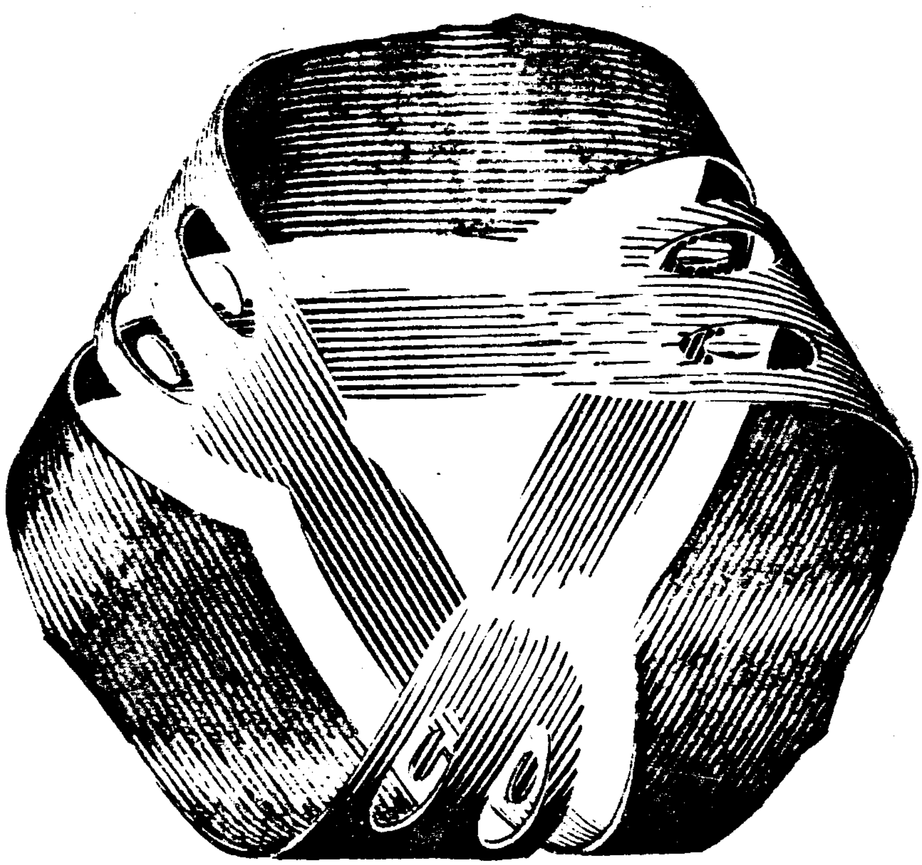
REVISTA DEL SEMINARIO de ENSEÑANZA Y TITULACION

AÑO II NUM. E6



marzo, 1986

SUSCRIPCION, Todas las personas que deseen una suscripción, deberán manifestarlo por escrito, enviando su nombre y dirección a:

- Av. Universidad 3000, Maestria Educación en Matemáticas, Primer Piso de las Oficinas Administrativas de U.A.C.B. del C.C.H.
- Departamento de Matemáticas, Cúbiculos 239 y 240. Facultad de Ciencias, UNAM. Ciudad Universitaria. C.P. 04510.

Dicha suscripción será gratuita y anual, mientras esto sea posible.

Los artículos firmados no representan necesariamente la opinión del Seminario.

Si deseas la impresión de algún material, puedes solicitarlo con cualquier miembro del Seminario o enviandolo a cualquiera de las dos direcciones arriba anotadas, al igual que todo tipo de correspondencia relacionada con el Seminario.

ESTE NUMERO DE LA REVISTA FUE IMPRESO EN LOS TALLERES DE IMPRESION DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. PLANTEL NAUCALPAN. SE TIRARON 600 EJEMPLARES. MARZO DE 1986. ESTADO DE MEXICO.

Números Especiales Publicados

E1. Cuarenta Años de Bourbakí.
Por Maurice Aravnny.
Traducido por Ivonne Villalobos.

E2. Poincare y la Topología
Por P. T. Alexandrov.

E3. A la Memoria de Emmy Noether
Por P. T. Alexandrov.
Traducido por Rodrigo Vázquez.

E4. El Programa de Erlangen
Por Félix Klein
Traducido por el Dr. Flavio Cocho.

E5. La Matemática en los Cursos de la Escuela Media En Francia.
Por Guillermo Gómez Alcaraz.

E6. El Décimo Problema de Hilbert.
Por Martin Davis y Reuben Hersh.

Por aparecer

E7. Acerca de las Perspectivas de las Investigaciones Matemáticas en Cuba.
Por Dr. José Ruiz Shulcloper. I.M.A.C.

PRESENTACION

Este es un artículo que aparecio en la revista Scientific American, escrito por Martín Davis y Reuben Hersh. Se trata de un escrito de divulgación del famoso décimo problema de Hilber planteado en 1900 junto con otros 22 problemas, durante el segundo Congreso Internacional de Matemáticas, así como de su solución encontrada por el matemático ruso de 22 años Yuri Matyasevich en 1970. La traducción que presentamos a ustedes fué originalmente preparada para su publicación en "COMUNICACIONES INTERNAS", del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, pero debido a dificultades en su publicación (como es usual boicot de las autoridades) quedo rezagada durante mucho tiempo. Agradecemos al resonsable de "VINCULOS MATEMATICOS", nuevo nombre de "COMUNICACIONES INTERNAS", el permitirnos los manuscritos.

EL DECIMO PROBLEMA DE HILBERT.

Por

MARTIN DAVIS Y REUBEN HERSH.

"Oímos dentro de nosotros el llamado perpetuo: ahí está el problema. Busca su solución. Puedes encontrarla por razonamiento puro, ya que en matemáticas no hay ignorabimus". Con estas palabras David Hilbert inauguró el segundo Congreso Internacional de Matemáticos en París el 8 de Agosto de 1900, saludando al nuevo siglo al presentar una lista de 23 problemas como un reto para los futuros matemáticos. Algunos de los problemas de Hilbert permanecen todavía sin resolver. Otros han inspirado a generaciones de investigadores matemáticos y han conducido a nuevas teorías matemáticas importantes. El problema de Hilbert que se ha conquistado más recientemente es el 10º, que fué resuelto por el matemático Ruso de 22 años de edad, Yuri Matyasevich, en 1970.

David Hilbert nació en Höwigsberg en 1862 y fué profesor en la Universidad de Göttingen desde 1895 hasta su muerte en 1943. Después de la muerte de Henri Poincaré en 1912, fué unánimemente reconocido como el mayor matemático de su tiempo. Hizo contribuciones fundamentales en muchas áreas, pero tal vez por lo que más se le recuerda es por su desarrollo del método abstracto como una poderosa herramienta en matemáticas.

El 10º problema de Hilbert se describe fácilmente. Tiene que ver con la más básica y más simple actividad matemática: la resolución de ecuaciones. Las ecuaciones a resolver son ecuaciones polinomiales, esto es, ecuaciones tales como $x^2-3xy=5$ las cuales se forman agregando y multiplicando constantes y variables y usando exponentes enteros. Además Hilbert especificó que en las ecuaciones sólo debían aparecer números enteros. No se permitían números irracionales ó imaginarios ni fracciones ni en la ecuación ni en sus soluciones. A problemas de este tipo se les llama ecuaciones Diofantinas en honor a Diofanto de Alejandría, quien escribió un libro sobre esto en el siglo III.

