REVISTA DEL SEMINARIO de ENSEÑANZA Y TITULACION

AÑO II NUM.8

ABRIL DE 1986

SUSCRIPCION, Todas las personas que deseen una suscripción, deberán manifestarlo por escrito, enviando su nombre y dirección a:

- Av. Universidad 3000, Maestria Educación en Matemáticas, Primer Piso de las Oficinas Administrativas de U.A.C.B. del C.C.H.
- Departamento de Matemáticas, Cúbiculos 239 y --240. Facultad de Ciencias, UNAM. Ciudad Universitaria. C.P. 04510.

Dicha suscripción será gratuita y anual, mientras esto sea posible.

Los artículos firmados no representan necesariamente la opinión del Seminario.

Si deseas la impresión de algún material, puedes solicitarlo con cualquier miembro del Seminario o enviandolo a cualquiera de las dos direcciones arriba anotadas, al igual que todo tipo de correspondencia relacionada con el Seminario.

ESTE NUMERO DE LA REVISTA FUE IMPRESO EN LOS TALLERES DE IMPRESION DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES . PLANTEL ORIENTE. SE TIRARON 800 EJEMPLARES.

MAYO DE 1986, MEXICO, D.F.

A XV AÑOS DE LA CREACION DEL C.C.H.

I. La Transformación

En 1971 comenzo a funcionar el C.C.H., sus primeras generaciones de profesores vivieron, en su gran mayoría, 1968 como estudiantes, fueron testigos y actores de ese gran movimiento estudiantil y vivirían junio de 1971. El desenmascaramiento del Estado, de la Burguesia, de todos los que detentan el poder; el conocer muy de cerca, a veces en carne propia o de familiares, la represión del ejército y de la policia; etc., erá algo que formaba parte de la conciencia del pueblo. Por esta razón, el C.C.H. fué un grupo de estudiantes, profesores y trabajadores combativos, que busco formas de organización democrática de participación colectiva, de apoyo a las luchas populares, de mejores métodos de enseñanza, de elaboración, de material didáctico y de selección de personal académico, etc., En estos primeros años siempre se tuvo claridad que de un lado estaban los estudiantes profesores y trabajadores y del otro las autoridades, no porque nosotros así lo quisieramos, sino porque las autoridades estaban en contra de las formas democráticas de organización, en contra de perder su poder, sus privilegios, su papel de implementar el orden establecido, el orden que ellos representaban.

Ahora, quince años después, las autoridades han restablecido su poder, las formas de organización y lucha de los profesores y estudiantes, estan fuertemente debilitadas, aunque existen pequeños núcleos en lucha.

EL FOSO Y EL PENDULO ... y las ecuaciones diferenciales.

Por: RAFAEL MARTINEZ.

Departamento de Matemáticas.

Facultad de Ciencias. UNAM.

En la literatura es frecuente encontrar descripciones de eventos que tienen lugar en nuestro Universo. Su propósito principal no es el transmitir información, sino el crear emociones, sugerir aquello que provocará estados de ánimo, sean de felicidad, de pesadumbre, de inquietud, de terror.... se comparará una pasión con el fuego que nace en el horno del herrero (W. Shakespeare), se contrastarán las fases de Venus con los senos de la hija de Galileo (B. Brecht), se inspirará la incertidumbre frente a los extraños movimientos del planeta explorado (A.C. Clarke). En unas ocasiones los contrastes son oportunos y acertados; en otros, sin embargo, los conocimientos del autor no están a la altura de su arte. Por ello resulta interesante, además de educativo, el intentar comparar los textos literarios con la información científica de que se dispone.

