4. Funciones y curvas extraordinarias, o un paseo por un museo de arte matemático

Cómo se desarrolló el concepto de función

Los conceptos matemáticos han tenido un largo periodo de desarrollo. Surgieron como generalizaciones de ideas intuitivas derivadas de la experiencia cotidiana. Al quitarles gradualmente aspectos especiales y accidentales, estas ideas intuitivas cristalizaron lentamente en definiciones matemáticas precisas. A menudo ocurría que estas definiciones se podían aplicar no sólo a aquellos objetos cuyo estudio llevó a la formulación de tales definiciones, sino también a otros objetos no considerados anteriormente. Al desarrollar el estudio de estos nuevos objetos, el proceso de abstracción pasó a otros niveles, extendiendo las definiciones originales con base en los nuevos estudios. Los conceptos matemáticos adquirieron así un significado más amplio, abarcando clases más y más grandes de objetos, presentes en campos muy variados de las matemáticas.

El concepto de número, por ejemplo, tuvo ese largo periodo de desarrollo, empezando en los tiempos prehistóricos cuando la gente sólo podía contar “uno, dos, muchos”, continuando hasta nuestros días con los números naturales, las fracciones, los números negativos, los números complejos, los cuaternios, los números hipercomplejos,... Es justo reconocer que no todas las generalizaciones de ciertos conceptos tuvieron una acogida entusiasta entre los matemáticos. Por ejemplo, durante mucho tiempo los números complejos e incluso los números negativos no fueron reconocidos como reales por muchos matemáticos.

El concepto de función también siguió un camino tortuoso. La idea de la interdependencia de dos cantidades parece haber surgido en la ciencia griega clásica, aunque las cantidades sólo tenían una naturaleza geométrica. El propio Newton, uno de los fundadores del análisis matemático, usó solamente el lenguaje geométrico en su discusión de las cantidades interdependientes. Aunque el concepto de función había sido usado realmente desde el tiempo de Fermat y Descartes, el término “función” sólo apareció hasta 1694, en los trabajos del matemático alemán Leibnitz. Él y Newton comparten el crédito de haber establecido los fundamentos del cálculo. Pero el concepto de función de Leibnitz era muy estrecho: Él decía que la abscisa, la ordenada, la subtangente y la subnormal, el radio de curvatura y otros segmentos de recta se relacionaban con un punto bien definido de la curva y decía que existía cierto tipo de dependencia entre cualesquiera dos de estos segmentos.

Así, Leibnitz también restringió las funciones al ámbito de la geometría. Fue únicamente hasta 1718 que J. Bernoulli, alumno de Leibnitz, dio una definición del concepto de función libre del lenguaje geométrico:

Una función de una cantidad variable es una magnitud formada de alguna manera a partir de esta cantidad variable y constantes.

El siguiente paso en el desarrollo del concepto de función está ligado con el nombre de Leonhard Euler, de la Academia de Petersburgo, un alumno brillante de J. Bernoulli. En su obra *Cálculo Diferencial* definió así el concepto de función:

Las cantidades que dependen de otras de tal forma que si las segundas cambian, entonces también cambian las primeras, son funciones.

Sin embargo, Euler y los otros matemáticos de su tiempo requerían que una función se pudiera expresar por medio de una fórmula. Desde el punto de vista de los matemáticos del siglo XVIII la expresión

$$y = \begin{cases} x, \text{ si } \ x < 0 \\ x^2, \text{ si } \ x \geq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

define no una, sino dos funciones.

Fue evidente que el asunto era mucho más complejo. Al resolver el problema de la cuerda vibrante, D. Bernoulli obtuvo una respuesta en la forma de lo que se llama una *serie trigonométrica*. No hablaremos aquí de estas series; sólo diremos que la forma de la cuerda está dada por una sola fórmula, aunque contenga un número infinito de términos.

Este mismo problema de la cuerda vibrante fue resuelto por el matemático francés d'Alembert. Su solución tenía una forma un poco distinta a la de Bernoulli y, lo que es más importante, podía ser dada por fórmulas distintas para valores distintos del argumento.

Surgió entonces una contradicción aparentemente irresoluble ante los matemáticos del siglo XVIII. Se habían obtenido dos respuestas para el mismo problema, una expresada mediante una única fórmula y la otra expresada mediante varias fórmulas. La solución de D. Bernoulli fue cuestionada desde este punto de vista. Se pensó que no había encontrado todas las soluciones al problema, sino sólo las soluciones expresables mediante una fórmula única. Surgió una amarga controversia en la cual tomaron parte algunos matemáticos del siglo XVIII: Euler, d'Alembert y otros.

La controversia, en esencia, giraba en torno del concepto de función, la conexión entre la dependencia funcional y la posibilidad de expresar esta dependencia por medio de una fórmula. Se obtuvo una solución definitiva a esta pregunta al principio del siglo XIX, cuando el matemático francés J. Fourier mostró que la suma de una serie infinita de funciones trigonométricas se puede expresar mediante diferentes fórmulas en intervalos distintos. Él dio entonces una nueva definición de función, enfatizando la asignación de valores; el hecho de que esta asignación se hiciera por medio de una fórmula o no carecía de importancia.

El resultado de Fourier fue mejorado por el matemático alemán Dirichlet, quien mostró que cualquier curva puede ser la gráfica de la suma de una serie trigonométrica. Sólo se requería que el número de máximos y mínimos en la curva fuera finito y que la curva tuviera amplitud acotada. Dirichlet también mejoró la definición de función dada por Fourier, dándole la forma actual. Lacroix, Lobachevsky y otros matemáticos habían dado algunas definiciones parecidas poco antes de Dirichlet. La definición de Dirichlet es:

Una cantidad variable y es función de una cantidad variable x si a cada valor de la cantidad x le corresponde un valor de la cantidad determinado de manera única.

Posteriormente se añadieron las palabras "perteneciente a algún conjunto" a las palabras "cada valor de la cantidad *x*", ya que la función no tiene que estar definida para todos los valores de *x*.

Esta definición era extremadamente general: no decía nada acerca de la necesidad de dar la función por medio de una única fórmula válida en todo el dominio de definición de la función. Además, no era necesario dar ninguna fórmula, basta definirla mediante palabras. Por ejemplo, el propio Dirichlet estudió la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \text{ es un número irracional} \\ 1, \text{ si } x \text{ es un número racional} \end{cases} \qquad (4.2)$$

Esta definición no especificaba una función, desde el punto de vista de los matemáticos del siglo XVIII, ya que no se daba ninguna fórmula que permita a uno calcular los valores de la función de Dirichlet. Sin embargo, esta definición determina completamente la función. Por ejemplo, es claro que $f(3/4) = 1$, mientras que $f(\sqrt{2}) = 0$.

La definición de Dirichlet, en esencia, era la definitiva (con el refinamiento indicado) para funciones numéricas con argumento numérico. Los desarrollos posteriores consistieron en considerar funciones definidas en conjuntos arbitrarios y con valores en conjuntos arbitrarios. Supongamos que se tienen dos conjuntos A y B y que cada elemento a de A tiene asociado un elemento b de B. Entonces decimos que se ha definido en A una función con valores en el conjunto B. En esta formulación tan general, el concepto de función se funde con el de *correspondencia*, aplicación y transformación.

Por ejemplo, desde este punto de vista, el área de un triángulo es una función definida en el conjunto de todos los triángulos y con valores en el conjunto de números positivos. El círculo inscrito en un triángulo es una función definida en el conjunto de todos los triángulos con valores en el conjunto de círculos. Pero aquí no utilizaremos ese punto de vista tan general; restringiremos nuestra atención a funciones definidas en conjuntos de números y que toman valores numéricos.

El genio escapa de la lámpara

La definición de Dirichlet permite que las funciones tengan propiedades muy singulares. Anteriormente, si se quería construir una función con alguna propiedad poco usual, había que perder mucho tiempo combinando distintas fórmulas antes de tener éxito; ahora el trabajo era más simple, se podían construir y estudiar varias funciones sin preocuparse por el hecho de que fuesen expresadas mediante fórmulas. A partir de la última mitad del siglo se comenzó a construir funciones con propiedades completamente distintas de las de las funciones "bien comportadas". En realidad, ni siquiera el propio Dirichlet creía que existieran tales monstruos.

La propia función de Dirichlet, de la que hablamos anteriormente, ya es poco usual. Después de todo, hay una infinidad de números racionales e irracionales en cualquier intervalo del eje x, sin importar su tamaño. Pero la función de Dirichlet vale uno para los números racionales y cero para los irracionales. Así, si nos movemos a lo largo del eje x, el valor de la función constantemente salta entre 0 y 1. Es imposible graficar esta función, puesto que es discontinua en cada punto.

Incluso algunas funciones continuas tienen ciertas propiedades inesperadas. Por ejemplo, ¿puede una función continua tener una infinidad de máximos y mínimos en un intervalo finito? A primera vista, esto parece imposible. La curva necesitaría espacio para bajar desde un máximo hasta un mínimo y luego para subir a un máximo, etcétera. ¿Cómo puede hacer esto en un intervalo finito? Sin embargo, tales funciones tan singulares existen y es simple construir una.

Construiremos tal función en el segmento [0,1]. Primero cortamos el segmento en dos y construimos un triángulo equilátero en la mitad de la izquierda. Ahora dividimos la mitad de la derecha en dos partes iguales y construimos un segundo triángulo equilátero en el segmento [1/2, 3/4]. Hacemos la operación descrita una infinidad de veces. Como resultado encontraremos una serie de montañas con una infinidad de cúspides que gradualmente bajan hasta el punto 1, como se ve en la Figura 18. Tomamos la curva obtenida como la gráfica de la función $f(x)$. Así la función está definida en cada punto del segmento [0,1] con excepción del extremo de la derecha, l. Hacemos $f(1) = 0$.

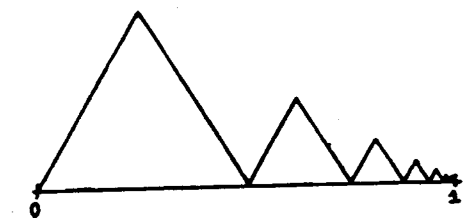

Figura 18.

Como la altura de las cúspides tiende a 0 cuando x tiende a 1, obtenemos una función continua en todos los puntos del segmento [0,1]. ¡Pero el número de máximos y mínimos en este segmento es infinito!

Para construir una función tan extraña, un matemático del siglo XVIII hubiera invertido mucho tiempo buscando combinaciones de funciones antes de conjeturar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, \text{ si } & x \neq 0 \\ 0, \text{ si } & x = 0 \end{cases} \qquad (4.3)$$

tiene una infinidad de máximos y mínimos en el segmento [0,1] (Figura 19).

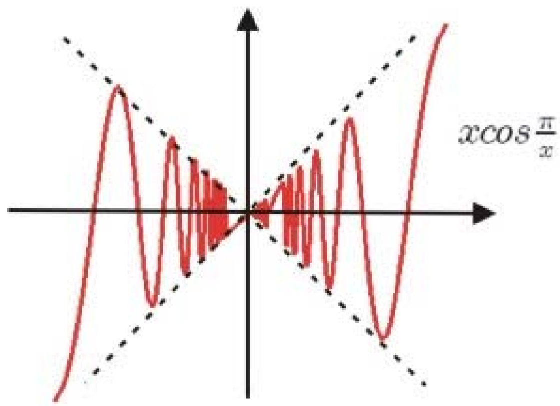

Figura 19.

Pero las funciones con una infinidad de máximos y mínimos sólo eran la primera de las desagradables sorpresas que se reservaban para los matemáticos. El genio sólo había salido de la lámpara.

Puntos húmedos

La función construida en la sección anterior sólo tiene un punto cerca del cual hay una infinidad de máximos y mínimos, el punto l. Ahora construiremos otra función con muchos más de estos puntos.

Imaginemos que cae la lluvia en el segmento [0,1] del eje x. Construimos un refugio contra la lluvia como sigue. Dividimos el segmento [0,1] en tres partes iguales y levantamos una tienda de campaña en la forma de un triángulo equilátero en la parte central. Ésta protege a todos los puntos de la parte central contra la lluvia, excepto los extremos, es decir, los puntos 1/3 y 2/3.