El 10º problema de Hilbert es: Dar un procedimiento mecánico por medio del cual se pudiera saber si, dada una ecuación Diofantina, ésta tiene soluciones. En las palabras de Hilbert: "Dada una ecuación Diofantina con cualquier número de incógnitas y con coeficientes numéricos enteros: idear un proceso por medio del cual se pueda determinar, con un número finito de operaciones si la ecuación es soluble con números enteros". Hilbert no pide un proceso para encontrar las soluciones sino un proceso para determinar si la ecuación tiene soluciones. El proceso debería ser un proceso formal bien definido que pudiera ser programado para una máquina computadora y que fuera aplicable a todos los casos. Tal proceso se conoce como un algoritmo.

Si el problema de Hilbert se enuncia simplemente, la solución de Matyasenich se anuncia todavía más sim-- plemente: No existe tal algoritmo. Dicho de esta manera, la respuesta suena desalentadoramente negativa. Sin embargo, el resultado de Matyasenich constituye un paso importante para la comprensión de las propiedades de -- los números.

El trabajo de Matyasevich amplió una serie de in-- vestigaciones de tres americanos: uno de nosotros (Da-- vis), Julia Robinson e Hilary Putnam. A su vez, el trabajo de ellos se basó en investigaciones anteriores de varios fundadores de la lógica moderna y la teoría de - la computación: Alau Turing, Emil Post, Alonso Church, - Stephen Kleene y el mismo Kurt Gödel quien es famoso -- por su trabajo sobre la consistencia de sistemas axiomáticos (2º problema de Hilbert) y sobre la hipótesis del continuo de Cantor (1er problema de Hilbert).

Comencemos con el 10º problema de Hilbert viendo - algunas ecuaciones Diofantinas. El término "ecuación - Diofantina" es un poco injusto porque no es tanto la naturaleza de la ecuación lo crucial como la naturaleza - de las soluciones admisibles. Por ejemplo, la ecuación $x^2+y^2-2=0$ tiene infinidad de soluciones si no se piensa en ella como una ecuación diofantina. Las solucio-- nes están representadas por la gráfica de la ecuación, que es un círculo en el plano formado por el eje x y el eje y.

El centro del círculo está en el punto de coordenadas $x=0$, $y=0$. Ese punto se llama el origen; se abrevia $(0,0)$. El radio del círculo es $\sqrt{2}$ (ver ilustración). Las coordenadas de cualquier punto del círculo satisfacen la ecuación, y hay un número infinito de tales puntos. Si consideramos el problema como una ecuación Diofantina, solamente hay cuatro soluciones:

(1) $x=1$, $y=1$;

(2) $x=-1$, $y=1$,

(3) $x=1$, $y=-1$ y

(4) $x=-1$ $y=-1$.

Supóngase que se cambia la ecuación por $x^2+y^2-3=0$. Sigue habiendo una infinidad de soluciones si la tratamos como una ecuación ordinaria, pero no hay soluciones si es tratado como una ecuación Diofantina. La razón es que ahora la gráfica es un círculo con radio igual a $\sqrt{3}$, y ningún punto en esta curva tiene ambas coordenadas simultaneamente iguales a números enteros.

Una famosa familia de ecuaciones Diofantinas es de la forma $x^n+y^n=z^n$, donde n puede ser igual a $2,3,4$ ó cualquier entero mayor. Si n es igual a 2 la ecuación la satisfacen las longitudes de los lados de cualquier triángulo rectángulo y es llamada teorema de Pitágoras. Una solución es el conjunto de números $x=3$, $y=4$, $z=5$. Si n es igual ó mayor que 3, la ecuación se conoce como la ecuación de Fermat. El matemático francés del siglo

17 Pierre de Fermat pensó que había demostrado que estas ecuaciones no tienen soluciones de números enteros positivos. En el margen de su copia del libro de Diofanto escribió que había encontrado una "demostración maravillosa" que desafortunadamente era demasiado larga para ser escrita en ese espacio. La demostración (si es que en realidad Fermat tenía alguna) nunca se ha encontrado. Conocido como el último teorema de Fermat, éste es probablemente el problema matemático no resuelto más antiguo y más famoso. Estos ejemplos muestran que las ecuaciones Diofantinas son fáciles de escribir pero difíciles de resolver. Son tan difíciles de resolver porque estamos siendo muy exclusivos en el tipo de números que aceptamos como soluciones.

Para las ecuaciones de primer grado, es decir, las ecuaciones en las que las incógnitas no aparecen multiplicadas entre si y todos los exponentes son iguales a 1, tales como $7x + 4y - 3z - 99t + 13u - 10 = 0$, la existencia de soluciones se puede determinar por una técnica de división conocida desde tiempos antiguos como el algoritmo de Euclides. Para las ecuaciones de 2º grado con dos incógnitas, tales como $3x^2 - 5y^2 + 7 = 0$ ó $x^2 - xy - y^2 = 1$, fué desarrollada una teoría a principios del siglo 19, por el gran Karl Friedrich Gauss la cual nos permite determinar si existen ó no soluciones. Recientes trabajos del matemático Británico, Alan Baker han arrojado luz sobre ecuaciones de grado mayor que --

dos con dos incógnitas. Para ecuaciones de grado mayor que uno, existen sólo algunos casos especiales que se pueden tratar con ciertos trucos y lo demás es un gran mar de ignorancia.

¿Porqué es tan difícil encontrar un proceso como el que pedía Hilbert?. El acercamiento más directo sería simplemente probar todos los posibles conjuntos de valores de las incógnitas uno tras otro hasta encontrar una solución. Por ejemplo, si la ecuación tiene dos incógnitas, se podría hacer una lista de todos los pares de enteros. Después simplemente se recorría la lista probando cada par para ver si éste satisface la ecuación. Ciertamente este es un procedimiento bien definido que una máquina podría llevar a cabo. ¿Cuál será el resultado?.

Si la ecuación es la primera que mencionamos, $x^2 + y^2 - 2 = 0$, probaríamos las parejas $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$ y rechazaríamos todas. El siguiente candidato, $(1,1)$ es una solución. Fuimos afortunados: solamente se consideraron seis parejas. Por otro lado, si la ecuación fuese $x^2+y^2=20,000$, tendríamos que considerar miles de parejas de parejas de números antes de encontrar una solución. Pero es claro que si existe una solución, ésta se encontrará en un número finito de pasos.

¿Qué pasa con la segunda ecuación: $x^2 + y^2 - 3 = 0$?.

Podríamos probar parejas de enteros aquí hasta la eternidad. Nunca se sabría si el siguiente par será una solución. Para este ejemplo particular es posible demostrar que no existen soluciones. Pero la demostración requiere de una idea nueva; no se puede realizar simplemente sustituyendo enteros en la ecuación.

Un aparato que lleve a cabo un proceso del tipo que sugirió Hilbert tendría que aceptar como información los coeficientes de una ecuación Diofantina arbitraria. Como resultado debería encender una luz verde si la ecuación tiene solución y una luz roja si no tiene solución. Una máquina de este tipo podría llamarse máquina de Hilbert. Una máquina que simplemente buscara soluciones por medio de intentos sucesivos "ad infinitum" podría describirse como una máquina de luz verde. Si la ecuación tiene solución, la luz verde aparece después de un número finito de pasos. Si la ecuación no tiene solución, la computación continuará para siempre; a diferencia de la máquina de Hilbert, la máquina de luz verde no tiene manera de saber cuando parar.

