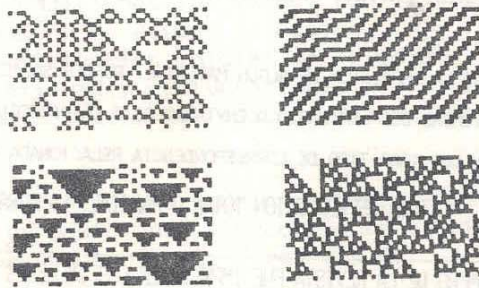

**REVISTA DEL SEMINARIO
de
ENSEÑANZA Y TITULACION**

año V

**num.0.
35**



septiembre 1989

SUSCRIPCIÓN. TODAS LAS PERSONAS QUE DESEEN UNA SUSCRIPCIÓN, DEBERÁN MANIFESTARLO POR ESCRITO, ENVIANDO SU NOMBRE Y DIRECCIÓN A:

- MAESTRÍA EN EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS, EDIFICIO OFICINAS ADMINISTRATIVAS No. 2, 1er. PISO, -- AV. UNIVERSIDAD 3000, CIUDAD UNIVERSITARIA.
- DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CUBÍCULO 239 Y -- 240. FACULTAD DE CIENCIAS, U.N.A.M., CIUDAD UNIVERSITARIA.

DICHA SUSCRIPCIÓN SERÁ GRATUITA Y ANUAL, MIENTRAS ESTO SEA POSIBLE.

LOS ARTÍCULOS FIRMADOS NO REPRESENTAN NECESARIAMENTE LA OPINIÓN DEL SEMINARIO.

SI DESEAS LA IMPRESIÓN DE ALGÚN MATERIAL, PUEDES SOLICITARLO CON CUALQUIER MIEMBRO DEL SEMINARIO O ENVIÁNDOLOS A LA DIRECCIÓN ARRIBA ANOTADA AL IGUAL QUE TODO TIPO DE CORRESPONDENCIA RELACIONADA CON EL SEMINARIO.

TODA REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL LA AGRADECEREMOS.

ESTE NÚMERO DE LA REVISTA FUE IMPRESO EN LOS TALLERES DE IMPRESIÓN DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, PLANTEL VALLEJO SE TIRARON - 800 EJEMPLARES.

AGRADECEREMOS A LA SECRETARÍAS DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNAM, POR EL MECANOGRAFIADO DE NUESTRA REVISTA.

INDICE

- **ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORIA DE AUTOMATAS CELULARES Y SUS APLICACIONES EN BIOFISICA** por OCTAVIO MIRAMONTES VIDAL 1
- Capítulo 1
Introducción 1
- Capítulo 2
Aspectos básicos de los autómatas celulares elementales.. 4
- Capítulo 3
Clasificación de autómatas celulares 9
 - 3.1 La clasificación dinámica de Wolfram 9
 - 3.2 La clasificación de patrones 11
 - 3.2a Las condiciones iniciales 11
 - 3.2b El número de sitios iniciales 13
 - 3.2c La distribución inicial de estados 16
 - 3.2d Estabilidad y perturbaciones 19
 - 3.2e Un método de clasificación jerárquica 21
- Capítulo 4
Los autómatas celulares como modelo en morfogénesis 30
 - 4.1 Información posicional y crecimiento clonal 30
 - 4.2 Los AC como modelo en la formación de patrones biológicos 31
- Capítulo 5
Conclusiones 39
- Bibliografía 40
- Apéndice A 41
- Apéndice B 47
- **LA COMPUTACION EN LA UNAM EN EL PERIODO 1968-1980. UNA INTERPRETACION.** por CRISTIAN LÉMAITRE 88
- **TEORIA GENERAL DE LOS SISTEMAS DINAMICOS HIPERBOLICOS SUAVES** por PESIN Ya. B. 107

Capítulo 1

INTRODUCCION

Si bien se ha utilizado (abusivamente) la frase *teoría de autómatas celulares* en el título de este trabajo, el lector no deberá confundir la idea contenida en ella como sinónimo de un cuerpo teórico bien fundado (con todo y rigor lógico-formal) a la manera de como, por ejemplo, la Teoría de Sistemas Dinámicos Continuos se ha desarrollado hasta nuestros días. Los autómatas celulares se han estudiado sólo recientemente y su estudio ha partido más bien, de una base "experimental" desde la que es posible el estudio del comportamiento y de la fenomenología asociada. Debido a ello, es posible hablar, hoy, de algunas de las propiedades cualitativas y cuantitativas; pero no de grandes generalizaciones y mucho menos de los grandes teoremas propios de una teoría matemática madura. El trabajo que aquí se presenta no es ninguna excepción (ni se lo propone), su enfoque encuentra su base en la "experimentación", en el estudio fenomenológico y por ello es necesario advertir que las pocas conclusiones con afán "generalizador" sólo encuentran su argumentación en múltiples ejemplos (la razón de la casi interminable sucesión de figuras), en este sentido, más que demostraciones, deberían ser consideradas como meras *mostraciones*.

