
REVISTA DEL SEMINARIO de ENSEÑANZA Y TITULACION

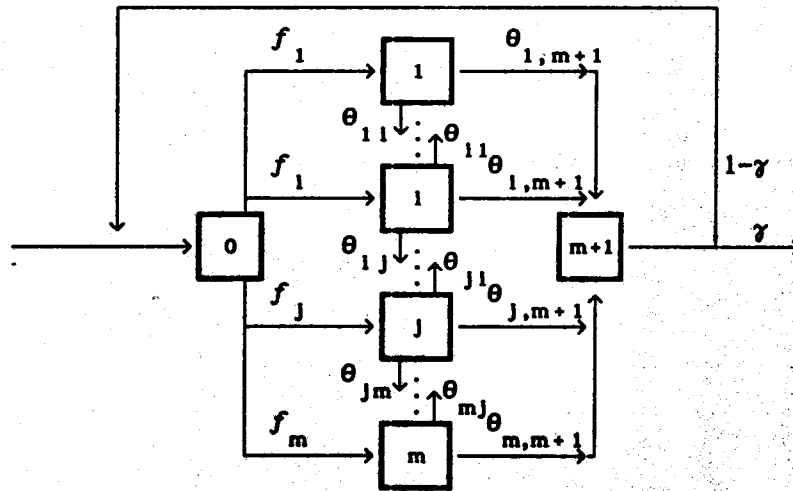
VOL. IX

Sobre Algunas Propiedades de
las PH-Distribuciones.

NUM. 75

Solución Matricial Geométrica de un Sistema de Servicio con Distribución de Fases e Interrupciones de Arribos y de Servicios.

Por Bocharov P.P.



C O N T E N I D O

- . Sobre algunas Propiedades de las PH-Distribuciones, P.P. Bocharov,-----2
- . Solución Matricial Geométrica de un Sistema de Servicio con Fases e Interrupciones de Arribos y de Servicios, P. P. P.P. Bocharov, S.M. Nava-----17

SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE PH-DISTRIBUCIONES

Pavel P. Bocharov

(Universidad Rusa de la Amistad de los Pueblos, Moscú)

RESUMEN

En el presente trabajo se exponen las definiciones y propiedades principales de distribuciones de tipo de fases (PH-distribuciones).

§ 1. INTRODUCCION

La noción de fases propuesta por A. K. Erlang [1] es muy usada en cálculos de características de sistemas de colas. El desarrollo del método de fases se asocia con la introducción de D. R. Cox [2] de un número aleatorio de fases secuenciales con diferentes parámetros de distribución de cada fase. La distribución, cuya interpretación de fases provee el arreglo en paralelo, fue introducido por P. M. Morse in [3]. La distribución más general en la estructura de fases fue la PH-distribución, introducida por M. F. Neuts en [4]; su estructura de fases cubre casi todas las configuraciones de fases imaginables. En sus trabajos posteriores M.F. Neuts intentó el estudio sistemático de las propiedades de la PH-distribución. La exposición más comprensible de nociones y factores básicos concernientes a la PH-distribución está contenida en el libro de Neuts [4]. Siguiendo la conocida tradición en la literatura probabilística, la PH-distribución merece justamente ser referida como la Distribución de Neuts.

§ 2. DEFINICION E INTERPRETACION PROBABILISTICA

PH-Distribuciones. A continuación se darán en forma condensada las nociones y resultados básicos para la PH-distribución.

AL ENVIAR SUS ARTÍCULOS TENGAN EN CUENTA LAS SIGUIENTES NORMAS:

- Enviar sus artículos capturados con cualquier procesador de palabras (preferiblemente que tenga "Driver" para impresora "laser") en formato medio oficio a renglón seguido o bien
- Mecanografiados en máquina eléctrica con letra tipo "Lether Gothic" a renglón y medio y hojas tamaño carta. En caso necesario diferenciar los números "0" y "1" de las letras "O" y "L".
- El nombre del autor junto con sus datos, incluyendo algún teléfono, deberán aparecer en una hoja por separado del texto.
- Enviar originales y no copias.
- En cada artículo deberá incluirse relación de libros y artículos consultados, bajo el título de "Referencias" o bien "Bibliografía" sobre el tema.
- Cada autor recibirá constancia de recepción de su artículo, y una vez aprobada su publicación, constancia del número en que aparecerá.
- Cada autor recibirá cinco ejemplares de la revista.
- Los trabajos, y cualquier correspondencia deberán remitirse a: "Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación" Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, cubículo 240. UNAM, México 04510, D.F.

CONSEJO EDITORIAL

- MAT. HÉCTOR GARCÍA SÁNCHEZ (CGH@MATH.PAK.UNAM)
- MAT. GUILLERMO GÓMEZ ALCARAZ (GC@UNAM)
- DR. SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO (SM Y FC@UNAM)
- DR. JESÚS LÓPEZ ESTRADA (JL@UNAM)
- MAT. PILAR MARTÍNEZ TÉLLEZ (P@UNAM)
- FIS. MAT. VÍCTOR PÉREZ TORRES (V@MATE@UNAM)
- MAT. LUIS RAMÍREZ FLÓRES (L@MATE@UNAM)
- MAT. FRANCISCO STILCK CHÁVEZ (FC@UNAM)
- M. EN C. JAIHE GRABINSKY STEIDER (J@M-A)

LA REVISTA DEL SEMINARIO DE ENSEÑANZA Y TITULACIÓN CONSIDERA PUBLICABLES ARTÍCULOS DE CIENCIAS BÁSICAS, EN PARTICULAR DE MATEMÁTICAS, DE LA MANERA MÁS AMPLIA, DESDE LA MÁS EXTREMA DIVULGACIÓN HASTA ARTÍCULOS TAN TÉCNICA O CONCEPTUALMENTE SOFISTICADOS COMO LO REQUIERA SU CONTENIDO Y EL ESTILO DEL AUTOR BARRIENDO ASPECTOS DE SU ENSEÑANZA, APLICACIONES E INVESTIGACIÓN. EN SU CASO EL ARBITRAJE DE LOS ARTÍCULOS SERÁ ANÓNIMO. LOS ÁRBITROS NO RECIBEN LOS NOMBRES DE LOS AUTORES Y VICEVERSA.

Definición 1 [4]. La función de distribución $F(x)$ de una variable aleatoria no negativa se llama una *distribución de tipo de Fases (PH-distribución)* si puede escribirse como

$$F(x) = 1 - \vec{f}^T e^{Gx} \vec{1}, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

donde \vec{f} es el vector probabilístico de longitud m ,

$$\sum_{i=1}^m f_i = 1, \quad f_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m},$$

G es una matriz ($m \times m$) con la propiedades

$$\sum_{j=1}^m G_{ij} \leq 0, \quad G_{ii} \geq 0, \quad i \neq j, \quad G_{ii} < 0, \quad i, j = \overline{1, m},$$

y al menos para algún $i \quad \sum_{j=1}^m G_{ij} < 0 \quad i = \overline{1, m}$; $\vec{1}$ es un vector en el cual todos sus componentes son iguales a 1.

Definición 2 [4]. La pareja (f, G) se llama una *PH-representación* de orden m de la función de distribución $F(x)$.

De ahora en adelante nos referiremos a la *PH-representación* implicando al par (f, G) , donde el vector f y la matriz G poseen las propiedades indicadas en la definición 1.

Sea $g = -G\vec{1}$.

Definición 3 [4]. Una *PH-representación* (f, G) se llama irreducible, si

$$f_0 \triangleq 1 - \vec{f}^T \vec{1} = 1 \text{ y la matriz } A \triangleq G + \frac{1}{1-f_0} g \vec{f}^T \quad (2)$$

es irreducible.

Una función de distribución $F(x)$ de tipo de fases tiene

una interpretación probabilística la cual se muestra a continuación [5].

Sea ν_1, \dots, ν_m números reales.

$$\nu_i \geq -G_{ii}, \quad i = \overline{1, m},$$

y $\theta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, m}$, se define por

$$\theta_{ij} = \begin{cases} 1 + \frac{G_{ii}}{\nu_i}, & i=j, \\ \frac{G_{ij}}{\nu_i}, & i \neq j. \end{cases}$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^m \theta_{ij} \leq 1, \quad \theta_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Consideremos una red exponencial abierta con m nodos (fig. 1), que a cada instante de tiempo contiene solo una demanda, es decir si hay un cliente en la red, el flujo de llegadas a la red se bloquea. Un cliente que se dirige con probabilidad f_i al nodo $i, \quad i = \overline{1, m}$, y con probabilidad complementaria

$$f_0 \triangleq 1 - \sum_{j=1}^m f_j$$

deja la red, evitando todos los nodos. El tiempo de estancia del cliente en el nodo i se distribuye exponencialmente con parámetro ν_i . Saliendo del nodo i , el cliente se dirige al nodo $j, \quad j = \overline{1, m}$, con probabilidad θ_{ij} y con probabilidad complementaria

$$\theta_{i0} \triangleq 1 - \sum_{j=1}^m \theta_{ij}$$

deja la red.