Es fácil construir una máquina de luz verde para ecuaciones Diofantinas. La pregunta es, ¿Podemos construir una máquina de Hilbert, es decir, una máquina de luz-verde, luz-roja que pare siempre después de un número finito de pasos y dar una respuesta definitiva negativa ó positiva?.

Lo que Maryasevich demostró es que esto no es posible. Aún si se permite a la máquina almacenamiento ilimitado de memoria y tiempo ilimitado de computo, no se puede hacer ningún programa y no se puede construir ninguna máquina que haga lo que Hilbert quería. No existe una máquina de Hilbert.

Hilbert continuó diciendo en su discurso de apertura en 1900: "A veces sucede que buscamos la solución -- con hipótesis insuficientes ó en un sentido incorrecto, y por esta razón no tenemos éxito. Aparece entonces el problema: demostrar la imposibilidad de soluciones bajo las hipótesis dadas ó en el sentido que se contempla". Esto es exactamente lo que pasó con el 10º problema.

A fin de explicar cómo sabemos que no existe una - máquina de Hilbert debemos discutir algunas ideas sencillas acerca de computación. Supongamos que S denota un conjunto de enteros. S es "enlistable" si se puede - - construir una máquina que haga el siguiente trabajo: aceptar cualquier entero como entrada y encender una luz verde como salida después de un número finito de pasos si y sólo si la entrada (el entero) pertenece a S. Por ejemplo, el conjunto de los números pares es enlistable. En este caso la máquina dividirá la entrada por 2 y encenderá una luz verde si el residuo es 0. En literatura matemática tales conjuntos se llaman recursivamente numerables; la palabra "enlistable" es nuestro equivalente informal .

El conjunto S es "computable" si es posible construir una máquina luz roja-luz verde (similar a la máquina de Hilbert para las ecuaciones Diofantinas) que hará un trabajo más complicado: aceptar como entrada un entero y, después de un número finito de pasos, encender una luz verde si el entero está en S y una luz roja si el entero no está en S. Por ejemplo, el conjunto de los números pares es computable. La máquina dividirá la entrada por 2; si el residuo es 0, enciende una luz verde y si el residuo es 1, enciende una luz roja. (ver ilustración 2 y 3).

Existe una estrecha conexión entre estas dos definiciones. A manera de explicación, denotemos por $\bar{S}$ el complemento de S, es decir, el conjunto de todos los enteros que no pertenecen a S. Si en los dos ejemplos S es el conjunto de los enteros pares, entonces $\bar{S}$ es el conjunto de los enteros impares. Podemos demostrar que si S es computable, entonces S y $\bar{S}$ son ambos enlistables. Para decirlo de otra manera: Si existe una máquina luz roja-luz verde para S, entonces existe una máquina luz verde para $\bar{S}$ y una máquina luz verde para S. La demostración es sencilla. Para construir una máquina luz verde para S simplemente quitamos el foco rojo de la máquina luz verde-luz roja. Para construir una máquina luz verde para $\bar{S}$, quitamos el foco verde de la máquina luz verde-luz roja y lo ponemos en el socket del foco rojo.

El inverso también es cierto: Si S y $\bar{S}$ son enlistables, entonces S es computable. El equivalente de esta afirmación es: Si existe una máquina de luz verde para S y una para $\bar{S}$ entonces se puede construir una máquina luz verde-luz roja para S. Esto se puede hacer facilmente, en la máquina luz-verde para $\bar{S}$, reemplazamos el foco verde por un foco rojo, después conectamos ambas máquinas en paralelo de tal manera que la información entre en las dos simultáneamente. El resultado es una máquina luz verde-luz roja.

Sabiendo todo esto, podemos establecer uno de los hechos cruciales de la teoría de computabilidad, un hecho que juega un papel central en la solución del 10º problema de Hilbert: Existe un conjunto K que es enlistable pero no computable. Es decir, existe una máquina luz verde para K, pero es imposible construir una máquina luz verde para $\bar{K}$, el complemento de K.

Para probar este hecho aparentemente extraño, supongamos que cada máquina luz verde está especificada por un detallado "manual del propietario" en el idioma inglés. El manual del propietario describe exactamente cómo está construida la máquina. Los manuales del propietario pueden ser puestos en orden y numerados 1,2,3, y así sucesivamente. De esta manera todas las máquinas luz verde estarán numeradas; M_1 es la primer máquina, M_2 es la segunda, etc.

Aquí hay un punto sutil. Tal lista ordenada de manuales, no es posible para máquinas luz verde-luz roja. La dificultad está en que utilizando el manual no se puede decir si se encenderá una luz roja ó una luz verde cuando la máquina correspondiente recibe una entrada cualquiera.

El conjunto *K* está definido como el conjunto de números *n* tales que la máquina *n*-ésima se enciende cuando recibe a *n* como entrada. En otras palabras, el número *1* pertenece a *K* si y sólo si M_1 enciende su luz verde cuando recibe al "*1*" en su entrada. El número *2* pertenece a *K* si y sólo si M_2 se enciende al recibir al *2*, y así sucesivamente. (ver ilustración 4).

Para construir una máquina luz verde para *K* necesitamos, junto con los manuales del propietario, un hombrecillo que pueda leerlos y llevar a cabo las instrucciones. Tal vez tendrá que ser un hombre viejo y sabio, pero debe ser también un hombre obediente que haga exactamente lo que se le dice. Le damos al hombrecillo un número, digamos *3,781*. El hombrecillo mira en su manual No. *3,781*. Leyendo el manual, es capaz de construir la máquina de luz verde $M_{3,781}$. Una vez que ha hecho esto, inserta el entero *3,781* como entrada en la máquina M_{3781}. Si la luz verde se enciende, el número *3,781* pertenece a *K*. Entonces tenemos una máquina luz verde para *K*.

¿Qué hay acerca de $\bar{K}$? ¿Cómo podemos estar seguros de que no existe una máquina luz verde para $\overline{K}$? Bueno, supongamos que existiese tal máquina. Entonces, como $\overline{K}$ es el complemento de K, esta máquina deberá encenderse dada una entrada, digamos 297, si y sólo si M_{297} no se enciende con 297. Por lo tanto, la máquina para $\overline{K}$ seguramente no es la M_{297} . (ver ilustración 5). Usando el mismo argumento, se tiene que la máquina para $\overline{K}$ no es M_n, para ningún otro valor de n, y esto demuestra que ninguna máquina de luz verde para $\overline{K}$ aparece entre los manuales del propietario. Como todas las máquinas de luz verde posibles aparecen en nuestra lista, se sigue que no puede existir una máquina de luz verde para $\overline{K}$. Es decir, $\overline{K}$ no es enlistable.

Ciertamente este resultado es notable y merece atención. Sabemos perfectamente qué es el conjunto K; en principio podemos producir tantos elementos de K como queramos con una computadora. Sin embargo, no puede existir un procedimiento formal (un algoritmo) para clasificar a K a partir de $\overline{K}$. Entonces, tenemos aquí un ejemplo de un problema que no se puede resolver mecánicamente.

Por supuesto, esta discusión ha sido informal y no rigurosa, pero es posible reformular todas estas ideas y argumentos con demostraciones y definiciones matemáticas precisas. De hecho, éstas han sido formuladas en una rama de la lógica matemática llamada teoría de funciones recursivas, establecida en los años 30 por Gödel, Church, Post, Kleene y Turing.

