L O G I C A   M A T E M A T I C A

María Ester Gambetta Chuk.[1]

INTRODUCCION

El objetivo del presente trabajo es introducir al lector en el significado, terminología y manejo de los elementos de la Lógica Matemática. Oara ello, haremos referencia a la Lógica, y a la metodología propia de la Matemática.

En el texto principal, se presenta la información básica, Las aclaraciones, acotaciones, y respuestas a las situaciones propuestas, aparecen en las notas aclaratorias al final.

CONSIDERACIONES ACERCA DE LA LOGICA.

Consideramos la siguiente afirmación:

La Lógica Matemática es una Lógica de enunciados.

Nos preguntamos: ¿Qué es la Lógica? ¿Qué es un enunciado?

En primer lugar, podemos dar muchas definiciones de Lógica. Consideremos una de ellas:

"Lógica es una disciplina que analiza la significación de los conceptos comunes a todas las ciencias, y establece las leyes genera-

(1) Profesora de la Universidad Autónoma de Puebla.

les que gobiernan los conceptos". (/)

Sin analizar aún los elementos de esta definición, consideremos el significado de <u>enunciado.</u> Y para ello, nos referimos al lenguaje. Este es una forma de comunicación, de expresión de ideas, de tipo convencional, deliberado, de una cultura.

En el lenguaje corriente, familiar, que nos permite comunicarnos en forma oral o escrita, utilizamos símbolos para entendernos. A esos símbolos, unidades o palabras, les atribuimos un significado. Y así, (/) A. Tarski, "Introduction to Logic".

Cuando escuchamos, leemos o escribimos la misma palabra, todos entendemos el mismo concepto, la misma idea.

Podremos, luego, definir una nueva palabra en base a otra, ya conocidas, asimiladas, y aceptadas por el uso. Pero el proceso debe tener fin. Hay palabras que no pueden definirse en base a otras, y a ellas las debemos considerar como punto de partida. Por lo tanto, no las definimos, sino que comprendemos su significado por el consenso general. Esto es, por la aceptación que le dan todas las personas que comparten el mismo lenguaje. (1) En Matemática, les llamaremos vocablos primitivos (elemento, punto, número, etc son vocablos primitivos). Cuando reunimos palabras, formamos oraciones, enunciados, o proposiciones, que nos permiten expresar otras ideas, otros conceptos.

VALORES DE VERDAD DE UN ENUNCIADO.

Independientemente del sentido gramatical, el contenido de un enunciado puede estar o no de acuerdo a la realidad, entonces decimos que tiene un valor de verdad (es verdadero o falso).

Por ejemplo, la siguiente expresión:

Es de noche

tiene un valor de verdad o falsedad según sea la circunstancia temporal en que se la enuncie. Sin embargo, hay expresiones como:

Cierre la puerta

que tienen un sentido diferente por su misma estructura. Son imperativas, y no puede asignárseles valor de verdad.

PROPOSICIONES.

Entonces, nos referimos de aquí en adelante a este tipo particular de enunciados, al que llamaremos proposición.

Toda expresión que adquiera un significado claro, no ambiguo, al serle asignado el valor verdadero o falso, es una <u>proposición</u>.

PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS

Analicemos la siguiente proposición:

Si usted estudia Lógica, entenderá plenamente el significado de la Lógica Matemática.

Este tipo de enunciado es un condicional; la palabra si es el nexo que relaciona las siguientes proposiciones simples:

Usted estudia Lógica.

Usted entenderá plenamente el significado de la Lógica Matemática.

En esta relación entre proposiciones, la primera es el antecedente o premisa, la segunda es la conclusión o consecuente. Es una proposición compuesta, pero hay implícita una palabra: entonces. La oración compuesta se entiende así:

Si usted estudia Lógica, entonces entenderá plenamente el significado de la Lógica Matemática.

Toda la relación es una argumentación. Y podemos atribuir valores de verdad a las proposiciones, con lo cual resultará verdadero o falso el valor de toda la oración compuesta (el condicional).