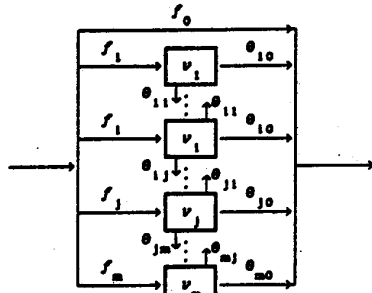


Fig. 1

Consideremos ahora el proceso de una caminata aleatoria de una demanda al haber entrado ésta en la red completamente vacía. Denotaremos por τ el tiempo de estancia del cliente en la red. Sea $X(t)$ el índice del nodo, donde se encuentra el cliente al instante t . El proceso $X(t)$ se define solo para instantes de tiempo $t \in [0, \tau)$ y es un proceso de Markov homogéneo terminante. La matriz G se llama el generador del proceso $X(t)$,

$$G_{ij} = \begin{cases} v_i(\theta_{ii}-1), & i=j, \\ v_i\theta_{ij}, & i \neq j. \end{cases}$$

Sea $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j=1}^m$ la matriz de transición del proceso $X(t)$, es decir $p_{ij}(t)$ es la probabilidad de transición del cliente desde el nodo i al nodo j durante el tiempo $[0, t)$, a condición de que el cliente que se encuentra en la red está en el nodo i . La matriz $P(t)$ satisface el sistema de ecuaciones diferenciales de Kolmogorov

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)G \quad (3)$$

con condiciones iniciales $P(0) = I$, cuya solución está definida por

$$P(t) = e^{Gt} \quad (4)$$

De aquí se sigue que

$$P^{-1}\tau Gx = 1 - \sum_{i=1}^m P(x) \tau^i = 1 - \sum_{i=1}^m \tau^i e^{Gt} \tau^i, \quad x \geq 0.$$

Así, $F(x)$ es la función de distribución del tiempo τ en que el proceso $X(t)$ termina o, lo que es lo mismo, el tiempo de permanencia del cliente en la red.

La irreducibilidad de la PH-representación puede interpretarse de la siguiente manera [5]. Sea

$$f_i = \frac{f_1}{1 - f_0}, \quad i = \overline{1, m},$$

y considérese una red exponencial cerrada, la cual se muestra en la fig. 2 con un nodo adicional con índice 0. La demanda, que pasa con probabilidad θ_{i0} desde el nodo $i, i = \overline{1, m}$, al nodo 0. Instantáneamente sale y después de acuerdo a la distribución $f_j, j = \overline{1, m}$ nuevamente se dirige a uno de los nodos con índice $1, 2, \dots, m$. En este caso una PH-representación irreducible significa que en la red cerrada con un cliente aleatorio caminando en esta red puede encontrarse desde cualquier nodo i hasta cualquier nodo j .

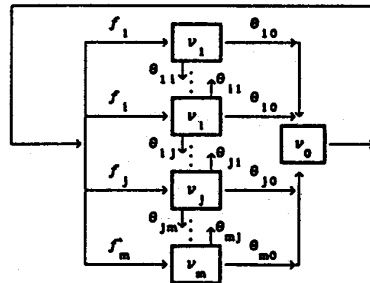


Fig. 2

Todas las características de la PH-distribución con PH-representación (\vec{f}, G) puede definirse en términos del

vector \vec{f} y la matriz G . De esta manera, para la transformada de Laplace-Stieltjes (TLS) $\varphi(s)$ de la función de distribución $F(x)$, tomando en cuenta la non-singularidad de la matriz G para una PH-representación irreducible [4], tenemos

$$\varphi(s) = f_0 + \vec{f}^T (s I - G)^{-1} \vec{1} = 1 - s \vec{f}^T (s I - G)^{-1} \vec{1}, \operatorname{Re} s > 0, \quad (5)$$

y los momentos de la función de distribución $F(x)$ están dados por las fórmulas

$$E x^k = (-1)^k k! \vec{f}^T G^{-k} \vec{1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Consideremos unos breves ejemplos de distribuciones de tipo de fases.

Ejemplo 1. Distribución Generalizada de Erlang obtenida como un resultado de la convolución de m distribuciones exponenciales con parámetros $\lambda_i, i = \overline{1, m}$, es de tipo de fases y su PH-Representación está dada por el vector $\vec{f}^T = (1, 0, \dots, 0)$ y la matriz

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{m-1} & \lambda_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_m \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2. Distribución Hiperexponencial

$$F(x) = \sum_{i=1}^m f_i (1 - e^{-\lambda_i x}), \quad x \geq 0,$$

es también de tipo de fases. En este caso

$$\vec{f}^T = (f_1, f_2, \dots, f_m), \quad G = \operatorname{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_m).$$

§ 3. PROPIEDADES

Omitiendo factores conocidos, establecidos para la PH-distribución [4, 5] se discutirán solo ciertos nuevos resultados para estas distribuciones, necesarias para la prueba de algunas afirmaciones en el capítulo 2. Por conveniencia sea $f_0 = 0$, es decir $\vec{f}^T \vec{1} = 1$.

Lema 1 [5]. Sea (\vec{f}, G) una PH-representación irreducible de la función de distribución $F(x)$, sea γ algún número tal que $0 < \gamma \leq 1$ y $\vec{f}^{\circ} = (1-\gamma)\vec{f}$, $G^{\circ} = G + (1-\gamma)\vec{f}\vec{f}^T$. Entonces el par $(\vec{f}^{\circ}, G^{\circ})$ es una PH-representación irreducible de la función de distribución de tipo de fases $F^{\circ}(x)$,

$$F^{\circ}(x) = 1 - \vec{f}^{\circ T} e^{G^{\circ} x} \vec{1}, \quad x \geq 0. \quad (7)$$

Demostración. Usemos la interpretación probabilística de la función de distribución $F(x)$, pero antes introduciremos algunos cambios en el. A saber, introduciremos nodos adicionales numerados como 0 y $m+1$, a través de los cuales la demanda pasa inmediatamente. Asumamos que la demanda, quien completó su tiempo de estancia en la red, sale de la red con alguna probabilidad positiva γ y con la probabilidad complementaria $1-\gamma$ reingresa al sistema llegando a uno de los nodos $1, 2, \dots, m$ de acuerdo a probabilidades definidas por el vector \vec{f} (fig. 3). Ahora denotemos el tiempo de estancia de la demanda en el conjunto de nodos $1, 2, \dots, m$ por τ° y sea $X^{\circ}(t)$ el índice (de este conjunto) del nodo, el cual contiene al cliente en el momento $t, t \in [0, \tau^{\circ})$. $X^{\circ}(t)$ también es un proceso de Markov homogéneo con el generador igual a G° . Así el par $(\vec{f}^{\circ}, G^{\circ})$ es una PH-representación de la función de distribución de tipo (7). La irreducibilidad de

$B_{ij} \neq 0, i \neq j, i, j = \overline{1, m}$,
 y existe un vector \vec{x} con componentes positivos tales que

$$\sum_{j=1}^m B_{ij} x_j = 0, i = \overline{1, m},$$

entonces la matriz B es una M -matriz¹. Para la matriz H tal vector es el vector $\vec{x} = \vec{1}$. Mas aún, la matriz G de la PH-representación irreducible es non-singular. Así, H es una M -matriz non-singular, con lo que queda probado el lema. \square

Por la conveniencia de exposición, llamaremos a la matriz G estable, si para todos sus eigenvalores λ_i la condición $Re \lambda_i < 0$ se satisface y subestable con $Re \lambda_i \leq 0$ [7].

Ya que los eigenvalores de las M -matrices non-singulares tienen partes reales positivas, entonces del lema 3 obtenemos directamente

Corolario. Sea (\vec{f}, G) una PH-representación irreducible. Entonces la matriz G es estable.

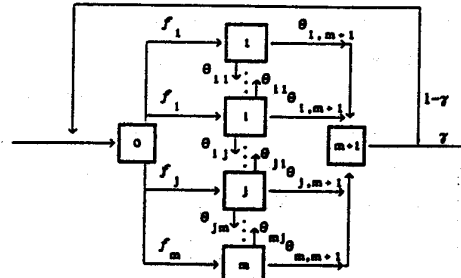
El planteamiento realizado permite concluir que la PH-representación es una exponencial en el sentido [8] para distribuciones con la fracción-racional TLS.

Formularemos un resultado más concerniente a PH-distribuciones. Notemos que aquí y en adelante vamos a utilizar las nociones del producto Kronecker de matrices $A \otimes B$ y de la suma de Kronecker $A \oplus B = A \otimes I + I \otimes B$ [7].

Lema 4 [5]. Si la matriz G es estable y la matriz L es subestable, entonces

¹ Existen muchas otras definiciones de M -matriz equivalentes a la propuesta. Una bella exposición de la teoría de M -matrices y sus aplicaciones en diferentes ramas de las matemáticas se da en el libro [10]

la PH-representación (\vec{f}^*, G^*) es obvia. De esta forma, la demostración del lema se completa.