En el primer capítulo de este trabajo, se hará una revisión introductoria a los autómatas celulares y en particular, a un tipo conocido como autómatas celulares elementales; que corresponden a aquellos en una dimensión, formados por dos elementos distintos y con interacciones locales con sus vecinos más inmediatos. En este capítulo se explicará además la noción de patrón para los autómatas celulares.

En el capítulo 2 se hablará de dos posibles clasificaciones para los autómatas celulares elementales. La primera de ellas, introducida por S. Wolfram (1984a), se basa en el análisis de los

atractores que aparecen en el espacio de configuración y que pueden ser considerados como análogos a los que aparecen en el caso de los sistemas dinámicos continuos. La segunda es una propuesta de clasificación de patrones en base a un método de la estadística multivariada conocido como análisis de cúmulos. Debido a que el patrón que genera un autómata celular depende de sus condiciones iniciales, se hará una breve discusión sobre tal dependencia, antes de abordar el problema de la clasificación de patrones. Se hablará pues, de algunas de las propiedades de los autómatas celulares que son invariantes frente a cambios en las condiciones iniciales, así como del tipo de comportamientos que pueden surgir cuando los autómatas se encuentran en condiciones de perturbación. Una vez hecho este análisis se procederá a elegir una única condición inicial para generar los patrones que se van a clasificar. Como resultado tendremos a los patrones agrupados en familias de acuerdo al grado de semejanza que exista entre ellos y que se caracterizara por medio de un índice relativo cuantitativo. Podría agregarse que hasta donde nos es posible saber, este intento de clasificación no se ha hecho previamente.

En el último capítulo se propondrá un modelo para la formación de patrones biológicos, en base a los autómatas celulares elementales. El modelo hará uso de las hipótesis del modelo de información posicional de L. Wolpert (1968, 1978) y las del modelo propuesto por Cocho et. al. (1986b). Supone pues, que la información de como interactuar la obtienen, los autómatas celulares (que simulan a las células de un tejido biológico en crecimiento), de acuerdo a un mecanismo de umbral probabilístico que depende de la concentración de sustancias con acción morfogénica la cual, a su vez, depende de la posición relativa en el espacio en que ocurre la reproducción celular. Los autómatas celulares que se utilizarán en el modelo estarán caracterizados por su semejanza asignada según lo vimos en el capítulo 2. Se estudiará también, la "conducta de interacción" entre diversos tipos de autómatas con distintos índices de semejanza. Se dará respuesta a la pregunta de

¿que sucede cuando interaccionan autómatas celulares con patrones parecidos o distintos entre sí?. Este modelo de interacción nos permitirá distinguir la existencia de comportamientos en los patrones que no es posible observar en los autómatas celulares por separado.



ASPECTOS BASICOS DE LOS AUTOMATAS CELULARES

Los Automatas celulares (AC) son sistemas dinámicos discretos en el espacio y en el tiempo que poseen construcciones simples y son capaces de mostrar comportamientos de gran complejidad¹. Por ello, los AC pueden utilizarse como modelos para simular el comportamiento de diversos sistemas complejos que aparecen en la naturaleza y que se caracterizan por poseer un número grande de componentes iguales con interacciones locales entre ellos. Ejemplos típicos son los sistemas biológicos formados por células que interactúan entre sí mediante diversos procesos bioquímicos y eléctricos (en particular el problema de la formación de patrones); los sistemas físicos no lineales como es el caso de los fluidos turbulentos en hidrodinámica, el crecimiento de cristales en estado sólido y el modelo de Ising en mecánica estadística (Wolfram 1984b).

Los autómatas celulares están formados por un conjunto de sitios acomodados en el espacio mediante mallas regulares; los sitios pueden tomar un único estado de entre un conjunto de estados posibles. Si los AC son binarios, sus sitios pueden tomar un valor de entre dos posibles, si son terciarios el conjunto de estados posibles tendrá tres valores y así sucesivamente. El estado (o valor) que cada sitio puede tomar está determinado por una regla de propagación y por los estados previos de los sitios vecinos. Si la evolución del autómata celular se realiza de tal modo que el estado de un sitio se asigna sólo si los valores de todos los sitios de la generación anterior se han asignado ya.

¹ Por ejemplo, son capaces de exhibir una gran diversidad de comportamientos dinámicos: homogéneos, periódicos, caóticos, autoorganizados, autosimilares, autoestructurados, etc...

entonces se dice que la propagación, o bien, el autómata celular es sincrónico, de otra manera el autómata celular es asincrónico. Si el conjunto de sitios que forman al autómata celular en una generación, se acomodan en un arreglo lineal, diremos que el autómata celular es unidimensional.