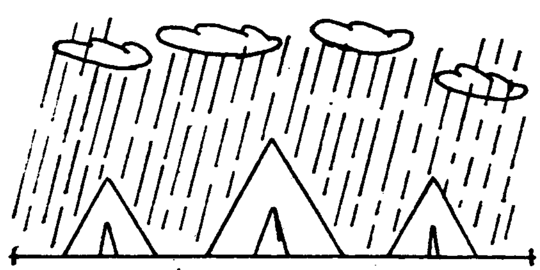

Figura 20. La lluvia cae.

Ahora dividimos cada uno de los dos pedazos restantes en tres partes y protegemos la parte central con una tienda de la misma forma, pero de la mitad del ancho. Así obtenemos la curva que se muestra en la Figura 21. En el tercer paso de este procedimiento levantamos cuatro tiendas más, luego ocho más, etcétera.

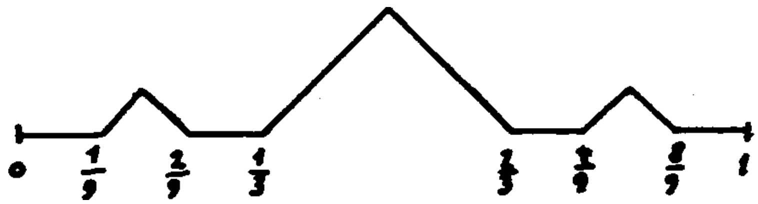

Figura 21

¿Todos los puntos del segmento han sido protegidos por la curva dentada? ¿Quedan puntos que se mojen con la lluvia? Es fácil señalar algunos de los puntos "húmedos"; por ejemplo, los extremos de los segmentos protegidos; es decir, puntos como 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, etcétera. Todos estos puntos quedan desprotegidos cuando las tiendas correspondientes se levantan y permanecen desprotegidos por las tiendas levantadas posteriormente. Es fácil ver que hay una infinidad de tales extremos pero que sólo forman un conjunto numerable.

Ocurre, sin embargo, que hay un conjunto no numerable de puntos "húmedos" además de los anteriores. Es conveniente usar la representación ternaria para describirlos. Como sabemos, la representación ternaria se forma de la misma manera que la representación decimal, excepto que los números se agrupan de tres en tres en vez de diez en diez. Así, en la representación ternaria sólo usamos los dígitos 0, 1, 2 para escribir los números, en vez de los diez que ordinariamente usamos.

Es fácil aprender a cambiar la representación de un número cuya representación ternaria es 0.02020202...

El número está representado en el sistema decimal por la serie geométrica

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \cdots \qquad (4.4)$$

La suma de esta serie es l/4. Así,

$$\frac{1}{4} = 0.020202\ldots \qquad (4.5)$$

Ahora podemos decir con exactitud cuáles puntos permanecen húmedos después de poner todas las tiendas protectoras. La primera tienda protege a los puntos que están entre 1 y 2. Pero éstos son justamente los puntos cuyas representaciones ternarias tienen la forma

0.1... (4.6)

donde los puntos indican cualquier combinación de los dígitos 0, 1 y 2 (en la misma forma que todos los puntos cuya representación decimal empieza con el dígito 1, es decir, tienen la forma 0.1..., están entre los puntos 1/10 y 2/10).

Aquellos puntos que siguen húmedos después del primer paso son aquellos cuya representación ternaria tiene la forma

0.0... (4.7)

o bien

0.2... (4.8)

Podemos demostrar de la misma manera que después de poner las dos tiendas del segundo paso los puntos que permanecen húmedos son sólo aquellos que empiezan con una de las siguientes cuatro combinaciones:

0.00...

0.02... (4.9)

0.20...

0.22...

Así, cualquier punto en cuya representación ternaria aparezca 1 quedará protegido de la lluvia en algún momento. Al final sólo permanecen húmedos aquellos cuya representación ternaria pueda escribirse sin usar l. Por ejemplo, los puntos

$$\frac{1}{4} = 0.020202\ldots \qquad (4.10)$$

y

$$\frac{3}{4} = 0.20202\ldots \qquad (4.11)$$

permanecen húmedos.

Ahora es claro por qué el conjunto de puntos “húmedos” tiene la cardinalidad del continuo. Este conjunto puede ponerse en correspondencia uno a uno con el conjunto de telegramas infinitos [ver (3.20)]. Podemos hacer esto poniendo cada punto de la forma

0.20220200... (4.12)

en correspondencia con un telegrama infinito remplazando 0 por el punto y 2 por el guión, Al seguir este procedimiento, números distintos corresponden a telegramas distintos. Ya sabemos que el conjunto de telegramas infinitos tiene la cardinalidad del continuo, de modo que el conjunto de puntos húmedos también tendrá esta cardinalidad.

El conjunto de puntos que llamamos húmedos fue construido por primera vez por Cantor y ahora se llama el *conjunto de Cantor*. La construcción de las tiendas muestra que la curva dentada tiene una infinidad de máximos y mínimos cerca de cada punto del conjunto de Cantor.

La escalera del diablo

Existe otra interesante función relacionada con el conjunto de Cantor, definida como sigue: Primero dividimos el segmento [0,1] en tres partes iguales y decimos que nuestra función vale 1/2 en cada punto del tercio medio. Luego dividimos los tercios de la izquierda y de la derecha en tres partes iguales y decimos que la función vale 1/4 de 1/9 hasta 2/9 y vale 3/4 de 7/9 a 8/9. Ahora tenemos cuatro segmentos en los que no hemos definido todavía la función:

$$\left[0,\frac{1}{9}\right],\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right],\left[\frac{8}{9},1\right] \qquad (4.13)$$

Dividimos cada uno en tres partes iguales y hacemos la función igual a 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, respectivamente en las cuatro partes intermedias.

Siguiendo este proceso, obtenemos una función definida en todos los puntos “secos”, es decir, en todos los puntos que no pertenecen al conjunto de Cantor. Es fácil definirla también en los puntos de este conjunto, de tal forma que sea continua y no decreciente en el segmento [0,1]. Una aproximación a la gráfica de la función obtenida aparece en la Figura 22. Tiene la forma de una escalera con un número infinito de escalones.

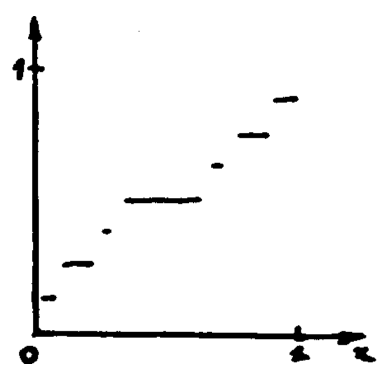

Figura 22.

Por supuesto, después de aprender algo acerca de las curvas con una infinidad de máximos y mínimos, no nos sorprenderemos con una escalera con una infinidad de escalones. Pero aquí hay algo sorprendente. Calculemos la longitud total de nuestra escalera. El primer escalón mide 1/3, los siguientes miden 1/9 cada uno, los siguientes cuatro tienen una longitud de 1/27 cada uno, etcétera. Así, la suma de las longitudes de todos los escalones se expresa mediante la serie geométrica

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots \qquad (4.14)$$

La suma de esta serie es

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1 \qquad (4.15)$$

Por lo tanto, la longitud total de la escalera es l. Pero la función no crece en los escalones; sólo gana altura en los puntos del conjunto de Cantor. Pero muy “pocos” puntos caen en este conjunto; aun cuando su cardinalidad es la del continuo, ¡su longitud es cero! (La longitud del segmento [0,1] es 1 y la longitud total de los escalones es 1.) ¡Nuestra función se las arregla de alguna manera para subir de 0 a 1, aun cuando sólo crece en un conjunto de longitud cero sin dar saltos! ¿No es esto realmente sorprendente?

Una curva con púas

Durante muchos siglos, los matemáticos trabajaron sólo con curvas tales que en cada uno de sus puntos se podía construir una tangente. Si había excepciones a esta regla, éstas ocurrían sólo en unos cuantos puntos. La curva parecía quebrarse en estos puntos, llamados *puntos de fractura*. La curva trazada en la Figura 23(a) tiene dos puntos de fractura, mientras que la curva de la Figura 23(b) tiene diez puntos de fractura.

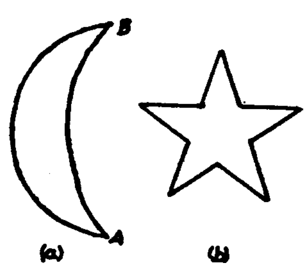

Figura 23.

Las curvas que construimos en la sección anterior tienen una infinidad de puntos de fractura: la curva de la Figura 19 tiene un conjunto numerable de dichos puntos, mientras que la curva de la Figura 20 tiene todo un continuo de tales puntos. Se quiebra en cada punto del conjunto de Cantor y además en las cúspides de todos los triángulos. La curva de la Figura 21 se quiebra en un conjunto relativamente pequeño de puntos, pues su longitud es igual a cero.

Durante mucho tiempo, los matemáticos no creyeron en la existencia de una curva continua compuesta en su totalidad por "dientes", "fracturas" o "púas". Por esto, se sorprendieron cuando alguien logró construir tal curva, e incluso una función cuya gráfica se parece a un alambre de púas. El primero en lograr esto fue el matemático checo Bolzano, pero su trabajo sólo fue publicado después de mucho tiempo. El primer ejemplo publicado fue el del matemático alemán K. Weierstrass. Sin embargo, es difícil para nosotros presentar el ejemplo de Weierstrass, ya que se basa en la teoría de series trigonométricas.

Ahora analizaremos el ejemplo de Bolzano, haciendo unos ligeros cambios. Primero dividimos el segmento [0,1] en cuatro partes iguales y construimos un triángulo rectángulo isósceles sobre las dos partes centrales (Figura 24a). La curva resultante es la gráfica de alguna función que denotaremos por $y = f_1(x)$. A continuación dividimos cada una de las cuatro partes nuevamente en cuatro partes iguales y construimos otros cuatro triángulos rectángulos isósceles (Figura 24b). Esto nos da la gráfica de una segunda función $y = f_2(x)$. Si sumamos estas dos funciones, la gráfica de la suma $y = f_1(x) + f_2(x)$ tiene la forma señalada en la Figura 24c. Es claro que esta curva tiene más fracturas, distribuidas en forma más densa. En el siguiente paso, dividimos nuevamente cada pedazo en cuatro partes, construyendo ahora 16 triángulos rectángulos isósceles y sumando la función correspondiente $y = f_3(x)$ a la función $y = f_1(x) + f_2(x)$.

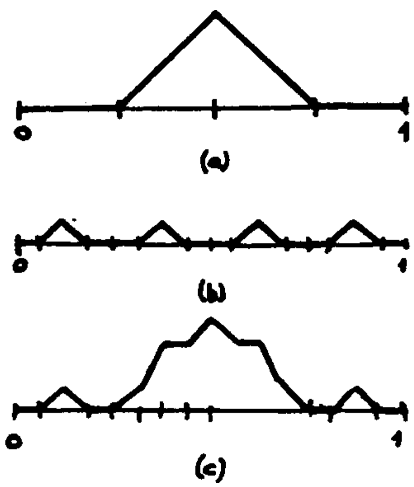

Figura 24.

Al continuar este proceso, obtenemos una curva con un número cada vez mayor de fracturas. En el límite obtenemos una curva con una fractura en cada punto y tal que en ningún punto existe una recta tangente.

Un ejemplo similar de una curva tal que en ningún punto existe una recta tangente fue construido por el matemático holandés Van der Waerden. Él consideró un triángulo equilátero, dividió cada uno de sus lados en tres partes iguales y entonces construyó nuevos triángulos equiláteros con cúspides apuntando hacia fuera de las tres secciones centrales. Esto dio como resultado una figura parecida a una estrella de seis puntas (Figura 25). Luego siguió dividiendo cada uno de los 16 lados de esta estrella en tres partes iguales y construyendo triángulos equi1áteros. Esto dio una curva con más puntas, que aparece en la Figura 25b. Después de una infinidad de divisiones y construcciones de triángulos obtuvo una curva que en cada punto tenía una fractura o punta.

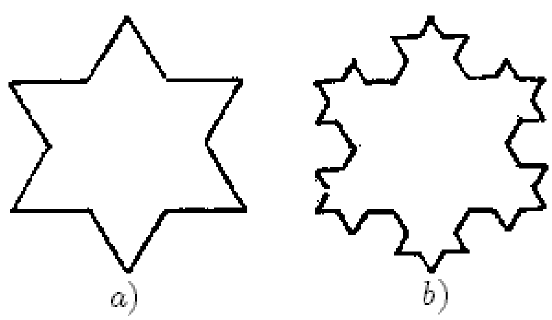

Figura 25.