Al proceder así, estamos razonando, y cumplimos con el objeto de la Lógica (aunque no esté explicitado en la definición de Tarski) que es el estudio del acto de razonar, privativo del ser humano.

Debemos manejar el raciocinio con orden y método, y la Lógica nos da las bases. En Matemáticas aplicamos esos procesos lógicos. Nos vamos acercando al análisis y fundamentos de la Lógica Matemática. Además, podemos agregar acerca de la Lógica, lo siguiente:

La Lógica estudia las relaciones entre proposiciones, y las argumentaciones.

Usualmente, relacionamos las proposiciones con las palabras: no, o, y, etc. Pero cuando argumentamos, buscamos el valor de verdad del resultado de conectar dos o más proposiciones al encadenarlas con un razonamiento. Un ejemplo de este tipo es: "Si...entonces...".

Si nos referimos nuevamente al ejemplo dado del condicional, podemos construir la oración:

"Si usted no estudia Lógica, entenderá plenamente el significado de la Lógica Matemática.

El resultado de esta composición tiene un sentido diferente, pero no podemos decir que sea absurdo, y gramaticalmente es correcta la construcción.

Observemos, con este ejemplo, que la Lógica es un lenguaje que estudia un lenguaje. Por esta razón se dice que es una disciplina metalingüística.

CONECTIVOS LOGICOS Y TABLAS DE VERDAD.

A partir de proposiciones sencillas (atómicas) podemos obtener otras (moleculares) conectándolas con las palabras: y, o, no. etc. (2). Consideremos las siguientes proposiciones simples:

Me gusta la Matemática

Me gusta la Lógica

Asignémosle las letras p y q, para representarlas cómodamente. Así:
No me gusta la Matemática, será no p, también: - p.
Me gustan la Matemática y la Lógica, será: p y q, o bien: $p \wedge q$.
Me gusta o la Matemática o la Lógica, será p o q, también: $p \vee q$.

Observemos la similitud con la forma de proceder en Matemática. Cuando sumamos, o multiplicamos dos números, obtenemos un resultado. Hemos operado. Aquí hacemos operaciones lógicas, y al resultado de p y q se le llama producto lógico, al de p o q se le llama suma lógica. Atribuyéndole valores diferentes a las proposiciones atómicas, obtenemos distintos valores de verdad del resultado de componerlas.

Dadas varias proposiciones y la compuesta con diferentes conectivos, al atribuir valores de verdadero o falso a las proposiciones atómicas, es posible construir esquemas llamados tablas de verdad. Para cada conectivo lógico (y, o, no, etc.) se puede construir una tabla de verdad.

Analizaremos cada conectivo lógico por separado, y su correspon-- diente tabla de verdad.

LA CONJUNCION Y (CONECTIVO LOGICO)

Cualquiera que sean las proposiciones p y q, si p es verdadera y q es verdadera, entonces "p y q" será verdadera. Ordenemos en un cuadro de tres columnas encabezadas por las letras que simbolizan las proposiciones, y la composición de ambas. En las filas que si guen a los encabezamientos, los valores de verdad de las atómicas, y de la molecular.

Con el ejemplo: Me gustan la Matemática y la Lógica, y analizando todas las posibilidades, obtenemos:

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Esta operación es binaria, en cambio, la operación de la conectiva "no" es unaria.(*) Veamos:

(*) De hecho, no esta conectando dos proposiciones.

p	-p
v	f
f	v

Si consideramos la proposición:

Juan es bueno,

a través de la operación negación obtenemos:

No Juan es bueno,

que es correcta desde el punto de vista operacional, pero no desde el punto de vista gramatical. Utilizaremos la construcción correcta:

Juan no es bueno,

para indicar el resultado de esta operación unaria. (3).

EL CONECTIVO O

Consideremos las proposiciones:

El lunes próximo, a las ocho, rendiré examen de álgebra.

