima de explotación ; esto significa encontrar la edad que produce mayor cantidad de tinte)

Problema No. 8.-

Tomando en cuenta los datos referentes a longitud total L [cm] ,lon gitud del cefalotórax C [cm] y peso W [gr] de camarones en el problema de la sección II

a) Justifique por qué cabe esperar una relación potencial $W = a\ L^b$ para el peso y la longitud total. ¿ Cuanto esperaría usted que valiera b ?

b) Tomando logaritmos, linealice la relación anterior y determine el valor de las constantes a y b por mínimos cuadrados.

c) ¿ Qué tipo de relación espera encontrar entre la longitud L y la longitud del cefalotórax ? ¿ por qué ?

d) Determine explícitamente la función propuesta en el inciso (c) (ésto significa determinar todos los parámetros), linealizando en forma adecuada

e) En ambos casos, compare los resultados predichos con los observados.

f) ¿ Por qué con objeto de resolver el inciso (b) no conviene hacer el cambio de variables $Y = L$, $X = L^b$ para linealizar ?

Problema No. 9.-

En las escamas de los peces aparecen ciertos contornos, llamados anillos, que parten de la base de la escama y tienen aproximadamente su forma. Estos anillos surgen debido a cambios estacionales, por lo tanto su número es igual al número de cambios climáticos que el pez ha soportado, con lo cual podemos estimar su edad ' por ejemplo si los cambios climáticosson anuales y la escama presenta 5 anillos, entonces el pez tiene entre 5 y 6 años. El radio R de una escama se define como la longitud del segmento que atraviesa a la escama desde su base hasta el otro extremo pasando por su centro.

a) Sea R (t) el radio de la escama de un pez de edad t y supongamos que

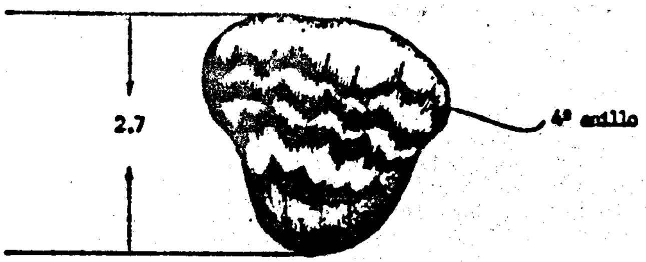
$$R\ (t) = \frac{a\ t}{b + t}$$

calcule la edad del pez si conoce R

b) Para cierta especie se tienen los datos siguientes

Anillo	1	2	3	4
Ri	.79	1.43	2.03	2.58
Li	14.30	21.45	27.51	34.08

Ri es el radio del i-esimo anillo y Li la longitud de un pez cuyo radio de escama es Ri . Por mínimos cuadrados encuentre la recta L = a + b L , que mejor se ajuste a estos datos
c) Consideremos un pez cuyo radio R es 2.7 y presenta 4 anillos - por tanto su edad está entre 4 y 5 años - .



Con la recta estimada en el inciso (b) , calcule la edad del pez suponiendo que la tasa de crecimiento despues del 4o. año se mantiene constante e igual a L (4) - L (3).
d) Más realista que la suposición anterior es considerar que

$$\frac{L\ (t + \Delta t)\ -\ L\ (t)}{\Delta t} = K\ (L_{\infty}\ -\ L\ (t))$$

Tome $\Delta t = 1$ y los valores de L sean los calculados con la recta del inciso (b) , para estimar K y L_{∞} .
e) Con los resultados del inciso anterior calcule la edad del pez

Problema No. 10.-

En una capa de agua , la luz penetra de modo que la intensidad disminuye conforme aumenta la profundidad x , de acuerdo con la ley de Bouger - Lambert.

$$I\ (x) = Io\ e^{-\mu x}\ .....\ (1)$$

Io es la intensidad de la luz en la superficie de la capa ; μ es una constante que depende de la calidad del agua ; por ejemplo , la cantidad de sal disuelta .
a) Muestre que para una profundidad x , la intensidad es directamente proporcional a la intensidad de luz en la superficie.
b) Si el coeficiente de absorción μ , cambia a $r\mu$ entonces la intensidad $I_r(x)$ se relaciona con la intensidad I (x) de la ecuación (1) del modo siguiente

$$I_r(x) = Io^{1-r}\ I^r\ (x)$$

demuéstrelo.
c) Demuestre que a una profundidad dada x , la intensidad $I_r(x)$ decrece cuando r crece (sugerencia : $\frac{I_r}{I_e} = \frac{(I/Io)^r}{(I/Io)^e}$, además I/Io > 1)
d) Para simplificar supongamos que α es el coeficiente de absorción del agua dulce y que el coeficiente crece linealmente conforme agregamos sal de forma tal que $\mu = (s + 1)\alpha$, donde s es

la salinidad.