Ahora bien, ¿qué tiene que ver todo ésto con las ecuaciones Diofantivas?. Simplemente esto, Matyasevich demostró que todo conjunto enlistable tiene una ecuación diofantina correspondiente. Más precisamente, si S es un conjunto enlistable, existe un polinomio P, con coeficientes enteros y variables x, y_1, y_2, ..., y_n, denotado por $P_s(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Dado un entero, por ejemplo 17, éste pertenece a S si y sólo si la ecuación Diofantina $P(17, y_1, \ldots, y_n)=0$ tiene una solución.

Puede pensarse que para algunos conjuntos tendremos que recurrir a polinomios increiblemente complicados, pero no es así. El grado de P no necesita ser mayor que 4; el número de variables $y_1 \ldots, y_n$ no necesita ser mayor que 14. (No se sabe todavía si ambas cotas se pueden alcanzar simultáneamente).

Este resultado de Matyasevich nos lleva rápidamente a la conclusión de que no existe una máquina de Hilbert. Recordemos el conjunto enlistable K que construimos antes. De acuerdo a Maryasevich, existe una ecuación Diofantiva, $P_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0$ asociada a este conjunto. Si fuera posible construir una máquina de Hilbert, es decir una máquina luz verde-luz roja para ver si tienen solución ecuaciones Diofantivas, entonces para cualquier entero x, podríamos determinar si exis--

ten ó no enteros $y_1, y_2, \ldots, yn$ tales que la ecuación tiene una solución. Determinado ésto, estaríamos también determinando si x pertenece ó no a K. En otras palabras, una máquina de Hilbert aplicada a la ecuación Diofantiva que describe a K podría usarse como una máquina luz verde-luz roja para K. Pero hemos demostrado que K no es computable y por lo tanto no puede existir una máquina luz verde-luz roja para K. La única solución a este dilema es concluir que no existe una máquina de Hilbert. En otras palabras, el 10º problema de Hilbert no se puede resolver.

El hecho de que cada conjunto enlistable tiene asociado una ecuación diofantiva es un resultado de gran interés por sí mismo sin contar con su aplicación al 10º problema de Hilbert. Un conjunto de enteros particularmente interesante e importante es el conjunto de números primos. Un número primo es aquél que es divisible solamente por 1 y por sí mismo. Algunos ejemplos son $2,3,5,7,11,13$ y 17.

Es bastante obvio que el conjunto es enlistable, un algoritmo para enlistarlos proviene de los griegos y se le conoce con el nombre de "la criba de Eratóstenes". Combinando el resultado de Matyasevich con un proyecto desarrollado por Putnam, obtenemos una ecuación Diofantiva $Q(y_1 \ldots, yn)=z$ tal que un número z es primo si y sólo si esta ecuación tiene una solución entera positiva $y_1,..,y_n$. (La forma exacta del polinomio Q es un poco complicada para escribirla aquí).

Se puede demostrar otro resultado notable combinado el teorema de Matyasevich con el trabajo de Gödel sobre indecidibilidad. Si existe un sistema de axiomas, cualquiera que sea, del cual se pueda deducir información acerca de ecuaciones Diofantivas, se puede siempre obtener una ecuación Diofantiva particular con las siguientes propiedades:

(1) la ecuación no tiene soluciones enteras positivas y
(2) el hecho de que no tiene soluciones enteras positivas no se puede deducir lógicamente del conjunto de axiomas dado. Por supuesto, una vez que se obtuvo la ecuación Diofantiva, podemos construir un nuevo conjunto de axiomas a partir del cual se puede demostrar que la ecuación Diofantiva no tiene solución. Pero entonces, este nuevo conjunto de axiomas dará lugar a otra ecuación Diofantiva para la cual podemos afirmar lo mismo.

¿Qué encontramos dentro de la demostración del teorema de Matyasevich?. Además de los resultados de la teoría de números clásica que hemos mencionado, hay un resultado clave conocido como el teorema chino del residuo. Será muy útil ilustrar éste con un ejemplo numérico.

Supóngase que queremos encontrar un número cuyos -

residuos, al dividirlo por *10,5,7 y 11* sean *4,2,3 y 1* respectivamente (ver ilustración 10).

El teorema chino del residuo nos asegura que debe existir tal número. (En este caso, tal número es *584*). Todo lo que se requiere para que funcione el teorema chino del residuo es que ningún par de las divisiones que se usan tengan un factor común (exceptuando, por supuesto, al *1*). Puede haber cualquier número de divisores, y los residuos pueden ser enteros positivos cualesquiera.

En 1931, Gödel mostró cómo usar el teorema chino del residuo como un truco de codificación *n* el cual -- una sucesión finita arbitraria de números puede ser calificada como un solo número. Usando este número, se puede recobrar la sucesión de la misma manera que *4,2,3 y 1* se obtienen del *548* en el ejemplo como residuos de divisiones. Los divisores pueden escogerse en progresión aritmética.

El primer intento para demostrar que no existe una máquina de Hilbert fué hecho por uno de nosostros (Davis) en su disertación doctoral en 1950. La técnica de Gödel de usar el teorema chino del residuo como un aplicador se aplicó para asociar una ecuación Diofantiva, $P_s(k,x,z,y_1,y_2,\ldots,y_n)=0$ a cada conjunto enlistable *S*. Desafortunadamente la relación entre el conjunto y la ecuación resultó más complicada de lo que se esperaba.

Específicamente, la relación era: Un entero positivo x pertenece a S si y sólo si para algún valor entero positivo z es posible encontrar una solución para cada una de las ecuaciones Diofantivas que se obtienen al sustituir $k=1$, $x=1$ y así sucesivamente hasta $k=z$ en la ecuación $P_{s}(k,x,z,y_1,\ldots,yn)=0$. Aunque el problema se acercaba mucho a lo que necesitábamos, era solo el comienzo.

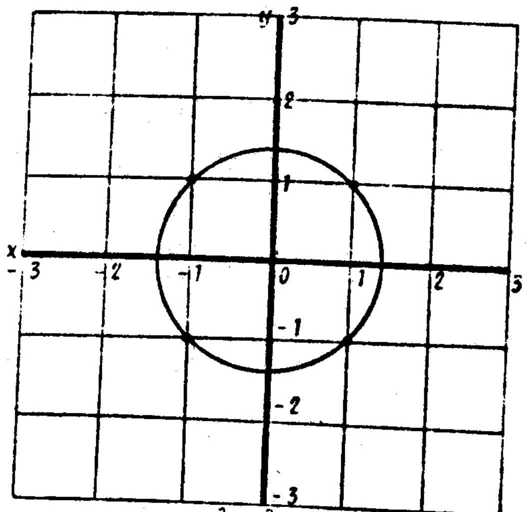
Casi al mismo tiempo, Robinson inició sus propias investigaciones sobre conjuntos que se pueden definir con ecuaciones Diofantinas. Ella desarrolló varias técnicas ingeniosas para estudiar ecuaciones Diofantinas cuyas soluciones se comportan como exponenciales (creciān como una potencia). En 1960 ella, Davis y Putnam demostraron, en colaboración, otro resultado. Hicieron uso del trabajo de Robinson y del resultado de Davis para demostrar que a cualquier conjunto enlistable le corresponde una ecuación Diofantina de una clase "extendida", extendida en el sentido de que se permite que las variables aparezcan como exponentes en la ecuación. Un ejemplo de una ecuación de este tipo es $2^t + x^2 = z^3$.