El lunes próximo, a las ocho, rendiré examen de química.

La composición de ambas con el conectivo o, es:

El lunes próximo, a las ocho, rendiré examen de química o de álgebra.

No es posible cumplir ambas cosas, en el sentido temporal. Si le atribuimos valor de verdad a ambas, está descartada la posibilidad de que sea verdadera la compuesta.

Sin embargo, si, cansado de estos razonamientos, decido tomar un helado y pienso:

Me tomaré un helado de frutilla o de ananá,

la interpretación es distinta del caso anterior. Estoy pensando, en este caso, en la posibilidad de saborear uno o el otro indistintamente. (Además, puedo tomarlo de ambos gustos).

En el primer ejemplo, el empleo del o es exclusivo, en el segundo es inclusivo.

Luego, el empleo de o es ambiguo, y su sentido dependerá de las proposiciones componentes.

Analicemos, con los ejemplos dados, las tablas de verdad correspondientes.

EL O EXCLUSIVO

p	q	$p \veebar q$
v	v	f
v	f	v
f	v	v
f	f	f

EL O INCLUSIVO

p	q	p ∨ q
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

IMPLICACION (EL CONDICIONAL)

Si un número es divisible por cuatro, entonces es divisible por dos.

Un número es divisible por cuatro, es el antecedente.
Un número es divisible por dos, es el consecuente.

Toda la relación se llama implicación. La palabra entonces puede no aparecer, y en su lugar se coloca una coma. La implicación anterior queda así:

Si un número es divisible por cuatro, es divisible por dos.

La palabra cuando suele reemplazar al entonces. Por ejemplo:

Cuando hay tormentas, se interrumpen las comunicaciones telefónicas. La palabra cuando tiene una matiz temporal que la Lógica no recoge. O sea, a veces se utiliza la palabra cuando en reemplazo de entonces, aún si la proposición no tiene relación con el tiempo, en su contenido.

En todos estos casos, desde el punto de vista lógico, interesa solamente el empleo de los conectivos referido a la verdad o falsedad de las proposiciones compuestas, no al matiz temporal o causal de la relación.

Otra forma que suele utilizarse equivalente al "si ... entonces..." es "solo si..." (Un número es divisible por cuatro, solo si es divisible por dos).

EL CONDICIONAL SIMPLE (Tabla de verdad)

p	q	p ——> q
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Recordemos que las relaciones lógicas forman parte del metalenguaje al que anteriormente hicimos referencia. Podemos considerar nuevamente la implicación, y definirla así:

"UNA PROPOSICION P IMPLICA UNA PROPOSICION Q, SI NO PUEDE OCURRIR QUE P SEA VERDADERA Y Q SEA FALSA.

Esto justifica la tabla de verdad anteriormente construida. Veamos un ejemplo:

Si el día está soleado, entonces prometo que daremos un paseo.

Analicemos las cuatro posibilidades.

Si el día es hermoso porque brilla el sol, y se efectúa el paseo, la implicación es verdadera.

Si el día está soleado, y el paseo no se efectúa, la implicación es falsa. (En este sentido de la construcción, la implicación estaría formalizada por el cumplimiento de la promesa).

Si el día no está soleado, la promesa no queda rota, se haga o no el paseo. En cierto modo, es convencional el valor v del resultado.

Si el día está lluvioso (o nublado), y el paseo no se efectúa, estamos en el mismo caso anterior, y se justifica el valor verdadero de la implicación.

EL BICONDICIONAL (Doble implicación)

En forma análoga al caso anterior, podemos conectar en ambos sentidos la implicación, y se obtiene la relación bicondicional llamada "si y solo si".

p	q	p <——> q
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

En realidad, conectado las proposiciones compuestas $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow p$, con la conjunción y obtenemos la tabla de verdad anterior.

RELACIONES ENTRE MAS DE DOS PROPOSICIONES

Si las proposiciones atómicas son tres, las posibilidades para combinar los valores v y f de todas las formas posibles, son ocho. (Variaciones de tres elementos, con repetición).