Explique como se puede calcular la salinidad de una muestra de agua, midiendo la penetración de la luz. Haga los cálculos.

Problema No. 11.-

Una cantidad x crece logísticamente si su dependencia con el tiempo es

$$x\ (t) = \frac{K}{1 + c\,e^{-\alpha t}}$$

a) ¿ Cuál es el tamaño de x cuando t = 0 ?

b) ¿ Cuál es el tamaño de x cuando t tiende a infinito ?

c) ¿ Qué interpretación tienen las constantes K y c ?

d) Defina $q\ (t) = \dfrac{K - x\ (t)}{x\ (t)}$. ¿ Qué interpretación puede dársele a esta razón ? . Demuestre que $\alpha = \mathrm{Ln}\ (q\ (0)/\ q\ (1))$

Problema No. 12.-

a) Si $x\ (t) = \dfrac{K}{1 + c\,e^{-\alpha t}}$, demuestre que

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{K - x}{x}\right) = \mathrm{Ln}\ c - \alpha t$$

b) Utilizando esta relación encuentre una estimación (ajuste una recta) para los parametros c y α , para una colonia de bacterias cuyo crecimiento se describe en la tabla de abajo .

Edad de la colonia (dias)	0	1	2	3	4	5
Area (cm)	0.24	2.78	13.53	36.30	47.50	48.40

Utilice K = 49.26

B I B L I O G R A F I A

TEXTOS BASICOS

1.- Cruse , A. B. , Granberg , M. " Lectures on freshman calculus "
Addison-Wesley , Reading Mass (1971)

2.- Leithold , L. " El cálculo con geometria analitica "
Harla , Mex. (1982)

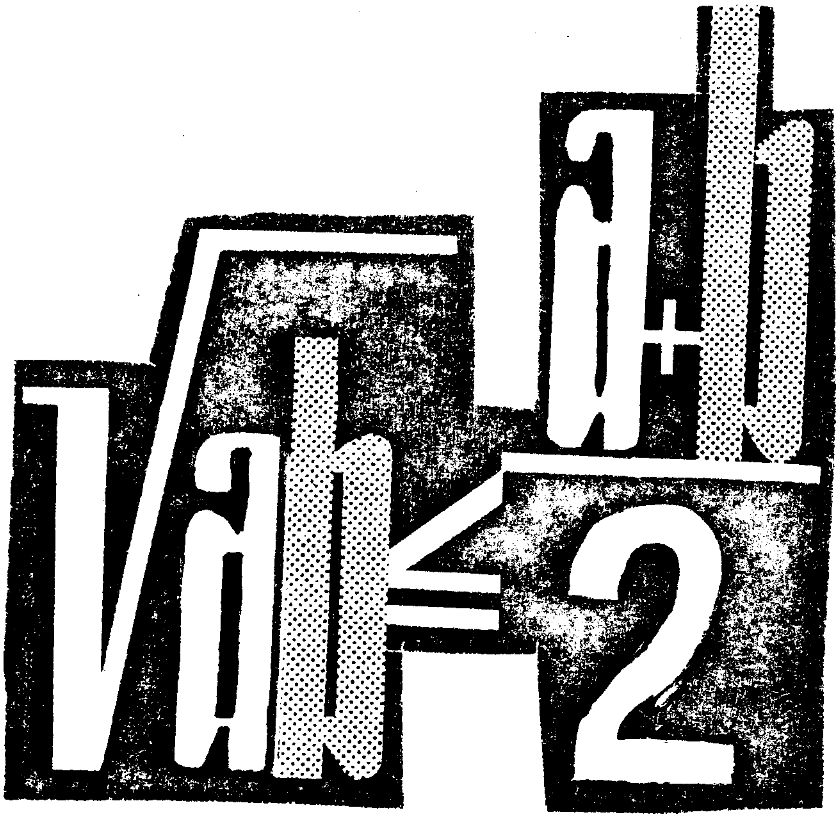
3.- Mather , K. " Análisis estadístico en Biologia "
Paraninfo , Madrid (1971)

4.- Swokwoski , E.W. " Algebra universitaria "
CECSA (1971)

5.- Stein , Sh. " Cálculo y geometria analitica "
Mc-Graw Hill (1982)

6.- Urquhart , N. S. ; Clow , D. J. " Mathematics in biology : calculus and related topics "
W.W. Norton . New York

7.- Grupo de biomátematicas . " Curso básico de matemática en biologia "
Vinculos matemáticos . Fac. ciencias (UNAM) (1986)


$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$