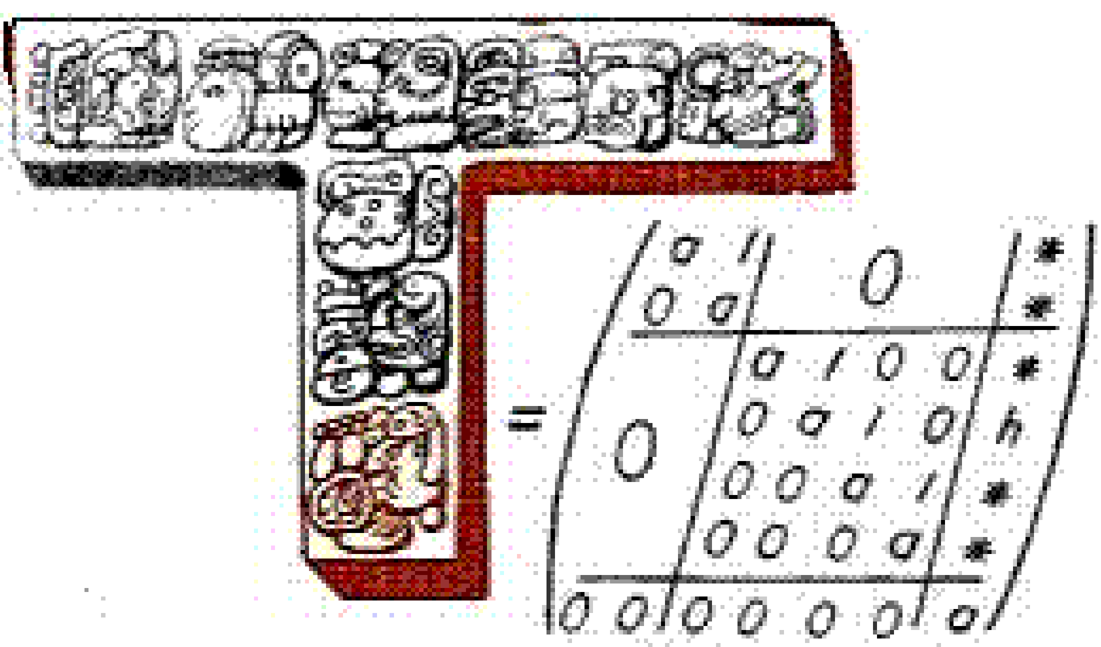
Revista del seminario
de
enseñanza y titulación

Vol. X 1994 Num. 92

La forma canónica de Jordan

Luis Manuel Hernández Gallardo



AL ENVIAR SUS ARTICULOS TENGAN EN CUENTA LAS SIGUIENTES NORMAS:

-Enviar sus artículos capturados con cualquier procesador de palabra (preferible que tenga "fuentes" para impresora "laser"), o bien

- Mecanografiados en máquina eléctrica con letra tipo "Lether Gothic" a renglón y medio y hojas tamaño carta. En caso necesario diferenciar los numeros "0" y "1" de las letras "O" y "L".

-El nombre del autor junto con sus datos, incluyendo algún teléfono, deberán aparecer en una hoja por separado del texto.

-Enviar originales y no copias.

-En cada artículo deberá incluirse relación de libros y artículos consultados, bajo el título de "Referencias" o bien "Bibliografía" sobre el tema.

-Cada autor recibirá constancia de recepción de su artículo, y una vez aprobada su publicación, constancia del número en que aparecerá.

-Cada autor tendrá derecho a recibir cinco ejemplares de la revista, donde sea publicado su artículo.

-Los trabajos, y cualquier correspondencia deberán remitirse a:

"Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación"
Departamento de Matemáticas, cubículo 030,
Facultad de Ciencias, UNAM. México, CU, 04510, DF.
Tel. (5) 622 4858, FAX: (5) 622 4859
Correo Electónico: gomal@redvaxl.dgsca.unam.unam

La revista del *Seminafio de Ensenanza y Titulación* considera publicables artículos de Ciencias Básicas, en particular de Matemáticas de la manera más amplia, desde la más extrema divulgación hasta artículos tan técnica o conceptualmente sofisticados como lo requiera su contenido y el estilo del autor barriendo aspectos de su enseñanza aplicaciones e investigación. En su caso el arbitraje de los artículos será anónimo, los árbitros no reciben los nombres de los autores y viceversa.

ISSN-0188-6037

Contenido:

DECLARACION DE LA SELVA LACANDONA
HOY DECIMOS ¡BASTA!
AL PUEBLO DE MEXICO:
HERMANOS MEXICANOS:

Somos producto de 500 años de luchas: primero contra la esclavitud, en la guerra de Independencia contra España encabezada por los insurgentes, después por evitar ser absorbidos por el expansionismo norteamericano, luego por promulgar nuestra Constitución y expulsar al Imperio Francés de nuestro suelo, después la dictadura porfirista nos negó la aplicación justa de las leyes de Reforma y el pueblo se rebeló formando sus propios líderes, surgieron Villa y Zapata, hombres pobres como nosotros a los que se nos ha negado la preparación más elemental para así poder utilizarnos como carne de cañón y saquear las riquezas de nuestra patria sin importarles que estemos muriendo de hambre y enfermedades curables, sin importarles que no tengamos nada, absolutamente nada, ni un techo digno, ni tierra, ni trabajo, ni salud, ni alimentación, ni educación, sin tener derecho a elegir libre y democráticamente a nuestras autoridades, sin independencia de los extranjeros, sin paz ni justicia para nosotros y nuestros hijos.

Pero nosotros HOY DECIMOS ¡BASTA!, somos los herederos de los verdaderos forjadores de nuestra nacionalidad, los desposeídos somos millones y llamamos a todos nuestros hermanos a que se sumen a este llamado como el único camino para no morir de hambre ante la ambición insaciable de una dictadura de más de 70 años encabezada por una camarilla de traidores que representan a los grupos más conservadores y vendepatrias. Son los mismos que se opusieron a Hidalgo y a Morelos, los que traicionaron a Vicente Guerrero, son los mismos que vendieron más de la mitad de nuestro suelo al extranjero invasor, son los mismos que trajeron un príncipe europeo a gobernarnos, son los mismos que formaron la dictadura de los científicos porfiristas, son los mismos que se opusieron a la Expropiación Petrolera, son los mismos que masacraron a los trabajadores ferrocarrileros en 1958 y a los estudiantes en 1968, son los mismos que hoy nos quitan todo, absolutamente todo.

Para evitarlo y como nuestra última esperanza, después de haber intentado todo por poner en práctica la legalidad basada en nuestra Carga Magna, recurrimos a ella, nuestra Constitución, para aplicar el **Artículo 39 Constitucional** que ha la letra dice:

"La soberanía nacional reside esencial y originariamente en el pueblo. Todo poder público dimana del pueblo y se instituye para beneficio de éste. **El pueblo tiene, en todo tiempo, el inalienable derecho de alterar o modificar la forma de su gobierno**".

Por tanto, en apego a nuestra Constitución, emitimos la presente al ejército federal mexicano, pilar básico de la dictadura que padecemos, monopolizada por el partido en el poder y encabezada por el ejecutivo federal que hoy detenta su jefe máximo e ilegítimo, Carlos Salinas de Gortari.

Conforme a esta **Declaración de guerra** pedimos a los otros **Poderes de la Nación** se aboquen a restaurar la legalidad y la estabilidad de la Nación **deponiendo al dictador.**

También pedimos a los Organismos Internacionales y a la Cruz Roja Internacional que vigilen y regulen los combates que nuestras fuerzas libran protegiendo a la población civil, pues nosotros declaramos ahora y siempre que estamos sujetos a lo estipulado por las Leyes sobre la Guerra de la Convención de Ginebra, formando el **EZLN** como fuerza beligerante de nuestra lucha de liberación. Tenemos al pueblo mexicano de nuestra parte, tenemos Patria y la Bandera tricolor es amada y respetada por los combatientes **INSURGENTES**, utilizamos los colores rojo y negro en nuestro uniforme, símbolos del pueblo trabajador en sus luchas de huelga, nuestra bandera lleva las letras **"EZLN", EJERCITO ZAPATISTA DE LIBERACION NACIONAL**, y con ella iremos a los combates siempre.

Rechazamos de antemano cualquier intento de desvirtuar la justa causa de nuestra lucha acusándola de narcotráfico, narcoguerrilla, bandidaje u otro calificativo que puedan usar nuestros enemigos. Nuestra lucha se apega al derecho constitucional y es abanderada por la justicia y la igualdad.

Por lo tanto, y conforme a esta **Declaración de guerra**, damos a nuestras fuerzas militares del **Ejército Zapatista de Liberación Nacional** las siguientes órdenes:

Primero.— Avanzar hacia la capital del país venciendo al ejército federal mexicano, protegiendo en su avance liberador a la población civil y permitiendo a los pueblos liberados elegir, libre y democráticamente, a sus propias autoridades administrativas.

Segundo.— Respetar la vida de los prisioneros y entregar a los heridos a la Cruz Roja Internacional para su atención médica.

Tercero.— Iniciar juicios sumarios contra los soldados del ejército federal mexicano y la policía política que hayan recibido cursos y que hayan sido asesorados, entrenados, o pagados por extranjeros, sea dentro de nuestra nación o fuera de ella, acusados de traición a la Patria, y contra todos aquellos que repriman y maltraten a la población civil y roben o atenten contra los bienes del pueblo.

Cuarto.— Formar nuevas filas con todos aquellos mexicanos que manifiesten sumarse a nuestra justa lucha, incluidos aquellos que, siendo soldados enemigos, se entreguen sin combatir a nuestras fuerzas y juren responder a las órdenes de esta Comandancia General del **EJERCITO ZAPATISTA DE LIBERACION NACIONAL.**

Quinto.— Pedir la rendición incondicional de los cuarteles enemigos antes de entablar los combates.

Sexto.— Suspender el saqueo de nuestras riquezas naturales en los lugares controlados por el EZLN.

PUEBLO DE MEXICO: Nosotros, hombres y mujeres íntegros y libres, estamos conscientes de que la guerra que declaramos es una medida última pero justa. Los dictadores están aplicando una guerra genocida no declarada contra nuestros pueblos desde hace muchos años, por lo que pedimos tu participación decidida apoyando este plan del pueblo mexicano que lucha por *trabajo, tierra, techo, alimentación, salud, educación, independencia, libertad, democracia, justicia y paz.* Declaramos que no dejaremos de pelear hasta lograr el cumplimiento de estas demandas básicas de nuestro pueblo formando un gobierno de nuestro país libre y democrático.

INTEGRATE A LAS FUERZAS INSURGENTES DEL EJERCITO ZAPATISTA DE LIBERACION NACIONAL.

Comandancia General del EZLN.
Año de 1993.

La Forma Canónica de Jordan.

Introducción.

Este trabajo es una recopilación sobre diferentes enfoques de La Forma Canónica de Jordan.

Una forma canónica es una forma estandar a lo que se reducen ciertas matrices mediante algún conjunto de operaciones.

La importancia de las formas canónicas es la de manejarse más fácilmente, en las aplicaciones, que la matríz original y muchas veces revelan propiedades adicionales.