Podemos formalizar lo anterior mediante la siguiente expresión:

$$a_i^t = F \left[a_{i-r}^{t-1}, a_{i-r+1}^{t-1}, a_i^{t-1}, \dots, a_{i+r}^{t-1} \right] \quad (1)$$

donde a_i^t representa el i -ésimo sitio al tiempo t (a la generación t). Cada sitio puede tomar un valor en el rango $[0..k-1]$ donde k es el número total de posibles estados (si el autómata es binario $k=2$) y F es una función que determina la regla de propagación. El parámetro r determina el rango de la interacción: si $r=1$ la interacción se realiza "a primeros vecinos", es decir, sólo los sitios más inmediatamente próximos al sitio en cuestión participan en la definición de su valor. si $r=2$ la interacción es "a segundos vecinos" y así sucesivamente. El número de sitios que participan en la definición del estado de un sitio en la siguiente generación está dado por $n=2r+1$. En lo sucesivo consideraremos únicamente un tipo particular de autómata celular que es el más simple: aquel con $k=2$, $r=1$, $n=3$ y con propagación sincrónica en una dimensión. Este autómata celular es pues, un autómata celular binario con interacción a primeros vecinos, que también se conoce como autómata celular elemental.

El número total de autómatas celulares distintos o bien, el número total de posibles reglas de propagación está dado por:

$$\tau = k^{(2r+1)}$$

para nuestro caso $\tau=256$. Si los sitios que interactúan son tres y sus posibles valores son sólo "0" y "1", tenemos entonces ocho posibles combinaciones binarias como podemos observar en la siguiente tabla:

matas

	a_{1-1}^t	a_1^t	a_{1+1}^t
si	0	0	0
si	0	0	1
si	0	1	0
si	0	1	1
si	1	0	0
si	1	0	1
si	1	1	0
si	1	1	1

La función F será en el caso de los AC elementales, una función que aplicada a tres valores binarios nos proporcionara un número binario, es decir se trata de un mapeo de $[0,1]^3$ a $[0,1]$ donde F , según lo expresado en (1) tendrá la forma:

$$a_1^{t+1} = F \left[a_{1-1}^t, a_1^t, a_{1+1}^t \right]$$

Podemos entonces, a la manera en como se realiza en álgebra booleana, definir una tabla de verdad para cada una de las 256 reglas de propagación. Como ejemplo, podemos observar la salida para $F = a+b+c$ (donde $a=a_{1-1}, b=a_1, c=a_{1+1}$) y la salida para $F = a+(b \cdot c)$

	$a+b+c$	$a+(b \cdot c)$
0 0 0	0	0 (bit menos significativo)
0 0 1	1	0
0 1 0	1	0
0 1 1	0	1
1 0 0	1	1

2.20.1

Las operaciones $+$ y \cdot , son las operaciones lógicas OR y AND.

115
00 20
115 10

1 0 1	0	1
1 1 0	0	1
1 1 1	1	0 (bit más significativo).

Puesto que la salida de la función $F=a+b+c$ es única, podemos referirnos a ella mediante su "codigo binario" o sea 10010110 (el bit menos significativo se acomoda en el extremo derecho) o bien, mediante su "codigo decimal", que no es otra cosa que la representación decimal del número binario correspondiente, es decir 150. Por su parte la función $F=a+(b \cdot c)$ tiene como código binario 01111000 y como "codigo decimal" 120^3 . Nos referiremos de aquí en adelante al autómata celular mediante su código binario o decimal indistintamente. Cada regla de propagación produce un tipo distinto de patrón que definiremos de la siguiente manera:

Def1. El patrón $P_{R_1}(t)$ de un autómata celular con regla R_1 , es la gráfica con respecto al tiempo del conjunto de todos los sitios a_i^t que forman dicho autómata celular.

En la figura 1 se muestra el patrón para los autómatas con regla 150(a) y 120(b); el estado "1" está representado por el color negro y el estado "0" por el color blanco.

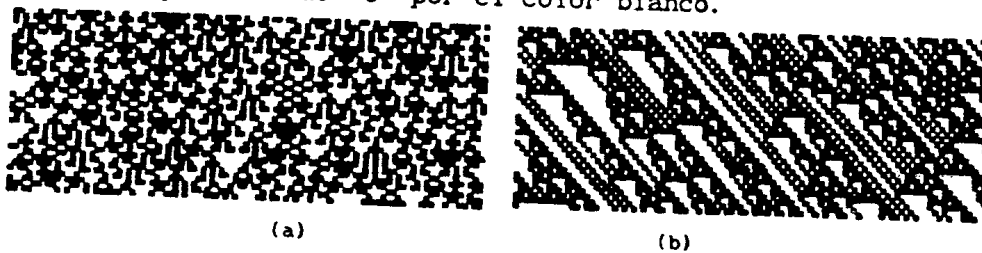


Figura 1.