Davis, Robinson y Putnam combinaron su trabajo con algunos resultados anteriores de Robinson y descubrieron lo siguiente: Si se puede encontrar al menos una ecuación Diofantina cuyas soluciones se comporten exponencialmente en un sentido apropiado, entonces es posible describir todo conjunto enlistable por medio de una ecuación Diofantina. Esto demostraría que el 10º problema de Hilbert no tiene solución.

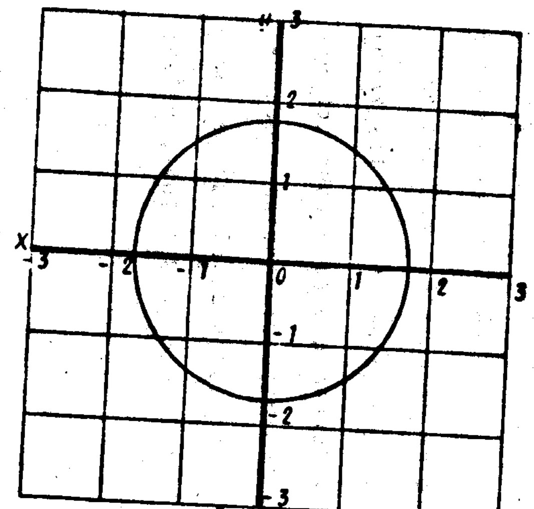
Se necesitó una década para encontrar una ecuación Diofantina cuyas soluciones crecen exponencialmente en el sentido apropiado. En 1970 Matyasevich encontró tal ecuación usando lo que se conoce como los números de Fibonacci. Estos célebres números fueron descubiertos en el año 1202 d.c. por Leonardo de Pisa, a quien se le conocía también como Fibonacci. Fibonacci encontró estos números calculando el número total de pares de descendientes de un par de conejos si el par original y cada uno de los pares descendientes se reproducen una vez al mes. La serie de Fibonacci se obtiene comenzando con 1 y 1 y agregando sucesivamente los dos números precedentes para obtener el siguiente: el primer número de Fibonacci es 1, el segundo es 1, el tercero es $1+1=2$, el cuarto es $1+2=3$, el quinto es $2+3=5$ y así sucesivamente. La propiedad importante para el 10º problema de Hilbert es que los números de Fibonacci crecen exponencialmente. Es decir, el n-ésimo número de Fibonacci es aproximadamente proporcional a la n-ésima potencia de algún número real fijo.

Si se pudiera encontrar una ecuación Diofantina cuyas soluciones relacionen a n con el n-ésimo número de Fibonacci, ésta sería el ejemplo buscado de una ecuación Diofantina cuyas soluciones se comportan exponencialmen te. La solución del 10º problema de Hilbert se seguiría de este ejemplo. Lo que hizo Matyasevich fue construir tal ecuación Diofantina (ver ilustración 12). -- Una vez que hubo demostrado que el conjunto de los números de Fibonacci se asocia de esta manera con una ecuación Diofantina, se seguía inmediatamente, de los resultados de Davis, Robinson y Putnam que para cada conjunto enlistable, existe una ecuación Diofantina asociada, incluyendo en particular el conjunto *K*, el cual es no - computable. Y así termina la historia del 10º problema de Hilbert.