Mencionemos algunas de estas formas canónicas:

(i) Cualquier matríz A $m \times n$ de rango r (orden de la submatríz cuadrada B de A, tal que B es la más grande de las submatrices cuadradas de A que tienen determinante diferente de cero) puede ser reducida por medio de operaciones elementales sobre los renglones y las columnas a la forma normal N, donde N es la matríz $m \times n$ que tiene unos en las posiciones $(1,1), (2,2), \cdots, (r,r)$ y ceros en todas las demás. Esta es la llamada forma canónica de A bajo una transformación de equivalencia.

(ii) Si todos los valores propios de una matríz A son diferentes, entonces bajo la transformación de semejanza $T^{-1}AT$ (donde T es la matríz cuyas columnas son los vectores propios de A), la forma canónica de A es la matríz diagonal cuyas entradas diferentes de cero son los valores propios de A.

(iii) Cuando A es cualquier matríz simétrica, existe una transformación de semejanza tal que $T^{T}AT$ es diagonal (donde T^{T} es la transpuesta de T).

(iv) Si A es una matríz $n \times n$, existe una matríz unitaria P (matríz compleja con columnas ortonormales) tal que $P^*AP = T$, donde P^* es la transpuesta conjugada de P y T es una matríz triangular superior. Esta es la forma canónica de Schur.

Sabemos que no todas las matrices son semejantes a una matríz diagonal. Por ejemplo, la matríz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

no puede transformarse en una matríz diagonal por medio de una transformación de semejanza para cualquier valor de $a \neq 0$, (ya que A tiene un único vector propio linealmente independiente).

Entonces es natural preguntarse, ¿cuál es la forma más simple que en general puede tomar una matríz A bajo una transformación de semejanza?

La respuesta es:

LA FORMA CANONICA DE JORDAN.

Existen numerosas pruebas de la existencia de esta forma canónica de una matríz cuadrada (en general compleja). Desde los enfoques algebraicos y geométricos clásicos (ver por ejemplo Gantmacher [6]), hasta varias pruebas "elementales" que han sido presentadas, por ejemplo Noble [8], Filippov [3], Galperin y Waksman [5], Fletcher y Sorensen [4], Hall [7], y Väliaho[10]. Además de "una vieja prueba" por Brualdi [2].

Tanto Galperin como Filippov establecen la existencia de la forma de Jordan por inducción, aplicando la teoría de mapeos lineales. En un paso inductivo, Filippov reduce en uno el orden de cada bloque de Jordan asociado con un valor propio de la matríz, mientras que Galperin y Waksman determinan estos bloques por completo. De tal forma que el paso inductivo de Galperin y Waksman es, en general, equivalente a varios pasos de Filippov, asociados con el mismo valor propio. La prueba de Fletcher y Sorensen es la de reducir la determinación de la forma de Jordan de una matríz compleja $n \times n$ a la determinación de las formas de Jordan de matrices nilpotentes; esta prueba procede en tres pasos: (I) reducción de la matríz a una forma triangular superior; (II) reducirla al caso en que todos los valores propios son iguales; (III) uso de inducción y factorizaciones de matrices para la reducción de una matríz triangular superior con valores propios iguales a la forma canónica de Jordan. El paso (II) plantea resolver una ecuación matricial lineal de la forma

$$AX - XA = S.$$

La prueba de Hall deja razonablemente claro el hecho de que una transformación lineal cuenta con la propiedad natural de tener una forma canónica, en este caso la forma canónica de Jordan. A partir de la demostración para transformaciones lineales, se obtiene la correspondiente para matrices. Se destaca el hecho de que una transformación lineal puede ser diagonalizada cuando su estructura de vectores propios es robusta (cuenta con una base de vectores propios), pero que a pesar de que pueda no ser tan robusta, aunque aún suficientemente rica, tiene una forma de Jordan. Además Hall, al igual que Väliaho y

Galperin y Waksman pone énfasis en la unicidad y no sólamente en la existencia de la forma canónica de Jordan.

Brualdi intenta revivir una prueba muy vieja que aparece en uno de los libros clásicos de la teoría de matrices: An Introduction to the Theory of Canonical Matrices de H.A.Turnbull y A.C.Aitken. Blackie and Son, London, 1932.

La prueba, comparada con la mayoría de las que aquí se presentan, es maravillosamente simple y dado que usa el lenguaje de la teoría de gráficas, ésta se hace muy visual. La parte más difícil de la prueba está en la obtención de la forma triangular. Después de esto los detalles no son difíciles de seguir, pues en esencia se reducen a operaciones elementales sobre los renglones seguidas de las correspondientes operaciones elementales sobre las columnas. En esta prueba también juega un papel importante el proceso inductivo.

La prueba presentada por Väliaho, en su idea rectora fundamental coincide con la de Galperin y Waksman, excepto que aquí, la construcción de las cadenas de Jordan dentro de los pasos inductivos se hace en forma más directa.

La Forma Canónica de Jordan: una Vieja Prueba.

Richard A. Brualdi.

1. Estructura Combinatoria. Nuestra discusión será bastante pausada. Sean A y B matrices complejas $n\times n$ (o matrices $n\times n$ en un campo algebraicamente cerrado). Entonces A es semejante a B si existe una matríz invertible P tal que $B=P^{-1}AP$. La idea de la forma canónica de Jordan es encontrar la matríz B,

tan simple como sea posible. Entendiendo por simple el que la estructura de las entradas diferentes de cero fuera de la diagonal sean simples. Esta estructura se toma como la digráfica de B, $D(B)$ definida como sigue. Los vértices de $D(B)$ son los enteros $1, 2, \cdots, n$ (correspondiendo simultáneamente a los renglones y columnas de B). Los arcos de $D(B)$ son ciertos pares ordenados de los diferentes vértices. Precisamente hay un arco (i, j) de i a j siempre que $i \neq j$ y $b_{ij} \neq 0$. Un ejemplo de una matríz y su digráfica se ilustra en la figura 1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

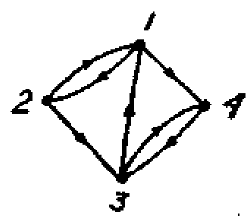


Fig. 1. Una matríz y su digráfica.

Las digráficas más simples son aquellas que no tienen arcos, esto es, consisten en un cierto número de vértices aislados. Decimos que estas digráficas tienen la estructura trivial. Estas digráficas son las que están asociadas con las matrices diagonales. Un ejemplo se ve en la figura 2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fig. 2. Una matríz diagonal y su digráfica.

Como todos sabemos, no toda matríz es semejante a una matríz diagonal, es decir, no toda matríz es semejante a una con estructura trivial. Pero el teorema de Jacobi de 1837 nos dice que siempre podemos obtener una estructura acíclica.

Teorema 1.1 (Jacobi). La matriz compleja A $n\times n$ es semejante a una matriz triangular superior T. Las entradas de la diagonal de T son los valores propios de A, y T puede ser elegida de tal forma que estos valores propios aparezcan en su diagonal principal en cualquier orden.

El teorema de Schur asegura que A es unitariamente semejante a una matriz triangular superior. ¿Qué tipo de digráficas tienen las matrices triangulares superiores?

Si en el dibujo de la digráfica de una matriz triangular superior arreglamos los vértices en una columna con vértice uno arriba y vértice n en la base, entonces todos los arcos apuntan hacia abajo. Una matriz de este tipo y su digráfica se ilustran en la figura 3.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

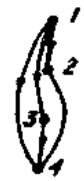


Fig. 3. Una matriz triangular superior y su digráfica.

Un ciclo en una digráfica D es una sucesión $(i_1, i_2, \cdots, i_k, i_1)$ de $k+1$ vértices $(k \geq 2)$ donde $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_1)$ son arcos de D. Una digráfica sin ciclos es llamada acíclica. El inverso no es cierto en el sentido estricto. Una matriz puede tener una digráfica acíclica sin ser una matriz triangular superior (o triangular inferior). Tal matriz se ilustra en la figura 4. Pero existe una permutación de semejanza tal que transforma esta matriz en una matríz triangular superior

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fig. 4. Una matríz no triangular con una digráfica acíclica.

Pero si ponemos los renglones y columnas de la matríz de la figura 4 en el orden 3, 2, 1, 4 obtenemos la matríz triangular superior de la figura 3. En forma más general, si una matríz B tiene una digráfica acíclica, entonces existe una matríz de permutación P tal que $P^{-1}BP$ es una matríz triangular superior. Cuando la matríz P corresponde a una transposición, decimos que $P^{-1}BP$ se obtiene por una permutación elemental de semejanza. Puesto que cada permutación es un producto de transposiciones, cada permutación de semejanza puede ser obtenida por una sucesión de permutaciones elementales de semejanza. Podemos ahora dar una versión combinatoria del teorema de Jacobi:

La matríz $A_{n\times n}$ es semejante a una matríz B cuya digráfica es cíclica.

La forma canónica de Jordan muestra que la digráfica puede hacerse mucho más simple. Para esto necesitamos algunos conceptos adicionales de la teoría de digráficas. Una trayectoria en una digráfica D es una sucesión $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ de k vértices diferentes tales que $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{k-1}, i_k)$ son arcos de D. La longitud de la trayectoria es $k-1$, el número de sus arcos, mientras que el tamaño de la trayectoria es k, el número de sus vértices. Admitimos la posibilidad de que $k=1$, una trayectoria de longitud 0 y tamaño 1. Una digráfica cuyos conjuntos de vértices y arcos respectivamente son $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ y $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{k-1}, i_k)$ es llamada una digráfica-trayectoría. Una digráfica-trayectoria es un tipo especial de digráfica acíclica. Un ejemplo de una matríz cuya digráfica es una digráfica-trayectoria, se ve en la figura 5.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

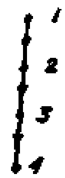


Figura 5. Una matríz B y su digráfica-trayectoria.

Cada matríz cuya digráfica es una trayectoria puede ser llevada a esta forma donde las entradas diferentes de cero fuera de la diagonal son precisamente aquellas que están inmediatamente encima de la diagonal principal, por medio de una permutación de semejanza (el orden de los renglones y de las columnas es el orden de los vértices de la trayectoria).

La matríz B de la figura 5 puede ser hecha numéricamente más simple sin cambiar su estructura por medio de una semejanza diagonal. Una matríz elemental diagonal es una matríz diagonal tal que la mayoría de sus entradas diferentes de 0 son diferentes de 1. Toda matríz diagonal invertible es un producto de matrices diagonales elementales. La matríz diagonal $n \times n$ con entradas diferentes de cero iguales a $d_1, d_2, \cdots, d_n$ será denotada por $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$. Sea $D_1 = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{2}, 1, 1)$. Entonces con B como en la figura 5, al hacer el producto $D_1^{-1} B D_1$ obtenemos

$$D_1^{-1}BD_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si ahora consideramos $D_2 = diag(1,1,\frac{1}{14},1)$ y $D_3 = diag(1,1,1,\frac{1}{42})$ y tomamos $D = D_1D_2D_3$ obtenemos $D = diag(1,\frac{1}{2},\frac{1}{14},\frac{1}{42})$, vemos que B es diagonalmente semejante a

$$D^{-1}BD = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La anterior reducción se aplica en forma bastante general y esto nos permite concluir: La digráfica de una matriz $B_{n\times n}$ es una digráfica-trayectoria si y sólo si es posible llevarla a una matriz C de la forma

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_2 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

por medio de una permutación de semejanza seguida por una semejanza diagonal.