El comportamiento de los autómatas celulares y sus respectivos patrones permiten agruparlos en "clases". Los

³ Notemos que la interacción de los estados 000 define al bit menos significativo de la regla y determina si la regla es un número par o impar. Por otra parte, el segmento 111 define al bit más significativo y determina si la regla es un número mayor, igual o menor a 128.

Capítulo 3

CLASIFICACION DE AUTOMATAS CELULARES

3.1) LA CLASIFICACION DINAMICA DE WOLFRAM.

Uno de los primeros intentos de clasificación para los autómatas celulares se debe a Stephen Wolfram (1984a), quien basado en el análisis de un gran número de tipos de autómatas celulares, ha sugerido que posiblemente todos los AC pueden ser agrupados en cuatro clases generales, según el tipo de comportamiento cualitativo que exhiben. En casi todos los casos, la evolución de los AC es irreversible. Después de cierto tiempo, las trayectorias en el espacio de configuración, que comienzan casi de cualquier estado inicial, se concentran en atractores (recordemos que los AC son sistemas dinámicos), lo anterior permite la aparición de comportamientos de "autoorganización" en algunos tipos de AC (es decir, la aparición de estados "estructurados" partiendo de estados iniciales sin ninguna estructura). La naturaleza de los atractores determina la forma y la extensión de tales estructuras y da pauta además, a una posible clasificación dinámica de autómatas celulares. Wolfram propone la existencia de cuatro clases cuyos atractores respectivos, en tres de los casos, serían análogos a los atractores que aparecen en los sistemas dinámicos continuos. Así, los atractores de la clase 1 serían similares a los puntos límite, los de clase 2 a los ciclos límite, los de clase 3 a los "atractores extraños"; mientras que los de clase 4 exhibirían un comportamiento mucho más complejo capaz de implementar, en su evolución, cualquier algoritmo finito, es decir serían capaces de exhibir un comportamiento, que Wolfram denomina, de "computación universal". En apariencia, la clasificación en cuatro clases es válida para cualquier tipo de autómatas celulares en una dimensión, sin embargo la abundancia relativa de los miembros de una clase depende tanto del parámetro k , es decir, del número de estados posibles; así como del

parámetro r que fija la distancia de interacción, como ejemplo podemos ver la tabla siguiente, en la que se muestra la abundancia porcentual de las clases para distintos tipos de autómatas celulares (Wolfram 1984a):

Clase	k=2	k=2	k=3	k=3
	r=1	r=2	r=3	r=1
1	0.50	0.25	0.09	0.12
2	0.25	0.18	0.11	0.19
3	0.25	0.53	0.73	0.60
4	0.00	0.08	0.08	0.07

Como puede advertirse, entre los AC elementales no existen los de clase 4.

Los autómatas celulares de clase 1 evolucionan, después de un cierto número de generaciones y partiendo de casi cualquier estado inicial, hacia un estado homogéneo en el cual, todos los sitios tienen el mismo valor, por ello la evolución de estos autómatas celulares en el espacio fase puede considerarse como una evolución hacia un "punto límite". Tal evolución destruye completamente cualquier información contenida en la configuración inicial.

Los autómatas celulares de clase 2 generan estructuras simples que pueden ser estables o periódicas. La evolución de los autómatas celulares de clase 2 es análoga a la de algunos sistemas dinámicos continuos a ciclos límite.

Los autómatas celulares de clase 3 producen patrones caracterizados por estructuras definidas y con escalamiento múltiple¹; de acuerdo a la condiciones iniciales, estos AC pueden generar patrones periódicos con periodo variable. La evolución de

¹ La propiedad de escalamiento múltiple, que también se conoce como autosemejanza o invarianza de escala, la podemos entender intuitivamente del siguiente modo: si se toma una porción del patrón y se "amplifica" (es decir se cambia la escala) y se encuentra que tal porción amplificada es indistinguible del patrón original, entonces decimos que existe escalamiento múltiple en el patrón. Los autómatas celulares de clase 3 poseen esta propiedad y además la dimensión fractal igual a $\log_2 3 \approx 1.59$ es la más común en sus patrones (Wolfram 1984b).

esta clase de autómatas celulares es análoga a la evolución de algunos sistemas dinámicos continuos a atractores extraños.