Un caso que se presta a ser estudiado, tanto por lo popular de la obra como por el tipo de herramienta matemática disponible, es la descripción del péndulo descendiente hecha por Edgar Allan Poe en su clásico relato "El Foso y el Péndulo". En su acostumbrado estilo Poe narra la experiencia de un prisionero que yace atado sobre una plancha en una cámara de horrores:

... al mirar hacia arriba examiné el techo de mi prisión. Se encontraba a unos 30 ó 40 pies sobre mi cabeza, construido del mismo material que las paredes. Sobre uno de sus paneles me atrajo la atención una figura simbolizando el Tiempo, tal como generalmente se le representa, solo que en lugar de guadaña sostenía lo que a primera vista era una imagen de un inmenso péndulo, similar a los que uno ve en los relojes antiguos. Sin embargo había algo en la apariencia de la máquina que me hacía mirarla con una mayor atención. Mientras la miraba directamente ... imaginé que se movía. Un instante más tarde mi fantasía se confirmó. Su movimiento era breve, y por lo tanto lento ... habría pasado una media hora, posiblemente una hora... antes de que lanzara mi mirada hacia arriba. Lo que entonces vi me confundió y espantó. El barrido del péndulo había aumentado quizá en una yarda. Como consecuencia natural su velocidad también era mucho mayor. Pero lo que principalmente me alteró fue la idea de que había descendido de manera perceptible. Ahora observé -con qué horror es innecesario decirlo- que su extremidad inferior era una media luna de destellante acero, de cerca de un pie de longitud de cuerno a cuerno; los cuernos hacia arriba y el borde inferior tan filoso como el de una navaja... y todo ello silbaba conforme rasgaba el aire... largas, largas horas de horror, más que mortales, durante las cuales conté las cortantes oscilaciones del acero. Pulgada a pulgada -línea a línea- con descensos solo apreciables en intervalos que parecían eternos -más y más bajo llegaba!... Las oscilaciones formaban un ángulo recto con mi cuerpo. Vi que la media luna cruzaría la región de mi corazón... su aterradora y amplia oscilación (algunos 30 pies o más)... Abajo, lentamente hacia abajo se dirigía. Encontré un loco placer en comparar su velocidad vertical con la lateral. Hacia la derecha y hacia la -

izquierda -lejos y amplia- con el crujir de un espíritu maldito!... Abajo - ¡cierta e inexorablemente continuaba bajando!...

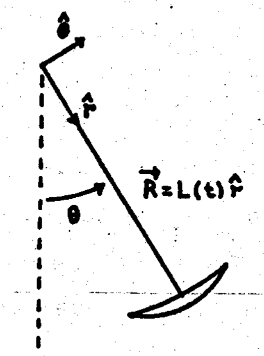
Difícilmente el personaje del relato se encontraba en condiciones de hacer un análisis matemático del movimiento del péndulo. Pero como nosotros si tenemos esta posibilidad podemos preguntarnos si Poe se encontraba en lo correcto cuando señalaba que... *Su movimiento era breve, y por lo tanto lento,* **pero que conforme descendía...** *el barrido del péndulo había aumentado quizá en una yarda. Como consecuencia su velocidad también era mucho mayor....,* **hasta que al final tenía una ...** *aterradora y amplia oscilación - (algunos 30 pies o más).* **Podemos hacer un experimento sencillo - con un peso amarrado a un hilo y colgado sobre el borde de una mesa. Hagamos que el peso oscile y lentamente dejemos que baje el - peso (equivale a que creciera la "barra" del péndulo). Veremos - que hay algunas inconsistencias entre el movimiento que observamos y la descripción de Poe. Toca el turno ahora a un modelo matemático.**

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Si tenemos un péndulo cuya longitud en el tiempo t es $l(t)$ podemos describir su movimiento mediante coordenadas polares r y θ Sea θ el ángulo que aparta el cordón de la vertical a partir del - punto de apoyo. Tomemos a $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ como vectores unitarios en el punto de apoyo y orientados como lo indica la figura. Suponiendo que la fricción es despreciable, tomaremos solo en cuenta la componente

de la fuerza en la dirección $\hat\theta$, ya que es ortogonal a la longitud del cordón.