Dada la matriz $A_{n\times n}$, la forma canónica de Jordan A_J de A en general no es una digráfica-trayectoria. Más bien es una colección de trayectorias tales que dos a dos no tienen vértices en común, ésta es una colección de trayectorias dos a dos vértice-disjuntas. Cada trayectoria está asociada exactamente con un valor propio de A, como la matríz C cuando $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$. Pero las trayectorias pueden estar asociadas con el mismo valor propio. Por ejemplo, una matríz en la forma canónica de Jordan y su digráfica se ilustran en la figura 6. La digráfica de la matríz consiste en cuatro trayectorias dos a dos vértice-disjuntas. Las primeras tres corresponden al valor propio 5 mientras que la última corresponde al valor propio 0.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{pmatrix}5&1&0\\0&5&1\\0&0&5\end{pmatrix} & & & 0 \\ \hline 0 & \begin{pmatrix}5&1\\0&5\end{pmatrix} & & 0 \\ \hline & & (5) & \\ \hline 0 & & & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \end{array}\right)$$

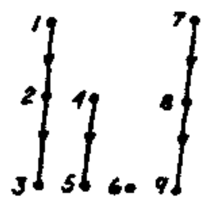


Figura 6. Una matríz en la forma canónica de Jordan y su digráfica.

Ahora podemos establecer la existencia de la forma canónica de Jordan de la matríz $A_{n\times n}$ como sigue.

Teorema 1.2 (Versión combinatoria de la forma canónica de Jordan). La matríz $A_{n\times n}$ es semejante a una matríz A_J cuya digráfica es una colección de trayectorias dos a dos vértice-disjuntas donde cada trayectoria está asociada con exactamente un valor propio.

Para probar el teorema 1.2 introduzcamos una clase más de semejanza que necesitamos. Sean i y j enteros con $1\leq i$, $j\leq n$ e $i\neq j$, y sea h cualquier número complejo diferente de cero. Sea P la matríz $n\times n$ que se obtiene de la matríz identidad $n \times n$ poniendo h en la posición (i,j). (Entonces la digráfica de P tiene exactamente un arco, el arco (i,j).) La matríz P es invertible y P^{-1} es obtenida de P reemplazando h por $-h$. La matríz $C = P^{-1}BP$ es obtenida a partir de B sumandole h veces la columna i de B a la columna j y enseguida $-h$ veces el renglón j de BP al renglón i. Decimos que C es obtenida a partir de B por una combinación de semejanza elemental.

Puesto que una matríz invertible puede ser reducida a la matríz identidad por una sucesión de operaciones elementales sobre los renglones (intercambio de dos renglones, multiplicación de un renglón por un número diferente de cero, sumar un múltiplo de un renglón a un renglón diferente), se sigue que la matríz A es semejante a la matríz B si y sólo si B puede ser obtenida a partir de A por medio de una sucesión de permutaciones elementales, semejanzas elementales diagonales y combinaciones de semejanza.

2. La forma canónica de Jordan. Ahora regresamos a la prueba de la existencia de una forma canónica de Jordan para la matríz compleja $A_{n\times n}$. La sección sobre estructura combinatoria nos permitirá enriquecer esta prueba.

Antes de enunciar el teorema sobre la forma canónica de Jordan en su versión clásica, demos la siguiente:

Definición. Un bloque de Jordan es una matríz $k \times k$ de la forma

$$J_k(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & a \end{pmatrix}$$

donde $J_1(a) = (a)$.

Teorema 2.1 (Versión clásica de la forma canónica de Jordan). La matríz compleja $A_{n\times n}$ es semejante a una matríz que es una suma directa de bloques de Jordan.

Prueba. La reducción es en tres pasos.

I. Por el teorema de Jacobi (o de Schur), existe una matríz invertible P tal que $T = P^{-1}AP$ es una matríz triangular superior donde las entradas diagonales iguales aparecen consecutivamente.

Puesto que la semejanza es una relación transitiva, ahora trataremos exclusivamente con T.

II. Supongamos que T tiene al menos dos entradas diferentes sobre la diagonal principal. Entonces podemos escribir

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & X \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

donde T_1 es una matríz triangular superior cuyas entradas diagonales cada una de ellas es igual a a, que es una constante, y T_2 es una matríz triangular superior tal que ninguna de sus entradas diagonales vale a. Usando combinaciones elementales de semejanza, podemos hacer cada entrada de X igual a 0 sin cambiar T_1 y T_2. Entonces T es semejante a la suma directa de T_1 y T_2. Si T_2 no tiene una diagonal principal constante, hacemos con ella lo mismo que con T. Finalmente encontramos que T es la suma directa de matrices triangulares superiores cada una de ellas con su respectiva diagonal constante. La forma canónica de Jordan de T se habrá obtenido cuando cada una de las matrices en la suma directa sea reducida a la forma canónica de Jordan. Esto nos permite suponer que T tiene una diagonal principal constante, esto es, todos los valores propios son iguales.

III. Ahora podemos tomar a T como una matríz triangular superior $n \times n$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a & & & * \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a \end{pmatrix}$$

Que esta matríz puede ser reducida a la forma canónica de Jordan la establemos por inducción sobre n. Cuando $n=1$, $T(a)=(a)$ que ya es la forma canónica de Jordan. Supongamos $n=2$, así que

$$T=\begin{pmatrix} a & p \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Si $p=0$, T está en la forma canónica de Jordan. Si $p\neq 0$, una semejanza diagonal elemental transforma T en

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

la cual está en la forma canónica de Jordan. Ahora supongamos que $n>2$ y procedamos por inducción. Por la hipótesis de inducción, la submatríz principal $S_{(n-1)\times(n-1)}$ de T puede ser transformada por una semejanza en la forma canónica de Jordan F: $F=Q^{-1}SQ$. Si ahora consideramos P como la suma directa de Q con la matríz identidad 1×1, obtenemos que $P^{-1}TP=T_1$, donde

$$T_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} & F & & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a \end{array} \right).$$

Primero supongamos que existe una entrada $h \neq 0$ en la última columna de T_1, la cual está en el mismo renglón donde hay un 1 de alguno de los bloques de Jordan de F. Por ejemplo, podriamos tener.

$$T_1 = \left(\begin{array}{cc|cccc|c} a & 1 & & & & & * \\ 0 & a & & & 0 & & * \\ \hline & & a & 1 & 0 & 0 & * \\ & & 0 & a & 1 & 0 & h \\ & 0 & 0 & 0 & a & 1 & * \\ & & 0 & 0 & 0 & a & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right) \qquad (2.1)$$

La combinación elemental de semejanza que agrega $-h$ veces la columna 5 de T_1 a la columna 7 y h veces el renglón 7 al renglón 5 reemplaza h con 0 y no cambia alguna otra entrada de T_1. Así una sucesión de combinaciones elementales de semejanza nos da una matríz triangular superior T_2 que tiene la misma forma que T_1 con F como su submatríz principal ($F_{(n-1)\times(n-1)}$) pero tiene a lo más una entrada diferente de cero fuera de la diagonal en cada renglón. Para la matríz T_1 en (2.1), la matríz T_2 tiene la forma

$$T_2 = \left(\begin{array}{cc|cccc|c} a & 1 & & & & & 0 \\ 0 & a & & & 0 & & s \\ \hline & & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & a & t \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \qquad (2.2)$$

Si la última columna de T_2 no tiene entradas diferentes de cero fuera de la diagonal, entonces T_2 está en la forma canónica de Jordan. Supongamos que T_2 tiene al menos una entrada diferente de cero en la columna n y fuera de la diagonal.

La digráfica de T_2 es medianamente simple. Consiste, en general, en un número de trayectorias dos a dos vértice-disjuntas, y, entereramente vértice-disjuntas de ellas, un número de otras trayectorias que son dos a dos vértice-disjuntas excepto por el hecho de que todas ellas terminan en el vértice n. El número total de trayectorias terminando en el vértice n es igual al número de entradas diferentes de cero fuera de la diagonal en la columna n de T_2. Las trayectorias que no terminan en el vértice n ya corresponden a bloques de Jordan de T_2 (recordemos la versión combinatoria de la forma canónica de Jordan, Teorema 1.2). Si existe una de tales trayectorias, entonces se aplica inmediatamente la hipótesis de inducción. Así podemos suponer que todas las trayectorias de la digráfica de T_2 terminan en el vértice n. Estas trayectorias están en una correspondencia uno a uno con las entradas diferentes de cero fuera de la diagonal en la columna n.

Refiramonos a T_2 en (2.2) para nuestra descripción, pero quedará claro que el procedimiento es bastante general. La trayectoria de tamaño más grande terminando en $n=7$ es la trayectoria (3,4,5,6,7) cuyo último arco es denotado por (t). (Si ambas trayectorias tienen el mismo tamaño, entonces arbitrariamente escogemos una.) Usando una semejanza diagonal elemental podemos suponer $t=1$. Consideremos la trayectoria $(1,2,7)$ cuyo último arco es denotado por (s). Sucesivamente realizamos las siguientes combinaciones elementales de semejanza (recuerde que ya se ha tomado t como 1):

(i) Agreguese $-s$ veces el renglón 6 al renglón 2 y entonces agreguese s veces la columna 2 a la columna 6.

(ii) Agreguese $-s$ veces el renglón 5 al renglón 1 y entonces agreguese s veces la columna 1 a la columna 5.

La digráfica de la matríz inicial T_2, y las digráficas de las matrices después de cada paso se ilustran en la figura 7.

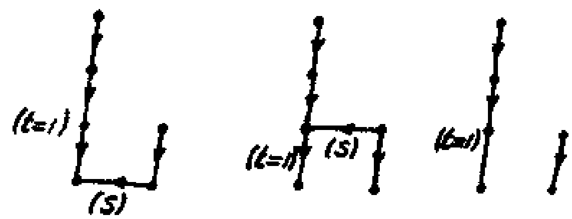


Figura 7. La digráfica de T_2 en (2.2) y aquellas que resultan al aplicar (i) y (ii).

De esta forma por combinaciones elementales de semejanza hemos substituido s en T_2 por 0 sin otro cambio en la matríz.

Entonces la matríz T_2 en (2.2) es semejante a la matríz T_3 que resulta cuando $s=0$. El bloque de Jordan 4×4 de F de orden mayor que corresponde a la trayectoria más grande, de tamaño 4 terminando en $n=7$. ahora se une por medio de la entrada $t=1$ con la última entrada diagonal a, para dar un bloque de Jordan 5×5. Más precisamente, la matríz T_3 es semejante por permutación a la suma directa de los bloques de Jordan $J_3(a)$, $J_3(a)$, $J_5(a)$ y $J_2(a)$.

Si la forma canónica de Jordan de la matríz S tiene más de tres bloques de Jordan de tal forma que las matrices T_1 y T_2 tienen más de tres bloques, entonces la estrategia anterior puede ser aplicada a los nueve bloques obteniendo la esquina inferior derecha. Entonces hemos llevado a feliz término la inducción y la forma canónica de Jordan, y por lo tanto, la prueba está completa. □

Una Prueba Corta del Teorema sobre la Reducción de una Matríz a la Forma de Jordan.