La distribución de tipo (7) es una modificación de la PH-distribución (1) tomando en cuenta el retroceso.

Como mostramos anteriormente para una PH-representación irreducible (\vec{f}, G) la matriz G es non-singular. Tomando esto en cuenta tanto como el planteamiento del lema 1 inmediatamente vemos que lo siguiente es cierto.

Lema 2 [5]. Sea (\vec{f}, G) una PH-representación irreducible y sea γ un número del intervalo (0,1). Entonces la matriz

$$G^* = G + (1 - \gamma) \vec{g} \vec{f}^T$$

es non-singular.

Formulemos algunos planteamientos para PH-distribuciones.

Lema 3 [5]. Sea (\vec{f}, G) una PH-representación irreducible. Entonces la matriz $H = -G$ es una M -matriz non-singular.

Demostración. Como se sabe, si la matriz B satisface la condición

$$\int_0^{\infty} (e^{Gt} \bullet e^{Lt}) dt = -(G \bullet L)^{-1}.$$

Demostración.- Notemos que, si la matriz A es estable, entonces

$$\int_0^{\infty} e^{At} dt = -A^{-1}. \quad (8)$$

Posteriormente, de acuerdo a las propiedades del producto tensorial tenemos

$$(G \bullet L)t = (e^{Gt} \bullet e^{Lt}). \quad (9)$$

Más aún, utilizando las propiedades del producto tensorial tenemos que cada eigenvalor de la matriz $G \bullet L$ es la suma de los eigenvalores de las matrices G y L . Por lo tanto la matriz $G \bullet L$ es estable. Así, tomando en cuenta (8) y (9), concluimos la demostración del lema 4. ■

Lema 5 [8]. Si la matriz N es de la forma

$$N = Q + CB, \quad (10)$$

donde Q es una matriz cuadrada non-singular de orden n , C y B son matrices rectangulares, cuyas dimensiones son respectivamente iguales a $n \times n$ y $m \times n$ y la matriz ϕ , definida como

$$\phi = I + BQ^{-1}C, \quad (11)$$

es non-singular, entonces la matriz N^{-1} se representa de la forma

$$N^{-1} = Q^{-1}(I - C\phi^{-1}BQ^{-1}). \quad (12)$$

Regresemos a las propiedades de las PH-distribuciones. Mostraremos que lo siguiente es cierto.

Lema 6. Sea (\vec{T}, G) una representación irreducible de la función de distribución $F(x)$ de tipo de fases, $\vec{T}^T \vec{T} = I$, $\vec{T} = -G\vec{T}$ y la matriz cuadrada H subestable. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{Ht} dF(t) &= \\ &= I - (I \bullet \vec{T}^T)(H \bullet G)^{-1}(H \bullet \vec{T}) = -(I \bullet \vec{T}^T)(H \bullet G)^{-1}(I \bullet \vec{T}) = \\ &= I - (\vec{T}^T \bullet I)(G \bullet H)^{-1}(\vec{T} \bullet H) = -(\vec{T}^T \bullet I)(G \bullet H)^{-1}(\vec{T} \bullet I). \end{aligned}$$

Demostración. En efecto, usando el lema 4, tenemos

$$\begin{aligned} &= I - (I \bullet \vec{T}^T)(H \bullet G)^{-1}(H \bullet \vec{T}) = I + (I \bullet \vec{T}^T) \int_0^{\infty} (e^{Ht} \bullet e^{Gt}) dt (H \bullet \vec{T}) = \\ &= I + \int_0^{\infty} \vec{T}^T e^{Gt} \vec{T} e^{Ht} dt = \int_0^{\infty} e^{Ht} dF(t) = \int_0^{\infty} e^{Ht} dF(t) \vec{T}^T e^{Gt} \vec{T} dt = \\ &= (I \bullet \vec{T}^T) \int_0^{\infty} e^{Ht} \bullet e^{Gt} dt (I \bullet \vec{T}) = -(I \bullet \vec{T}^T)(H \bullet G)^{-1}(I \bullet \vec{T}). \end{aligned}$$

En forma similar probamos las otras dos igualdades. ■

Corolario. Sea (\vec{T}, G) una PH-representación irreducible de la función de distribución $F(x)$ de tipo de fases, $\vec{T}^T \vec{T} = I$, sea $\varphi(s)$ la TLS de la función de distribución $F(x)$ y la matriz $(-n \times n)$ H subestable con eigenvalores $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Entonces la matriz

$$\phi = I - (I \bullet \vec{T}^T)(H \bullet G)^{-1}(H \bullet \vec{T}) \quad (13)$$

es invertible si y solo si,

$$\varphi(-\gamma_1) \neq 0$$

para todo γ_1 .

Demostración. De acuerdo al lema 6,

$$\phi = \int_0^{\infty} e^{Ht} dF(t) = \varphi(-H),$$

por lo tanto la matriz ϕ tiene eigenvalores $\varphi(-\gamma_1)$ [9]. Esto concluye la demostración del corolario. ■

Observación. Como sigue del lema 6, tenemos algunas definiciones equivalentes de la matriz ϕ .

Lema 7. Sea (\vec{T}, G) una PH-representación irreducible de orden m de la función de distribución $F(x)$ de tipo de fases, $\vec{T}^T \vec{T} = I$, $\varphi(s)$ es la TLS de la función de distribución $F(x)$ y la matriz $(-n \times n)$ H es

subestable con eigenvalores $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Entonces la matriz $(n \times n)$

$$G = H \circ (I - \tilde{T}^T) + I \circ G$$

es invertible si y solo si, $\varphi(-\gamma_j) \neq 0$ para todo γ_j .

Demostración. Reescribamos la matriz G como

$$G = H \circ G - (H \circ \tilde{T})(I \circ \tilde{T}^T). \quad (14)$$

Usando la igualdad [10]

$$\det(Q + CB) = \det Q \det(I + BQ^{-1}C),$$

obtenemos

$$\det G = \det(H \circ G) \det[I - (I \circ \tilde{T}^T)(H \circ G)^{-1}(H \circ \tilde{T})].$$

Ya que la matriz G es estable y la matriz H es subestable, entonces la matriz $H \circ G$ es estable y, en particular, esta es invertible. Por lo tanto la condición necesaria y suficiente para que la matriz G sea invertible es la invertibilidad de la matriz

$$\phi = I - (I \circ \tilde{T}^T)(H \circ G)^{-1}(H \circ \tilde{T}).$$

El planteamiento de Lema 7 sigue ahora de el Corolario desde el Lema 6, que ha sido probado. ■

Notemos que la TLS $\varphi(s)$ de una variable aleatoria no negativa no tiene zeros reales no negativos [11]. Por lo que del Lema 7 obtenemos el siguiente

Corolario. Sea (\tilde{T}, G) una PH-representación irreducible de la función de distribución $F(x)$ de tipo de fases, $\tilde{T}^T \tilde{T} = I$ y la matriz H tiene sólo eigenvalores reales no positivos. Entonces la matriz

$$G = H \circ (I - \tilde{T}^T) + I \circ G$$

es invertible.

Lema 8. Sean (\tilde{T}, G) y (\tilde{T}, H) PH-representaciones irreducibles de la función de distribución $F(x)$ y $L(x)$ de
Página 12

tipo de fases, $\tilde{T}^T \tilde{T} = I$ y la matriz $G = H \circ (I - \tilde{T}^T) + I \circ G$ invertible. Entonces la matriz G^{-1} puede darse por

$$G^{-1} = (H \circ G)^{-1} [I + (H \circ \tilde{T}) \phi^{-1} (I \circ \tilde{T}^T) (H \circ G)^{-1}]. \quad (15)$$

donde la matriz ϕ esta definida por la formula (13).

Demostración. Si existe G^{-1} , entonces los lemas 6 y 7 y sus corolarios dan que la matriz ϕ es non-singular tambien. Para probar la fórmula (15) usaremos los resultados formulados en el Lema 5, despues de haber reescrito la matriz G como (14). Esto completa la demostración del lema. ■

El planteamiento demostrado arriba es muy importante para cálculos computacionales prácticos, relacionados con la invertibilidad de matrices del tipo de las dadas en el Lema 7.

Ahora consideremos una función de distribución $F(x)$ de tipo (1), sin restricciones $f_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m$. Denotemos esta función de distribución como QPH (quasi-PH). Al par (\tilde{T}, G) en este caso lo llamaremos como QPH-representación. Más aún llamaremos una QPH-representación (\tilde{T}, G) irreducible si la propiedad (2) se cumple.

Lema 9. Sea (\tilde{T}, G) QPH-representación irreducible de la QPH-distribución $F(x)$, $\tilde{T}^T \tilde{T} = I$, $\varphi(s)$ es la TLS de la función de distribución $F(x)$ y la matriz cuadrada H subestable con eigenvalores (γ_j) . Entonces la matriz

$$G = H \circ (I - \tilde{T}^T) + I \circ G$$

es invertible si y solo si, $\varphi(-\gamma_j) \neq 0$ para todo γ_j .