Los matemáticos construyeron muchas funciones continuas cuyas gráficas poseen la propiedad de que en ningún punto existe una recta tangente y empezaron a estudiar sus propiedades. Estas propiedades no se parecían a las de las funciones suaves "bien comportadas" con las que habían trabajado hasta entonces. No es raro, entonces, que los matemáticos entrenados en la tradición clásica vieran a estas nuevas funciones con asombro. El eminente exponente del análisis clásico Charles Hermite escribió lo siguiente a su amigo el matemático holandés Stieltjes:

"Me horrorizo de esta plaga deplorable de funciones continuas que no tienen derivada ni siquiera en un punto" (es decir, como nosotros las hemos llamado, curvas con púas en todas partes).

El famoso matemático francés H. Poincaré escribió:

"En los viejos tiempos había algún propósito práctico tras la búsqueda de nuevas funciones; ahora las funciones se inventan específicamente para señalar saltos en el razonamiento de nuestros predecesores; no se pueden sacar de ellas más conclusiones que ésta."

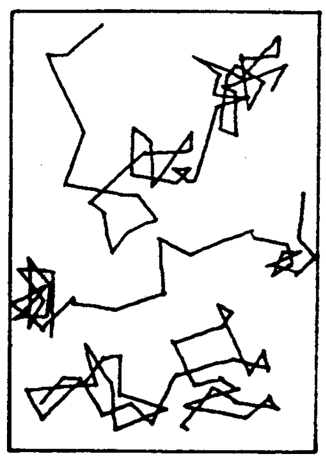

Figura 26.

Pero el desarrollo posterior de la ciencia mostró que Poincaré estaba equivocado. En física encontramos curvas que son una clara reminiscencia de las curvas con púas en todas partes. Estas curvas son las trayectorias de las partículas con movimiento browniano. El científico francés F. Peppin hizo un bosquejo del movimiento de estas partículas. Él observó sus posiciones cada 30 segundos y unió los puntos así obtenidos con segmentos de línea recta.

Su resultado fue un embrollo de líneas quebradas parecido al dibujo de la Figura 26. Pero no se debe pensar que las partículas observadas en la realidad se movían en líneas rectas entre cada observación. Si Peppin las hubiera observado cada medio segundo en vez de medio minuto, hubiera tenido que reemplazar cada segmento de recta por una línea quebrada mucho más complicada, como en la Figura 26. Mientras menor fuera el intervalo entre las observaciones, la línea quebrada se volvería más complicada, con cada vez más "púas". El matemático norteamericano N. Wiener mostró que si las partículas con movimiento browniano son suficientemente pequeñas como para despreciar su inercia, éstas se mueven a lo largo de curvas tales que en ningún punto poseen una recta tangente.

Una curva cerrada de longitud infinita

Con frecuencia encontramos curvas de longitud infinita: la línea recta o la parábola, por ejemplo. Pero todas estas curvas se van a infinito, así que no es sorprendente que tengan longitud infinita. Sin embargo, no es difícil construir una curva totalmente contenida en una región finita del plano y que siga teniendo longitud infinita. Para esto podemos tomar una circunferencia y enrollar una espiral con una infinidad de vueltas alrededor de ella (Figura 27). Como el número de vueltas es infinito y la longitud de cada vuelta es mayor que la longitud de la circunferencia, la longitud de la espiral debe ser infinita.

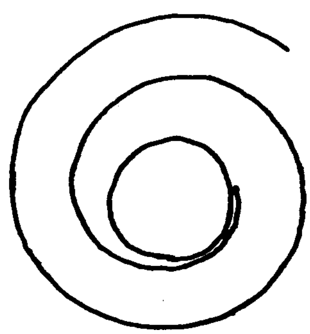

Figura 27.

Pero… ¿Podríamos construir una curva cerrada de longitud infinita?

Las curvas cerradas ordinarias (la circunferencia, la elipse, la cardioide de la Figura 28) tienen longitud finita. Sin embargo, la longitud de la curva con púas de Van der Waerden es infinita.

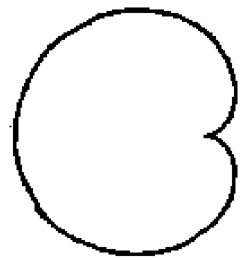

Figura 28.

El perímetro del triángulo original es 3. Como se puede calcular fácilmente, la estrella que se obtiene en el primer paso tiene longitud 4. En la siguiente etapa obtenemos una curva compuesta por 48 segmentos, cada uno de longitud 1/9. Así, su perímetro es 48/9. Luego obtenemos una curva que mide 192/27, etcétera. En general, en el paso n–ésimo obtenemos una curva con perímetro $3(4/3)^n$. Pero esta expresión tiende a infinito al crecer n, con lo que se tiene que la longitud de la curva de Van der Waerden es infinita.

Hay otras curvas de longitud infinita. Construiremos la siguiente curva como ejemplo. Dividimos el segmento [0,1] a la mitad y construimos un triángulo isósce1es de altura 1 en la mitad de la izquierda. Ahora dividimos la mitad [1/2,1] en dos partes iguales y construimos un triángulo isósce1es de altura ½ en el pedazo [1/2,3/4] de la izquierda. Construimos el siguiente triángulo isósceles, de nuevo de altura 1/2, en el segmento [3/4,7/8]. Los siguientes cuatro triángulos se construyen con altura 1/4, etcétera. (Figura 29)

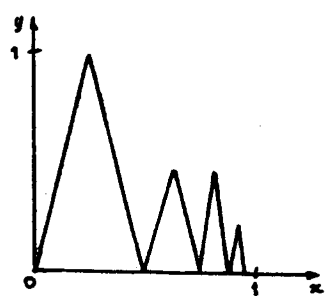

Figura 29.

Obtenemos una cadena descendente de montañas como en la Figura 18. Pero aquí la cadena desciende muy lentamente. Es claro que la longitud de cada lado del primer triángulo es mayor que 1, que la longitud de los lados del segundo y tercero triángulos es mayor que l, que la longitud de los lados del cuarto, quinto, sexto y séptimo es mayor que 1, etcétera. (La longitud del lado siempre es mayor que la altura.) Así, la longitud de la línea quebrada no es menor que la suma de la serie

$$2+\left(\tfrac{2}{2}+\tfrac{2}{2}\right)+\left(\tfrac{2}{4}+\tfrac{2}{4}+\tfrac{2}{4}+\tfrac{2}{4}\right)+\cdots \qquad (4.16)$$

Pero la suma de los números dentro de cada paréntesis es 2 y el número de paréntesis es infinito; de ahí que la suma de la serie y la longitud de nuestra curva sean infinitas.

Una alfombra matemática

Se dice que en cierta ocasión Catalina II preguntó a uno de sus generales la diferencia entre un mortero y un obús. El desconcertado general replicó: “Verá, Majestad, un mortero es una cosa y un obús es otra cosa”. Probablemente recibiríamos una respuesta tan informativa como ésta si preguntáramos a una persona con pocos conocimientos de matemáticas la diferencia entre una curva, una superficie y un sólido. Más que eso, se sorprendería de que preguntáramos cosas tan obvias. Después de todo, es claro que una curva, una superficie y un sólido son cosas distintas y nadie diría que una circunferencia es una superficie o que una esfera es una curva.

Un ingenioso maestro de ajedrez dijo una vez que la diferencia entre un maestro y un principiante en el juego de ajedrez es que el principiante tiene todo claro en su mente, mientras que para el maestro todo es un misterio. Así ocurre también con nuestra pregunta. Por supuesto, cuando hablamos de figuras geométricas como un cuadrado o un círculo, nadie duda cuál es una curva y cuál una superficie. Pero en el transcurso del desarrollo matemático, desde los trabajos de Cantor, han aparecido muchas figuras geométricas extrañas y aún un profesor con experiencia y conocimientos, ni qué decir de un estudiante, no podría decidir de inmediato si son curvas, superficies o sólidos.

Presentaremos algunas de estas figuras. Consideremos el segmento [0,1], lo dividimos en dos y levantamos una perpendicular de longitud ½ al centro del segmento. A continuación volvemos a dividir cada una de las mitades en dos y construimos una perpendicular, esta vez de longitud 1/4, en cada uno de los nuevos puntos de división. Nuevamente dividimos las secciones obtenidas en dos partes y levantamos perpendiculares de longitud 1/8 en los puntos de división.

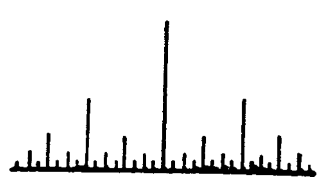

Figura 30.

Después de cinco pasos obtenemos la figura que aparece en la Figura 30. Pero no nos detendremos después de cinco pasos, sino que continuaremos nuestra operación una infinidad de veces. El resultado es cierta figura geométrica. Pero ¿es una curva o una superficie? Después de todo, hemos levantado un número infinito de perpendiculares. ¿No se solidifican y llenan un poco de superficie cerca del segmento [0,1]? No es tan fácil responder esta pregunta.

Aquí hay otro ejemplo. Consideramos un cuadrado de lado 1 y lo dividimos en 9 partes iguales; entonces eliminamos la parte central, conservando los lados del cuadrado eliminado. Después de esto, dividimos cada uno de los cuadrados restantes en 9 cuadrados iguales y de nuevo eliminamos los cuadrados centrales. Después de otra de estas operaciones obtenemos lo que aparece en la Figura 31 (los cuadrados eliminados están marcados con diagonales). Es claro que la figura sigue siendo una superficie. Pero no nos detendremos en el tercer paso; los cuadrados serán divididos en nueve partes iguales una infinidad de veces y en cada vez se eliminará la parte central. Al final, obtendremos una figura geométrica llamada *alfombra de Sierpinski*, en honor del matemático polaco que la diseñó.

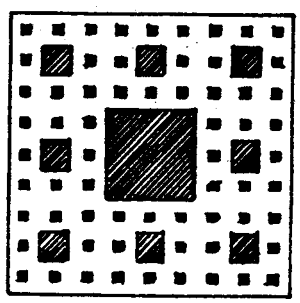

Figura 31.

La figura se parece a una ropa elaborada por un tejedor enloquecido. El hilo, el armazón y la trama se entrelazan en un diseño muy simétrico y hermoso. Pero la alfombra resultante está llena de agujeros; no hay un pedazo sin un recorte: aún el cuadrado más pequeño debe tener su centro recortado. No es claro si esta alfombra es una curva o una superficie. Por un lado, no contiene un pedazo sólido, por lo cual difícilmente podría decirse que es una superficie. Por otro lado, los hilos que la forman están tejidos en un patrón tan complejo que probablemente nadie diría resueltamente que la alfombra de Sierpinski es una curva. En cualquier caso, sería muy difícil trazar esta “curva”.

Pero la alfombra de Sierpinski no es la figura más complicada que podemos construir con este procedimiento. En lugar de un cuadrado podríamos considerar un cubo, dividirlo en 27 cubos pequeños iguales y eliminar el pequeño cubo central junto con sus cubos contiguos. Entonces dividiríamos cada cubo pequeño restante en 27 partes iguales y repetiríamos la operación de eliminación de ciertas partes (el sólido que queda después de dos operaciones aparece en la Figura 32).

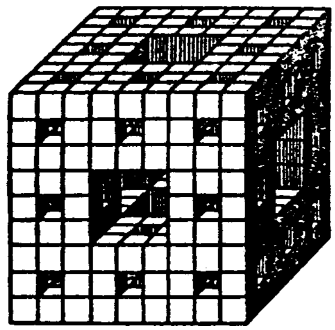

Figura 32.

Supongamos que la operación se realiza una infinidad de veces. ¿Qué tipo de figura obtendríamos después de eliminar todos los pedazos? ¿Una curva, una superficie o un sólido?

Euclides no confía en Euclides

Cuando se presentaba un complicado problema geométrico a los matemáticos de la antigüedad, lo primero que hacían era ver lo que Euclides había escrito sobre él. Durante casi dos mil años, Euclides fue el modelo de1 rigor matemático y una enciclopedia de conocimiento geométrico. Es muy significativo que incluso los filósofos que querían garantizar el rigor de sus argumentos recurrían al lenguaje de Euclides y formulaban sus enunciados como axiomas, lemas y teoremas.