ILUSTRACIONES

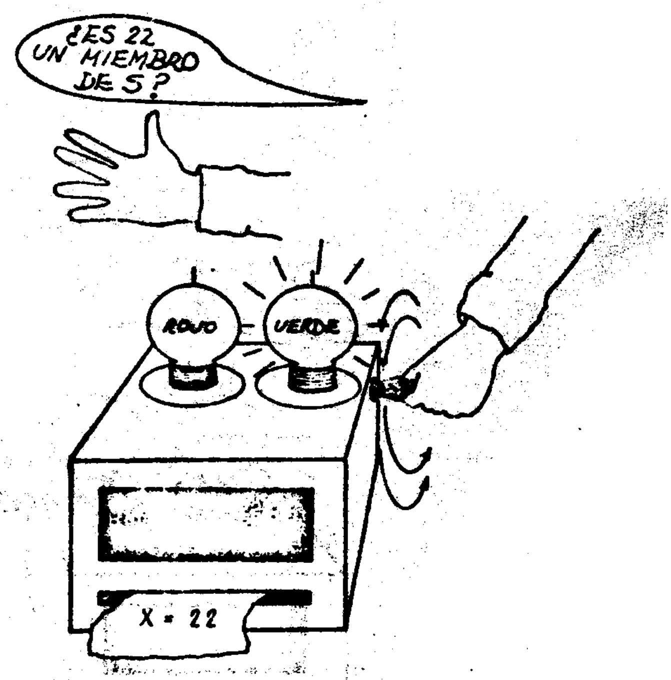


$x^2+y^2-2=0$

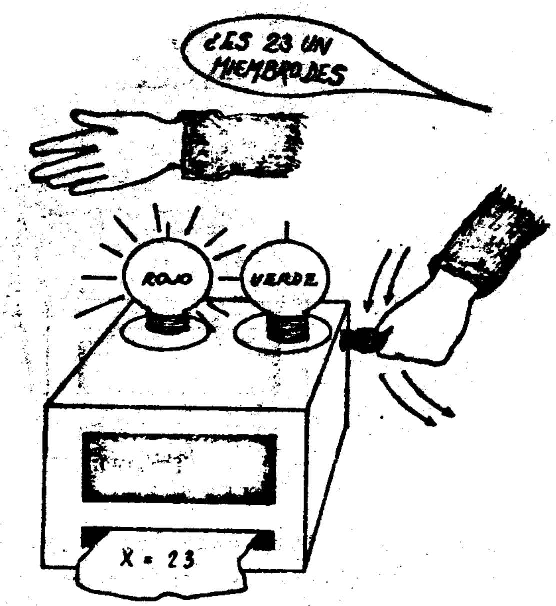


$x^2+y^2-3=0$

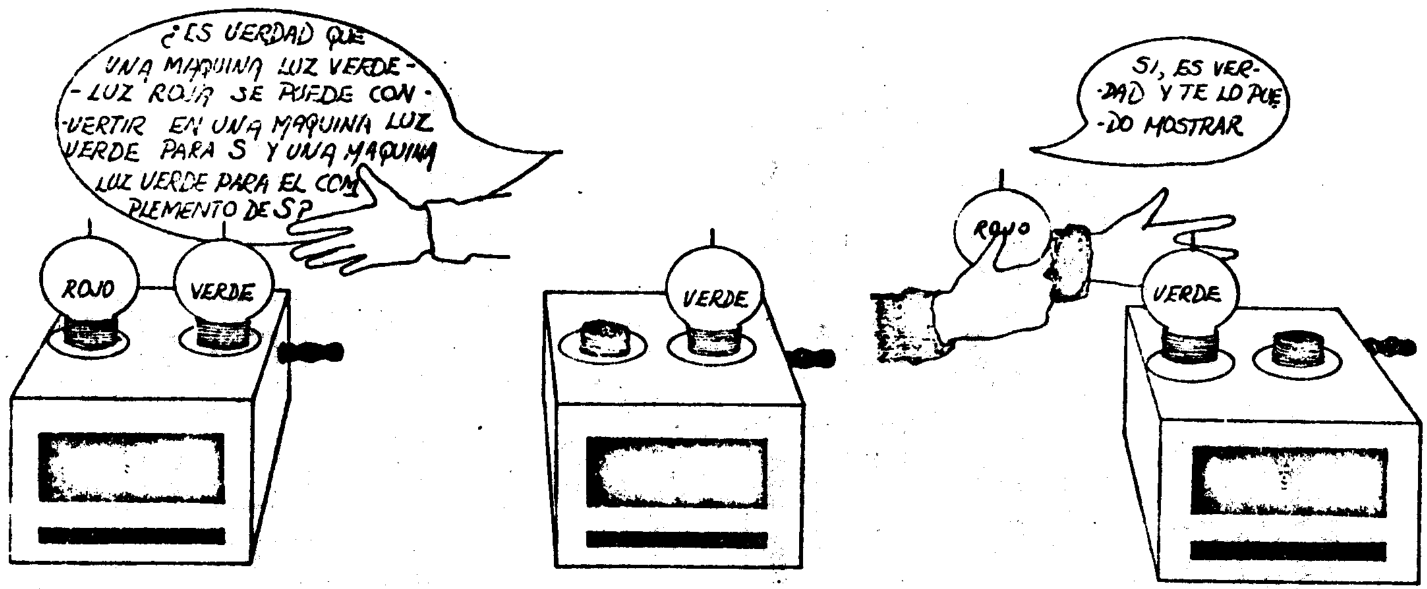
Las gráficas de dos ecuaciones ilustran la diferencia entre una ecuación ordinaria y una ecuación Diofantina en la cual solamente interesan las soluciones en números enteros; esta diferencia es fundamental para el 10º problema de Hilbert. Las ecuaciones en cuestión son $x^2+y^2-2=0$ (izquierda) y $x^2+y^2-3=0$ (derecha); ambas están representadas por círculos con centro en el origen. En el caso de $x^2+y^2-2=0$, el círculo tiene radio $\sqrt{2}$. Si la ecuación se mira como una ecuación ordinaria, existe una infinidad de soluciones. Sin embargo, si se le trata como una ecuación Diofantina, sólo hay cuatro soluciones: (1) $x=1$, $y=1$, (2) $x=-1$ $y=1$ (3) $x=1$, $y=-1$, y (4) $x=-1$, $y=-1$. Estas soluciones están representadas por los puntos donde la gráfica cruza los ejes de coordenadas. En èl caso de $x^2+y^2-3=0$, el círculo tiene un radio de $\sqrt{3}$. Como ecuación ordinaria tiene un número infinito de soluciones; como ecuación Diofantina no tiene ninguna.



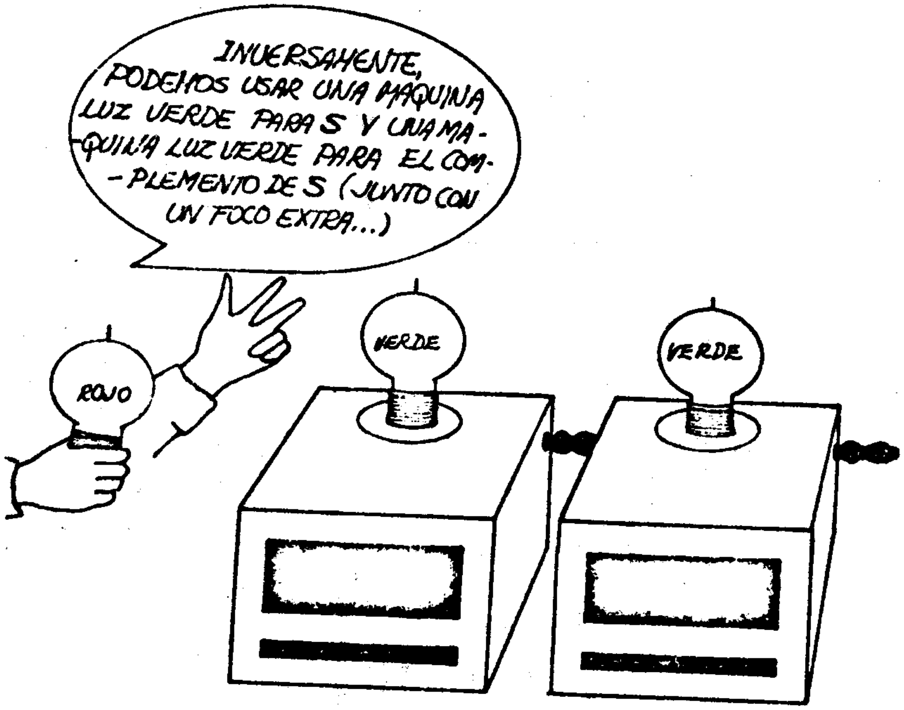
Una máquina luz verde-luz roja, es una máquina imaginaria que determina si un número pertenece a un conjunto dado. El 10º problema de Hilbert consiste en saber si se puede construir una "máquina de Hilbert" de este tipo que pruebe ecuaciones Diofantinas para ver si éstas tienen ó no soluciones. En el caso de probar números para determinar si son miembros de un conjunto, se enciende una luz verde si la máquina puede determinar en un número finito de pasos que un número es miembro del conjunto dado. Supongamos que S es el conjunto de todos los números pares. Para probar números, podemos idear un algoritmo para dividir cada número recibido entre dos. Si el residuo de la división es 0 (escrito $Res\ \frac{x}{2} = 0$), la máquina encenderá su luz verde, queriendo decir que x es un miembro de S.

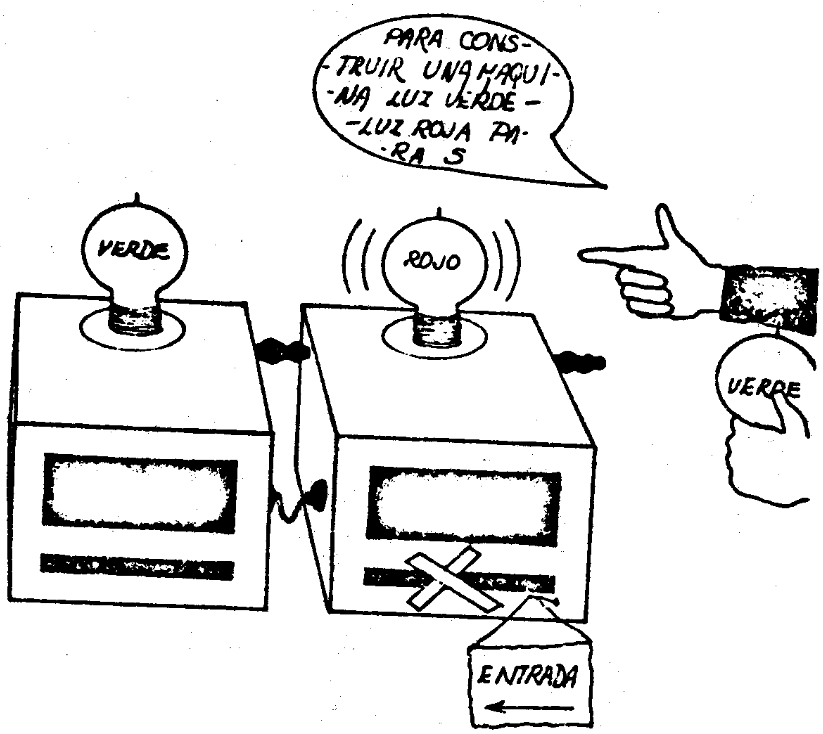


La luz roja se enciende en la máquina luz verde-luz roja si la máquina puede determinar que el número recibido no es un miembro de S. Supóngase que el número es 23, el residuo de 23 entre 2 es 1, lo cual significa -- que 23 no es un elemento de S. El complemento de S es - $\bar{S}$, el conjunto de los números impares; 23 es miembro de $\bar{S}$. Como se puede construir una máquina luz verde-luz roja para clasificar a los miembros de S a partir de miembros de $\bar{S}$, el conjunto S se llama computable.