Demostración. Hemos obtenido los resultados requeridos en una manera simple siguiendo de la demostración de los lemas 6 y 7 y sus corolarios, y tomando en consideración que en la demostración de ellos la condición $f_j \geq 0$ no es usada en
Página 13

todos.

Un número de otras propiedades de PH-distribuciones, tan bien como construcción de procesos aleatorios basados en lo último pueden encontrarse para el lector interesado en [4].

REFERENCIAS

1. Erlang. A. K. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges // The Post Office Electrical Engineers Journal. - 1917-18.- V.10.- P.189-197.
2. Cox. D. R. A use of complex probabilities in the theory stochastic processes // Proc. Camb. Phill -1955 .-V.51.-P.313-319.
3. Morse P. M. Queues, inventories and maintenance .-N.Y.:John Wiley and Sons, 1958
4. Neuts M. F. Matrix-geometric solutions in stochastics models.- Baltimore and London: The Johns Hopkins Univ. Press, 1981.
5. Basharin G. P., Bocharov P. P., Kogan Ya. A. Análisis de colas en las redes de computo. Teoría y métodos de cálculo.- Moscú: Nauka, 1989.
5. Bocharov P. P., Pavlova O. I. Matricial-Geométrica distribución de la cola bajo la disciplina LCFS con interrupciones y con distribuciones de tipo de fases // Automática y telemática, 1991.-Nº 9.- S.112-122.
6. Berman A. Plemmons P. Nonnegative matrices in the mathematical sciences.- N.Y.:Acad. Press., 1979.
7. Bellman R. Introduction to the theory of matrix.- 2nd ed. New York .- McGraw-Hill .-1970.
8. Bocharov P. P., Naumov V. A. Sobre sistemas de servicio de capacidad limitada//Problemi peredechi informatzii -1917 .- T. XIII , vip. 4.-S.96-104

SOLUCION MATRICIAL-GEOMETRICA DE UN SISTEMA DE SERVICIO CONDISTRIBUCION DE FASES E INTERRUPCIONES DE ARRIBOS Y DE SERVICIOS

Pavel P. Bocharov

(Universidad Rusa de la Amistad de los Pueblos, Moscú)

Sergio M. Nava Muñoz

(Universidad Autónoma de Tlaxcala)

RESUMEN

En este trabajo se consideró un sistema de servicio con un servidor, adelante una cola finita y que se describe por la distribuciones de tipo de fases. Se investigó la disciplina de servicio que supone interrupciones del servicio, al entrar una demanda en el sistema, o de la generación de una demanda, al salir del sistema una demanda, repitiendo después el servicio o la generación de nuevo. El principal resultado del análisis que fue realizado para el sistema en consideración consiste en que la distribución estacionaria del tamaño de la cola es geométrica, aunque el parámetro de la distribución depende del tipo concreto de PH-distribuciones que describen el flujo y el servicio. Para algunos casos particulares fue obtenido además de la forma matricial así también la forma escalar del parámetro de la distribución geométrica. Ejemplos numéricos fueron también considerados.

Página 17

INTRODUCCION

Uno de los primeros sistemas de servicio investigados fue el sistema con un aparato de servicio de capacidad ilimitada con flujo de entrada de Poisson y tiempo de servicio exponencial, que se codifica como $M|M|1$. Para este sistema, basándose en procesos de nacimiento y muerte, diferentes autores obtuvieron que la distribución estacionaria de la cola para cualquiera de las disciplinas de servicio FCFS (First Come First Served), LCFS (Last Come First Served) y RANDOM, se puede representar en forma geométrica (ver por ejemplo [1]). Este mismo resultado tiene lugar, en el caso de una cola finita, para el sistema de servicio $M|M|1|r$ (ver, por ejemplo, [2]). Tiempo después se obtuvo una presentación geométrica de la distribución estacionaria de la cola para el sistema de servicio $M|G|1|r$ con una distribución arbitraria del tiempo de servicio, tanto para el caso de una cola infinita como para el de una cola finita, para la disciplina de servicio LCFS PR (Last Come First Served Preemptive Resume). Esta disciplina presupone que una demanda nueva, al entrar, interrumpe el servicio de la demanda en el aparato y ocupa su lugar. La demanda interrumpida espera en el primer lugar de la cola y después continua su servicio desde el punto donde fué interrumpido. En [3] se demuestra también que la solución obtenida para la distribución de la cola, es invariante respecto a la función de distribución del tiempo de servicio. Para la disciplina de servicio LCFS PRR (Last Come First Served

Página 18

Preemptive Resume Repetition) que a diferencia de la disciplina LCFS PR supone que la demanda interrumpida se sirve de nuevo para el sistema de servicio $M|PH|1|r$ con función de distribución del tiempo de servicio de tipo de fases (PH-distribución, introducida en [4] y estudiada también en [2]; ver capítulo 1) en [5] se obtuvo también una forma geométrica para la distribución estacionaria de la cola, pero, en este caso, dependiente de los parámetros de la PH-distribución. En [5] también se investigó el sistema de servicio $PH|PH|1|r$ con disciplina de servicio LCFS PRR, sin embargo, en este caso la solución para la distribución estacionaria de la cola no es geométrica.

En el presente trabajo se investiga el sistema de servicio $PH|PH|1|r$ con una disciplina de servicio tal que, además de las suposiciones de la disciplina de servicio LCFS PRR, presupone que una demanda servida, al salir del sistema interrumpe la generación de la demanda en la entrada y que la generación de esta demanda empieza de nuevo.

En § 1 se da la descripción del sistema de servicio en consideración. En §2 se deduce el sistema de ecuaciones de equilibrio. En §2 y §3 se presenta el análisis de este sistema de ecuaciones y se obtiene una solución matricial-geométrica para la distribución estacionaria de la cola. En §4 y §5 se consideran casos particulares de las PH-distribuciones que caracterizan el sistema de servicio y se presentan ejemplos numéricos.

Un breve extracto de este trabajo fue publicado en [6].

§ 1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE SERVICIO

Consideremos un sistema de servicio con un servidor que tiene un acumulador de capacidad r finita, $0 < r$. Se supone que el flujo de demandas es recurrente con la función de distribución $A(t)$ de tipo de fases,

$$A(t) = 1 - \alpha^T e^{At} \mathbf{1}, \quad t \geq 0, \quad \alpha^T \mathbf{1} = 1,$$

que cuenta con una PH-representación (α^T, A) de orden l y que es irreducible [2,4]. Los tiempos de servicio son independientes en conjunto y tienen una función de distribución común $B(t)$ que es también de tipo de fases,

$$B(t) = 1 - \beta^T e^{Mt} \mathbf{1}, \quad t \geq 0, \quad \beta^T \mathbf{1} = 1,$$

que admite una PH-representación (β^T, M) irreducible de orden m .

La disciplina de servicio supone que la demanda que llega al sistema, si éste no está vacío ni completamente lleno, interrumpe el servicio de la demanda que se está sirviendo y empieza a atenderse, colocando la otra demanda en la primera posición en la cola. La demanda interrumpida repite su servicio desde el inicio y su tiempo de servicio se distribuye según la función de distribución $B(t)$. En el caso cuando una demanda concluye su servicio saliendo del sistema ella interrumpe el recorrido de la generación de la siguiente demanda y esta demanda comienza su generación de nuevo con la función de distribución $A(t)$. Una demanda que llega al sistema cuando el acumulador está lleno, es decir todos los lugares del acumulador están ocupados se pierde y no regresa al sistema, además no afecta en nada a la demanda que se está sirviendo ni a las que están esperando.

El comportamiento del sistema considerado se puede

describir por un proceso de Markov homogéneo $X(t)$, $t \geq 0$, con el conjunto de estados

$$X = \bigcup_{k=0}^R X_k,$$

donde

$$X_0 = \{(i, 0) \mid i=1, 2, \dots, l\},$$

$$X_k = \{(i, k, j) \mid i=1, 2, \dots, l, j=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, R\}.$$

con $R \hat{=} r + 1$ que denota la capacidad del sistema.

Aquí para un tiempo arbitrario t el estado $(i, 0)$ indica que el sistema está vacío y la demanda que se está generando pasa la fase i , y el estado (i, k, j) significa que en el sistema están k demandas, la demanda que se genera está en la fase i y la demanda que se sirve está en la fase j .

Bajo estas suposiciones todos los estados del proceso $X(t)$ son comunicativos. Por lo tanto los límites de las probabilidades

$$P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = x\}, \quad x \in X,$$

existen, son estrictamente positivos e independientes del estado inicial y coinciden con las probabilidades estacionarias.