3.2) LA CLASIFICACION DE PATRONES

Los autómatas celulares han sido utilizados para modelar diversos fenómenos de naturaleza morfogénica y en particular los patrones de coloración en la piel de algunos animales (e.g. Cocho et. al., 1986b). Se ha propuesto que, bajo ciertas condiciones, las células embrionarias portadoras de pigmentos pueden interactuar al reproducirse y generar patrones de coloración semejantes a los que podrían generar los autómatas celulares, es decir, tales patrones de coloración podrían seguir dinámicas semejantes a las que se presentan en la propagación de los AC. Si aceptamos esta idea, en principio, tendríamos que ser capaces de identificar en la naturaleza patrones semejantes a los generados por autómatas celulares; sin embargo el número de AC y de patrones puede llegar a ser muy grande. Para el caso de los AC que estamos manejando, el número llega a 256 patrones que serían estrictamente distintos entre sí; pero el número de "patrones similares" es un poco menor (entendidos estos, por el momento, como aquellos que presentan estructuras semejantes). Aún así, es necesario contar con una clasificación que agrupe a aquellos patrones "semejantes" y que nos pueda indicar cuales y que tanto son "similares" entre sí. Antes de pasar a revisar el problema mismo de la clasificación, convendría revisar algunos aspectos generales sobre la dependencia que existe entre las condiciones iniciales del autómata celular y los patrones que puede generar.

3.2a) Las condiciones iniciales.

Por condiciones iniciales vamos a entender tanto el número N de sitios que forman al autómata celular en el tiempo inicial (también lo llamaremos longitud del AC), así como la distribución (o acomodo) de todos los estados posibles en cada sitio. En cuanto a lo primero, es importante distinguir cuando la longitud es finita (un autómata celular finito) o cuando tal longitud tiende a

infinito (un AC infinito), pues para algunos autómatas celulares esta distinción determina algunas de sus propiedades. En cuanto a lo segundo, la proporción entre el número de veces que aparece un estado y el número de veces que aparecen otros, afecta el patrón del AC y no sólo la proporción, sino también la distribución (e.g. si es aleatoria, uniforme, en dominios alternados, etc..) determina el tipo de patrón que un mismo AC es capaz de generar. Antes de revisar con más detalle la dependencia patrón-condiciones iniciales, introduciremos las siguientes definiciones.

►Df2. Llamaremos densidad de estado al número de veces que un mismo estado E particular aparece en una generación t dada del AC y la representaremos por $n_t(E)$. Si el autómata celular es binario, únicamente existen dos densidades de estado: $n_t(1)$ para los estados representados por "1" y $n_t(0)$ para los representados por "0". En el primer caso hablaremos directamente de densidad de unos y en el segundo de densidad de ceros².

►Df3. Definiremos el comportamiento dinámico de la densidad de estado de la siguiente manera:

i) Si $n_t(E) = c$ (c constante), diremos que el comportamiento dinámico es constante.

ii) Si $n_t(E) = n_{t+e}(E)$ (e entero), diremos que el comportamiento dinámico es periódico, con periodo igual a e .

iii) Si $n_t(E)$ es aperiódico, diremos que el patrón tiene comportamiento aperiódico o caótico.

Como una observación podemos decir que estos comportamientos constantes, periódicos y caóticos pueden caracterizar a la mayoría de los autómatas celulares de clase 1, 2 y 3 respectivamente, según la clasificación de Wolfram (recordemos que

2

Más correctamente deberíamos llamar a esta propiedad "frecuencia de estado"; pero hemos optado por densidad para no introducir confusiones con respecto a la frecuencia de un comportamiento periódico. Por otra parte, es claro que la densidad así definida, no está normalizada.

en esta clasificación, los comportamientos dinámicos se definen en el espacio de configuración y no con la densidad de estado).

▷Df4. Diremos que dos patrones son idénticos si y sólo si son iguales punto a punto. Sean $P_{R_1}(t)$ y $P_{R_2}(t)$ dos patrones formados por los sitios a_i y b_j respectivamente, y que son generados por las reglas R_1 y R_2 . Si ambos patrones son idénticos entonces:

$$P_{R_1}(t) = P_{R_2}(t) \iff a_i^t = b_j^t \quad \forall t, (i=j).$$

▷Df5. Diremos que existe equivalencia topológica entre dos patrones generados por el mismo autómata celular si el comportamiento dinámico de sus patrones es el mismo.

▷Df6. Diremos que un cambio en las condiciones iniciales de un AC es no-esencial si tal cambio no altera la equivalencia topológica entre los patrones antes y después del cambio. Si se cambia la equivalencia topológica, diremos que el cambio en las condiciones iniciales es esencial.

3.2b) El número de sitios iniciales.