A.F. Filippov.

Teorema. Para cualquier transformación lineal A en un espacio complejo de dimensión n existe una base en la cual la matríz de la transformación A está en la forma de Jordan,

$$\begin{pmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_p \end{pmatrix}, \text{ donde } K_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \text{ o } K_i=(\lambda_i).$$

Prueba. En el caso $n=1$ el teorema es obvio. Supongamos que el teorema es cierto para espacios de dimensión menor que n. Demostraremos que éste es cierto para espacios R de dimensión n.

Tomando cualquier base en R, denotemos por $\bar{A}$ a la matríz de la transformación A. Sea λ la raíz de la ecuación $(\bar{A}-\lambda I)=0$. Entonces la matríz $\bar{A}-\lambda I$ es de rango $r<n$. Por lo tanto la ecuación $(A-\lambda I)x=0$ tiene $m=n-r$ soluciones linealmente independientes en R, y la transformación $B=A-\lambda I$ transforma el espacio completo R en el subespacio BR de dimensión r. Puesto que

para cualquier vector y en R o en BR tenemos $By\epsilon BR$, se sigue que la transformación B puede ser considerada sólamente en el subespacio BR. Por la hipótesis de inducción existe en BR una base en la cual la matríz de la transformación B está en la forma de Jordan

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} L_1 & & & \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_q \end{pmatrix}, \text{ donde } L_i=\begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & \\ & \mu_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \mu_i \end{pmatrix}, \text{ o } L_i=(\mu_i).$$

Agrupemos los vectores de la base en las sucesiones

$$\{h_{i1},\cdots,h_{in_i}\},\quad i=1,2,\cdots,q$$

donde la iésima sucesión corresponde a la iésima celda L_i, así que

$$Bh_{i1}=\mu_i h_{i1},\quad Bh_{ik}=\mu_i h_{ik}+h_{i,k-1};\ k=2,3,\cdots,n_i. \qquad (1)$$

Supongamos que sólamente m_1 de las celdas, $L_1,\cdots,L_{m_1}$, tienen $\mu_i=0$; entonces existen m_1 vectores propios h_{i1} con $\mu_i=0$. El rango de cada celda con $\mu_i=0$ es n_i-1, y el rango de una celda con $\mu_i\neq 0$ es n_i (n_i es la dimensión de la celda). En otras palabras, el rango r_1 de la matríz $\tilde{B}$ es $\sum n_i-m_1=r-m_1$. Por lo tanto el conjunto de soluciones $y\epsilon BR$ de la ecuación $By=0$ es un subespacio $P(m_1=r-r_1)$ de dimensión m_1.

Los vectores $x\epsilon R$ que satisfacen la ecuación $Bx=0$ forman un subespacio S de dimensión m. La intersección de S con BR es un subespacio de P con la base h_{i1} $(i=1,\cdots,m_1)$. Formemos una base de S combinando estos h_{i1} con los vectores adicionales g_i, $i=1,\cdots,m_0$; $m_0=m-m_1\geqslant 0$.

Sean h_{in_i} $(i=1,\cdots,m_1)$ los últimos vectores de las sucesiones con $\mu_i=0$. Puesto que $h_{in_i}\in BR$, debe existir un vector $f_i\in R$ tal que

$$Bf_i=h_{in_i}\,,\quad i=1,\cdots,m_1. \qquad (2)$$

Mostraremos que los vectores h_{ik} $(i=1,\cdots,q;\,k=1,\cdots,n_i)$, g_i $(i=1,\cdots,m_0)$, f_i $(i=1,\cdots,m_1)$ son linealmente independientes.

Sea

$$f=\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{n_i}a_{ik}h_{ik}+\sum_{i=1}^{m_0}b_ig_i+\sum_{i=1}^{m_1}c_if_i=0. \qquad (3)$$

Usando las ecuaciones $Bg_i=0$, (1) y (2), obtenemos

$$Bf=\sum_{i=1}^{q}a_{i1}\mu_ih_{i1}+\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=2}^{n_i}a_{ik}(\mu_ih_{ik}+h_{i,k-1})+\sum_{i=1}^{m_1}c_ih_in_i=0. \quad (4)$$

Puesto que $\mu_i=0$ $(i\leq m_1)$, se sigue que los coeficientes de los h_{in_i} $(i\leq m_1)$ en (4) son c_i. Dado que los h_{ik} son linealmente independientes, se sigue que $c_i=0$. Ahora de (3) tenemos

$$g=\sum b_ig_i=-\sum\sum a_{ik}h_{ik}. \qquad (5)$$

Esto significa que $g\in S$ y $g\in BR$. Por lo tanto $g\in P$, $g=\sum_{i=1}^{m}d_ih_{i1}$. Puesto que los g_i y los h_{i1} son linealmente independientes (forman una base en S), se deduce que $g=0$ en (5), todos los $b_i=0$, y, en virtud de la independencia lineal de los h_{ik}, todos los $a_{ik}=0$.

Así, en (3) todos los coeficientes son 0 y los vectores h_{ik}, g_i, f_i son linealmente independientes. El número total de estos vectores es $r+m_0+m_1=r+m=n$. En otras palabras, forman una base de R. Usando la notación $f_i=h_{i,n_i+1}$, escribimos esta base en la forma de sucesiones:

$$\{g_1\},\cdots,\{g_{m_0}\};\ \{h_{11},\cdots,h_{1n_1},h_{1,n_1+1}\},\ i=1,\cdots,m_1;$$
$$\{h_{i1},\cdots,h_{in_i}\},\ i=m_1+1,\cdots,q$$

(cada una de las primeras m_0 sucesiones contienen un vector). Por virtud de las ecuaciones $Bg_i=0$, $Bh_{i,n_i+1}=h_{in_i}$ y (1), donde $\mu_i=0$ para $i\leq m_1$, en esta base la matríz de la transformación B está en la forma de Jordan. En otras palabras la matríz de la transformación $A=B-\lambda I$ también tiene la forma de Jordan.

Un Enfoque Elemental de la Teoría de Jordan.

A. Galperin y Z. Waksman.

Las pruebas usuales de la existencia y unicidad de la forma canónica de Jordan emplea una determinada cantidad de maquinaria: teoría de módulos, espacios cociente, o al menos una manipulación de matrices polinomiales relativamente rebuscada.

Presentamos un alternativo y, hasta donde conocemos nuevo desarrollo que usa sólamente los conceptos elementales de de Algebra Lineal. El razgo distintivo de este enfoque es que se trabaja con lo que llamamos "λ-matrices de Jordan" más que con operadores nilpotentes.

Definimos e λ-bloque de Jordan $k\times k$ como la matríz $k\times k$

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & \lambda\end{bmatrix},\quad (J(1,\lambda)=[\lambda],\ J(0,\lambda)=\phi).$$

A una matríz la llamaremos λ-matríz de Jordan si tiene la forma del bloque diagonal

$$\begin{bmatrix} A & & & \\ & J(k_1,\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(k_m,\lambda) \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

donde A es una matríz cuadrada y λ es un valor propio de A.

Sea V_0 un espacio complejo lineal de dimensión n y sea $\mathcal{T}_0$ una transformación lineal sobre V_0. Sea T_0 la matríz de $\mathcal{T}_0$, con respecto a alguna base $b_0=\{v_1,\cdots,v_n\}$ para V_0. Llamaremos a T_0 la forma canónica de Jordan para $\mathcal{T}_0$ si ésta tiene la forma de bloque diagonal, siendo cada bloque un λ-bloque de Jordan para alguno u otro valor de λ. En este caso b_0 es llamada una base canónica de Jordan.

Primero consideremos la unicidad de la forma canónica de Jordan. Dada una forma canónica de Jordan para una transformación lineal $\mathcal{T}_0$, observese que si escogemos todos los λ-bloques de Jordan de algún λ y agrupamos todos los otros en A, obtenemos una λ-matríz de Jordan. Tal conversión se puede lograr reenumerando los vectores de la base. Así, para mostrar la unicidad es suficiente con mostrar que cada transformación determina unívocamente los tamaños de los λ-bloques de Jordan en su λ-matríz de Jordan. En realidad, es suficiente mostrar esto para $\lambda=0$, puesto que si T' y T'' son dos λ-matrices de Jordan diferentes para $\mathcal{T}_0$, entonces $T'-\lambda I$ y $T''-\lambda I$ son dos 0-matrices de Jordan diferen tes para la transformación $\mathcal{T}_0 - \lambda \mathcal{I}$. (Aquí I es la matríz identidad e $\mathcal{I}$ es la transformación identidad sobre V_0.

Supongamos entonces que $\mathcal{T}_0$ tiene una 0-matríz de Jordan

$$T_0 = \begin{bmatrix} A & & & \\ & J(k_1,0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(k_m,0) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

con respecto a alguna base b_0 para V_0. Notese que A debe ser nosingular, puesto que 0 no es un valor propio de A. Es útil primero considerar un ejemplo, digamos cuando $n=10$ y $\mathcal{T}_0$ tiene la matríz

$$T_0 = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 \; v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} A & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3)$$

con respecto a la base $b_0 = \{v_1, \cdots, v_{10}\}$ donde A es una matríz 2×2 nosingular. Aquí cada columna está etiquetada por el símbolo del correspondiente vector de la base.

Sea V_1 la imagen de la transformación $\mathcal{T}_0$, es decir,

$$V_1 = im\, \mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0 V_0.$$

Es fácil deducir a partir de (3) deducir una base para V_1: $b_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_8\}$. En particular $\dim V_1 = 7$. También se puede ver que $\dim V_0 - \dim V_1$ es igual al número de 0-bloques de Jordan en T_0. Puesto que V_1 es un subespacio invariante de $\mathcal{T}_0$, podemos hablar de la restricción $\mathcal{T}_1$ de $\mathcal{T}_0$ con respecto a la base b_1.

Ahora podemos repetir el razonamiento. Este será el mismo debido a que otra vez T_1 es una 0-matríz de Jordan. Así obtenemos la base $b_2=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ para la imagen $V_2 = \mathcal{T}_1 V_1$ de la transformación $\mathcal{T}_1$. También se puede ver que $\dim V_2 = 5$ y $\dim V_1 - \dim V_2$ otra vez es igual al número de 0-bloques de Jordan en T_1. Procediendo en esta forma obtenemos la sucesión de transformaciones siguiente: $\mathcal{T}_2$ sobre V_2 con la base b_2 y la matríz T_2 con bloques $A, J(2,0), J(1,0)$; $\mathcal{T}_3$ sobre V_3 con la base $b_3=\{v_1, v_2, v_3\}$ y la matríz T_3 con bloques $A, J(1,0)$; $\mathcal{T}_4$ sobre V_4 con la base $b_4=\{v_1, v_2\}$ y la matríz $T_4 = A$. Aquí termina la sucesión, ya que $V_5 = V_4$. Nótese que el índice del último miembro de la sucesión coincide con el tamaño del máximo de los 0-bloques de Jordan de T_0.