Pero en lo que se refiere a nuestra cuestión, lo que escribió Euclides era completamente vago. Las primeras líneas de los *Elementos* de Euclides dicen así:

1. Un punto es aquello que no tiene partes.
2. Una curva es aquello que tiene largo pero no ancho.
3. El extremo de una curva es un punto.
4. Una superficie es aquello que sólo tiene largo y ancho.
5. El extremo de una superficie es una curva.
6. Una frontera es aquello que es el extremo de algo.

7. Una figura es aquello que está contenido dentro de algo o dentro de algunas fronteras.

Se quiera o no, éstas no son definiciones matemáticas rigurosas. Una persona que no sepa lo que son los puntos, las curvas o las líneas difícilmente obtendrá información útil de estas "definiciones", que recuerdan a la respuesta de aquel confuso general ("una curva es una cosa y una superficie es otra cosa"). De cualquier forma, no sabremos a partir de estas definiciones si la alfombra de Sierpinski es una curva o una superficie, si sólo tiene largo sin ancho o si tiene ambos.

Sin embargo, las figuras complicadas como la alfombra de Sierpinski no eran conocidas en el tiempo de Euclides y en realidad las definiciones no eran necesarias para las figuras simples; cualquiera podía decir cuáles eran las curvas y cuáles eran las superficies en una figura. Sin embargo, se piensa que el propio Euclides sentía que no todo era correcto en sus definiciones de los conceptos fundamentales. En cualquier caso, presentó estas definiciones al principio del libro y siguió adelante olvidándolas por completo; no las usó ni siquiera una vez en el resto de su trabajo.

¿Son necesarias las definiciones rigurosas?

La autoridad de Euclides no fue cuestionada durante dos mil años. El hecho de que alguien dudara de sus enunciados de alguna manera derrumbaba de manera irrevocable su propia reputación matemática. Uno de los más grandes matemáticos del siglo XIX, Karl Friedrich Gauss, concibió la idea de una geometría no euclidiana aún antes que Lobachevsky, pero no publicó sus investigaciones por temor, según escribió a un amigo, a las voces de los Boecios[1]. Finalmente el gran geómetra ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky publicó sus descubrimientos a pesar de la mofa de los incomprensivos sabios y brindó al mundo la geometría no euclidiana.

La aparición del trabajo de N. I. Lobachevsky mostró que existen dos geometrías, ambas irreprochables en su lógica, pero que llevan a teoremas completamente distintos. Pero si esto era así, entonces cualquier apelación a lo "geométricamente obvio" perdía por completo su valor. Ahora, cada afirmación geométrica debía basarse en definiciones rigurosas y en argumentos lógicos irreprochables. Era especialmente importante dar una definición exacta de los conceptos geométricos fundamentales (curva, figura y sólido) que

[1] Una tribu griega proverbialmente estúpida.

de ninguna manera fueran del tipo "ésta es una cosa y esa es otra cosa." Este intento por establecer definiciones rigurosas no sólo caracterizó a la geometría sino también al análisis del siglo XIX.

La ciencia ha logrado resolver los más variados problemas, desde calcular la trayectoria de un proyectil de artillería hasta predecir los movimientos de planetas y cometas, con la ayuda del cálculo diferencial e integral basado en el trabajo de Newton, Leibnitz, Euler, Lagrange y otros grandes matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Pero los conceptos fundamentales con los que se obtuvieron resultados tan admirables estaban definidos de una manera sumamente carente de rigor.

El análisis matemático de aquella época se basaba en el concepto de cantidad infinitesimal, algo que se balanceaba en la frontera de la existencia y la inexistencia; algo nulo, pero no nulo en realidad. Los matemáticos del siglo XVIII se veían forzados a apoyar a sus escépticos estudiantes con las palabras: "Trabaja y creerás."

Pero, en realidad, las matemáticas no son una religión; no se basan en la fe. Lo más importante es que los métodos que daban tan maravillosos resultados en las manos de los grandes maestros empezaron a arrojar errores y paradojas al ser utilizados por sus estudiantes, menos talentosos que los primeros. Los maestros se salvaban del error por su intuición matemática, aquel sentimiento subconsciente que a menudo lleva a la respuesta correcta más rápidamente que el largo razonamiento lógico. Pero los estudiantes no poseían esta intuición y el final del siglo XVIII quedó marcado por un escándalo sin precedentes en matemáticas, una sarta de fórmulas con menor valor que el papel donde estaban escritas y teoremas cuestionables cuyo dominio de aplicación era totalmente oscuro.

Así, igual que los niños que rompen un precioso juguete para ver cómo trabaja, los matemáticos del siglo XVIII sujetaron a una severa crítica a todos los conceptos empleados hasta entonces y comenzaron a reconstruir las matemáticas con base en definiciones rigurosas. Las apelaciones a la intuición fueron rechazadas; en lugar de esto se demandó la lógica más rigurosa.[2] Se buscaba una base lógica para enunciados que uno encuentra en un curso de análisis, como el siguiente:

"Considérese el dominio G acotado por la curva cerrada Γ."

---

[2] También es cierto que tendían a tirar al niño junto con el agua de la bañera; pero en el siglo XX se recuperó gran parte de lo que tiraron volviendo a ser parte de la ciencia.

¿Qué es una curva cerrada? ¿Por qué es la frontera de un dominio? ¿En cuántas partes divide una curva cerrada al plano? ¿Cuál de estas partes es la que se va a estudiar?

Los matemáticos del siglo XVIII no respondían a estas preguntas. Simplemente trazaban un óvalo y pensaban que eso es todo lo que necesitaban decir. Pero en el siglo XIX ya nadie creía en las figuras. La pregunta ¿Qué es una curva? era sólo una de las cuestiones vitales que encaraban los analistas. No obstante, pasó mucho tiempo antes de que lograran dar una respuesta amplia a esta cuestión.

Una curva es la trayectoria de un punto móvil

Para forjar una definición rigurosa de curva era necesario retirarse de los objetos concretos en que se basaba la formación de los conceptos matemáticos: Hilos largos y delgados; rayos de luz; caminos largos y angostos, etcétera. En todas estas cosas, el largo es mucho mayor que el ancho, por lo que éste último resulta despreciable. Por medio de la idealización matemática llegamos al concepto de largo sin ancho.

El primero que intentó dar una definición rigurosa de curva fue el matemático francés Camille Jordan. Partió del hecho de que una trayectoria del movimiento de un cuerpo muy pequeño se puede representar por medio de un tubo largo y angosto. Jordan aplicó esta imagen en su definición de curva. En otras palabras, llamó curva a la trayectoria de un punto en movimiento. El punto debía moverse de forma continua, sin dar saltos.

La definición de Jordan se puede establecer con más exactitud de la manera siguiente: Para determinar la posición de un punto en movimiento, hay que especificar sus coordenadas en cada momento. Puesto que el movimiento ocurre en un intervalo finito de tiempo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que este intervalo es [0,1]. Dicho de otra manera, el punto comienza a moverse en cierto instante, el cual se toma como el origen de la observación y completa su movimiento después de transcurrir una cierta unidad de tiempo (un segundo, un minuto, un año, etcétera). Las coordenadas del punto en movimiento están dadas en cada instante t de dicho intervalo. Así, las coordenadas del punto dependen de t y en consecuencia son funciones de t. Denotaremos estas funciones por $f(t)$ y $g(t)$:

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad (4.17)$$

El hecho de que el punto se mueva continuamente equivale a pedir que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ sean continuas en cada punto del segmento [0,1]. Dicho de manera vaga, esto quiere decir que un cambio pequeño en t debe producir un cambio pequeño en las funciones $f(t)$ y

$g(t)$. Más precisamente, si $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ tienden a un valor t, de modo que $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, entonces se cumplen las igualdades

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t) \qquad (4.18)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} g(t_n) = g(t) \qquad (4.19)$$

Ocurre que la definición de Jordan tuvo éxito. Todas las curvas estudiadas por los matemáticos hasta entonces eran curvas en el sentido de Jordan, o *curvas de Jordan*. Tomemos, por ejemplo, una circunferencia de radio l. La longitud de esta circunferencia es 2π. Así, el punto se debe mover con velocidad 2π para recorrer esta circunferencia en una unidad de tiempo. De aquí que en un tiempo t el punto recorrerá el arco de longitud $2\pi t$.

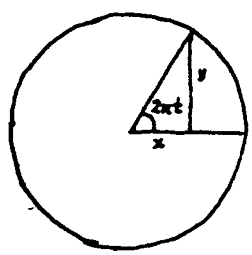

Figura 33.

La Figura 33 muestra que sus coordenadas en el instante t deben estar dadas por las fórmulas

$$x = \cos 2\pi t \qquad (4.20)$$
$$y = \operatorname{sen} 2\pi t$$

Estas ecuaciones se llaman las ecuaciones *paramétricas* de la circunferencia. Para la curva que aparece en la Figura 34 (llamada *astroide*) las ecuaciones paramétricas tienen la forma

$$x = \cos^3 2\pi t \qquad (4.21)$$
$$y = \operatorname{sen}^3 2\pi t$$

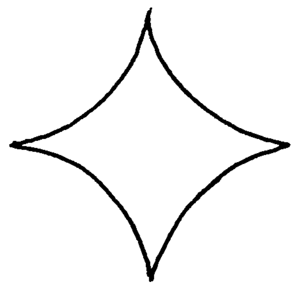

Figura 34.

Las curvas de Jordan pueden estar compuestas por varias curvas distintas. Tomemos como ejemplo el contorno de la mitad de un disco, formado por una semicircunferencia de radio 1 y un diámetro (Figura 35).

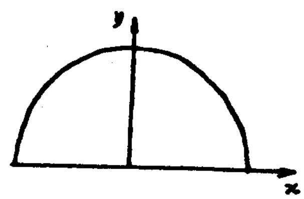

Figura 35.

Hagamos que el punto móvil recorra la semicircunferencia en la mitad del tiempo y el diámetro en la mitad restante. Ya conocemos las expresiones para las coordenadas del movimiento a lo largo de la circunferencia. Al moverse a lo largo del diámetro, *y* permanece constante e igual a cero, mientras que *x* varía de –1 a 1. Como resultado obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas para este contorno:

$$\begin{cases} \cos 2\pi t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 4t - 3 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad (4.22)$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 2\pi t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \qquad (4.23)$$

El teorema es obvio, pero la demostración no

Usando su concepto de curva, Jordan pudo dar un significado preciso al enunciado mencionado anteriormente: “Sea Γ la curva cerrada que acota el dominio *G*”. Una curva de Jordan cerrada es una curva que en $t = 1$ pasa por el punto donde pasó en $t = 0$. La curva no tiene auto-intersecciones si ninguna pareja de valores t_1 y t_2 entre 0 y 1 corresponde a un mismo punto en la curva.

Jordan demostró el siguiente teorema.

Teorema. Una curva de Jordan cerrada Γ *sin auto- intersecciones divide al plano en dos partes. Dos puntos contenidos en la misma parte pueden ser unidos por una línea quebrada que no interseca a la curva* Γ*, pero dos puntos contenidos en partes distintas no pueden ser unidos mediante una línea quebrada de ese tipo: cualquier línea quebrada que los una debe cortar a la curva* Γ *(Figura 36).*

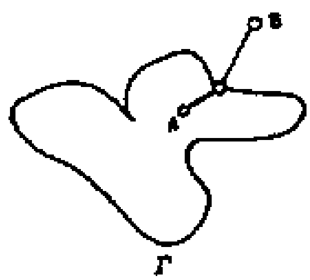

Figura 36.

Este teorema parece totalmente obvio. Su demostración, empero, requirió de argumentos muy sutiles. Aunque la curva Γ sea la frontera de un polígono, la prueba sigue siendo un poco complicada. El lector puede tratar de decidir rápidamente si los puntos *A* y *B* de la Figura 37 pueden unirse mediante una línea quebrada que no interseque al contorno Γ.

Las dos partes en que una curva de Jordan cerrada divide al plano se llaman los *dominios* interior y exterior acotados por esta curva. El concepto de un dominio acotado por una curva cerrada adquirió así un significado preciso.