La ecuación de movimiento en la dirección $\hat\theta$ se obtiene a partir de la segunda Ley de Newton y de haber obtenido una expresión para el vector de aceleración a lo largo de $\hat\theta$. Si tomamos a $R(t)$ como el vector de posición de la punta del péndulo (la mitad de la media-luna) tenemos que $\vec R = L\,\hat r$. Como $\dot{\hat r} = \dot\theta\,\hat\theta$ y $\dot{\hat\theta} = -\dot\theta\,\hat r$ resulta



$$\dot{\vec R} = \dot L\,\hat r + L\,\dot{\hat r} = \dot L\,\hat r + L\,\dot\theta\,\hat\theta$$

$$\ddot{\vec R} = \ddot L\,\hat r + \dot L\,\dot{\hat r} + \dot L\,\dot\theta\,\hat\theta + L\,\ddot\theta\,\hat\theta + L\dot\theta\dot{\hat\theta}$$

$$= (\ddot L - L\dot\theta^2)\hat r + (2\,\dot L\dot\theta + L\,\ddot\theta)\,\hat\theta \quad \ldots(1)$$

Como la masa de la media-luna es m, la fuerza a lo largo de la dirección $\hat\theta$ es $-mg\,\mathrm{sen}\,\theta$. Ya que la componente del vector aceleración a lo largo de $\hat\theta$ es $2\dot L\dot\theta + L\ddot\theta$, la segunda Ley de Newton nos dice

$$m\,(2\dot L\dot\theta + L\ddot\theta) = -\,mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Si tomamos $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$ (es decir, $\theta \approx 0$) entonces tenemos

$$L\,\ddot\theta + 2\,\dot L\,\dot\theta + g\,\theta = 0 \quad \ldots(2)$$

La descripción que hace Poe del recorrido y la velocidad del péndulo descendiente puede ahora ser comparado con la trayectoria $L\theta$ y la velocidad angular $\frac{d}{dt}(L\theta)$ del péndulo matemático modelado con la ecuación (2). Solo queda señalar cómo varía la longitud $L(t)$ del péndulo conforme pasa el tiempo.

PENDULO CON VELOCIDAD CONSTANTE DE DESCENSO

Aun cuando Poe en ningún momento afirma que el descenso se lleva a cabo con velocidad constante, ésta podría ser una hipótesis razonable:

$L(t) = a + bt$ con a, b constantes positivas y $t \gg t_0 > 0$, donde la longitud inicial es $L_0 = a + bt_0$ y b es la constante que da la razón de cambio de la longitud del péndulo. Con esto en cuenta la ecuación diferencial que rige el movimiento es

$$(a + bt)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + g\theta = 0 \ , \quad t \geq 0 \ \ldots.(3)$$

Pasamos ahora a las preguntas sobre cómo se comporta el péndulo matemático respecto del imaginado en el relato de Poe.

1. ¿Hay oscilaciones?
2. ¿El ángulo máximo de oscilación decrece?
3. El narrador del cuento no dice nada sobre el ángulo, excepto que hay un recorrido terriblemente amplio (treinta pies o más). ¿Crece tan rápido el recorrido del péndulo?

Para contestar esta pregunta podrías hacerlo tomando un péndulo con una longitud de 1 pie de largo, en tanto que la función de Bessel "y" en (6) se tomara tal que inicialmente está en su valor extremo. Llamemos M a este último. Por simple sustitución se ve que el recorrido $L\theta = \sqrt{L}\, y$ y $L(t_0) = 1$. Como $|M| \leq \pi/2$ (¿por qué?) y una propiedad que se mencionó (¿cuál de ellas?) se concluye que

$$|\text{recorrido}| = |\sqrt{L}\; y| \leq \sqrt{L}\; |M| \leq \frac{\sqrt{L}\;\pi}{2}$$

Para el momento en que el péndulo haya bajado 40 pies (y puesto fin a las angustias del prisionero) el recorrido no sobrepasa los $\frac{\sqrt{40}\;\pi}{2} \approx 10$ pies. ¿Esto podría ser el *recorrido terriblemente amplio* que brota de la imaginación de Poe?.