Aplicando el mismo análisis a nuestra transformación lineal general $\mathcal{T}_0$ con 0-matríz de Jordan (2), obtenemos la sucesión

$$\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \cdots, \mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{h+1} \qquad (4)$$

de restricciones sucesivas de la transformación $\mathcal{T}_0$ a los respectivos espacios,

$$V_0, V_1, V_2, \cdots, V_h = V_{h+1} \quad (V_i = \operatorname{im} \mathcal{T}_{i-1}) \quad (5).$$

Además, tenemos el siguiente procedimiento para formar una base para V_i, $i = 1, 2, \cdots$: simplemente borramos de b_0 los últimos i vectores correspondientes a cada 0-bloque de Jordan en T_0. (Borramos todos los vectores correspondientes a un bloque de tamaño menor que i.) En consecuencia, vemos que si s_i, $i = 1, \cdots, h$, es el número de 0-bloques de Jordan $i \times i$ en T_0, entonces

$$\begin{aligned}
\dim V_0 - \dim V_1 &= s_1 + s_2 + \cdots + s_h \\
\dim V_1 - \dim V_2 &= s_2 + \cdots + s_h \\
&\vdots \\
\dim V_{h-1} - \dim V_h &= s_h \\
\dim V_h - \dim V_{h+1} &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones para $s_1, \cdots, s_h$ vemos que los tamaños de los 0-bloques de Jordan en cualquier 0-matriz de Jordan para $\mathcal{T}_0$ están expresados en términos de $\dim V_0$, $\dim V_1$, $\dim V_2, \cdots$, que son los invariantes de la transformación $\mathcal{T}_0$ y así no dependen de la elección de la base. Esto completa la prueba de la unicidad de la forma de Jordan.

Para establecer la existencia de la forma canónica de Jordan es suficiente con establecer la existencia de una 0-matriz de Jordan (2) para $\mathcal{T}_0$. Porque, considerando $\mathcal{T}_0 - \lambda\mathcal{I}$, se muestra la existencia para $\mathcal{T}_0$ de una λ-matriz de Jordan para algún valor propio λ de $\mathcal{T}_0$. Entonces aplicamos inducción a la restricción de $\mathcal{T}_0$ al subespacio correspondiente a la matriz A en (1).

Para motivarnos, consideremos una vez más el proceso des crito anteriormente para construir una base b_i para V_i, dada la 0-matríz de Jordan (2) para $\mathcal{T}_0$ y la correspondiente base b_0. Nuestro proceso termina cuando hemos agotado los 0-bloques de Jordan, es decir, cuando nos hemos quedado sólamente con la porción de la matríz original correspondiente a la submatríz A. Supongamos que esto sucede en la etapa h. Entonces A es la matríz de la restricción $\mathcal{T}_h$ de $\mathcal{T}_0$ a V_h con respecto a la base b_h. Fijemonos en la penúltima etapa de nuestro proceso, vemos que la base para V_{h-1} consiste en la base para V_h junto con ciertos vectores de la base b_0 que están en el núcleo de $\mathcal{T}_{h-1}$. En cada paso anterior i podemos haber descartado de b_{i-1} algunos vectores que están en el núcleo de $\mathcal{T}_{i-1}$, pero también hemos eliminado algunos otros. Sin embargo, estos otros son mapeados por $\mathcal{T}_{i-1}$ (uno a uno) sobre los vectores de la base que serán descartados en la siguiente etapa. De esta forma tenemos descomposiciones $V_{h-1} = V_h \oplus \bar{N}_h$ y $V_{i-1} = V_i \oplus (\bar{N}_i \oplus L_i)$ para $i = 1, \cdots, h-1$. Combinando éstas obtenemos una descomposición

$$V_0 = V_h \oplus \bar{N}_h \oplus (\bar{N}_{h-1} \oplus L_{h-1}) \oplus \cdots \oplus (\bar{N}_1 \oplus L_1) \qquad (6)$$

donde

(i) $\mathcal{T}_0$ es nosingular sobre V_h,

(ii) cada $\bar{N}_i \subset$ núcleo de $\mathcal{T}_{i-1}$,

(iii) $\mathcal{T}_{i-1}$ mapea L_i isomórficamente sobre $\bar{N}_{i+1} \oplus L_{i+1}$ para $i = 1, \cdots, h-2$,

(iv) $\mathcal{T}_{h-2}$ mapea L_{h-1} isomórficamente sobre $\bar{N}_h$.

En realidad, para $i = h-1$ (iv) es (iii) tomando en cuenta que $L_h=\{0\}$. Notese también que $V_h \oplus \tilde{N}_h \oplus \cdots \oplus (\tilde{N}_{i+1} \oplus L_{i+1})$ es igual a V_i.

Nuestra prueba consiste en construir dicha descomposición para una transformación arbitraria $\mathcal{T}_0$.

Así, dada una transformación $\mathcal{T}_0$ sobre V_0, consideremos las sucesiones (4) y (5). La discusión anterior sugiere como encontrar h tal que se satisfaga (i): escojamos h tal que $V_h=V_{h+1}$. Esto tiene que suceder puesto que $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots$. Consideremos como h el mínimo de tales enteros.

Sea N_i el núcleo de $\mathcal{T}_{i-1}$. Escojamos $\tilde{N}_i$ como algún subespacio de N_i tal que $V_i \oplus \tilde{N}_i = V_i \oplus N_i$ (es decir extraigamos de N_i un complemento para V_i en V_i+N_i, por ejemplo, agregando elementos de N_i para a partir de una base de V_i completar una para V_i+N_i). Para escoger los L_i necesitamos la siguiente:

Proposición. Si M es un subespacio de V_i $(i>0)$ tal que

$$V_i = V_{i+1} \oplus M, \qquad (7)$$

entonces existe un subespacio L de V_{i-1} tal que

$$V_{i-1}=(V_i+N_i)\oplus L \qquad (8)$$

y

$$\mathcal{T}_0 L = \mathcal{T}_{i-1} L = M, \quad \dim L=\dim M \quad (9)$$

(es decir, $\mathcal{T}_0$ mapea L isomórficamente sobre M).

Para $i=h$ (7) toma la forma $V_h=V_{h+1}$ (es decir $M=\{0\}$), así, por la proposición anterior $L=\{0\}$ y $V_{h-1}=V_h \oplus N_h$, es decir, $\tilde{N}_h=N_h$. Para $i=h-1$ y $M=\tilde{N}_h$ la proposición garantiza la existencia de un L_{h-1} que complementa $V_{h-1}+N_{h-1}$ a V_{h-2}

y es mapeado por $\mathcal{T}_0$ isomórficamente sobre $\tilde{N}_h$. Escogiendo un complemento $\tilde{N}_{h-1}$ de V_{h-1} para $V_{h-1}+N_{h-1}$ tendremos $V_{h-2}=V_{h-1}\oplus(\tilde{N}_{h-1}\oplus L_{h-1})$. Aplicando la proposición otra vez para $i=h-2$ y $M=\tilde{N}_{h-1}\oplus L_{h-1}$ encontramos L_{h-2} mapeado isomórficamente por $\mathcal{T}_0$ sobre $\tilde{N}_{h-1}\oplus L_{h-1}$ y tal que $V_{h-3}=(V_{h-2}+N_{h-2})\oplus L_{h-2}$ o, después de una elección adecuada de $\tilde{N}_{h-2}$, $V_{h-3}=V_{h-2}\oplus(\tilde{N}_{h-2}\oplus L_{h-2})$. Continuando de esta forma, obtenemos la descomposición (6) con las propiedades establecidas en la proposición.

Ahora describamos el proceso para elegir la base adecuada (deseada). Sean a y n_h cualesquiera bases para V_h y $\tilde{N}_h$, respectivamente. Puesto que $\mathcal{T}_0$ mapea L_{h-1} isomórficamente sobre $\tilde{N}_h$, existe una base l_{h-1} para L_{h-1} la cual es mapeada sobre n_h (vector por vector). Elijamos cualquier base n_{h-1} para $\tilde{N}_{h-1}$. Entonces podemos elegir una base l_{h-2} para L_{h-2} la cual es mapeada (vector por vector) sobre $n_{h-1}\cup l_{h-1}$. Continuando en esta forma, obtenemos una base $a\cup n_h\cup n_{h-1}\cup l_{h-1}\cup\cdots\cup n_1\cup l_1$ para V_0 con la propiedad: $\mathcal{T}_0$ mapea l_i sobre $n_{i+1}\cup l_{i+1}$ para $i=1,\cdots,h-2$, y sobre n_h para $i=h-1$.

Cada vector de $n_1\cup l_1$ determina una "cadena" de vectores base. En realidad, sea $v_1\in n_1\cup l_1$. Si $v_1\in n_1$, la cadena termina. Si $v_1\in l_1$, juntamos $v_2=\mathcal{T}_0 v_1$ con v_1. Si $v_2\in n_2$, la cadena termina. Si $v_2\in l_2$, juntamos $v_3=\mathcal{T}_0 v_2$ con v_2, y así sucesivamente. Cada cadena termina con un vector de $\cup n_i$ y m el número de cadenas coincide con el número de vectores de $\cup n_i$. Así que, reagrupando los vectores podemos representar la base en la forma $a\cup s_1\cup\cdots\cup s_m$, donde las s_j son cadenas. La matríz de $\mathcal{T}_0$ con respecto a la base ordenada de esta manera fácilmente se ve que es una 0-matríz de Jordan. Entonces a da un bloque nosingular y los s_j dan 0-bloques de Jordan. Notese que el tamaño máximo de los 0-bloques de Jordan es h y el número de tales bloques es igual a $\dim \tilde{N}_h$. El número de bloques de tamaño $h-1$ es $\dim \tilde{N}_{h-1}$ y así sucesivamente.

Una Derivación Algorítmica de la Forma Canónica de Jordan.

R. Fletcher.
D.C. Sorensen.

Nuestra intención es dar una prueba sencilla del siguiente:

Teorema 1. Dada cualquier matríz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, existe una matríz nosingular $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, tal que

$$X^{-1}AX = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_m)$$

donde cada $J_i = \lambda_i I + E_i$ es una matríz cuadrada de orden k_i con $E_i = \begin{pmatrix} 0 & I_{k_i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\lambda_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, 2, \cdots, m$.

Nuestra prueba de este bien conocido resultado empieza con una factorización debida a Schur y sistemáticamente transformamos esta factorización en la forma canónica de Jordan. Este es realmente un enfoque natural para cualquiera que esté familiarizado con las técnicas del algebra lineal numérica.

La prueba se realiza en tres etapas. En la primera, la descomposición de Schur nos asegura que cualquier matríz $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ puede ser escrita en la forma $B = QRQ^*$ con R triangular superior y Q unitaria. En la siguiente etapa se construye una matríz nosingular X tal que

$$X^{-1}RX = \operatorname{diag}(R_1, R_2, \cdots, R_m$$

donde cada R_j es una matríz triangular superior que tiene su diagonal principal en la forma $\lambda_j I$. En la última etapa se muestra la transformación de una matríz R_j a la forma canónica. Estos pasos centrales están descritos en los lemas (2), (8) y (12) que damos enseguida.

Lema 2 (Schur). Sea $B \in \mathbb{C}^{k \times k}$ cualquier matríz compleja $k \times k$. Entonces existe una matríz unitaria $Q \in \mathbb{C}^{k \times k}$ y una matríz triangular superior $R \in \mathbb{C}^{k \times k}$ tales que

$$Q^*BQ = R.$$

Las entradas diagonales de R son los valores propios $\lambda(B)$ de B.