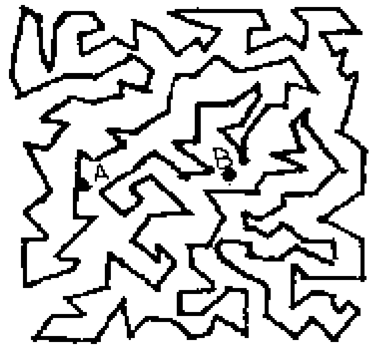

Figura 37.

Una curva que pasa por todos los puntos de un cuadrado

Cuando Jordan dio su definición de curva parecía que se había alcanzado la meta; se disponía ya de una definición rigurosa de curva, que no dependía de la intuición. Pero rápidamente se vio que éste no era el caso. La definición de Jordan abarcaba no sólo lo que los matemáticos usualmente llaman curvas, sino también figuras geométricas que nadie diría que son curvas. Los matemáticos podrían convenir que las curvas con púas en todas partes son curvas de Jordan, pero ninguno podría decir que un cuadrado es una curva. Ocurre que el cuadrado, el triángulo y el círculo (no el perímetro de la figura, sino la figura junto con sus puntos interiores) son curvas en el sentido de Jordan. Esto fue demostrado por el matemático italiano Peano.

Ya hemos mencionado que Cantor estableció una correspondencia uno a uno entre los puntos del segmento y los del cuadrado; es decir, él mostró que hay tantos puntos en el segmento como puntos hay en el cuadrado. Pero su correspondencia no es continua. Al moverse el punto en el segmento, el punto correspondiente en el cuadrado no se arrastraba como un escarabajo, sino que saltaba como una pulga. Consideremos los puntos

0.50000000... y 0.49999999000000… (4.24)

en el segmento. Estos puntos están muy cercanos, pero los puntos correspondientes del cuadrado están alejados. El punto correspondiente al primero de ellos es (0.50000..., 0.0000...), situado en la parte inferior del cuadrado, mientras que el punto correspondiente al segundo es (0.4999000..., 0.9999000...), situado en la parte de arriba del cuadrado. Y si incrementamos el número de nueves en el segundo punto, haciéndolo más cercano al primero, los puntos correspondientes del cuadrado no se aproximan entre sí.

Así, la transformación de Cantor del segmento al cuadrado, aunque uno a uno, no es continua, y así, no da origen a una curva de Jordan. Peano tuvo éxito al establecer otra transformación del conjunto de puntos del segmento en el conjunto de puntos del cuadrado que mandara puntos cercanos del segmento en puntos cercanos del cuadrado. En otras palabras, Peano pudo construir una curva (en el sentido de Jordan) que ¡pasa por todos los puntos de un cuadrado!

Por supuesto, no podemos dibujar la curva de Peano, a menos que imitemos a un pintor abstracto y dibujemos un cuadrado negro. Pero el cuadrado es uniforme, por lo que no seremos capaces de ver dónde empieza la curva, donde termina y cómo se mueve el punto a través del cuadrado. Por lo tanto, seguiremos el ejemplo del físico Peppin, en lugar del pintor abstracto y dibujaremos la posición del punto usando segmentos de recta. Mientras más cortos sean los intervalos de tiempo entre las “observaciones”, las líneas quebradas así obtenidas representarán mejor a la curva de Peano.

Primero observaremos la posición del punto en movimiento cada 1/4 de segundo. En otras palabras, observaremos su posición al principio del movimiento, a 1/4 de segundo después del principio del movimiento, a 1/2 segundo después del principio del movimiento, a 3/4 de segundo y al final del movimiento. Esto nos da 5 puntos. Al unirlos obtenemos la línea ABCDE trazada en la Figura 38a.

Naturalmente, esta recta no pasa por todos los puntos de la curva. Ahora reducimos el intervalo de tiempo entre las observaciones individuales y observamos la posición del punto cada 1/16 de segundo. Ahora, la curva da más vueltas, el número de picos crece y toma la forma trazada en la Figura 38b. Si observamos la posición del punto en movimiento más a menudo, obtenemos la curva trazada en la Figura 38c. Veamos que la curva llena el cuadrado más y más densamente, que se aproxima más y más a cada uno de los puntos de éste. En el límite, en el cual estaríamos observando el punto en movimiento de manera continua, obtendríamos una curva que pasa por todos los puntos del cuadrado sin excepción.

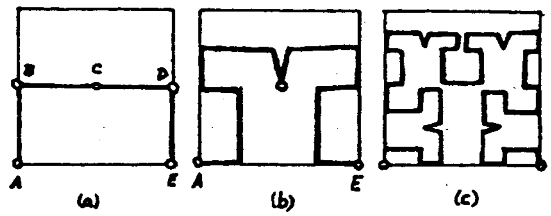

Figura 38.

Aunque Peano aventajó a Cantor por el hecho de que su curva es continua, se quedó corto en otro aspecto. Su curva no da ya lugar a una transformación uno a uno del segmento en el cuadrado; pasa por algunos puntos del cuadrado varias veces. Posteriormente se demostró que es imposible obtener una correspondencia continua y uno a uno entre el segmento y el cuadrado; es decir, no existe una curva que pase por todos los puntos del cuadrado exactamente una vez.

Todo se ha desensartado

Es difícil describir con palabras el efecto que el resultado de Peano produjo en el mundo matemático: Pareció como si todo estuviera en ruinas, como si todos los conceptos matemáticos básicos hubieran perdido su sentido; la diferencia entre curva y superficie, entre superficie y sólido ya no era clara (el resultado que mostraba la imposibilidad de una correspondencia continua uno a uno entre el segmento y el cuadrado todavía no se conocía).

El conocido matemático francés Henri Poincaré tristemente exclamó:

"¿Cómo es posible que la intuición nos traicionara de esa manera?"

Pronto se vio que la definición de Jordan tenía sus fallas. Por un lado era muy amplia: la curva de Peano entraba en esta definición; pero por otro lado también era demasiado estricta: no todas las figuras que intuitivamente quisiéramos llamar curvas satisfacían esta definición. Por ejemplo, la curva de la Figura 27, la circunferencia con la espiral enrollándose, no es una curva de Jordan. Incluso se encontraron otras fallas ocultas en la definición de Jordan. Esta definición no sólo trabajaba con la curva, sino con la razón según la cual se movía el punto que generaba la curva. Por ejemplo, imaginemos un corredor que recorre la primera mitad de la circunferencia en 1/4 de minuto, pero que entonces se cansa y tarda 3/4 de minuto en recorrer la segunda mitad. Claramente, las ecuaciones paramétricas que obtenemos en este caso son completamente distintas de (4.20).

De hecho, el punto puede recorrer la circunferencia en una infinidad no numerable de formas, acelerando o frenando cada vez. Así, obtenemos muchas ecuaciones paramétricas distintas para la misma circunferencia. Es muy difícil saber que las ecuaciones $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$y = \frac{2t}{1+t^2}$ (4.25)

describen la misma circunferencia que las ecuaciones

$x = \cos 2\pi t$ (4.26)

$y = \text{sen } 2\pi t$

Sería fácil confundirse con curvas más complicadas. Por ejemplo, consideremos la rosa de dos pétalos. Podemos recorrer esta curva como en la Figura 39a o como en la Figura 39b. Desde el punto de vista de Jordan obtendríamos dos curvas totalmente distintas; aunque no debería importar la forma de recorrer la curva.

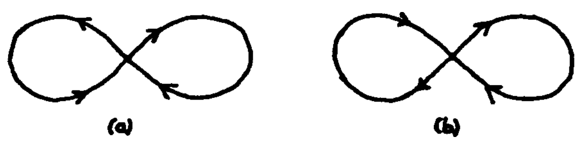

Figura 39.

Surgió nuevamente la pregunta: ¿qué es una curva y cómo se distingue de una superficie? La respuesta estaba relacionada con los estudios generales de Cantor sobre las figuras geométricas.

Cómo hacer una estatua

Después de establecer los fundamentos de la teoría de conjuntos, Cantor centró su atención en la pregunta: *¿qué es una figura geométrica?* La respuesta más general a esta pregunta seria: una figura geométrica es cualquier conjunto de puntos en un espacio. Si este conjunto está contenido en el plano, entonces obtenemos una figura geométrica plana. Pero esta respuesta sería demasiado general. Una “figura” en este sentido no tendría propiedades interesantes. La geometría de tales figuras casi no tendría teoremas.

Así, primero había que delimitar la clase de los conjuntos por estudiar, separando aquellos que tuvieran propiedades cercanas a las de las figuras geométricas ordinarias.

Para separar esta clase de figuras tenemos que decidir qué tienen en común las figuras ordinarias, como el cuadrado, la circunferencia, un segmento de recta, el astroide, etcétera. Ocurre que es posible construir todas estas figuras por medio de un mismo procedimiento.
Se dice que cuando se le preguntó al famoso escultor Rodin cómo podía hacer estatuas tan admirables, él dijo: "Elijo un bloque de mármol y le quito todo lo que no necesito."
Es posible obtener cualquier figura geométrica plana acotada mediante este mismo método: tomamos un cuadrado que lo contenga y le quitamos todo lo que no necesitemos. Por supuesto, no quitamos todo de una vez, sino que procedemos paso por paso, quitando en cada paso pedazos circulares. Quitamos el interior del círculo, mientras que su frontera, la circunferencia, se queda en la figura.

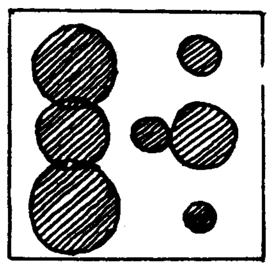

Figura 40.

A primera vista podríamos pensar que con este procedimiento obtendríamos únicamente figuras como la de la Figura 40. Pero el secreto está en el hecho de que no sólo removemos uno o dos círculos, sino un conjunto numerable de ellos. Podemos obtener cualquier figura que queramos al permitírsenos quitar un conjunto numerable de círculos.
Para hacer esto procedemos como sigue: consideramos todos los círculos tales que las coordenadas de sus centros y sus radios sean números racionales. El conjunto de tales círculos es numerable, según el Teorema 3.1. A continuación, eliminamos todos aquellos círculos de nuestro conjunto cuyos interiores no contengan puntos de la figura geométrica. Claramente, después de esta operación únicamente quedará la figura geométrica y el número de círculos eliminados será a lo más numerable.
En vez de eliminar círculos, podemos remover cuadrados, rectángulos, elipses, observando la restricción de que los puntos interiores se eliminen mientras que se conserve la frontera.

Continuos

Además de las figuras geométricas ordinarias, ocurre que al remover un conjunto numerable de círculos (o cuadrados, etcétera) también podemos obtener otros conjuntos un poco distintos de las figuras ordinarias pero con muchas propiedades interesantes. Por ejemplo, la alfombra de Sierpinski, de la cual ya hemos hablado largamente, puede obtenerse de la manera siguiente: del cuadrado de lado 1 eliminamos a los cuadrados pequeños uno por uno, dejando sus lados.

Mediante este proceso también podemos obtener "figuras" que no están formadas por una única pieza. Por ejemplo, si removemos "cruces"[3], como en la Figura 41, al final obtenemos un conjunto que no contiene una sola pieza sólida (se dice que es *totalmente disconexo*). Por esto, agregamos la restricción de que después de cada operación de eliminación debe quedar un conjunto formado por una sola pieza. Después de todas las operaciones, quedará un conjunto formado por una sola pieza (como dirían los matemáticos, un *conjunto conexo*). El conjunto así obtenido también será acotado, es decir, estará contenido totalmente en algún cuadrado).

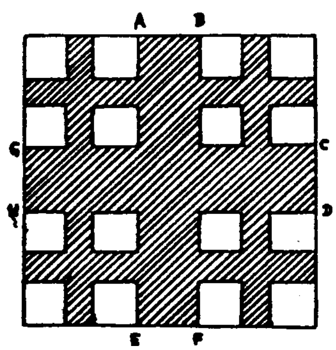

Figura 41.

Un conjunto F que satisface las tres condiciones siguientes:

1. El conjunto F se obtiene de un cuadrado eliminando un conjunto numerable de círculos (o cuadrados, etcétera) dejando sus fronteras.
2. El conjunto F está formado por una sola pieza (conexo).
3. El conjunto F está acotado.

fue llamado por Cantor *continuo* (recordemos que la palabra latina *continuum* quiere decir no roto). El continuo resultó ser el conjunto más general que poseía propiedades similares a las de las figuras geométricas ordinarias.