§ 2. SISTEMA DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Introducamos ahora los vectores

$$\vec{P}_0^T = (P_{10}, P_{20}, \dots, P_{l0})$$

$$\vec{P}_k^T = (P_{1k1}, P_{1k2}, \dots, P_{1km}, P_{2k1}, P_{2k2}, \dots, P_{2km}, \dots, P_{lk1}, \dots, P_{lkm}).$$

Las probabilidades estacionarias $\vec{P}_k, k=0, \dots, R$ forman la solución única del siguiente sistema ecuaciones de equilibrio (SEE):

$$\vec{0}^T = \vec{P}_0^T \Lambda + \vec{P}_1^T (\vec{I} \vec{Z} \circ \vec{\mu}), \quad (1)$$

$$\vec{0}^T = \vec{P}_0^T (\vec{\lambda} \vec{Z}^T \circ \vec{\beta}^T) + \vec{P}_1^T (\Lambda \circ M) + \vec{P}_2^T (\vec{I} \vec{Z}^T \circ \vec{\mu} \vec{\beta}^T), \quad (2)$$

$$\vec{0}^T = \vec{P}_{k-1}^T (\vec{\lambda} \vec{Z}^T \circ \vec{I} \vec{\beta}^T) + \vec{P}_k^T (\Lambda \circ M) + \vec{P}_{k+1}^T (\vec{I} \vec{Z}^T \circ \vec{\mu} \vec{\beta}^T), \quad (3)$$

$k=2, \dots, R,$

$$\vec{0}^T = \vec{P}_R^T (\vec{\lambda} \vec{Z}^T \circ \vec{I} \vec{\beta}^T) + \vec{P}_R^T (\Lambda \circ M + \vec{\lambda} \vec{Z}^T \circ I) \quad (4)$$

Junto con la ecuación de normalización

$$\sum_{k=0}^R \vec{P}_k^T \vec{I} = 1. \quad (5)$$

Aquí se utilizan las notaciones $\vec{\lambda} = -\Lambda \vec{I}$, $\vec{\mu} = -M \vec{I}$.

$\Lambda \circ B$ es el producto Kronecker de las matrices Λ y B y $\Lambda \circ B = \Lambda \otimes I \circ B$ [7].

A continuación se ilustra la obtención de las ecuaciones de equilibrio. Primero escribiremos la matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ en términos de la matriz diagonal A_{dg} .

$$A_{dg} = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

y la matriz A con todos los elementos de la diagonal principal sustituidos por ceros denotado por A_{dg}^0 .

La figura 2.1 describe el esquema de transición de $X(t)$ durante un intervalo de tiempo Δt , para los subconjuntos X_k los cuales contienen los estados con k demandas en el sistema.

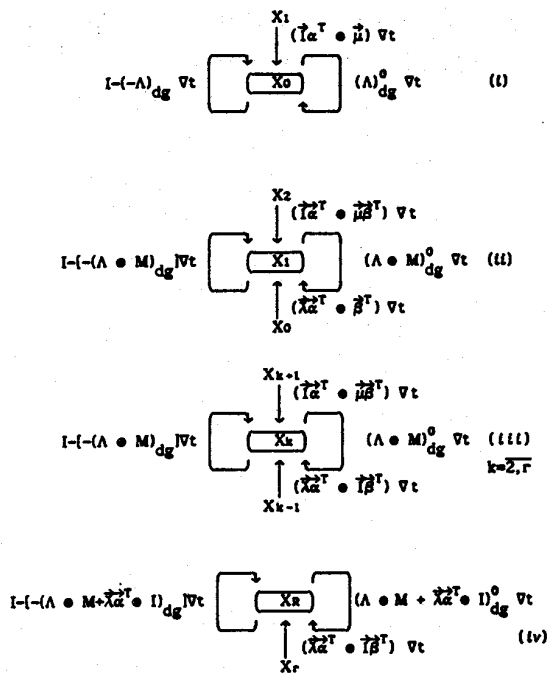


Fig. 2.1

Primero explicaremos la obtención de la ecuación (3) con $k=2,3,\dots,r$ fijos. Es posible pasar al subconjunto X_k durante un intervalo de tiempo Δt de tres formas. La primera es pasar desde el subconjunto X_{k-1} a condición de la completación de una nueva generación de demanda, la cual está representada por la intensidad $\vec{\lambda}$, tomando en cuenta que la generación de una nueva demanda comienza en seguida y elige la fase inicial de su generación, la cual está definida por el vector probabilístico $\vec{\alpha}^T$. Como la disciplina de servicio incluye

Página 23

interrupciones de servicio, entonces la demanda que llega empieza a servirse y entonces selecciona la fase en la que iniciara su servicio, éste se representa por el vector de probabilidades $\vec{\beta}^T$. La segunda forma de pasar al subconjunto X_k es partiendo del subconjunto X_{k-1} por medio de la terminación del servicio de la demanda con una intensidad definida por el vector $\vec{\mu}$, después la demanda que se encuentra en la primera posición en el acumulador pasa al aparato de servicio y en este caso el vector $\vec{\beta}^T$ define la selección de la fase inicial de su servicio. Como se considera en la disciplina de servicio que también existen interrupciones en la generación, la demanda que sale provoca que la demanda que se está generando inicie nuevamente su generación eligiendo la fase inicial según el vector $\vec{\alpha}^T$. Y finalmente existe la posibilidad de que no se abandone el subconjunto X_k durante el intervalo de tiempo Δt . Esto puede ser de dos formas. En el primer caso no ocurren cambios de la fase, sea en la generación de una demanda lo mismo que en el servicio; esto se representa por intensidades iguales a los elementos de la diagonal principal de la matriz $\Lambda \bullet M$ y tomándolos con signo opuesto, es decir por la matriz $(-\Lambda \bullet M)_{dg}$. En el otro caso pueden ocurrir cambios en los procesos de generación y servicio. Esta situación se representa por intensidades iguales a los elementos de la matriz $\Lambda \bullet M$ que no están localizados en la diagonal principal, es decir por la matriz $(\Lambda \bullet M)_{dg}^0$.

De la misma manera se explica la obtención de las ecuaciones (1), (2) y (4), teniendo en cuenta las condiciones de frontera.

§ 3. ANALISIS DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Multiplicando a ambos lados de la igualdad en las ecuaciones (2.2)-(2.4) por la matriz $1e\hat{I}$ por la derecha, se obtiene

$$\hat{\sigma}^T = \hat{P}_0^T (\hat{\lambda} \hat{\alpha}^T) + \hat{P}_1^T (\Lambda e\hat{I} - 1e\hat{\mu}) + \hat{P}_2^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T e\hat{\mu}), \quad (1)$$

$$\hat{\sigma}^T = \hat{P}_{k-1}^T (\hat{\lambda} \hat{\alpha}^T e\hat{I}) + \hat{P}_k^T (\Lambda e\hat{I} - 1e\hat{\mu}) + \hat{P}_{k+1}^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T e\hat{\mu}), \quad (2)$$

$k=2, \dots, r.$

$$\hat{\sigma}^T = \hat{P}_r^T (\hat{\lambda} \hat{\alpha}^T e\hat{I}) + \hat{P}_r^T ((\Lambda + \hat{\lambda} \hat{\alpha}^T) e\hat{I} - 1e\hat{\mu}). \quad (3)$$

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por \hat{I} por la derecha en (2.1) y (1)-(3), se tiene

$$0 = \hat{P}_0^T \hat{\lambda} + \hat{P}_1^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T \hat{\mu}), \quad (4)$$

$$0 = \hat{P}_0^T (\hat{\lambda}) + \hat{P}_1^T (-\hat{\lambda} e\hat{I} - \hat{I} e\hat{\mu}) + \hat{P}_2^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T \hat{\mu}), \quad (5)$$

$$0 = \hat{P}_{k-1}^T (\hat{\lambda} \hat{\alpha}^T \hat{I}) + \hat{P}_k^T (-\hat{\lambda} e\hat{I} - \hat{I} e\hat{\mu}) + \hat{P}_{k+1}^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T \hat{\mu}), \quad (6)$$

$k=2, \dots, r.$

$$0 = \hat{P}_r^T (\hat{\lambda} \hat{\alpha}^T \hat{I}) - \hat{P}_r^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T \hat{\mu}). \quad (7)$$

Multiplicando (7) por (-1) y sumando a (4)-(6), se tiene

$$\hat{P}_0^T \hat{\lambda} = \hat{P}_1^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T \hat{\mu}),$$

$$\hat{P}_1^T (\hat{\lambda} e\hat{I}) = \hat{P}_2^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T \hat{\mu}),$$

$$\hat{P}_k^T (\hat{\lambda} e\hat{I}) = \hat{P}_{k+1}^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T \hat{\mu}), \quad k=2, \dots, r.$$

De donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones de balance local:

$$\hat{P}_0^T \hat{\lambda} = \hat{P}_1^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T \hat{\mu}), \quad (8)$$

$$\hat{P}_k^T (\hat{\lambda} e\hat{I}) = \hat{P}_{k+1}^T (\hat{I} \hat{\alpha}^T \hat{\mu}), \quad k=1, \dots, r. \quad (9)$$