Demostración. La hacemos por inducción sobre k. El resultado claramente es cierto para matrices de orden 1. Supongamos que se cumple para matrices de orden k, y consideremos $B \in \mathbb{C}^{k+1 \times k+1}$. Sea λ un valor propio de B, y sea q un vector propio correspondiente a λ tal que $q^*q = 1$. Sea $U \in \mathbb{C}^{k+1 \times k}$ elegida de tal forma que la matríz $(q\,U)$ sea unitaria. Entonces

$$\begin{pmatrix} q^* \\ U^* \end{pmatrix} B\,(q\,U) = \begin{pmatrix} q^*Bq & q^*BU \\ U^*Bq & U^*BU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & z^* \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

Ahora por la hipótesis de inducción, existe una matríz unitaria $Q_1 \in \mathbb{C}^{k \times k}$ tal que $Q_1^* B_1 Q_1 = R_1$ con R_1 triangular superior. Hagamos

$$Q = (q\ U)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}.$$

Entonces Q es unitaria y

$$Q^* B Q = R \quad \text{con} \quad R = \begin{pmatrix} \lambda & r^* \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}.$$

Esto completa la prueba. ■

Nuestra prueba requerirá el conocimiento de la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación matricial

$$A_1 B_1 - B A_2 = S.$$

Esto se facilita usando la descomposición de Schur $Q_j^* A_j Q_j = R_j$, $j = 1,2$ para transformar la ecuación anterior en una ecuación equivalente con las matrices triangulares superiores R_1 y R_2 como coeficientes en lugar de A_1 y A_2. Entonces el siguiente resultado es completamente general.

Lema 3. Sean R_1 y R_2 matrices triangulares superiores en $\mathbb{C}^{k_1 \times k_1}$ y en $\mathbb{C}^{k_2 \times k_2}$ respectivamente, y sea $S \in \mathbb{C}^{k_1 \times k_2}$. Entonces la ecuación matricial

$$R_1 B - B R_2 = S \qquad (4)$$

tiene una única solución $B \in \mathbb{C}^{k_1 \times k_2}$ si y sólo si

$$\lambda(R_1) \cap \lambda(R_2) = \phi. \qquad (5)$$

Prueba. Esta la hacemos por inducción sobre k_1 el orden de R_1. Sea k_2 cualquier entero fijo. El lema claramente es cierto para $k_1 = 1$. Supongamos que es cierto para matrices triangulares superiores $\hat{R}_1$ de orden menor que k_1 y consideremos la siguiente forma de la ecuación (4):

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & r_1^T \\ 0 & \hat{R}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & b^T \\ w & \hat{B} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta & b^T \\ w & \hat{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & r_2^T \\ 0 & \hat{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & s_1^T \\ s_2 & \hat{S} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

(donde β y σ_1 son escalares y r_1, r_2, s_1, s_2 y w son vectores columna).

Multiplicando el lado izquierdo de (6), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\beta + r_1^T w & \lambda_1 b^T + r_1^T \hat{B} \\ \hat{R}_1 w & \hat{R}_1 \hat{B} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta\lambda_2 & \beta r_2^T + b^T \hat{R}_2 \\ w\lambda_2 & w r_2^T + \hat{B}\hat{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & s_1^T \\ s_2 & \hat{S} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

La hipótesis de inducción aplicada a (7) nos permitirá resolver las ecuaciones en el orden siguiente:

(a) $(\hat{R}_1 - \lambda_2 I)w = s_2$

(b) $(\lambda_1 - \lambda_2)\beta = \sigma_1 - r_1^T w$

(c) $\hat{R}_1\hat{B}_1 - \hat{B}\hat{R}_2 = \hat{S} + w r_2^T$

(d) $b^T(\lambda_1 I - \hat{R}_2) = s_1^T - r_1^T \hat{B}$

si y sólo si las matrices R_1 y R_2 satisfacen (5). Esto completa la inducción. ■

El lema siguiente refina la descomposición de Schur a una forma que es muy cercana a la que buscamos.

Lema 8. Sea $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Entonces existe $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nosingular tal que

$$X^{-1}RX = \operatorname{diag}(R_1, R_2, \cdots, R_m), \qquad (9)$$

donde $R_j = \lambda_j I + U_j$, para $j = 1, 2, \cdots, m$, con cada U_j estrictamente triangular superior, y cada λ_j distinto.

Demostración. La prueba es por inducción sobre n. El resultado es cierto cuando $n=1$. Supongamos que es cierto para matrices triangulares superiores de orden menor que n. Sea $R\in\mathbb{C}^{n\times n}$ una matríz triangular superior. La descomposición de Schur de una matríz en general la podemos obtener con los valores propios en cualquier orden dado. Así, podemos suponer sin pérdida de geralidad que

$$R=\begin{pmatrix} R_1 & S \\ 0 & R_2 \end{pmatrix},$$

donde R_1 y R_2 no tienen valores propios en común, y $R_1=\lambda I+U_1$ con U_1 estrictamente triangular superior. Ahora, existe una matríz B de dimensiones apropiadas la cual satisface

$$\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 & S \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$S=R_1B-BR_2. \qquad (10)$$

La ecuación matricial (10) tiene una única solución puesto que $\lambda(R_1)\cap\lambda(R_2)=\phi$, y la hipótesis de inducción implica que R_2 puede ser reducida a un bloque en forma diagonal como en (9). Esto completa la prueba. ■

Lema 11. Sea $E\in\mathbb{C}^{k\times k}$ de la forma

$$E=\begin{pmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$E^TE=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{k-1} \end{pmatrix},\ E^k=0,\ Ee_{i+1}=e_i,\ (I-E^TE)r=\sigma e_1,$$

donde e_i es el iésimo vector coordenado y $\sigma=e_1^Tr$.

La prueba del lema (11) es directa. El lema siguiente mostrará como reducir el bloque triangular superior estricto del lema (8) a la forma requerida por el teorema (1). En la prueba del lema usaremos la notación e_i para denotar el iésimo vector unitario sin referirnos a su dimensión. En todos los casos esta dimensión será consistente con las dimensiones involucradas en el contexto de la partición matricial.

Lema 12. Sea $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matríz triangular superior estricta tal que

$$X^{-1}UX = J,$$

donde $J = \operatorname{diag}(E_1, E_2, \cdots, E_m)$ con cada $E_j = \begin{pmatrix} 0 & I_{k_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y con $\operatorname{orden}(E_{j+1}) \leq \operatorname{orden}(E_j) = k_j + 1$ para $j = 1, 2, \cdots, m-1$.

Demostración. La prueba es por inducción sobre n. El resultado claramente es cierto para $n=1$. Supongamos que también lo es para matrices triangulares superiores estrictas U de orden menor que n, y sea $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ triangular superior estricta. La partición de $U = \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$. Por la hipótesis de inducción existe X_1 nosingular tal que

$$X_1^{-1}U_1X_1 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } J_1 = \operatorname{diag}(E_2, E_3, \cdots, E_m) \tag{13}$$

y donde $\operatorname{orden}(E_1) \geq \operatorname{orden}(E_j)$ para $j \geq 2$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1^{-1} \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u^TX_1 \\ 0 & X_1^{-1}U_1X_1 \end{pmatrix}.$$

Particionando u^TX_1 como $(u_1^T, u_2^T) = u^TX_1$ vemos que es consistente con (13). Con la ayuda del lema (11) obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -u_1^TE_1^T & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u_1^T & u_2^T \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_1^TE_1^T & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma e_1^T & s^T \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Si $\sigma \neq 0$ entonces la matríz del lado derecho de (14) es semejante a

$$\begin{pmatrix} E & e_1 s^T \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \text{ con } E = \begin{pmatrix} 0 & e_1^T \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

Para ver esto, dicha matríz se multiplica a la izquierda por diag$(\sigma^{-1}, I, \sigma^{-1} I)$ y a la derecha por diag$(\sigma, I, \sigma I)$ y obtenemos (15). Notese que el orden k de E es estrictactamente mayor que el orden de cualquier bloque diagonal de J_1 tal que $J_1^{k-1} = 0$.

Definamos $s_i^T = s^T J_1^{i-1}$ para $i = 1, 2, \cdots, k$. Entonces

$$\begin{pmatrix} I & e_{i+1} s_i^T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & e_i s_i^T \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -e_{i+1} s_i^T \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & e_{i+1} s_{i+1}^T \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

Ahora, $s_k = 0$ puesto que $J_1^{k-1} = 0$, y se sigue que U es semejante a la matríz $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$. Por otra parte, si $\sigma = 0$ en (14) entonces una simple permutación de los renglones y de las columnas de la matríz en el lado derecho de (14) muestra que U es semejante a

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^T \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}.$$

Por la hipótesis de inducción existe una matríz nosingular X_2 tal que

$$X_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 & s^T \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} X_2 = J_2 ,$$

Así, U es semejante a la matríz $\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$, donde J_2 tiene la forma en bloque diagonal deseada. Ahora una simple permutación de los renglones y de las columnas llevará a esta matríz a la forma apropiada. Esto completa la inducción. ■

El teorema I se sigue de estos resultados. La descomposición de Schur muestra que una matríz cuadrada es semejante a una matríz triangular superior. El lema (8) implica que esta matríz triangular es semejante a una matríz triangular superior de bloques, de la forma (9). El lema (12) implica que cada matríz triangular superior de bloques es semejante a una matríz de la forma de la del teorema (1) ya que cada bloque diagonal R_j tiene asociada una matríz nosingular X_i tal que

$$X_i^{-1}(\lambda_i I+U_i)X_i=\lambda_i I+\mathrm{diag}(E_1,E_2,\cdots,E_{m_i}).$$

Un Enfoque Elemental a la Forma de Jordan de una Matríz.

H. Väliaho.

Si $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ es una matríz compleja $m\times n$, usaremos $r(A)$, $\mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{N}(A)$ para denotar su rango, espacio de las columnas y núcleo respectivamente. El espectro de una matríz cuadrada A lo denotaremos por $\sigma(A)$, y la semejanza de dos matrices cuadradas A y B lo indicaremos por $A\sim B$. La matríz

$$J_k(\sigma)=\begin{pmatrix}\sigma & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \sigma\end{pmatrix}_{k\times k}$$

recibe el nombre de bloque de Jordan. Una matríz de Jordan J es una matríz diagonal cuyas entradas son bloques

$$J = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_s,$$

donde los bloques diagonales son bloques de Jordan.

En este trabajo daremos una demostración elemental del siguiente:

Teorema (Forma de Jordan). Para cualquier $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existe una matríz nosingular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$P^{-1}AP = J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_s, \qquad (1)$$

donde $J_i = J_{n_i}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \sigma(A)$, $i = 1, 2, \cdots, s$. La matríz J, llamada la forma normal de Jordan de A, es única excepto por el orden de los bloques de Jordan.

Nota 1. Denotemos las columnas de P en (1) por $x_{i1}, \cdots, x_{in_i}$, $i = 1, \cdots, s$. Entonces (1) es equivalente a

$$Ax_{i1} = \lambda_i x_{i1}; \quad Ax_{ij} = \lambda_i x_{ij} + x_{i,j-1}, \; j = 2, \cdots, n_i, \qquad (2)$$

para $i = 1, \cdots, s$, donde los vectores x_{ij} forman una base de $\mathbb{C}^n$. Cualquiera de tales sucesiones $x_{i1}, \cdots, x_{in_i}$ es llamada una cadena de Jordan.