Ejemplificaremos mediante tres autómatas celulares de distinta clase los tres tipos de comportamiento dinámico introducidos en la definición 3. En los tres casos que se muestran en la figura 2 tenemos AC generados a partir de una condición inicial aleatoria, donde la aparición de "ceros" y "unos" es equiprobable; la longitud de la condición inicial es de 80 sitios ($N=80$) y las condiciones de borde son periódicas (el AC se propaga sobre la superficie de un cilindro). En (a) se muestra un patrón generado por la regla 255; este AC genera "unos" independientemente de la condición inicial, lo anterior implica que $n(1)$ es igual a N , y por lo tanto su histograma es constante como puede apreciarse en (a'). El autómata celular generado por la

regla 255 no es "legal"³ pero exhibe un comportamiento como el que caracteriza a los autómatas de clase 1. En (b) se muestra el patrón generado por el autómata celular con regla 117 y en (b') se muestra el histograma correspondiente de $n_t(1)$ como puede observarse $n_t(1) = n_{t+2}(1)$, es decir, el AC es periódico con periodo igual a 2. El AC con regla 117 no es, como en el caso anterior, un autómata celular "legal" pero exhibe un comportamiento característico de los AC de clase 2. Finalmente en (c) aparece el patrón generado por el AC con regla 18, y en (c') se muestra su histograma, el patrón exhibe un comportamiento estructurado autoorganizado, es decir, es capaz de formar estructuras (los triángulos) a partir de condiciones iniciales sin estructura, lo anterior lo sitúa como un AC de clase 3. El comportamiento de $n_t(1)$ es aperiódico en el intervalo de las primeras 150 generaciones. Veamos pues como influye en estos autómatas celulares un cambio en la longitud inicial, es decir en la magnitud de N (además de estos tres ejemplos, hemos probado todos los 256 AC elementales).

En el caso del autómata celular con regla 255, un cambio en la magnitud de N no modifica el comportamiento dinámico de $n_t(1)$, éste se mantiene constante e igual a N . En el caso del autómata con regla 117 el cambio en la magnitud de N , es capaz de modificar el valor máximo de $n_t(1)$; pero no modifica el comportamiento dinámico. Lo anterior podemos verlo en la figura 3, en (a) aparece el histograma para $N=20$ y en (b) para $N=40$, en ambos casos el periodo se conserva igual a dos. En (c) aparece el histograma de $n_t(1)$ para el autómata con regla 18 cuando $N=20$, como puede observarse el comportamiento dinámico es periódico con periodo 7 (las flechas señalan el inicio de un periodo). En (d) aparece el histograma del mismo autómata cuando $N=4$; en este caso exhibe un comportamiento periódico con periodo 67. En el caso del histograma

³ Según la definición de Wolfram, los AC son legales si sus reglas generan un cero a partir de una interacción entre ceros y si existe simetría en los casos 001 y 100, así como en 110 y 011.

de la figura 2(c') el AC exhibió un comportamiento periódico con periodo 25 después de un transiente aperiódico de 200 generaciones, cuando $N=100$ se observó una periodicidad con periodo 263 después de un transiente aperiódico de 125 generaciones. Lo anterior sugiere que cuando N crece el periodo crece de tal manera que cuando el autómata es infinito el periodo también lo es. De hecho cualquier autómata celular finito de clase 3 presenta un comportamiento periódico con periodo de a lo más 2^N generaciones (el número total de posibles configuraciones iniciales) después de un transiente aperiódico inicial, el tiempo que toma en ocurrir el primer ciclo se conoce como tiempo de recurrencia de Poincaré (Wolfram, 1983).

Veamos ahora directamente sobre los patrones, el efecto de modificar la longitud inicial del autómata celular. En la figura 4(a) tenemos los patrones generados por el autómata "legal" de clase I definido por la regla 76. En la parte superior aparece el patrón generado por condiciones iniciales aleatorias con $N=20$, podemos comparar este patrón con el que se obtiene cuando $N=40$, observemos que el patrón de los primeros 20 sitios, cuando $N=40$, es idéntico punto a punto al generado por el AC cuando $N=20$ (las condiciones iniciales son las mismas), podemos afirmar entonces que existe una contención propia del primer patrón en el segundo; por lo tanto la variación de N no modificó el patrón (existe identidad punto a punto). Podemos observar que lo mismo sucede cuando $N=40$ y $N=80$ y con $N=80$ y $N=100$.

En el caso de la figura 4(c), tenemos al AC "legal" con regla 178, este autómata celular es periódico de clase 2. Podemos observar que nuevamente existe contención propia de los patrones sucesivos de acuerdo al incremento de N ; debido a ello podemos afirmar que la variación de la longitud inicial no modifica el patrón (nuevamente existe identidad punto a punto).

El caso de la figura 4(b) es más interesante. Bajo la misma condición inicial, el patrón que se obtiene cuando $N=20$ es distinto al que se obtiene cuando $N=40$, que a su vez es distinto

ferromagnéticos lineales.

En c) los estados se distribuyen de manera ordenada, de la misma forma en que se distribuirían, en una línea, los objetos con carga eléctrica sujetos a la influencia de un campo eléctrico externo. La distribución obtenida así, tendería a una configuración de "energía mínima" en la que los objetos idénticos se acomodarían lo más lejanamente posible unos de otros (véase Cocho et. al., 1986a). Esta distribución estaría caracterizada por el cociente p/q , donde p indica el número de estados de un mismo tipo distribuidos en q lugares. Por ejemplo las siguientes tres:

- 1)...101010101010... $p/q=1/2$ (un uno cada dos lugares).
- 2)...100100100100... $p/q=1/3$ (un uno cada tres lugares).
- 3)...10010100101001... $p/q=2/5$ (dos unos cada cinco lugares).