[3] Incluyendo a los segmentos terminales como, por ejemplo, los segmentos AB, CD, EF, GH.

Curvas de Cantor

Ahora podemos responder a la pregunta ¿qué es una curva plana? Como las curvas planas deben ser figuras geométricas, es claro que las debemos buscar entre los continuos. Pero el cuadrado y el círculo son continuos y no queremos que estas figuras se llamen curvas. Así, debemos añadir ciertas restricciones que eliminen a tales figuras.

Observemos que tanto el círculo como el cuadrado contienen pedazos "sólidos" del plano. Pero una curva no contendría pedazos sólidos del plano; no importa que tan pequeño tomemos el cuadrado; siempre habrá puntos en él que no pertenezcan a la curva (Figura 42).

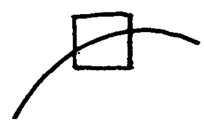

Figura 42.

Aquí tenemos entonces la condición adicional que necesitamos:

Una curva plana en el sentido de Cantor es un continuo contenido en el plano que no llena pedazos sólidos del plano (es decir, en cada cuadrado hay puntos que no pertenecen a esta curva).

Por ejemplo, un segmento, la frontera de un triángulo, una circunferencia, una rosa de cuatro pétalos son curvas. La alfombra de Sierpinski también es una curva, ya que en su construcción hicimos agujeros en *todos* los cuadrados que aparecían en la división, de tal forma que ningún pedazo sólido del plano está contenido en él. Otras curvas de Cantor son la circunferencia con la espiral enrollada alrededor de él y la curva dentada de la Figura 43 junto con el segmento [0,1] del eje y. Más en general, todas aquellas figuras que según nuestra intuición serian curvas, también son curvas en el sentido de Cantor, mientras que cualquier figura que contenga una sola pieza sólida del plano no pertenece a la clase de las curvas de Cantor.

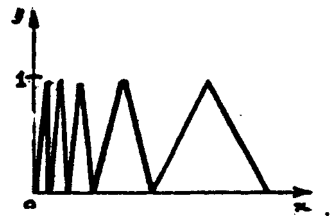

Figura 43.

Pero también entre las curvas de Cantor hay algunas cuyas propiedades son un poco distintas de las de las curvas ordinarias. Hablaremos ahora algo sobre esto.

¿Puede ser distinta de cero el área de una curva?

Por supuesto, ahora que el lector ya conoce curvas que pasan por los puntos de un cuadrado, no se sorprenderá con nada. Pero ¿puede tener área una curva? Euclides dijo que una curva era algo con largo sin ancho. ¿Cómo podríamos obtener un área de algo sin ancho? También en la definición de curva de Cantor se dice que la curva no puede contener un pedazo sólido del plano. ¿Podríamos hallar un área en este caso? No debemos apresurarnos en dar una respuesta categórica.

Antes de estudiar la cuestión, debemos comprender el significado exacto de las palabras usadas, qué se entiende por las palabras "*una curva tiene área cero*" o bien "*una curva tiene área distinta de cero*". Consideremos la curva más ordinaria, un segmento de línea recta. Puesto que su ancho es cero, podemos ponerla dentro de un rectángulo de área arbitrariamente pequeña; sólo tenemos que escoger un rectángulo de ancho suficientemente pequeño. Exactamente de la misma forma podemos poner una circunferencia dentro de un polígono de área arbitrariamente pequeña. Esto se puede hacer inscribiendo un polígono regular con un número muy grande de lados y después circunscribiendo un polígono similar. La región entre los dos polígonos tendrá área pequeña (mientras más lados tenga el polígono, menor será el área) y el círculo estará completamente contenido en esta región (Figura 44).

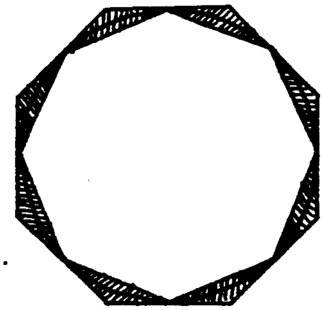

Figura 44

Ahora es claro lo que se entiende por las palabras *una curva tiene área cero*. Esto significa que no importa que tan pequeño escojamos un número positivo ε, podemos encontrar un dominio poligonal que contenga a la curva y que tenga un área menor que ε. Si no podemos encontrar tal dominio, el área de la curva será distinta de cero.

Para aclarar esta definición, la aplicaremos a una curva más complicada que un simple arco de circunferencia. La alfombra de Sierpinski representa, por supuesto, una curva muy complicada. Hallemos su área. Recordemos primero que el área de todo el cuadrado era l. En el primer paso eliminamos el cuadrado central, de área 1/9. Así obtenemos un dominio poligonal de área 8/9. En el segundo paso eliminamos 8 cuadrados, cada uno de los cuales tiene área 1/81. Esto deja un dominio poligonal de área

$$\frac{8}{9} - \frac{8}{81} = \frac{64}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \qquad (4.27)$$

Se ve entonces que después del tercer paso quedará un dominio poligonal de área $(8/9)^3$, después un dominio con área $(8/9)^4$, etcétera. Pero si tomamos una fracción propia y la elevamos a potencias cada vez mayores, el límite será cero: si $0 < q < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \qquad (4.28)$$

En particular, $\lim_{n\to\infty}(8/9)^n = 0$. Pero por la definición de límite esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos encontrar n tal que $(8/9)^n < \varepsilon$.Esto nos dice que después de n pasos obtenemos un dominio poligonal de área menor que ε y que cubre a la alfombra de Sierpinski. Como consecuencia de esto, el área de la alfombra de Sierpinski es cero.

Esto parecería marcar el triunfo completo de la definición de Euclides. Aún una curva tan complicada como la alfombra de Sierpinski tiene área cero. Pero sería prematuro celebrar ahora el triunfo. Después de todo, nada nos obliga a quitar pedazos tan grandes.

Procedamos de una manera económica y dividamos el cuadrado en 25 partes iguales, en lugar de 9 (es decir, dividimos cada lado en 5 partes). Eliminamos el cuadrado central cuya área, obviamente, es 1/25. Probablemente el lector querrá dividir cada uno de los 24 cuadrados pequeños restantes en .25 partes y eliminar la parte central. Sin embargo esto no sería económico. En vez de esto, tomamos los segmentos que acotan al cuadrado eliminado y los continuamos hasta que intersequen a los lados del cuadrado mayor. Esto nos da 4 cuadrados (en las esquinas) y 4 rectángulos.

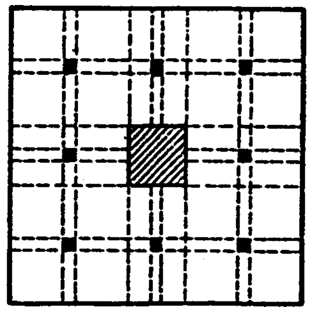

Figura 45.

En cada cuadrado y cada rectángulo construimos cruces con pedazos en forma de cruz con un ancho de 1/25, eliminando la parte central de la cruz (Figura 45). Como el área de la parte central es 1/625, el área de todos los cuadrados eliminados en el segundo paso es 8/625. Continuando con este procedimiento, en el tercer paso eliminamos 64 cuadrados pequeños con un área total de $64/25^3$ = 64/15,625, etcétera. El área de los cuadrados eliminados estará dada por la serie geométrica

$$\frac{1}{25} + \frac{8}{25^2} + \frac{64}{25^3} + \cdots \qquad (4.29)$$

con base 8/25. La suma de esta serie es 1/17 únicamente. ¿Pero qué significa esto? Esto significa que en cada paso se preserva un área no menor que 16/17. Así, un dominio de área menor que 16/17 no puede cubrir lo que resta, que en el caso de la alfombra de Sierpinski, es una curva en el sentido de Cantor, pues al construirla hicimos un agujero en cada cuadrado y rectángulo y no ha quedado un sólo cuadrado o rectángulo sólido.

Por consiguiente, ¡una curva en el sentido de Cantor puede tener área distinta de cero!

Dominios sin área

Aun así, el ejemplo que analizamos no es tan convincente: la curva que obtuvimos tiene auto-intersecciones en todas partes y no acota ningún dominio. Así surge la pregunta:

¿podrá una curva "buena" sin auto-intersecciones tener área distinta de cero? ¡La respuesta es que sí puede!

Podemos construir tal curva modificando un poco la construcción hecha anteriormente. Primero construimos un conjunto en el que no sólo no se pueda hallar un pedazo sólido de cuadrado, sino tampoco un pedazo sólido de curva, pero que el área de este conjunto sea distinta de cero. Para hacer esto debemos eliminar cruces completas en vez de cuadrados centrales, como se muestra en la Figura 46. Aquí hay que elegir las dimensiones de las cruces de tal forma que el área de la primera cruz eliminada sea de 8/25, que el área de todas las cruces eliminadas en el segundo paso sea de $64/625 = (8/25)^2$, que el área de las eliminadas en el tercer paso sea $(8/25)^3$, etcétera Entonces el área total de las cruces eliminadas será igual a la suma de la serie geométrica

$$\frac{1}{25} + \left(\frac{8}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^3 + \cdots \qquad (4.30)$$

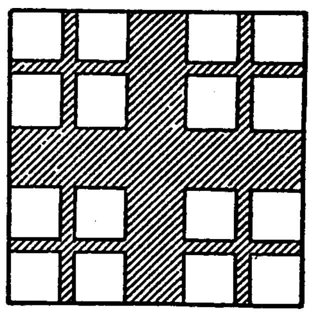

Figura 46.

es decir, 8/17. Pero esto es menor que la mitad del área del cuadrado original. Esto significa que en la parte restante del cuadrado original queda un área de 9/17. Ahora, al construir el conjunto eliminamos cruces completas que sin piedad desgarran al cuadrado. Ninguna pareja de puntos del conjunto restante puede conectarse mediante una curva, ni siquiera una curva en el sentido de Cantor; toda conexión entre sus puntos ha sido rota. Como dirían los matemáticos, lo que resta es un conjunto totalmente disconexo. Aun así, el área de este conjunto, que no contiene una sola pieza del plano ni siquiera un arco de una curva, es distinta de cero; no se puede cubrir este conjunto con un dominio poligonal con un área menor que 9/17.

Ahora es fácil construir un ejemplo de una curva cerrada sin auto-intersecciones y que tenga área distinta de cero. Para esto sólo necesitamos conectar los puntos que ya tenemos, tal como dibujamos una curva que pasa por todos los puntos del cuadrado. Puesto que eliminamos cruces completas en cada paso, nuestra curva no tendrá auto-intersecciones (en esto es distinta de la curva de Peano). Pero como pasa por todos los puntos del conjunto, cuya área debe ser al menos 9/17, el área de la curva obtenida debe ser al menos 9/17.

Tampoco es difícil construir ahora un dominio sin área. Sólo necesitamos unir dos puntos A y B de nuestra curva con cierto tipo de curva, posiblemente una semicircunferencia. Entonces obtenemos una curva que acota cierto dominio G. ¿Cuál es su área? La respuesta depende de si incluimos la frontera dentro del dominio (después de todo, la frontera en sí tiene un área de al menos 9/17). Claramente, nuestro dominio no tiene área en el sentido ordinario de la palabra. En matemáticas, tales dominios que no tienen área en el sentido usual *no tienen cuadratura.*

Algunos ejemplos sorprendentes

Es probable que después de la aparición de la curva de Peano los matemáticos estuvieran seguros que ya habían visto todos los "milagros" que existían en el mundo de las funciones y curvas poco usuales. Pero entonces su intuición geométrica les falló nuevamente. Las propiedades de las curvas de Cantor son muy distintas de las de las curvas ordinarias, como podemos ver en la siguiente narración.

Al comienzo del siglo XX el conocido matemático Schoenflies publicó una serie de trabajos en los que estudiaba varias propiedades de las curvas, las fronteras de los dominios, etcétera. En estos artículos, Schoenflies recurría a menudo a la "obviedad geométrica". Pero unos pocos años después, en 1910, apareció un artículo corto (de sólo 12 páginas) del joven matemático holandés Brouwer. Contenía varios ejemplos sorprendentes, que traían como consecuencia la falsedad de alguno de los resultados de Schoenflies o bien que el resultado fuese correcto pero no demostrado de manera rigurosa. En realidad, ¡había algunas jugarretas perversas en la "obviedad geométrica" de Schoenflies!