Por otra parte de (2.2)-(2.4) utilizando las propiedades
Página 25

del producto tensorial [7], tenemos

$$\hat{\sigma}^T = \hat{P}_0^T \hat{\lambda} (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T) + \hat{P}_1^T (\Lambda \hat{\alpha} \hat{\beta}^T) + \hat{P}_2^T (\hat{I} \hat{\alpha} \hat{\beta}^T) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T), \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}^T = \hat{P}_{k-1}^T (\hat{\lambda} e\hat{I}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T) + \hat{P}_k^T (\Lambda \hat{\alpha} \hat{\beta}^T) + \hat{P}_{k+1}^T (\hat{I} e\hat{\mu}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T), \quad (11)$$

$k=2, \dots, r.$

$$\hat{\sigma}^T = \hat{P}_r^T (\hat{\lambda} e\hat{I}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T) + \hat{P}_r^T (\Lambda \hat{\alpha} \hat{\beta}^T + \hat{\lambda} \hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T \hat{I}). \quad (12)$$

Ahora sustituyendo (9) con $k=1$ en (10), se tiene que

$$\hat{\sigma}^T = \hat{P}_0^T \hat{\lambda} (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T) + \hat{P}_1^T (\Lambda \hat{\alpha} \hat{\beta}^T) + \hat{P}_1^T (\hat{\lambda} \hat{\alpha} \hat{\beta}^T \hat{I}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T).$$

Entonces,

$$\hat{P}_1^T (\Lambda \hat{\alpha} \hat{\beta}^T + (\hat{\lambda} \hat{\alpha} \hat{\beta}^T \hat{I}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T)) = -\hat{P}_0^T \hat{\lambda} (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T). \quad (13)$$

De forma similar sustituyendo (9) con $k=2, \dots, r$ en (11),

tenemos que

$$\hat{\sigma}^T = \hat{P}_{k-1}^T (\hat{\lambda} e\hat{I}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T) + \hat{P}_k^T (\Lambda \hat{\alpha} \hat{\beta}^T) + \hat{P}_k^T (\hat{\lambda} e\hat{I}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T), \quad k=2, \dots, r.$$

Entonces,

$$\hat{P}_k^T (\Lambda \hat{\alpha} \hat{\beta}^T + (\hat{\lambda} \hat{\alpha} \hat{\beta}^T \hat{I}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T)) = -\hat{P}_{k-1}^T (\hat{\lambda} e\hat{I}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T), \quad k=2, \dots, r. \quad (14)$$

Por último de (2.4) tenemos

$$\hat{P}_r^T (\Lambda \hat{\alpha} \hat{\beta}^T + \hat{\lambda} \hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T \hat{I}) = -\hat{P}_r^T (\hat{\lambda} e\hat{I}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T),$$

y además

$$(\Lambda \hat{\alpha} \hat{\beta}^T + \hat{\lambda} \hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T \hat{I}) = (\Lambda + \hat{\lambda} \hat{\alpha}^T) \hat{\beta}^T \hat{I} + \hat{I} \hat{\alpha} \hat{\beta}^T \hat{I}.$$

Entonces,

$$\hat{P}_r^T ((\Lambda + \hat{\lambda} \hat{\alpha}^T) \hat{\beta}^T \hat{I} + \hat{I} \hat{\alpha} \hat{\beta}^T \hat{I}) = -\hat{P}_r^T (\hat{\lambda} e\hat{I}) (\hat{\alpha}^T \hat{\beta}^T). \quad (15)$$

§ 4. SOLUCION MATRICIAL-GEOMETRICA PARA LA DISTRIBUCION ESTACIONARIA DE LA COLA DE ESPERA

En la sección anterior analizando las propiedades de la distribución estacionaria $P_x, x \in X$, hemos obtenido las ecuaciones (3.13)-(3.15), las cuales satisfacen esta distribución estacionaria. Y ahora vamos a obtener la solución del SEE basándonos en las ecuaciones (3.13)-(3.15). Con este propósito formularemos algunos resultados que necesitaremos en los sucesivos.

Lema 1 [8]. Si la matriz N es de la forma

$$N = Q + CB, \quad (1)$$

donde Q es una matriz cuadrada non-singular de orden n , C y B son matrices rectangulares, cuyas dimensiones son respectivamente iguales a $n \times m$ y $m \times n$ y la matriz ϕ , definida como

$$\phi = I + BQ^{-1}C, \quad (2)$$

es non-singular, entonces la matriz N^{-1} se representa de la forma

$$N^{-1} = Q^{-1}(I - C\phi^{-1}BQ^{-1}). \quad (3)$$

Lema 2 Sea M una matriz de la forma

$$M = A \bullet M + (\vec{\lambda} \bullet \vec{1}) (\vec{\alpha}^T \bullet \vec{\beta}^T), \quad (4)$$

entonces M es invertible y es de la forma

$$M^{-1} = (A \bullet M)^{-1} (I - (\vec{\lambda} \bullet \vec{1}) \phi^{-1} (\vec{\alpha}^T \bullet \vec{\beta}^T) (A \bullet M)^{-1}) \quad (5)$$

con $\phi = I + (\vec{\alpha}^T \bullet \vec{\beta}^T) (A \bullet M)^{-1} (\vec{\lambda} \bullet \vec{1})$.

Demostración. Denotemos

$$Q = A \bullet M, \quad C = \vec{\lambda} \bullet \vec{1}, \quad B = \vec{\alpha}^T \bullet \vec{\beta}^T.$$

Entonces M se puede representar como
Página 27

$$M = Q + CB.$$

Según el lema 1 la matriz M es invertible si Q^{-1} y ϕ^{-1} existen. La matriz Q es non-singular dado que mantiene las características estocásticas de A y M , por lo que podemos asegurar la existencia de Q^{-1} . Por otra parte ϕ es igual a

$$\phi = I + (\vec{\alpha}^T \bullet \vec{\beta}^T) (A \bullet M)^{-1} (\vec{\lambda} \bullet \vec{1}),$$

de donde podemos ver que ϕ es un escalar. Entonces para que M sea invertible es necesario que $\phi \neq 0$. Por las propiedades de PH-distribuciones [2], Capitulo 5, Apendice 2,

$$\phi = 1 - (\vec{\alpha}^T \bullet \vec{\beta}^T) \int_0^{\infty} (e^{At} \bullet e^{Mt}) dt (\vec{\lambda} \bullet \vec{1}). \quad (6)$$

Pero

$$(\vec{\lambda} \bullet \vec{1}) = (-A \bullet I). \quad (7)$$

Ahora sustituyendo (7) en (6), obtenemos ϕ de la forma

$$\begin{aligned} \phi &= 1 + (\vec{\alpha}^T \bullet \vec{\beta}^T) \int_0^{\infty} (e^{At} \bullet e^{Mt}) dt (A \vec{1} \bullet \vec{1}) = \\ &= 1 + \int_0^{\infty} (\vec{\alpha}^T \bullet A^t \bullet A \vec{1} \bullet \vec{\beta}^T \bullet e^{Mt} \bullet \vec{1}) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Y como la diferencial $dA(t)$ es igual a

$$dA(t) = -\vec{\alpha}^T \bullet A^t \bullet A \vec{1} dt, \quad (9)$$

por lo tanto, sustituyendo (9) en (8), tenemos que

$$\phi = 1 - \int_0^{\infty} (\vec{\beta}^T \bullet e^{Mt} \bullet \vec{1}) dA(t). \quad (10)$$

Pero sabemos que

$$B(t) = 1 - \vec{\beta}^T \bullet e^{Mt} \bullet \vec{1},$$

de donde se deduce que

$$\vec{\beta}^T \bullet e^{Mt} \bullet \vec{1} = 1 - B(t). \quad (11)$$

Sustituyendo (11) en (10), obtenemos

$$\begin{aligned} \phi &= 1 - \int_0^{\infty} (1 - B(t)) dA(t) = \\ &= 1 - \int_0^{\infty} dA(t) + \int_0^{\infty} B(t) dA(t) = \\ &= 1 - 1 + \int_0^{\infty} B(t) dA(t) = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} B(t) dA(t) > 0. \quad (12)$$

Como $A(t)$ y $B(t)$ son funciones de distribución, la integral es estrictamente positiva, por lo que ϕ^{-1} existe. Por lo tanto M^{-1} existe también y es de la forma (5), con lo que concluimos la demostración. \square

Lema 3. La matriz M definida como

$$M = (\Lambda + \tilde{\lambda} \tilde{\alpha}^T) \circ I + I \circ M,$$

tiene inversa.