En vista de las condiciones anteriores resulta que el ángulo, el recorrido y la velocidad angular se comportan de las siguientes maneras conforme avanza el tiempo:

c) El ángulo $\theta(t)$ decae sinusoidalmente a cero, y la magnitud de sus valores extremos también decrecen monótonamente como

$$(a + bt)^{-3/4} \qquad \text{(Fig. 2)}$$

d) El recorrido $L\theta = (a + bt)\,\theta\,(t)$ crece sinusoidalmente con el tiempo, y la magnitud de sus valores extremos aumentan monótonamente como $(a + bt)^{\frac{1}{2}}$ (Fig. 3)

e) La velocidad angular $\frac{d}{dt}(l\theta)$ decae sinusoidalmente a cero y la magnitud de sus valores extremos decrece monótonamente como $(a + bt)^{-\frac{1}{2}}$ (Fig. 4)

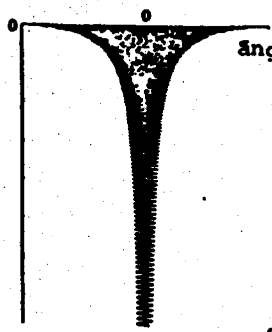
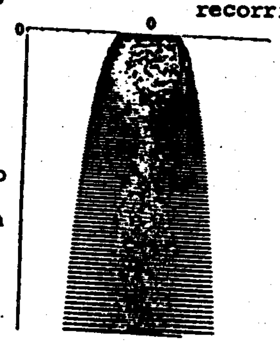
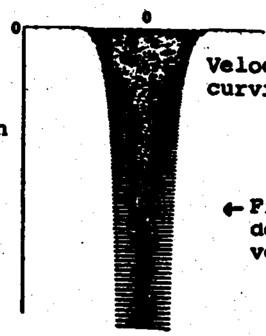


Figura 2.↑
El ángulo
decreciente de un
péndulo
que desciende
de manera
monótona



Figur. 3.→
El recorrido
o amplitud
de osulación



←Figura 4. El lento
decaimiento de la
velocidad curvilinea.

Si hacemos el cambio de variable definido por

$$x = \frac{2}{b}\sqrt{(a + bt)g}\ , \quad y = \theta\sqrt{a + bt} \qquad \ldots(4)$$

la ecuación (3) se convierte en

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)\,y = 0 \qquad \ldots.(5)$$

que es un caso particular de $x^2\frac{dy^2}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)\,y = 0$

la ecuación diferencial de Bessel de orden p. La solución de (5) determina una solución de (3) mediante el cambio de variable inverso de (4) resultando que

$$\theta(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{a + bt}}\right) y\left(\frac{2}{b}\sqrt{(a + bt)g}\right) \qquad \ldots.(6)$$

Por lo tanto las propiedades de las soluciones de (5) se traducen en propiedades para el movimiento angular del péndulo que desciende constantemente.

La solución de (5) tiene las siguientes propiedades:

a) Los valores extemos de $|y(x)|$ decaen a cero de manera monótoma conforme $x \to \infty$

b) Para toda $c > 0$ la función $y(x)$ oscila como una función sinusoidal que tiende a cero.

$$y(x) = \frac{A}{x^{1/2}}\cos(x - \phi) + \frac{r(x)}{x^{3/2}}, \quad x \geq 0$$

donde A, ϕ son constantes y $r(x)$ está acotada

¿Y qué tal con las *contantes oscilaciones del acero*, y el cambio de *su movimiento era breve* y *por lo tanto lento, y su velocidad también era mucho mayor?*. Las frases sugieren valores extremos crecientes para la velocidad curvilínea. Pero ¿cómo resul tó ser $\frac{d}{dt}(L\dot{\theta})$ respecto de sus valores extremos?

En conclusión ¿Qué puedes concluir del relato de Poe y el modelo que manejaste aquí?

Suponiendo que la descripción de Poe no se apegara a nuestro modelo, y que nuestro modelo matemático fuera correcto intuitivamente ¿Qué podrías hacerle al péndulo para que se comportara como lo imaginara el escritor?.