Para demostrar cuáles enunciados "obvios" resultaron falsos presentaremos algunos de los ejemplos de Brouwer (en realidad, usaremos algunas simplificaciones posteriores).

Brouwer construyó un dominio acotado cuya frontera era un continuo. Para hacer esto tomó una "botella" y empezó a extender su cuello, enrollándola alrededor de una circunferencia (Figura 47).

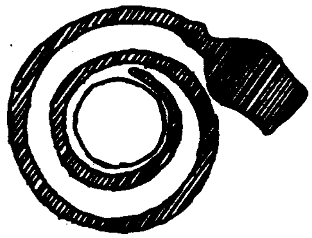

Figura 47.

Como resultado obtuvo un dominio acotado por dos espirales y la "botella". Pero esta frontera no es un continuo, ya que para obtener un continuo tendríamos que añadir la circunferencia alrededor de la cual se enrollan las espirales.

Dominios y fronteras

Ya que hemos hablado de las fronteras y los dominios, haremos una pausa para precisar estos conceptos. De hecho, la definición de curva dada por Jordan no fue tan exitosa, así que era necesario dar una nueva definición de dominio.

Un conjunto en el plano es *abierto*, si consta de una unión de círculos sin su frontera. En particular, el complemento de cualquier continuo plano es un conjunto abierto en el plano. Todos los dominios planos usuales (el interior de un círculo, de un cuadrado, de un triángulo, etcétera) son conjuntos abiertos en el plano. Además, estos conjuntos son conexos; cualesquiera dos de sus puntos se pueden unir mediante una recta quebrada que no sale del dominio. Éstas son también las propiedades que definen un dominio plano.

Un *dominio plano* es un conjunto conexo de puntos del plano formado por una unión de círculos sin su frontera.

El número de círculos puede ser arbitrario. Sin embargo, podemos mostrar que cualquier dominio se puede construir con un conjunto numerable de círculos.

Un círculo sin su frontera es una *vecindad* de su centro a. Por supuesto, cada punto tiene una infinidad de vecindades.

Un punto a en el plano es un *punto frontera* del dominio G si cada vecindad del punto a contiene tanto puntos del dominio G como puntos que no pertenecen a G (Figura 48).

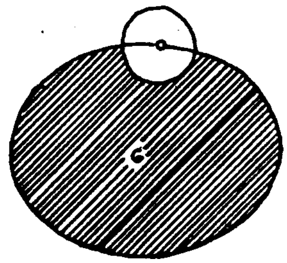

Figura 48.

Los conjuntos abiertos, los dominios y los puntos frontera de los dominios en el espacio se definen exactamente de la misma forma. La diferencia consiste en escoger esferas sin su frontera, en lugar de los círculos sin su frontera.

Además del concepto de vecindad de un punto (en el plano o en el espacio) necesitaremos el concepto de *vecindad relativa de un punto* perteneciente a algún conjunto A, que será el conjunto de puntos de una vecindad que pertenecen al conjunto A; o en otras palabras, la intersección de una vecindad ordinaria del punto con el conjunto A. Por ejemplo, si A es la curva trazada en la Figura 49 y G es la vecindad del punto a, entonces la vecindad relativa de este punto es el arco de la curva entre los puntos b y c. Si el conjunto A consta de varios puntos, entonces cada uno de sus puntos es una vecindad relativa de sí mismo.

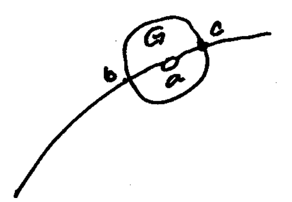

Figura 49.

Para ver esto, simplemente se toma una vecindad ordinaria del punto que no contenga a los demás puntos del conjunto (Figura 50).

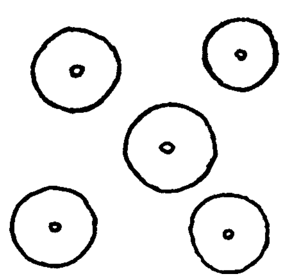

Figura 50.

El gran proyecto de irrigación

Hablaremos ahora sobre otro ejemplo de Brouwer, aún más sorprendente. Tracemos el mapa de algún país y los países vecinos. Casi cada punto de la frontera de este país pertenece a dos y sólo dos países: el país dado y uno de sus vecinos. En el siguiente mapa hay puntos donde se juntan tres países (Figura 51).

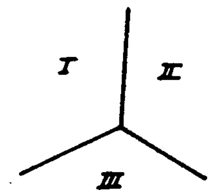

Figura 51.

Tres guardias fronterizos están en estos puntos. Pero sólo hay un número finito de dichos lugares en el mapa. Parece obvio que tales puntos no podrían ocupar toda la frontera de un país, es decir, que no podría haber tres dominios (tres países) que compartan la misma frontera. En otras palabras, parece obvio que no puede haber tres guardias fronterizos parados en cada punto de la frontera.

Sin embargo, Brouwer construyó tres dominios con estas características. Para entender su ejemplo, imaginemos una isla en el océano en la cual hay dos lagos con agua dulce, uno con agua fría y el otro con agua caliente. Llevaremos a cabo el siguiente proyecto de irrigación. Durante el primer día construimos canales desde el océano y los dos lagos de tal forma que cada canal sea muy pequeño (es decir, que sea sólo un riachuelo de la reserva correspondiente), de modo que los canales no se corten entre sí y de tal forma que cuando hayamos terminado, cada punto del terreno seco esté a una distancia menor de un kilómetro del agua del mar y de los dos lagos (Figura 52).

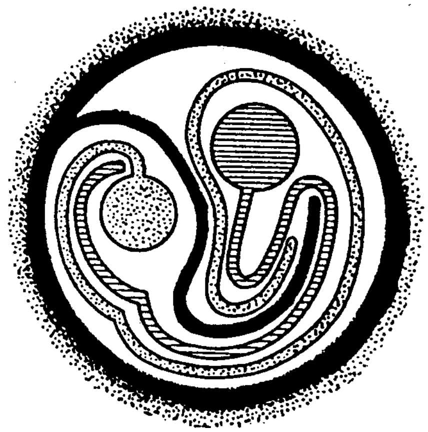

Figura 52.

Durante el siguiente medio día extendemos estos canales manteniéndolos pequeños, sin intersecciones entre ellos y de modo que la distancia de cualquier punto del terreno seco a cualquiera de los tres canales sea menor que ½ kilómetro. Al hacer esto, por supuesto, los canales deberán ser más angostos que antes. En la siguiente cuarta parte del día continuamos, arreglando las cosas para que cualquier punto de la tierra seca esté a menos de ¼ de kilómetro de cualquier canal, etcétera. Al seguir con este proceso, los canales se vuelven cada vez más sinuosos y angostos. Después de dos días de trabajo, la isla será irrigada por tres canales y quedará convertida en una curva de Cantor. No importa en que punto de la curva estemos, podremos tener agua salada o agua dulce fría o caliente, a nuestro gusto. Las cosas están arregladas de tal forma que las aguas no se mezclan entre sí. Si reemplazamos el océano y los lagos por tres países, obtendremos el mapa poco usual del que hablamos al principio. Tres guardias fronterizos, uno de cada país, pueden estar en cada punto de la frontera.

Un tema que no puede estudiarse

Ya hemos dicho que la definición de Cantor tenía una falla: no era adecuada del todo en el espacio. Pero entonces, ¿qué es una superficie en el espacio? Nadie sabía. Este problema, determinar qué son las curvas y las superficies en el espacio, fue propuesto en el verano de 1921 al estudiante de 23 años Pavel Samuelovich Urysohn por su profesor Dimitri Fedorovich Yegorov, de la Universidad de Moscú. (Es evidente que él pensó mucho en el significado del problema o, como ahora se suele decir, en la posibilidad de estudio del tema ¡este problema era de los más difíciles!)

Urysohn comprendió rápidamente que el problema de Yegorov era sólo un caso especial de un problema mucho más general: ¿cuál es la dimensión de una figura geométrica? Es decir, ¿cuáles son las características de la figura que nos hacen decir que un segmento o una circunferencia tienen dimensión 1, un cuadrado tiene dimensión 2 y un cubo o una esfera tienen dimensión 3? Introducimos aquí los recuerdos que de esa etapa de la vida de P. S. Urysohn tenía su más cercano amigo, un joven candidato a doctor en ese entonces y ahora académico y presidente honorario de la Sociedad Matemática de Moscú, Pavel Sergeevich Aleksandrov:

"Durante todo el verano de 1921 P. S. trató de hallar una definición 'actualizada' (de dimensión); se interesaba en una variante y luego en otra, planteando constantemente ejemplos que mostraban por qué una y otra variante debían eliminarse. Pasó dos meses totalmente absorto en sus meditaciones. Finalmente, una mañana cercana al final de agosto, P. S. amaneció con su definición inductiva de dimensión en la forma final ahora tan conocida. Esa misma mañana, al estarnos bañando en el Klyaz'ma, P. S. Urysohn me habló de su definición y ahí, durante la conversación que se extendió durante varias horas, delineó un plan para una teoría completa de la dimensión, compuesta por una serie de teoremas, que en ese entonces eran hipótesis que no sabía cómo demostrar y que en los meses subsecuentes fueron demostrados. Nunca más volví a participar o presenciar una conversación matemática compuesta por un flujo tan denso de ideas como la conversación de esa mañana de agosto. Todo el programa delineado fue entonces realizado durante el invierno de 1921/22; en la primavera de 1922 toda la teoría de la dimensión estaba lista."

La idea básica de la definición de dimensión de Urysohn consiste en lo siguiente. Usualmente, bastan dos o más puntos para separar una porción de una curva del resto (La parte de la rosa de cuatro pétalos de la Figura 53 que contiene al centro se puede separar del resto de la curva usando ocho puntos). Pero es imposible separar una parte de una superficie del resto quitando varios puntos; para esto se tendría que quitar toda una curva, pues sin importar cuántos puntos se tomen en la superficie, siempre será posible rodearlos. De la misma forma, se necesita una superficie para separar una parte del espacio tridimensional del resto del espacio.

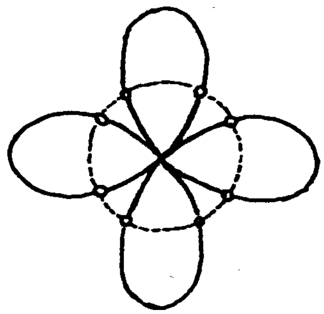

Figura 53.

Todo esto se debe precisar, ya que para separar alguna parte de ciertas curvas es necesario tomar un conjunto infinito de puntos, pero de forma que estos puntos no formen una curva. Urysohn pudo formular de manera precisa todas las definiciones necesarias. En cierta forma sus definiciones recuerdan las de Euc1ides (los extremos de una curva son puntos, los extremos de una superficie son curvas), pero esta resemblanza es como la de la canoa del hombre primitivo hecha a partir de un tronco y un barco de la actualidad.

La definición inductiva de dimensión

Ahora estudiaremos con más precisión cómo definió Urysohn la dimensión de una figura geométrica. Un conjunto típico de dimensión cero sería un conjunto que consta de un único punto, o en el peor de los casos, de un número finito de puntos. Pero en tal conjunto, cada punto tiene una vecindad relativa con frontera vacía, el punto mismo (ver Figura 50). Esta fue la propiedad que tomó Urysohn para su definición de conjunto de dimensión cero. Más precisamente, su definición es algo como esto:

Un conjunto F tiene dimensión cero si cada uno de sus puntos tiene una vecindad relativa arbitrariamente pequeña con frontera vacía.

En la mayoría de los casos, es posible establecer que un conjunto F tiene dimensión cero eligiendo para cada punto una vecindad ordinaria arbitrariamente pequeña cuya frontera no contenga puntos del conjunto F (entonces se asegura que la frontera de la vecindad relativa es vacía). Pero hay conjuntos de dimensión cero en el espacio tridimensional para cuyos puntos no se dispone de tales vecindades ordinarias.

Las palabras “arbitrariamente pequeña” se insertan en la definición por la siguiente razón. Si no estuvieran ahí, podríamos, por ejemplo, hallar un círculo lo suficientemente grande para que contuviera un cuadrado completo en su interior de tal forma que ningún punto del cuadrado estuviera en la frontera del círculo. Así, si estas palabras no estuvieran en la definición, tendríamos que la dimensión de un cuadrado sería cero, no dos, que es lo que realmente ocurre.