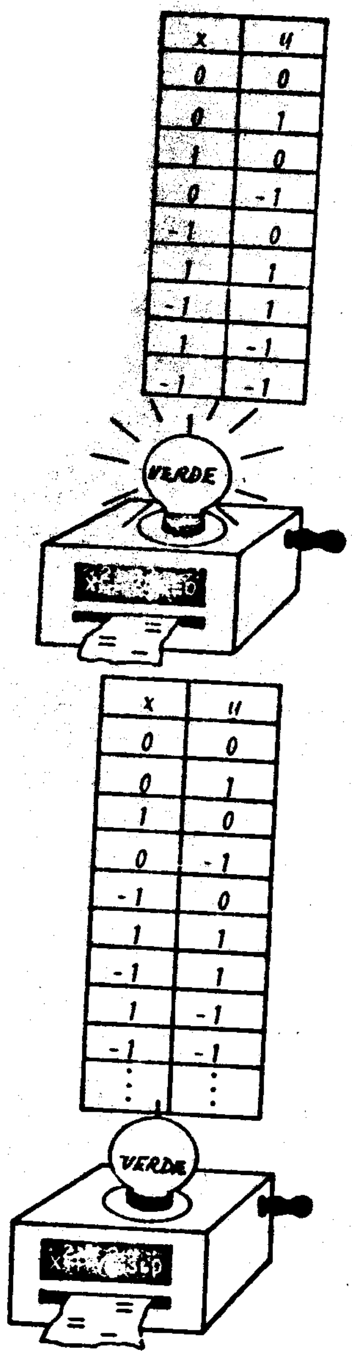
Una máquina luz verde-luz roja para el conjunto S se puede transformar en una máquina luz verde para S (es decir, una máquina que simplemente se encienda cuando la entrada es un miembro de S) junto con una máquina luz verde para $\bar{S}$, el complemento de S. La demostración es sencilla. Para construir una máquina luz verde para S, quitamos el foco rojo de la máquina. Para construir una máquina luz verde para $\bar{S}$, quitamos el foco verde de la máquina luz verde luz roja y lo ponemos en el lugar del foco rojo. Este hecho puede enunciarse de otra manera. Si un conjunto (como S) es computable, entonces el conjunto mismo y su complemento son enlistables, es decir, los miembros de S pueden ser enlistados separadamente, clasificándolos a partir de los miembros de $\bar{S}$ (los números impares).


INVERSAMENTE, PODEMOS USAR UNA MAQUINA LUZ VERDE PARA S Y UNA MAQUINA LUZ VERDE PARA EL COMPLEMENTO DE S (JUNTO CON UN FOCO EXTRA...)
ROJO
VERDE
VERDE

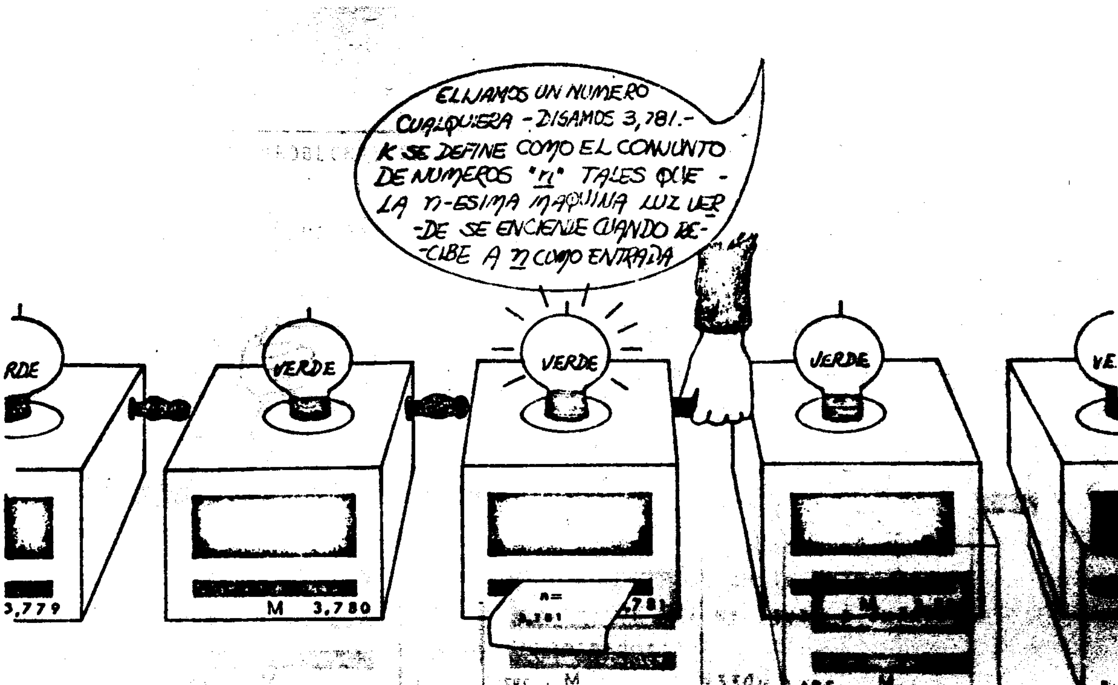

PARA CONSTRUIR UNA MAQUINA LUZ VERDE-LUZ ROJA PARA S
VERDE
ROJO
VERDE
ENTRADA

Como se ilustra en la hoja anterior podemos usar - máquinas luz verde para S y para $\bar{S}$ para construir una - máquina luz verde-luz roja para el conunto S.

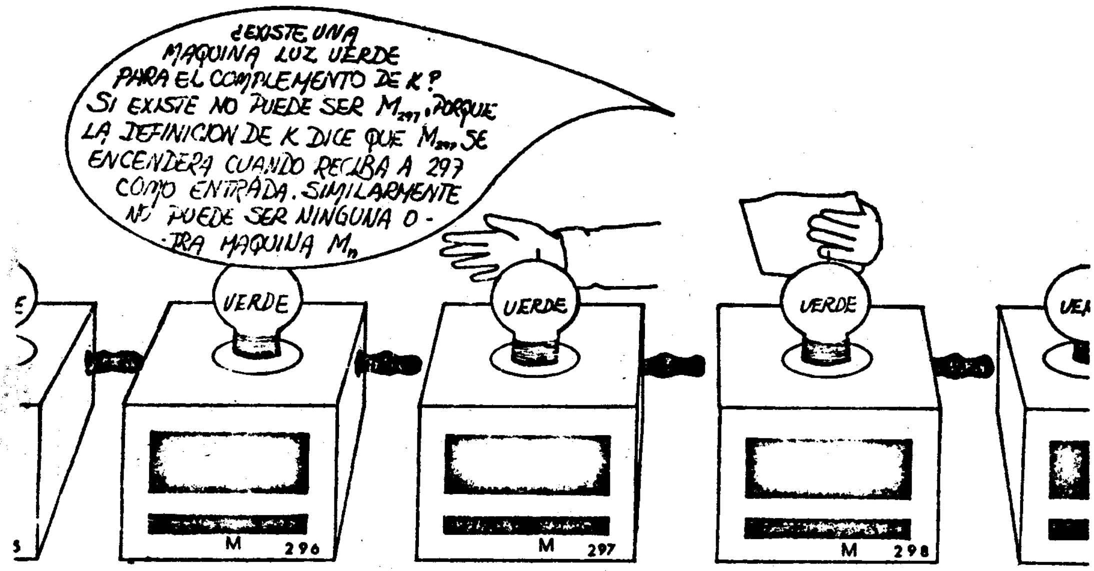
En la máquina luz verde para $\bar{S}$, reemplazamos el foco verde con un foco rojo. Después conectamos las má-- quinas en paralelo de tal manera que la información entre a ambas simultáneamente. El resultado es, claramente, una máquina luz verde-luz roja. Esta afirmación -- puede enunciarse de otra forma: Si un conjunto y su complemento son enlistables, entonces el conjunto es computable.