Nota 2. Denotando $B_i = A - \lambda_i I$; se sigue de (2) que

$$x_{ij} = B_i^{n_i - j} x_{in_i}, \quad j = 1, \cdots, n_i.$$

Debido a que además $B_i x_{i1} = 0$, tenemos

$$x_{i1} \in \mathcal{N}(B_i) \cap \mathcal{R}(B_i^{n_i - 1}) \quad y \quad x_{in_i} \in \mathcal{N}(B_i^{n_i}).$$

Prueba del Teorema. (Unicidad). Sea $\lambda \in \sigma(A)$ de multiplicidad algebraica ν, existen, asociados con λ, q_i bloques de Jordan de orden i, $i = 1, \cdots, n$ (hagamos $q_i = 0$ para $i > n$). Notese que para $i = 0, 1, 2, \cdots$, el rango de $J_k^i(\sigma)$

es igual a k o al $\max\{0, k-i\}$ de acuerdo a que $\sigma\neq 0$ o $\sigma=0$. Ahora

$$B=A-\lambda I=P(J-\lambda I)P^{-1},$$

implicando

$$r(B^i)=\sum_{j=i+1}^{n+2}(j-i)q_j+(n-\nu),\quad i=0,1,\cdots,n+1.$$

De estas ecuaciones obtenemos unívocamente

$$q_i=r(B^{i-1})-2r(B^i)+r(B^{i+1}),\quad i=1,\cdots,n.\quad (3)$$

(Existencia) Procedemos por inducción sobre el orden de A. Primero construimos un conjunto de vectores formado las cadenas de Jordan asociadas con un valor propio de A y entonces extendemos este conjunto a una base de $\mathbb{C}^n$.

El teorema es obvio para $n=1$. Supongamos que se cumple para matrices de orden menor que n. Para establecer la existencia de la forma de Jordan de una matriz $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, elegimos cualquier λ, valor propio de A, sea p el entero positivo más pequeño para el cual $r(B^{p+1})=r(B^p)=q_0$ y, motivados por la nota 2, definamos los subespacios

$$S_i=\mathcal{N}(B)\cap\mathcal{R}(B^{i-1})=\{y=B^{i-1}t\,|\,t\in\mathcal{N}(B^i)\},\ i=1,\cdots,p.\ (4)$$

Entonces S_i y $\mathcal{N}(B^{i-1})$, respectivamente, son el rango y el núcleo de la transformación lineal

$$G_i:\mathcal{N}(B^i)\longrightarrow\mathbb{C}^n,\quad t\longmapsto y=B^{i-1}t,$$

de donde

$$\dim S_i=\dim\mathcal{N}(B^i)-\dim(B^{i-1})=r(B^{i-1})-r(B^i).$$

Deducimos que

$$\{0\}\neq S_p\subset S_{p-1}\subset\cdots\subset S_1=\mathcal{N}(B).$$

Los vectores principales y_{ij} de las cadenas de Jordan de

B, asociados con el valor propio 0, se determinan como sigue: empezando con una base $y_{p1}, \cdots, y_{pq_p}$ de S_p, extendemos la base de S_{i+1} sucesivamente para $i=p-1, p-2, \cdots, 1$, a una base de S_i por medio de los vectores $y_{i1}, \cdots, y_{iq_i}$ (si $S_i = S_{i+1}$ esta sucesión es vacía). Entonces, por (4), existen vectores $t_{ij} \in \mathcal{N}(B^i)$ tales que

$$y_{ij} = B^{i-1} t_{ij}, \quad j=1, \cdots, q_i, \quad i=1, \cdots, p.$$

Mostraremos que los vectores

$$B^{i-1}t_{ij}, B^{i-2}t_{ij}, \cdots, Bt_{ij}, t_{ij}, \quad j=1, \cdots, q_i, \quad i=1, \cdots, p, \quad (5)$$

junto con cualquier base

$$Z = [z_1, \cdots, z_{q_0}] \qquad (6)$$

de $\mathcal{R}(B^p)$ forman una base de $\mathbb{C}^n$. Primero, el número de estos vectores es

$$q_0 + \sum_{i=1}^{p} i q_i = q_0 + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} q_i = q_0 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=j}^{p} q_i = q_0 + \sum_{j=1}^{p} \dim S_j = n.$$

Para establecer la independencia lineal de los vectores que aparecen en (5-6), sea

$$f = Z\beta + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ijk} B^{i-k} t_{ij} = 0, \qquad (7)$$

donde β es un q_0-vector y α_{ijk} son escalares, implicando $B^p f = B^p(Z\beta) = 0$. La transformación lineal

$$G: \mathcal{R}(B^p) \to \mathcal{R}(B^{p+1}) = \mathcal{R}(B^p), \ t \mapsto Bt,$$

es sobreyectiva. Para ver esto, notese que cualquier $y \in \mathcal{R}(B^{p+1})$ puede ser expresado en la forma

$$y = B^{p+1}t = B(B^p t)$$

con $t \in \mathbb{C}^n$, de donde $y = Bu$ con $u = B^p t \in \mathcal{R}(B^p)$. Puesto que G es sobreyectiva, es un isomorfismo, y G^p también lo es. Entonces $B^p(Z\beta) = 0 \Rightarrow Z\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$. La ecua ción (7) se reduce a

$$f_1 = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=k}^{p} \sum_{j=1}^{q_i} \alpha_{ijk} B^{i-k} t_{ij} = 0. \qquad (8)$$

Para mostrar que los α_{ijk} en (8) son iguales a 0, apliquemos inducción sobre k (decreciente). A partir de $B^{p-1}f_1 = 0$ fácilmente deducimos que $\alpha_{pjp} = 0$, $j = 1, \cdots, q_p$. Entonces, suponiendo que $\alpha_{ijk} = 0$ para $j = 1, \cdots, q_i$, $i = k, \cdots, p$, $k = h+1, \cdots, p$, obtenemos

$$B^{h-1} f_1 = \sum_{i=h}^{p} \sum_{j=1}^{q_i} \alpha_{ijh} B^{i-1} t_{ij} = \sum_{i=h}^{p} \sum_{j=1}^{q_i} \alpha_{ijh}\, y_{ij} = 0,$$

implicando $\alpha_{ijh} = 0$ para $j = 1, \cdots, q_i$, $i = h, \cdots, p$. Esto completa la prueba de la independencia lineal de los vectores (5-6).

Dado que G es un isomorfismo, tenemos $BZ = ZC$, donde C (de orden q_0) es nosingular. Si X es la matríz que consta de los vectores (5) en el orden indicado, entonces

$$B[Z, X] = [Z, X](C \oplus K_1),$$

donde K_1 es una matríz de Jordan con elementos diagonales cero, cuyos bloques corresponden a las cadenas (5). Así $B \sim C \oplus K_1$. De acuerdo a la hipótesis de inducción, C tiene la forma de Jordan, digamos K_2. Pero entonces

$$B \sim K_2 \oplus K_1 = K,$$

y $A = B + \lambda I$ tiene la forma de Jordan

$$J = K + \lambda I.$$

No es difícil reducir la determinación de la forma de Jordan de una matríz cuadrada compleja a la determinación de las formas de Jordan de matrices nilpotentes.

Otro Enfoque Elemental de la Forma de Jordan.

J. I. Hall.

Existencia de la forma de Jordan para transformaciones lineales. Sea X un espacio vectorial sobre el campo K, y sea $T: X \longrightarrow X$ una transformación K-lineal de X. El núcleo de T, núcleo(T), es el subespacio de todos los vectores que son mandados por T a $\bar{0}$. El rango de T, rango(T), es el subespacio de todos los vectores de X de la forma $T(\bar{x})$, para algún $\bar{x} \in X$. De Fundamental importancia es el hecho de que la dimensión de X sobre K es igual a la suma de las dimensiones del núcleo(T) y rango(T). Denotemos por $\dim(U)$ la dimensión del K-subespacio U de X.

Una cadena de Jordan para T en X de longitud m asociada con λ es un conjunto de vectores $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m$ diferentes de $\bar{0}$ tales que

$$T(\bar{x}_i) = \lambda \bar{x}_i + \bar{x}_{i-1}, \quad \text{para } i = 1, \cdots, m,$$

donde establecemos $\bar{x}_0 = \bar{0}$. Notese que si m es por lo menos 1, entonces λ es un valor propio para T con vector propio asociado $\bar{x}_1$. En particular, un vector propio es una cadena de Jordan de longitud 1. Si $\lambda = 0$, entonces $T(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i-1}$ para $i = 1, \cdots, m$; y la cadena no es otra cosa que una "0-órbita" para T en X. Una cadena de Jordan para T asociada con λ también es una cadena para $T + \alpha I$ asociada con $\lambda + \alpha$, donde I es la transformación lineal identidad. En particular una cadena para T asociada con

λ es meramente una "0-órbita" para $T+\lambda I$.

Teorema 1. (Existencia de la forma de Jordan para transformaciones lineales). Sea $A: V \to V$ una transformación lineal del K-espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces V posee una base que es la unión disjunta de cadenas de Jordan para A.

La prueba está basada en una proposición general y un lema técnico acerca de transformaciones lineales que poseen una forma de Jordan.

Proposición 2. Sea $T: X \to X$ una transformación lineal del K-espacio vectorial X de dimensión finita. Sea W un subespacio invariante de X, y sea $S: W \to W$ la restricción de T a W. Supongamos que:

(i) W contiene el núcleo de T.

(ii) El rango de S sobre W es igual al rango de T sobre X.

Entonces W es igual a X.

Prueba. En efecto:

$$\begin{aligned} \dim(X) &= \dim(\text{núcleo}(T)) + \dim(\text{rango}(T)) \\ &= \dim(\text{núcleo}(S)) + \dim(\text{rango}(S)) \\ &= \dim W. \end{aligned}$$

Lema 3. Sea $T: X \to X$ una transformación lineal del K-espacio vectorial de dimensión finita X. Supongamos que X tiene una base que es una unión disjunta de cadenas de Jordan para T:

$$\bar{x}_{1,1}, \cdots, \bar{x}_{1,m_1}$$

$$\begin{array}{c} \bar{x}_{2,1}, \cdots, \bar{x}_{2,m_2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{k,1}, \cdots, \bar{x}_{k,m_k} \end{array} ;$$

donde la iésima cadena $\bar{x}_{i,1}, \cdots, \bar{x}_{i,m_i}$ tiene longitud m_i y está asociada con el valor propio λ_i. Supongamos ademas que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 0 \quad y \quad \lambda_i \neq 0 \text{ para } i > d.$$

Entonces

(1) el núcleo de T tiene una base $\bar{x}_{1,1}, \cdots, \bar{x}_{i,1}, \cdots, \bar{x}_{d,1}$ para $1 \leq i \leq d$.