En el caso de las condiciones iniciales por dominios alternados hemos utilizado una configuración particular formado por bloques alternados de longitud decreciente del tipo:

...11111111110000000001111111100000001111110000011110000110010...

y se ha observado que este tipo de condiciones iniciales generan patrones similares a los que se producen partiendo de condiciones al azar; (véanse los ejemplos de figura 5) debido a ello, nos reduciremos sólo a considerar las condiciones iniciales del tipo a y c; es decir, los casos extremos de condiciones iniciales absolutamente ordenadas en sus estados y condiciones iniciales sin ninguna correlación en sus estados.

Revisemos primeramente el caso de las condiciones iniciales de "energía mínima". En la figura 6 tenemos el patrón que genera el AC con regla 117 ($N=80$) con una condición inicial ordenada del tipo $p/q=1/6$ a un lado del patrón tenemos el histograma correspondiente para $n(1)$, como se observa, el comportamiento dinámico es periódico con periodo 2. En (b) tenemos el caso en que $p/q=1/8$, como puede apreciarse, el comportamiento permanece

inalterado con esta nueva condición inicial y por ello los patrones en (a) y (b) son equivalentes topológicamente. Lo mismo podemos decir de los casos en que $p/q=1/10$ (c) y $p/q=1/40$ (d). Incluso, como observamos en (e), una condición aleatoria ($p=0.5$) origina un patrón con equivalencia topológica a los que producen las condiciones iniciales ordenadas que acabamos de revisar; por lo tanto deberíamos concluir que en este caso, un cambio en la distribución de los estados iniciales provoca un cambio no-esencial en los patrones, este resultado es válido para todos los autómatas celulares de clase 1 y 2¹.

El caso de los AC de clase 3 es más complejo: en la figura 7(a) observamos el patrón que corresponde al autómata celular con regla 18, que se propaga con una condición inicial ordenada (con $p/q=1/8$); el patrón está caracterizado por una fuerte homogeneidad que se refleja en el comportamiento constante de $n_t(1)$. En (b) tenemos que $p/q=1/8$ y el autómata celular muere después de tres generaciones. En (c) $p/q=1/5$ y el patrón nuevamente es homogéneo con $n_t(1)$ constante. En (d) y (e) el comportamiento dinámico es completamente diferente cuando $p/q=1/10$ y $p/q=1/20$, respectivamente; en el primer caso es posible distinguir un comportamiento estructurado, pero sin escalamiento múltiple, mientras que $n_t(1)$ es periódico con periodo 3; en el segundo caso el comportamiento estructurado del patrón es más notorio y comienza a dar muestras de escalamiento múltiple, sin embargo el patrón está caracterizado por una gran homogeneidad que se refleja en la periodicidad (periodo 6) de $n_t(1)$. En (f) tenemos que $p/q=1/25$ y el comportamiento estructurado y con escalamiento múltiple es aún más notorio, sin embargo sigue presentando cierta regularidad que se refleja en el comportamiento periódico de $n_t(1)$, en este caso el periodo fue igual a 60; en (g) tenemos que $p/q=1/4$

¹ En el caso de los AC de clase 2 con reglas 82, 28, 154, 168, 167, 180, 181 y 210; el cambio en la distribución de estados conserva el comportamiento periódico, pero el valor del periodo se modifica.

y el autómata celular muere en la segunda generación; por último, en (h) mostramos el patrón que se obtiene con una condición inicial aleatoria ($p_1=0.5$), como se observa, el patrón del autómata celular muestra un comportamiento caótico en las primeras 100 generaciones.

Las condiciones iniciales en el caso de los autómatas celulares de clase 3 determinan el comportamiento dinámico de sus patrones y originan la existencia de grandes cambios en la equivalencia topológica, por ello podemos concluir que los cambios en las condiciones de los estados iniciales pueden ser cambios de tipo esencial.

Una vez que hemos llegado a las conclusiones anteriores deberíamos preguntarnos por una propiedad que se encuentra ligada a los cambios en las condiciones iniciales: la estabilidad de los patrones frente a las perturbaciones.

3.2d) Estabilidad y perturbaciones

Por perturbación vamos a entender la "mutación local" que se produce cuando un sitio a_i^t cambia de estado después de que su estado quedó determinado por la regla de propagación. La perturbación estará caracterizada por una probabilidad de ocurrencia. Diremos que un autómata celular se encuentra "altamente perturbado" si la probabilidad de ocurrencia es del orden de 0.01 y si es del orden de 0.0001 se encontrará "poco perturbado". En la figura 8 mostramos el número de perturbaciones aleatorias que ocurrieron en la propagación del AC con regla 255; en (a) se observan dos perturbaciones en un total de 16000 sitios cuando $p=0.0001$; mientras que en (b) se observan 152 perturbaciones cuando $p=0.01$.