Consideremos un ejemplo, y a la vez que apliquemos relaciones a los pares de proposiciones simples, busquemos una nueva combinación entre las compuestas. Así, dadas p, q, y r, construyamos la siguiente tabla:

					$(p \wedge r) \longrightarrow (p \vee q)$
p	q	r	$p \wedge r$	$p \vee q$	$(p \wedge r) \longrightarrow (p \vee q)$
v	v	v	v	v	v
v	v	f	f	v	v
v	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v
f	v	v	f	v	v
f	v	f	f	v	v
f	f	v	f	f	v
f	f	f	f	f	v

Observemos que la columna final solo contiene valores "v".

TAUTOLOGIAS.

Una proposición compuesta es una tautología (también se dice lógicamente verdadera) cuando dicha proposición es verdadera, cualquiera sea el valor de verdad de sus proposiciones atómicas.

Si tiene solo "f" es contradictoria o lógicamente falsa, si tiene uves y efes es indeterminada.

Ejercicio: analice la siguiente proposición: $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee r)$

IMPLICACIONES Y EQUIVALENCIAS

Podemos redefinir la implicación, haciendo referencia a los valores de verdad del resultado.

Una proposición p implica una proposición q, en el caso en que la proposición condicional $p \longrightarrow q$ es una tautología.

TEOREMAS

Dada una implicación entre dos proposiciones (atómicas o compuestas), tal que p -----> q, toda la implicación es un teorema, la proposición p es la hipótesis, la proposición q es la tesis.

Y, dadas dos implicaciones, o dos fórmulas que tienen la misma columna de su tabla de verdad, dichas fórmulas son equivalentes. (5), Más adelante haremos referencia a los métodos para demostrar teoremas.

EL CALCULO PROPOSICIONAL

Cuando hemos analizado las diferentes tablas de verdad, no ha interesado el contenido de las proposiciones, sino su valor de verdad. Hemos realizado un cálculo lógico. Si en particular nos referimos a los teoremas (proposiciones cuya verdad no es evidente y que son necesarias sus demostraciones), hacemos un cálculo de Lógica Matemática.

En forma general, haremos referencia a algunas de las leyes del cálculo proposicional.

LEYES DEL CALCULO PROPOSICIONAL

De las innumerables tautologías que podemos formar, existen algunas que, por su uso frecuente, tienen nombres especiales. Por ejemplo:

$p \longrightarrow p$ (identidad)

$p \vee -p$ (tercero excluido)

$p \wedge q \longleftrightarrow q \wedge p$ (conmutativa)

$[(p \wedge q) \; r] \longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ (asociativa)

$[(p \longrightarrow q) \wedge p] \wedge p] \longrightarrow q$ (modus ponens)

$[p \longrightarrow q \wedge -q] \longrightarrow -p$ (modus tollens)

LA INFERENCIA

Si partimos de una o varias proposiciones tomadas como premisas (antecedente), y llegamos a una conclusión, siguiendo un camino determinado, hemos hecho una prueba, deducción o demostración.

Existen ciertas reglas de inferencia, o caminos para realizar esas demostraciones.

Por ejemplo, a partir de dos o más proposiciones tomadas como premisas, su conjunción (unión por "y") se puede inferir como conclusión. También, si se toma como premisas un condicional y su antecedente, el consecuente puede ser inferido como conclusión. Por ejemplo:

Premisa 1a. Si estudio Lógica entenderé mejor Lógica Matemática.

Premisa 2a. Estudio Lógica

Conclusión: Entenderé mejor Lógica Matemática.

LOS AXIOMAS

Si del conjunto de tautologías de un cálculo elegimos varias como puntos de partida, y con ayuda de las reglas de inferencia se pueden deducir las demás, entonces, esos puntos de partida son los

AXIOMAS. En particular, si las proposiciones se refieren a entes matemáticos (puntos, números, vectores, etc) nos estamos refiriendo a un sistema matemático, a un sistema axiomático.