(2) el rango de T tiene como base la unión disjunta de las cadenas de Jordan:

$$\begin{array}{c} \bar{x}_{1,1}, \cdots, \bar{x}_{1,m_1-1} \\ \vdots \\ \bar{x}_{d,1}, \cdots, \bar{x}_{d,m_d-1} \\ \bar{x}_{d+1,1}, \cdots, \bar{x}_{d+1,m_{d+1}} \\ \vdots \\ \bar{x}_{k,1}, \cdots, \bar{x}_{k,m_k} \end{array} .$$

Prueba. Claramente los conjuntos dados linealmente independientes están contenidos en estos subespacios como afirmamos. Entonces $\dim(\text{núcleo}(T)) \geq d$ y $\dim(\text{rango}(T)) \geq$ $\geq \dim(X) - d$. Por otra parte

$$\dim(\text{núcleo}(T)) + \dim(\text{rango}(T)) = \dim(X);$$

así que en cada caso debemos tener la igualdad. Los con juntos son bases.

Prueba del teorema 1. La prueba es por inducción sobre la dimensión del espacio fundamental V. Si A es un múltiplo de I (en particular cuando $\dim(V)=1$), cualquier base es una base de cadenas de Jordan de longitud 1. Supongamos que el teorema es cierto en todas las dimensiones menores que $n=\dim(V)$.

Por hipótesis A tiene un vector propio $\bar{v}\neq\bar{0}$ asociado con algún valor propio λ. Sea B la transformación lineal diferente de cero $A-\lambda I$. Igualmente sea $C:U\rightarrow U$ la transformación lineal de $U=\text{rango}(B)$ que es la restricción de B a U. Notese que $\bar{v}\in$ núcleo(B), entonces U tiene dimensión m estrictamente menor que n. Un subespacio C-invariante de U es invariante tanto bajo A como bajo B. Por lo tanto por inducción podemos concluir que U tiene una base $\mathcal{U}$ que es una unión disjunta de cadenas de Jordan para C (y en consecuencia también para A y B). Sean $\mathcal{U}_i$ para $1\leq i\leq k$ las cadenas de $\mathcal{U}$. Aquí la iésima cadena $\mathcal{U}_i$, que consta de $\bar{v}_{i,1},\cdots,\bar{v}_{i,m_i}$, está asociada con el valor propio λ_i. Supongamos que

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_d=0 \text{ y } \lambda_i\neq 0 \text{ para } i>d.$$

Para cada i con $1\leq i\leq d$, $\bar{v}_{i,m_i}\in$ rango$(B)=U$; así que podemos elegir un vector v_{i,m_i+1} tal que $B(\bar{v}_{i,m_i+1})=\bar{v}_{i,m_i}$. A continuación elijamos vectores $\bar{z}_j$ tales que

$$\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_q,\bar{v}_{1,1},\cdots,\bar{v}_{d,1}$$

es una base para núcleo(B) el cual tiene dimensión $q+d=n-m$.

Ahora consideremos el conjunto $\mathcal{V}$ que es la unión de $\mathcal{U}$, todos los $\bar{v}_{i,m_i+1}$ para $1 \leq i \leq d$, y todos los $\bar{z}_j$ para $1 \leq j \leq q$. Este conjunto contiene

$$m+d+q = m+d+(n-m-d) = n$$

vectores. Inmediatamente nos damos cuenta de que $\mathcal{V}$ es una unión disjunta de $k+q$ cadenas de Jordan para B, siendo las $\mathcal{U}_i$ las cadenas originales (extendidas por los $\bar{v}_{i,m_i+1}$ cuando $1 \leq i \leq d$) y los nuevos vectores del núcleo, los $\bar{z}_j$ (cadenas de longitud 1).

Nuestra construcción de $\mathcal{V}$ la candidata a base coincide con la de Filippov. Para completar el teorema únicamente nos falta probar que efectivamente $\mathcal{V}$ es una base para V. Sea W el subespacio de V generado por $\mathcal{V}$. Como W contiene todos los $\bar{z}_j$ así como a $\bar{v}_{1,1}, \cdots, \bar{v}_{d,1}$, W contiene a núcleo(B). Como W contiene a $\mathcal{U}$ la base de U, el rango de B, ciertamente es B-invariante. Debido a que, además de a $\mathcal{U}$, W contiene a cada $\bar{v}_{i,m_i+1}$ para $1 \leq i \leq d$, el lema 3 nos muestra que la restricción de B a W aún tiene a U como su rango. Por la proposición 2, W es igual a V. Entonces el conjunto $\mathcal{V}$ de tamaño n genera al espacio V de dimensión n y por lo tanto es una base de V. Esto completa la prueba del teorema 1.

Existencia de la Forma de Jordan para Matrices.

Si λ es un miembro del campo K y m es un entero positivo, entonces la matriz $J_m(\lambda)$ es la matriz $m \times m$ sobre K con λ en todas las entradas de la diagonal, unos en la superdiagonal, y ceros en el resto. Una matriz con entradas de K decimos que está en la forma de Jordan si es una matríz diagonal de bloques, con todos los bloques iguales a $J_m(\lambda)$ para varios m y λ.

Teorema 4.(Existencia de la forma de Jordan para matrices). Sea A una matríz con entradas del campo K. Supongamos que el polinomio característico de A se factoriza en factores lineales sobre K. Entonces existe una matríz invertible P con entradas de K tal que $P^{-1}AP$ está en la forma de Jordan.

Sea $V=K^n$, el K-espacio de dimensión n de los vectores columna. Entonces naturalmente asociada con la matríz A tenemos la transformación lineal $A: V \to V$ dada por $A(\bar{v})=A\bar{v}$. El presente teorema para la matríz A será probado aplicando el teorema anterior a la transformación lineal A.

Lema 5. Sea A una matríz $n \times n$ con entradas del campo K. Supongamos que el polinomio característico de A se factoriza en factores sobre K. Entonces cualquier subespacio W de $V=K^n$ diferente de cero A-invariante contiene un vector propio.

Prueba. Sea $\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_m, \bar{x}_{m+1}, \cdots, \bar{x}_n$ una base para $V=K^n$ conteniendo la base $\bar{w}_1, \cdots, \bar{w}_m$ para W.

Definamos Q como la matríz cuya iésima columna es $\bar{w}_i$ cuando $1 \leq i \leq m$ y es $\bar{x}_i$ cuando $m+1 \leq i \leq n$. Entonces $B=Q^{-1}AQ$ es el bloque triangular superior con un bloque de ceros de tamaño $(n-m) \times m$ en la parte inferior izquierda. El polinomio característico de B es el producto de esos dos bloques diagonales y es igual al de A. En particular, el bloque superior izquierdo $m \times m$ tiene un polinomio característico con factores lineales sobre K. Por lo tanto B tiene un vector propio de la forma $\bar{v} = (v_1, \cdots, v_m, 0, \cdots, 0)^T$. Ahora

$$\bar{w} = Q\bar{v} = v_1\bar{w}_1 + \cdots + v_m\bar{w}_m$$

es un vector propio de A perteneciente a W.

Prueba del teorema 4. Por el teorema 1 y el lema 5, V tiene una base $\mathcal{V}$ que es una unión disjunta de cadenas de Jordan $\bar{v}_{i,1}, \cdots, \bar{v}_{i,m_i}$ para $1 \leq i \leq k$. Sea P la matríz con columnas

$$\bar{v}_{1,1}, \cdots, \bar{v}_{1,m_1}, \cdots, \bar{v}_{k,1}, \cdots, \bar{v}_{k,m_k}.$$

Entonces $AP = PJ$ para una matríz J que está en la forma de Jordan. Esto es, $J = P^{-1}AP$ tiene la forma deseada.

Unicidad de la Forma de Jordan.

Lema 6. Sea $A: V \to V$ una transformación lineal del K-espacio vectorial V de dimensión finita. Supongamos que V tiene una base $\mathcal{V}$ que es una unión disjunta de k cadenas de Jordan $\mathcal{V}_j$ para A, $1 \leq j \leq k$. Sea λ un valor propio de A, y sea m un entero positivo. Entonces el numero de cadenas $\mathcal{V}_j$ que están asociadas con λ y de longitud al menos m es igual a

$$\dim(\text{núcleo}(A - \lambda I) \cap \text{rango}((A - \lambda I)^{m-1})).$$

Prueba. Sea B la transformación lineal $A - \lambda I$. Las cadenas para A asociadas con λ son las cadenas para B asociadas con 0.

Para todo $i \geq 0$, rango(B^i) es un subespacio B-invariante de V. Del lema 3.2 vemos que para pasar de un conjunto de cadenas de Jordan para B en el rango de B^i a un conjunto en el rango de B^{i+1} basta con dejar el último miembro de cada cadena asociada con 0. Entonces para obtener de un conjunto de cadenas de Jordan en el rango de $B^0 = V$ un conjunto en el rango de B^{m-1}, dejamos los últimos $m-1$ miembros de cada cadena asociada con 0. Una cadena asociada con 0 cuya longitud fuera menor que m desaparecería, pero una cadena de longitud al menos m sobreviviría en parte. Por el lema 3.1, el número de cadenas sobrevivientes para B asociadas con 0 en el rango de B^{m-1} es igual a

$$\dim(\text{núcleo}(B) \cap \text{rango}(B^{m-1})).$$

Corolario 7. (Unicidad de la forma de Jordan). Sea $A: V \to V$ una transformación lineal del K-espacio vectorial V de dimensión finita. Supongamos que V tiene bases $\mathcal{V}^{(1)}$ y $\mathcal{V}^{(2)}$, donde cada $\mathcal{V}^{(i)}$ (con $i = 1, 2$) es una unión disjunta de k_i cadenas de Jordan $\mathcal{V}_j^{(i)}$ para A, $1 \leq j \leq k_i$. Sea λ un valor propio de A y sea m un entero positivo. Entonces el número de cadenas $\mathcal{V}_j^{(1)}$ que están asociadas con λ y de longitud igual a m es igual al número de cadenas $\mathcal{V}_j^{(2)}$ que están asociadas con λ y de longitud igual a m.

Prueba. Sea $B = A - \lambda I$. Por el lema 6 ambos números son iguales a

$$\dim(\text{núcleo}(B) \cap \text{rango}(B^{m-1})) - \dim(\text{núcleo}(B) \cap \text{rango}(B^{m})).$$

Referencias.

1. Stephen Barneth, Matrices. Methods and Applications, Clarendon Press, Oxford, 1990.

2. Richard A. Brualdi, The Jordan Canonical Form: An Old Proof, American Mathematical Monthly, March (1987) 257-267.

3. A. F. Filippov, A Short Proof of the Theorem on Reduction of a Matrix to Jordan Form, Vestnik, Moscow University, Nº 2 (1971) 18-19.

4. R. Fletcher and D. Sorensen, An Algorithmic Derivation of the Jordan Canonical Form, American Mathematical Monthly, 90 (1983) 12-16.

5. A. Galperin and Z. Waksman, An Elementary Approach to Jordan Theory, American Mathematical Monthly, 87 (1981) 728-732.

6. F.R. Gantmacher, The Theory of Matrices, Volúmen I Chelsea, New York, 1959.

7. J.I. Hall, Another Elementary Approach to the Jordan Form, American Mathematical Monthly, April (1991) 336-340.

8. B. Noble, Applied Linear Algebra, Prentice Hall, Englewood Clifs, New Jersey, 1969.

9. James M. Ortega, Matrix Theory. A second course, Plenum Press, 1989.

10. H. Väliaho, An Elementary Approach to the Jordan Form of a Matrix, American Mathematical Monthly, 93 (1986) 711-714.

[illegible]