Demostración. La matriz $\Lambda + \tilde{\lambda} \tilde{\alpha}^T$ tiene propiedades de una matriz infinitesimal conservativa y la matriz M viene de una PH-representación $(\tilde{\beta}^T, M)$ que es irreducible. Entonces la matriz $(\Lambda + \tilde{\lambda} \tilde{\alpha}^T) \circ I + I \circ M$ mantiene las propiedades de la matriz M , por lo que M^{-1} existe. \square

Denotemos a

$$c = -(\tilde{\alpha}^T \circ \tilde{\beta}^T)(\Lambda \circ M)^{-1}(\tilde{\lambda} \circ \tilde{\gamma}),$$

$$\rho = \frac{c}{1-c},$$

$$\tilde{W}^T = -(\tilde{\alpha}^T \circ \tilde{\beta}^T)(\Lambda \circ M)^{-1}(\lambda/c), \quad (13)$$

$$\tilde{W}_R^T = -(\tilde{\alpha}^T \circ \tilde{\beta}^T) M^{-1} \lambda.$$

Ahora tenemos lo necesario para demostrar el siguiente

Teorema 1. El sistema de ecuaciones de equilibrio dada por las ecuaciones (2.1) - (2.5) tiene una solución única, que está dada por las siguientes expresiones:

$$\tilde{\beta}_k^T = \begin{cases} P_0 \tilde{W}^T \rho^k, & k=1, \dots, r, \\ P_0 \tilde{W}_R^T \rho^k, & k=R. \end{cases} \quad (14)$$

Demostración. Utilizando las notaciones introducidas anteriormente, las ecuaciones (3.13) - (3.15) se escriben en

la forma siguiente:

$$\tilde{\beta}_1^T M = -\tilde{\beta}_0^T \tilde{\lambda} (\tilde{\alpha}^T \circ \tilde{\beta}^T), \quad (15)$$

$$\tilde{\beta}_k^T M = -\tilde{\beta}_{k-1}^T (\tilde{\lambda} \circ \tilde{\gamma}) (\tilde{\alpha}^T \circ \tilde{\beta}^T), \quad k=2, \dots, r, \quad (16)$$

$$\tilde{\beta}_R^T M = -\tilde{\beta}_r^T (\tilde{\lambda} \circ \tilde{\gamma}) (\tilde{\alpha}^T \circ \tilde{\beta}^T). \quad (17)$$

Por otra parte de (2.1) obtenemos que

$$\tilde{\beta}_0^T \Lambda = -\tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \tilde{\alpha} \circ \tilde{\mu}).$$

Además podemos garantizar la existencia de Λ^{-1} , porque Λ proviene de una PH-representación $(\tilde{\alpha}^T, \Lambda)$. Por lo que se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0^T &= -\tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \tilde{\alpha} \circ \tilde{\mu}) \Lambda^{-1} \\ &= -\tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \tilde{\alpha} \circ \tilde{\mu}) (\Lambda^{-1} \circ I) \\ &= -\tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \tilde{\alpha} \Lambda^{-1} \circ \tilde{\mu}). \end{aligned}$$

Definamos $P_0 = \tilde{\beta}_0^T \tilde{\gamma}$. De la última igualdad se obtiene que

$$\begin{aligned} P_0 &= -\tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \tilde{\alpha} \Lambda^{-1} \circ \tilde{\mu}) (\tilde{\gamma} \circ I) \\ &= -\tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \tilde{\alpha} \Lambda^{-1} \tilde{\gamma} \circ \tilde{\mu}). \end{aligned}$$

Sabemos que $-\alpha^T \Lambda^{-1} \tilde{\gamma} = \frac{1}{\lambda}$, que es el primer momento de la función de distribución $A(t)$. Por lo tanto,

$$P_0 = \frac{1}{\lambda} \tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \circ \tilde{\mu}),$$

y entonces,

$$P_0 \lambda = \tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \circ \tilde{\mu}). \quad (18)$$

Nuevamente de (2.1) se tiene que

$$-\tilde{\beta}_0^T \Lambda = \tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \tilde{\alpha} \circ \tilde{\mu})$$

y multiplicando a ambos lados de esta ecuación por $\tilde{\gamma}$ se

obtiene que

$$-\tilde{\beta}_0^T \Lambda \tilde{\gamma} = \tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \tilde{\alpha} \circ \tilde{\mu}) (\tilde{\gamma} \circ I) = \tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \circ \tilde{\mu}).$$

Pero por (18) tenemos la igualdad

$$\tilde{\beta}_0^T \tilde{\lambda} = \tilde{\beta}_1^T (\tilde{\gamma} \circ \tilde{\mu}) = P_0 \lambda,$$

lo que nos da que

$$\tilde{\beta}_0^T \tilde{\lambda} = P_0 \lambda. \quad (19)$$

Multiplicando ambas partes de (15) por la matriz M^{-1} la cual según el Lema 2 existe, obtenemos

$$\beta_1^T = -\beta_0^T \lambda (\alpha^T \circ \beta^T) M^{-1}.$$

Utilizando una vez más el Lema 2 y sustituyendo en la última igualdad la expresión para M^{-1} , tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_1^T &= -\beta_0^T \lambda (\alpha^T \circ \beta^T) \left\{ (\Lambda \circ M)^{-1} \left[1 - (\lambda \circ \tilde{1}) \left[1 + (\alpha^T \circ \beta^T) (\Lambda \circ M)^{-1} \right] \right] \right\} \\ &= -\beta_0^T \lambda \left[(\alpha^T \circ \beta^T) (\Lambda \circ M)^{-1} - \frac{1}{1-c} (\alpha^T \circ \beta^T) (\Lambda \circ M)^{-1} (\lambda \circ \tilde{1}) (\alpha^T \circ \beta^T) (\Lambda \circ M)^{-1} \right] \\ &= -\frac{1}{1-c} \beta_0^T \lambda \left[(1-c)(\alpha^T \circ \beta^T) (\Lambda \circ M)^{-1} - c(\alpha^T \circ \beta^T) (\Lambda \circ M)^{-1} \right] \\ &= -\frac{1}{1-c} \beta_0^T \lambda \left[(\alpha^T \circ \beta^T) (\Lambda \circ M)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo (19) aquí, y cambiando la notación, obtenemos (13) para $k=1$.

Ahora de (16) para $k=2$ tenemos que

$$\beta_2^T = -\beta_1^T (\lambda \circ \tilde{1}) (\alpha^T \circ \beta^T) M^{-1}.$$

Sustituyendo aquí (13) con $k=1$, obtenemos

$$\beta_2^T = -P_0 \rho \beta^T (\lambda \circ \tilde{1}) (\alpha^T \circ \beta^T) M^{-1}.$$

Por otra parte podemos verificar que

$$(\alpha^T \circ \beta^T) M^{-1} = -\frac{\rho}{\lambda} \beta^T, \quad (20)$$

y además que

$$\lambda = \beta^T (\lambda \circ \tilde{1}). \quad (21)$$

Esta igualdad junto con (20) y (21) dan (13) con $k=2$.

La comprobación de (14) para cualquier $k, k=1, \dots, R$, se demuestra fácilmente por inducción. La expresión (14) para β_k^T la obtenemos de la misma forma de (17) y (14) con $k=R$. Así concluimos la demostración del teorema.

Denotemos a

$$\rho_0 = \beta^T (\tilde{1} \circ \tilde{1}), \quad \rho_R = \beta^T (\tilde{1} \circ \tilde{1}). \quad (22)$$

Sea $P_k = \beta_k^T \tilde{1}$, $k=1, \dots, R$, donde P_k es la probabilidad de que en el sistema están k demandas. Del teorema 1 se sigue el siguiente

Corolario 1. La distribución estacionaria $P_k, k=0, \dots, R$

se presenta en la forma geométrica:

$$P_k = \begin{cases} P_0 \rho_0 \rho^k & k=1, \dots, R \\ P_0 \rho_R \rho^R & k=R. \end{cases} \quad (23)$$

donde P_0 se determina de la ecuación de normalización

$$\sum_{k=0}^R P_k = 1.$$

Demostración. Las fórmulas (23) y (24) las obtenemos de una manera evidente multiplicando a ambas partes de (14) por $\tilde{1} \circ \tilde{1}$ y sustituyendo (22).

§ 5. CASOS PARTICULARES

A continuación analizaremos la forma explícita de la constante c para algunos casos particulares de PH-distribuciones que describen el sistema en consideración.