SISTEMA AXIOMATICO

El conjunto de axiomas del sistema debe cumplir con las propiedades de independencia, consistencia y plenitud.

Independencia significa que ninguno de los axiomas del sistema debe derivarse de los otros.

Consistencia significa que a partir de los axiomas y las reglas de inferencia empleadas solo deben derivarse tautologías.

Plenitud significa que de los axiomas y reglas de inferencia deben poder derivarse todas las tautologías del sistema matemático.

(El sistema matemático, o más bien teoría matemática, es el conjunto de axiomas, reglas de inferencia y teoremas.)

TEOREMAS

Demostrar el teorema p ----> q es utilizar un método por el cual dicha implicación se deriva del conjunto de axiomas y reglas de inferencia elegidos como punto de partida.

Si, a partir de una implicación, cambiamos el orden de antecedente y consecuente, o bien si negamos las proposiciones componentes, obtenemos otros enunciados.

FORMAS DERIVADAS DE UN TEOREMA

Consideremos las proposiciones p , y q , a continuación la implicación: p ----> q, a partir de ésta, las implicaciones:

q ----> p, - p ----> -q, -q ----> -p, se llaman recíproca, contraria y contrarrecíproca de la primera, respectivamente.

Veamos las tablas de verdad correspondientes:

Analicemos en un mismo cuadro, todas las posibilidades:

p	q	-p	-q	p--> q	q ---> p	-p ----> -q	-q ----> -p
v	v	f	f	v	v	v	v
v	f	f	v	f	v	v	f
f	v	v	f	v	f	f	v
f	f	v	v	v	v	v	v

Observando las tablas de verdad correspondientes, vemos que:
Los teoremas directo y contrarrecíproco son equivalentes.
Los teoremas recíproco y contrario son equivalentes.

METODOS DE DEMOSTRACION (DE PRUEBA).

Existen mecanismos de demostración formal de tipo directo. Consis ten en utilizar axiomas o proposiciones (teoremas) válidos. Por ejemplo, si queremos probar que:

SI DOS NUMEROS ENTEROS SON PARES, SU SUMA ES UN NUMERO PAR, utilizaremos la premisa, la def. de número par, y algunas sustituciones.

Así:

Prueba del teorema: 1) Asignemos a los números las letras a y b, luego la premisa es que a y b son números pares.

2) Por definición de número par:

$a = 2a'$ (a' es cualquier número natural)

$b = 2b'$

3) $a + b = 2a' + 2b'$ (sustitución)

4) $a + b = 2(a'+b') = 2c$ (factorización y

5) sustitución)

como c es un número natural cualquiera por ser suma de naturales, 2c es número par.

Aquí hemos utilizado propiedades de operaciones con números naturales que deben ser demostradas, sin embargo, son tan familiares que las aceptaremos como si hubiesen sido probadas.

La prueba o demostración anterior es de tipo directo, la prueba indirecta es más conocida como demostración por el absurdo.

Está basada en la equivalencia lógica de las proposiciones:

$$p \longrightarrow q \text{ , y, } -q \longrightarrow -p$$

Por ejemplo, si queremos probar:

Sea n un número natural,

SI n^2 es número par, n es número par.,

demostremos la proposición equivalente:

SI n NO ES NUMERO PAR, LUEGO n^2 NO ES PAR.

Prueba:

Expresemos n y n^2 en virtud de la definición de número impar, y atendiendo al desarrollo del cuadrado de un binomio:

1) $n = 2a + 1$ (a es cualquier número natural)

2) $n^2 = 4a^2 + 4a + 1$

3) $n^2 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ (por propiedades algebraicas)

4) $2a^2 + 2a$ (es cualquier número natural m, por obtenerse de operaciones definidas entre naturales).

5) $n^2 = 2m + 1$ que es número impar, luego no es par, como queríamos demostrar.