Se puede probar parejas de enteros individualmente. por máquinas luz-verde para determinar si éstas son soluciones de ecuaciones Diofantinas. Este procedimiento experimental alcanza una solución para la ecuación $x^2+y^2-2=0$ en el sexto intento. Una máquina luz verde, trabajando con la ecuación $x^2+y^2-3=0$, no tiene manera de saber cuándo detenerse ya que no existen soluciones enteras. Todo lo que ella puede saber es que todavía no ha encontrado una solución.



El conjunto K es enlistable, es decir, existe una máquina luz verde para K. Numeremos todas las máquinas luz-verde que existen: M_1 es la primer máquina, M_2 es - la segunda máquina, y así hasta la n-ésima máquina. K se define como el conjunto de los números n tales que la n-ésima máquina se enciende cuando recibe a n como - entrada. En la ilustración, un hombrecillo ha metido el número $3,781$ en $M_{3,781}$ y se ha encendido la luz verde, - indicando que el número $3,781$ es un elemento de K.



El conjunto K es no computable, es decir, no existe máquina luz verde para $\bar{K}$, el complemento de K. Supóngase que existe tal máquina para $\bar{K}$. Como $\bar{K}$, es el complemento de K, esta máquina se debe encender con una entrada, por ejemplo 297, si y sólo si M_{297} no se enciende con 297. Por lo tanto la máquina para $\bar{K}$ no es M_{297}. Con el mismo razonamiento, la máquina no es M_n para ningún valor de n. De aquí que no existe una máquina luz verde para $\bar{K}$, lo cual significa que $\bar{K}$ no es elistable. Un conjunto enlistable cuyo complemento no es enlistable es no computable; no se puede construir una máquina luz verde-luz roja para él. Por lo tanto no existe un algoritmo para obtener K a partir de $\bar{K}$.

PROBLEMA: Encontrar el menor número n que tiene como residuo 4, 2, 3 y 1 cuando se divide por 10, 3, 7 y 11.

SOLUCION: Sea x tal número. "Res" será la abreviación para "el residuo de..." Entonces el problema se puede escribir:

$$\text{Res}\left(\frac{x}{10}\right)=4 \qquad \text{Res}\left(\frac{x}{7}\right)=3$$

$$\text{Res}\left(\frac{x}{3}\right)=2 \qquad \text{Res}\left(\frac{x}{1}\right)=11$$

Para encontrar x, se deben resolver cuatro problemas auxiliares para cuatro nuevas incógnitas y_1, y_2, y_3, y y_4. En cada caso el numerador se obtiene multiplicando tres de los divisores y usando el cuarto como denominador. Por ejemplo, en la primera ecuación con y_1, el numerador 231 es igual a 3x7x11 y 10 se pone como denominador:

$$\text{Res}\left(\frac{231y_1}{10}\right)=4 \quad y_1 < 10 \qquad \text{Res}\left(\frac{330y_3}{7}\right)=3 \quad y_3 < 7$$

$$\text{Res}\left(\frac{770y_2}{3}\right)=2 \quad y_2 < 3 \qquad \text{Res}\left(\frac{210y_4}{11}\right)=1, \quad y_4 < 11$$

El conjunto de los enteros mínimos que son soluciones de estas cuatro ecuaciones es: $y_1=4$, $y_2=1$, $y_3=3$, -- $y=1$.

Para obtener x, los numeradores de las cuatro ecuaciones auxiliares se suman.

$$\begin{aligned} x &= (231y_1)+(770y_2)+(330y_3)+(210y_4)= \\ &= (231\times4)+(770\times1)+(330\times3)+(210\times1)= \\ &= 924+770+990+210 \\ &= 2{,}894 \end{aligned}$$

Por lo tanto, 2,894 es un valor de x. Se puede obtener un número menor si el producto de los cuatro divisores se le resta a esta solución.

$$2{,}894-(10\times3\times7\times11)=2{,}894-2{,}310=584$$

De aquí que 584 es la solución mínima al problema.

El Teorema Chino del Residuo se usó en la solución al 10º problema de Hilbert. En este caso el teorema se usó para encontrar un número cuyos residuos, al dividirlo por los números 10, 3, 7 y 11, son respectivamente 4, 2, 3 y 1. El entero 584 es la solución mínima.

1.-	1
2.-	1
3.-	$1+1=2$
4.-	$1+2=3$
5.-	$2+3=5$
6.-	$3+5=8$
7.-	$5+8=13$
8.-	$8+13=21$
9.-	$13+21=34$
10.-	$21+34=55$
$\vdots$	$\vdots$
$\underline{n}$	$\approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$

Los Números de Fibonacci fueron descubiertos en el año 1202 d.c. por Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci. La sucesión se obtiene empezando con 1 y 1 y agregando sucesivamente los últimos dos números para obtener el siguiente. La sucesión crece exponencialmente: el n-ésimo número de la sucesión es aproximadamente -- proporcional a la n-ésima potencia del número real - --

$$[(1+\sqrt{5})/2]^{n}.$$

I.	$u+w-v-2=0$
II.	$\ell-2v-2a-1=0$
III.	$\ell^2-\ell z-z^2-1=0$
IV.	$g-b\ell^2=0$
V.	$g^2-gh-h^2-1=0$
VI.	$m-c(2h+g)-3=0$
VII.	$m+f\ell-2=0$
VIII.	$x^2-mxy+y^2-1=0$
IX.	$(d-1)\ell+u-x-1=0$
X.	$x-v-(2h+g)(e-1)=0$

La solución de Matyasevich al 10º problema de Hilbert involucra una ecuación Diofantina que se obtiene elevando al cuadrado cada una de estas 10 ecuaciones, sumando esto e igualando a cero el polinomio que resulta. En estas ecuaciones los valores u y v en las soluciones están relacionados de tal manera que v es el $2n$-ésimo número de Fibonacci. De la solución se sigue que para todo conjunto enlistable existe una ecuación Diofantina asociada. Como existe un conjunto cuyo complemento no es enlistable, entonces no todo conjunto enlistable puede tener una máquina luz verde-luz roja.
En vista de que es equivalente tener una máquina luz verde- luz roja para un conjunto que tener una máquina de Hilbert para ecuaciones Diofantinas, el resultado de Matyasevich significa que no se puede construir una máquina de Hilbert para probar ecuaciones Diofantinas.