Como sabemos de (4.13)

$$c = -(\alpha^T \circ \beta^T)(A \circ M)^{-1}(\alpha \circ \Gamma).$$

Utilizando la demostración del lema 2 de §4 llegamos a que

$$c = \int_0^\infty (1 - B(t)) dA(t),$$

y más aún

$$c = 1 - \int_0^\infty B(t) A'(t) dt. \quad (1)$$

Primero, vamos a analizar el caso cuando la función de distribución $A(t)$ es de Erlang y la función de distribución $B(t)$ es hipereexponencial, es decir,

$$A'(t) = \frac{(k\lambda)^k t^{k-1} e^{-k\lambda t}}{(k-1)!}, \quad (2)$$

$$B(t) = \sum_{j=1}^n b_j (1 - e^{-\mu_j t}).$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\begin{aligned} c &= 1 - \int_0^\infty \left[\sum_{j=1}^n b_j (1 - e^{-\mu_j t}) \right] \left[\frac{(k\lambda)^k t^{k-1} e^{-k\lambda t}}{(k-1)!} \right] dt \\ &= 1 - \sum_{j=1}^n b_j \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!} \left[\int_0^\infty t^{k-1} e^{-k\lambda t} dt - \int_0^\infty t^{k-1} e^{-(\mu_j+k\lambda)t} dt \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Por otra parte podemos demostrar que

$$\int_0^\infty t^{k-1} e^{-ht} dt = \frac{(k-1)!}{h^k}.$$

Utilizando (4) en (3) dos veces con $H = k\lambda$ y $H = (\mu_j+k\lambda)$,

obtenemos

$$\begin{aligned} c &= 1 - \sum_{j=1}^n b_j \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!} \left[\frac{(k-1)!}{(k\lambda)^k} - \frac{(k-1)!}{(\mu_j+k\lambda)^k} \right] \\ &= 1 - \sum_{j=1}^n b_j \left[1 - \frac{(k\lambda)^k}{(\mu_j+k\lambda)^k} \right]. \end{aligned}$$

Entonces, como resultado final tenemos

$$c = \sum_{j=1}^n b_j \left(\frac{(k\lambda)}{(\mu_j+k\lambda)} \right)^k. \quad (5)$$

Se puede dar otra interpretación de la constante c , en términos de la TLS. Más preciso, sea $\alpha(s)$ la TLS de la función de distribución $A(t)$. Entonces, de (5) se obtiene que

$$c = \sum_{j=1}^n b_j \alpha(\mu_j). \quad (6)$$

Ahora analicemos el caso cuando ambas funciones de distribución son de tipo hipereexponencial,

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{i=1}^m a_i (1 - e^{-\lambda_i t}), \\ B(t) &= \sum_{j=1}^n b_j (1 - e^{-\mu_j t}). \end{aligned} \quad (7)$$

De (1) y (7) obtenemos que

$$\begin{aligned} c &= 1 - \int_0^\infty \left[\sum_{j=1}^n b_j (1 - e^{-\mu_j t}) \right] \left[\sum_{i=1}^m a_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \right] dt \\ &= 1 - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_i b_j \lambda_i \left[\int_0^\infty e^{-\lambda_i t} dt - \int_0^\infty e^{-(\mu_j+\lambda_i)t} dt \right] \\ &= 1 - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_i b_j \lambda_i \left[\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{(\mu_j+\lambda_i)} \right] \\ &= 1 - \sum_{i=1}^m a_i b_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \frac{\lambda_i}{\mu_j+\lambda_i}, \end{aligned}$$

y obtenemos como conclusión que

$$c = \sum_{i=1}^m a_i b_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu_j+\lambda_i} \right).$$

Nuevamente la constante c cuenta con una interpretación en términos de la TLS, es decir,

$$c = \sum_{j=1}^n b_j \alpha(\mu_j),$$

donde $\alpha(\mu_j)$ es la TLS de la función de distribución $A(t)$ evaluada en $s = \mu_j$.

§ 6. EJEMPLOS NUMERICOS

A continuación analizaremos numericamente algunas características del sistema en consideración, comparando los resultados con los obtenidos para el sistema de servicio $M|M|1|R$. Utilizando para ambos sistemas el mismo ρ que es la intensidad de tráfico, definida por

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

con

$$\lambda = (-\vec{\alpha}^T \Lambda^{-1} \vec{1})^{-1}$$

$$\mu = (-\vec{\beta}^T M^{-1} \vec{1})^{-1}$$

Calculamos la probabilidad de que el sistema esté vacío (P_0) y el número promedio de demandas en el sistema (\bar{n}) respecto a la capacidad del sistema (R).

Ejemplo 1. Consideremos el sistema $E|H|1|r$, donde la función de distribución $A(t)$ es de Erlang y $B(t)$ es hiperexponencial, definidas por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}^T = (1 \ 0 \ 0 \ 0), \quad \vec{\beta}^T = (0.3 \ 0.4 \ 0.3)$$

Los resultados numéricos para este caso se presentan en la tabla 1.

Tabla 1

R	ρ		\bar{n}	
	$M M 1 r$	$E H 1 r$	$M M 1 r$	$E H 1 r$
2	0.2144	0.1281	1.6230	1.3600
3	0.1627	0.1141	2.1960	1.5930
4	0.1285	0.1072	2.7850	1.7670
5	0.1043	0.1036	3.3900	1.8930
6	0.0864	0.1015	4.0110	1.9830
7	0.0727	0.1004	4.6470	2.0440
8	0.0618	0.0998	5.2980	2.0860
9	0.0530	0.0994	5.9640	2.1140
10	0.0458	0.0991	6.6450	2.1330
11	0.0399	0.0990	7.3300	2.1450
12	0.0349	0.0989	8.0490	2.1530
13	0.0307	0.0989	8.7720	2.1580
14	0.0270	0.0989	9.5080	2.1610
15	0.0239	0.0989	10.2600	2.1630
16	0.0212	0.0989	11.0200	2.1640
17	0.0189	0.0988	11.7900	2.1650
18	0.0168	0.0988	12.5800	2.1650
19	0.0150	0.0988	13.3700	2.1660
20	0.0134	0.0988	14.1800	2.1660

Ejemplo 2. Consideremos el sistema $PH|PH|1|r$, donde las funciones de distribución $A(t)$ y $B(t)$ son de tipo de fase, definidas por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.16 & 0.08 & 0.04 & 0.02 \\ 0.10 & -0.35 & 0.20 & 0.05 \\ 0.03 & 0.03 & -0.09 & 0.03 \\ 0.16 & 0.00 & 0.08 & -0.56 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -0.18 & 0.08 & 0.08 & 0.04 \\ 0.10 & -0.50 & 0.10 & 0.30 \\ 0.03 & 0.01 & -0.08 & 0.01 \\ 0.05 & 0.05 & 0.10 & -0.45 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}^T = (0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.1), \quad \vec{\beta}^T = (0.2 \ 0.6 \ 0.1 \ 0.1)$$

Los resultados de los cálculos para este sistema se presentan en la tabla 2.

Tabla 2

R	ρ_0		\bar{n}	
	M M	PH PH	M M	PH PH
2	0.2144	0.0267	1.6230	1.9160
3	0.1627	0.0214	2.1960	2.3580
4	0.1285	0.0182	2.7850	2.7780
5	0.1043	0.0160	3.3900	3.1780
6	0.0864	0.0145	4.0110	3.5600
7	0.0726	0.0134	4.6470	3.9240
8	0.0618	0.0125	5.2980	4.2710
9	0.0530	0.0118	5.9640	4.6020
10	0.0458	0.0112	6.6450	4.9150
11	0.0399	0.0107	7.3400	5.2130
12	0.0349	0.0104	8.0490	5.4960
13	0.0307	0.0100	8.7720	5.7630
14	0.0270	0.0098	9.5080	6.0160
15	0.0239	0.0095	10.2600	6.2560
16	0.0212	0.0093	11.0200	6.4810
17	0.0189	0.0092	11.7900	6.6940
18	0.0168	0.0090	12.5800	6.8940
19	0.0150	0.0089	13.3700	7.0820
20	0.0134	0.0088	14.1800	7.2590

Como se puede ver la disciplina de servicio considerada influye fuertemente en las características del sistema. Por ejemplo para $R=20$ y ρ fijo el número promedio de demandas en el sistema tanto para el sistema $E|M|1|19$ como para el sistema $PH|PH|1|19$ es mucho menor que para el caso del sistema $M|M|1|19$. Este efecto se podría esperar, porque la disciplina de servicio equilibra por sí misma el nivel de la cola.

REFERENCIAS

1. Kleinrock L. Queueing systems, Vol I: Theory .- N.Y.: Wiley Interscience, 1975.
2. Basharin G. P., Bocharov P. P., Kogan Ya. A. Análisis de colas en las redes de computo. Teoría y métodos de cálculo.- Moscú: Nauka, 1989.
3. Nagonenko V. A. Sobre características de un sistema de servicio no estándar // Izvestiya AN SSSP. Tehnicheskaya Kibernetica, 1981. N°1 .- S. 187-195.
4. Neuts M. F. Matrix-geometric solutions in stochastic models.- Baltimore and London: The Johns Hopkins Univ. Press, 1981.
5. Bocharov P. P., Pavlova O. I. Matricial-Geométrica distribución de la cola bajo la disciplina LCFS con interrupciones y con distribuciones de tipo de fases // Automática y telemática, 1991.-N° 9.- S.112-122.
6. Bocharov P. P., Nava S., Pavlova D. I. Una cola finita condistribuciones de tipo de fases y con interrupciones del flujo de entrada y del servicio // Trabajo de XXVIII Conferencia de la Facultad de Ciencias de la Universidad Rusa de la Amistad de los Pueblos .- Moscú: Universitet druzbi narodov, 1992 .- S.79.
7. Bellman R. Introduction to the theory of matrix.- 2nd ed. New York .- McGraw-Hill .-1970.
8. Simpson A. Inversion of a class of matrices occring in control system theory by an m- procedure allied to Gaussian elimination // Electron. Lett .- 1970 .- V.6, N°16 .- P. 500-501.