Además de los conjuntos finitos, muchos conjuntos infinitos tienen dimensión cero. Por ejemplo, consideremos el conjunto de puntos en el eje x con coordenadas 0, 1, 1/2, 1/3,..., $1/n$,... Es claro que cualquier punto de este conjunto tiene una vecindad arbitrariamente pequeña cuya frontera no contiene puntos de este conjunto. Únicamente el caso del punto 0 podría despertar algunas dudas. Pero si tomamos una vecindad de radio α, donde α es un número irracional, entonces ningún punto del conjunto estará en la frontera de esta vecindad.

El conjunto Q de puntos en una recta con coordenadas racionales también tiene dimensión cero. Para convencerse de esto, simplemente se toma un intervalo de longitud irracional con centro en el punto a de Q como la vecindad del punto a. El conjunto de Cantor también tiene dimensión cero (ver la sección *Puntos húmedos*), lo mismo que el conjunto que se obtiene al eliminar cruces del cuadrado (ver la sección *Continuos*) y muchos otros conjuntos.

De manera análoga al caso del plano, podemos construir conjuntos de dimensión cero en el espacio (al hacerlo, por supuesto que tomaremos las vecindades de puntos como vecindades en el espacio).

Después de definir los conjuntos de dimensión cero, Urysohn continuó con los conjuntos de dimensión uno; es decir, con las curvas. Aquí no hay ya vecindades pequeñas con fronteras vacías (ver Figura 53). Sin embargo, en el caso de las curvas ordinarias, la frontera de la vecindad sólo interseca a la curva en pocos puntos. Pero un conjunto compuesto por un número finito de puntos tiene dimensión cero. Generalizando esta situación, Urysohn definió un conjunto de dimensión uno de la siguiente manera.

Un conjunto F tiene *dimensión uno* si no es de dimensión cero y cada uno de sus puntos tiene una vecindad arbitrariamente pequeña cuya frontera interseca al conjunto F en un conjunto de dimensión cero.

Se vio entonces que no sólo las curvas ordinarias (circunferencia, segmento de recta, elipse, etcétera) sino también las curvas de Cantor tienen dimensión 1 en el sentido de Urysohn. Así, fue posible entonces definir el concepto de curva en el espacio o en el plano:

Una curva es un continuo de dimensión uno.

Fue claro también cómo definir superficie, sólido tridimensional y en general, un conjunto de cualquier dimensión. Como la definición sigue un orden numérico, definiendo primero un conjunto de dimensión 0, luego un conjunto de dimensión 1, luego de dimensión 2, etcétera, la definición de dimensión de Urysohn se llama *inductiva*.

¡El artículo debía publicarse, no revisarse!

Urysohn demostró muchos teoremas muy interesantes relacionados con el concepto de dimensión que él introdujo. Pero no pudo hallar una forma de demostrar un teorema muy importante; no podía demostrar que un cubo ordinario tiene dimensión 3. Después de un prolongado esfuerzo, él halló una forma de salir de esta dificultad, concibiendo durante este proceso una nueva definición de dimensión. No estudiaremos esta definición en detalle, pero la ilustraremos con figuras muy sencillas.

Si consideramos un segmento de recta o un arco de circunferencia, podemos dividirlo en pedazos arbitrariamente pequeños de tal forma que cada punto pertenezca a lo más a dos pedazos (Figura 54). Aquí tomamos los pedazos junto con sus fronteras (es decir, sus extremos). Pero un cuadrado no puede ser dividido de esta manera. A primera vista parecería que si dividimos un cuadrado en pedazos, siempre habrá puntos que pertenezcan a cuatro pedazos (Figura 55a). Sin embargo, si colocamos los pedazos en la forma en la cual se colocan los ladrillos, podemos dividir de tal forma que cada punto pertenezca cuando más a tres pedazos distintos (Figura 55b). Análogamente, podemos dividir al cubo en pequeños paralelepípedos de forma que cada punto pertenezca cuando más a cuatro paralelepípedos.

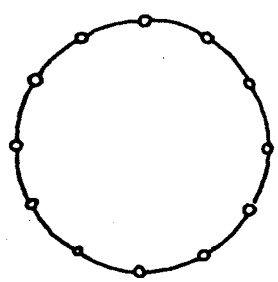

Figura 54.

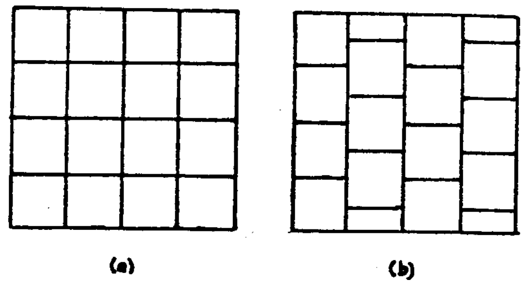

Figura 55.

Ésta es la propiedad que Urysohn tomó como su nueva definición de dimensión. Se dice que una figura tiene dimensión n si puede dividirse en partes cerradas arbitrariamente pequeñas de forma tal que ningún punto pertenezca a $n + 2$ partes distintas, pero de modo que para una subdivisión suficientemente fina haya puntos que pertenezcan a $n + 1$ partes distintas.

Las partes en las que se divide la figura no pueden ser totalmente arbitrarias; sus complementos deben ser conjuntos abiertos (tales partes se llaman cerradas).

Urysohn utilizó esta definición de dimensión para mostrar que la dimensión del cuadrado es 2, que la dimensión del cubo es 3, etcétera. Luego demostró que esta definición es equivalente a la primera que había dado.

La teoría de la dimensión de Urysohn causó una gran impresión en el mundo matemático. Esto lo expresa vivamente el siguiente episodio. Al hacer un viaje, Urysohn hizo un reporte de sus resultados en Göttingen. Antes de que los fascistas llegaran al poder, la Universidad de Göttingen era un centro matemático líder en el mundo. Después del reporte, el jefe del departamento de matemáticas de Göttingen, David Hilbert, dijo que los resultados debían publicarse en la revista *Mathematische Annalen,* una de las revistas matemáticas más prestigiadas de la época. Unos meses después, Urysohn volvió a dar un reporte en Göttingen y Hilbert preguntó al editor de los *Annalen*, Richard Courant, si ya se había publicado el artículo de Urysohn. Courant respondió que el artículo estaba en la etapa de revisión. Ante eso, Hilbert exclamó "¡Yo dije claramente que el artículo debía publicarse, no revisarse!" Después de una declaración tan directa, el artículo fue publicado rápidamente.

En los tres años posteriores, Urysohn desarrolló una investigación matemática sin comparación en cuanto a profundidad e intensidad (en este lapso publicó varias docenas de artículos). Un trágico accidente terminó con su vida de manera abrupta; se ahogó el 17 de agosto de 1924, al nadar durante una tormenta en el Golfo de Viscaya. Concluyó su último artículo matemático el día anterior a su muerte.

Urysohn dejó numerosos bosquejos de resultados inéditos. Su más cercano amigo (y coautor de muchos artículos) Pavel Sergeevich Aleksandrov interrumpió sus propios estudios por un tiempo y preparó estos artículos para su publicación, poniendo así a disposición de todos los matemáticos estos resultados adicionales de Urysohn. La teoría de la dimensión constituye en la actualidad un importante capítulo de las matemáticas.

Conclusión

Los conjuntos infinitos tienen propiedades extraordinarias. En el estudio de estas propiedades, los matemáticos han debido perfeccionar continuamente sus razonamientos y desarrollar aún más la lógica matemática. Se pensó por mucho tiempo que la teoría de los conjuntos y la lógica matemática eran ciencias abstractas y que no tenían aplicación práctica. Sin embargo, con la invención de las computadoras electrónicas se vio que su programación se basaba en la lógica matemática. Esto hizo que muchas investigaciones aparentemente alejadas de la realidad adquirieran un significado práctico. Esto ocurre a menudo en la historia de la ciencia; aún al principio de la década de los treinta se podía publicar un libro que dijera "El uranio no tiene usos prácticos."

En la actualidad, la teoría de conjuntos es fundamental para varias áreas de las matemáticas, tales como el análisis funcional, la topología, el álgebra general, etcétera. Aún hoy en día se siguen haciendo estudios profundos en la propia teoría de conjuntos, relacionados con los mismos fundamentos de las matemáticas. En estos estudios se ve claramente que el enfoque "intuitivo" del concepto de conjunto que hemos adoptado en este libro está lejos de ser el adecuado. Se ha hecho necesario axiomatizar el concepto de conjunto. Sin embargo, estas investigaciones no caen dentro de la intención buscada en este libro.

Ejercicios y ejemplos

1. El conjunto A está formado por los enteros divisibles entre 4, el conjunto B está formado por los enteros divisibles entre 10 y el conjunto C está formado por los enteros divisibles entre 75. ¿Cuáles números están en el conjunto ABC?
2. Una biblioteca tiene libros de distintos campos de la ciencia y el arte. Sea A el conjunto de todos los libros de la biblioteca y sea B el conjunto de todos los libros de matemáticas (no sólo los de la biblioteca). Caracterizar el conjunto $A - B$.

3. Por medio de las reglas algebraicas y de la lógica, simplificar la expresión

$$(A + B + C)\ (A + B) - [A + (B - C)]\ A$$

4. ¿Cuál número cardinal está dado por $2^{\aleph_0} c + \aleph_0 c$?
5. Dar una correspondencia uno a uno entre los puntos del segmento [0,1] y los puntos del intervalo (0,1) (es decir, el segmento sin sus extremos 0 y 1).
6. Demostrar que el conjunto de puntos en el plano que tienen ambas coordenadas racionales es numerable.
7. Demostrar que no hay en el plano un conjunto infinito no numerable de discos circulares sin intersecciones entre sí.
8. Hallar en el plano un continuo de circunferencias que no se intersequen entre sí.
9. Demostrar que no hay en el plano un conjunto infinito no numerable de figuras en forma de 8 que no tengan intersecciones entre sí.
10. Mostrar que no es posible hallar en el plano un conjunto infinito no numerable de curvas en forma de T que no tengan intersecciones entre sí.
11. Supongamos que se tienen numerados todos los puntos racionales del segmento [0,1]. Obtenemos una sucesión de puntos r_1, r_2,..., r_n,... Construimos una vecindad centrada en r_1 con radio 1/10, una vecindad centrada en r_2 con radio 1/20, una vecindad centrada en r_3 con radio 1/40, etcétera. Consideremos la unión de todas las vecindades obtenidas. Sea M el conjunto obtenido mediante este proceso. ¿Coincide M con todo el segmento [0,1]?
12. Se numera a los puntos racionales como en (3.9). Producir un ejemplo de un punto que no esté en el conjunto M del ejercicio 11.
13. El conjunto de todas las sucesiones de números reales (x_1, x_2,..., x_n,...) tales que $0 \leq x_n \leq 1$ se llama el cubo de dimensión numerable. Mostrar que el conjunto de puntos en este cubo tiene la cardinalidad del continuo.
14. Construir una función continua que tenga una infinidad de máximos y de mínimos en cada segmento.
15. El conjunto M consta de los puntos del segmento [0,1] que tienen representaciones decimales en las que no aparecen ni el 3 ni el 8. Describir un procedimiento para obtener este conjunto eliminando intervalos del segmento.

16. Hacer lo mismo para los puntos cuyos desarrollos decimales no contengan la combinación 38 (en el orden dado).
17. Un punto a es un *punto límite* de un conjunto M si en cada una de sus vecindades existe una infinidad de puntos de este conjunto. Mostrar que todos los puntos límite del conjunto de Cantor pertenecen a dicho conjunto. Recíprocamente, mostrar que todos los puntos del conjunto de Cantor son puntos límite del conjunto. Hacer lo mismo para los conjuntos de los ejercicios 15 y 16.
18. Mostrar que cada punto del segmento [0,1] es un punto límite del conjunto de todos los números racionales tales que $0 \le r \le 1$.
19. ¿Puede tener puntos límite el conjunto de los enteros?
20. Demostrar que el complemento de cualquier conjunto abierto en el plano contiene a todos sus puntos límite.
21. Demostrar que si un conjunto contiene a todos sus puntos límite, entonces su complemento es un conjunto abierto.