Enunciemos, a modo de ejemplo de geometría, un teorema considerado como directo, y sus tres formas derivadas:

Si un punto pertenece a la mediatriz de un segmento, entonces equidista de sus extremos.

Recíproco:

Si un punto equidista de los extremos de un segmento, entonces pertenece a su mediatriz.

Contrario del directo:

Si un punto no está en la mediatriz de un segmento, entonces no equidista de sus extremos.

Contrarrecíproco:

Sí un punto no equidista de los extremos de un segmento, entonces no pertenece a su mediatriz.

CONSIDERACIONES GENERALES

Sin haber analizado la Lógica en todos sus aspectos, hemos hecho mas referencia a la de enunciados. Aclaramos que, a través de la historia, la Lógica se ha enriquecido progresivamente, y por ello, se habla de clases de lógicas, de distintas lógicas.

En realidad, la lógica es una sola, y analiza las leyes del pensamiento, pero desde distintos puntos de vista.

En la lógica de términos, se analizan las relaciones entre términos o palabras. En la lógica de enunciados, las relaciones entre oraciones o proposiciones. Ambas lógicas corresponden a diferentes períodos históricos (aristotélico y estoico, respectivamente).

Al analizar las tablas de verdad, en los ejemplos vistos, ya se está haciendo un álgebra de la lógica, un cálculo.

Y la lógica matemática pretende construir toda una teoría de números, derivándola lógicamente de un sistema de axiomas. Y aquí no solo empleamos oraciones, enunciados, y relaciones referidas a la vida diaria, sino que se introducen las propiedades que se cumplen en el cálculo con entes matemáticos (números, puntos, vectores, etc.).

Diríamos que la Lógica Matemática es un desarrollo y un perfeccionamiento de la Lógica clásica, aplicada a principios matemáticos.

El alcance no se puede medir aún, porque, por ejemplo, los circuitos de corriente se han interpretado según un lenguaje lógico, para construir Máquinas computadoras.

Y toda esta aplicación es de lógica bivalente solamente. Si se considera una lógica de más valores (trivalente), la aplicación a las distintas ramas del conocimiento puede tener, en un futuro, alcances insospechados.

NOTAS ACLARATORIAS

1) Es interesante destacar el sentido simbólico del lenguaje como producto cultural. Si Usted sufre una emoción violenta, puede emitir un sonido que no tenga interpretación. Allí no hay simbolismo, sino una exclamación instintiva. Sin embargo, si grita ¡ Ay !, esta interjección es la identificación por la lengua del dolor físico, y es una fijación convencional de un sonido natural.

2) A las proposiciones compuestas de ese modo, se les llama fórmulas bien formadas, porque se puede encontrar un valor de verdad según sea el valor atribuido a las componentes. También porque hay similitud con las operaciones matemáticas.

   Un ejemplo de fórmula mal formada es: " p —>", también: " p v∧ q", etc.

3) ¿No se le ocurrió pensar que Juan no es tan bueno ni tan malo? A esta ambigüedad la estudia otro tipo de lógica, por ahora analizaremos solo la bivalente.

4) En el mismo orden considerado en el otro ejemplo, la columna de resultado final tiene: dos v, tres f, y luego: v,f,v.

5) **Son equivalentes:** $p \veebar q$ con $-(p \longleftrightarrow q)$, también, $p \longrightarrow q$ con $-p \vee q$. Compruebe construyendo las respectivas tablas de verdad.

B I B L I O G R A F I A

Bosch, Jorge — Introducción al simbolismo lógico. Eudeba, 1968.

Burgos, Alfonso - Iniciación a la lógica matemática. Selecciones Científicas, Madrid -3. 1975

Gianella de Salama, Alicia. Lógica simbólica y elementos de metodología de la ciencia. El Ateneo, Buenos Aires, 1977.

Moreno, Alberto - Lógica matemática. Eudeba, Buenos Aires, 1968.

Sapir, Eduardo — El lenguaje Fondo de Cultura Económica, México, 1966.