En la figura 9 se muestra el patrón generado por la regla 236, el autómata celular es de clase 1. Una perturbación en el patrón (un patrón poco perturbado) origina un cambio en el valor máximo de $n(i)$ cuyo valor, sin embargo, sigue constante.

En la figura 10(a) se muestra el AC generado con la regla 117

y que se propaga partiendo de una condición inicial con estados ordenados de "energía mínima" con $p/q=1/5$. Una primera perturbación se presenta al cabo de 82 generaciones (indicada en el histograma de $n(i)$ con una flecha) mientras que al cabo de 110 generaciones ocurre una segunda perturbación. La primera de ellas origina un cambio en el valor máximo de $n(i)$, pero el período se conserva sin cambio. La segunda perturbación modifica nuevamente el valor máximo de $n(i)$, pero el período nuevamente se mantuvo sin cambio. En (b) tenemos el mismo autómata celular con las mismas condiciones iniciales que en (a) pero esta vez se encuentra altamente perturbado. Los efectos provocados por cada perturbación individual se pueden identificar fácilmente, pues cada vez que ocurre una el valor máximo de $n(i)$ se modifica, lo interesante es que el comportamiento dinámico cambia en apariencia durante el tiempo en el que ocurren las perturbaciones sin embargo, se recupera la periodicidad original cuando éstas desaparecen, de hecho el valor que se obtiene para $n(i)$ con la última perturbación se conserva a lo largo de la propagación posterior.

En la figura 11 se muestra el caso del autómata celular con regla 18 y con estados iniciales ordenados con $p/q=1/5$. En (a) se muestra el patrón que se obtiene antes y después de que aparece una única perturbación (señalada con la flecha); antes de la perturbación, el patrón está caracterizado por un estado ordenado y homogéneo con $n(i)$ constante, la aparición de la perturbación origina el rompimiento de la homogeneidad y el surgimiento de un patrón estructurado y con escalamiento múltiple cuya densidad de unos muestra un comportamiento caótico, al menos hasta la generación 150. En (b) tenemos un patrón altamente perturbado, las primeras tres perturbaciones (indicadas con las flechas) aparecen en las generaciones 4, 13 y 18. Tales perturbaciones originan localmente la transición de un estado ordenado a un estado caótico; las perturbaciones que aparecen una vez que el patrón tiene un comportamiento aperiódico no provocan alteraciones al comportamiento dinámico del patrón, pero son capaces de provocar

distorsiones locales en las estructuras triangulares.

Podemos proponer las siguientes conclusiones, para los casos en los que los AC poseen configuraciones iniciales de mínima energía y estén sujetos a perturbaciones:

- i) Los AC de clase 1 no modifican la equivalencia topológica frente a perturbaciones pero si registran cambios no-esenciales en la propagación del patrón, en este sentido puede afirmarse que son "estables" frente a perturbaciones.
- ii) Los AC de clase 2 modifican la equivalencia topológica localmente durante el tiempo en el que ocurren las perturbaciones y sólo si ocurren con una probabilidad grande. Una vez que las perturbaciones desaparecen, los AC recuperan el patrón original pero modificado de manera no-esencial. Podríamos decir que los AC de clase 2 son "estables" frente a perturbaciones.
- iii) Los AC de clase 3 son "altamente inestables" frente a perturbaciones. Una sola perturbación es capaz de provocar la transición irreversible de un estado altamente ordenado a un estado caracterizado por una propagación caótica, de un estado altamente homogéneo a un estado estructurado y multiescalado. Una sola perturbación provoca un cambio esencial en la propagación del patrón².

3.2e) Un método de clasificación jerárquica de patrones.

La discusión anterior nos permite concluir que el patrón que una AC puede generar depende estrechamente de la configuración inicial, ante ello es necesario especificar el tipo de condiciones iniciales que deben seleccionarse para una clasificación de patrones. Supongamos que hemos seleccionado una condición inicial "altamente ordenada" que consiste en una secuencia de "unos" ($p/q=1$):...11111111... y nos preguntamos cuantos patrones

² Este resultado se aplica a los AC de clase 3 con reglas 106 y 120, sólo si la perturbación origina que una secuencia en la que existe un "uno", muta a una en la que existan dos unos contiguos. Por ejemplo 001*011.

distintos podremos obtener con los 256 AC elementales. Dado que la interacción de vecinos involucra únicamente a tres sitios contiguos para generar un sitio de la siguiente generación, tendremos una única secuencia posible: 111, la cual puede dar lugar al estado "1" o al estado "0". Si da lugar a un cero, la segunda generación del AC estará formada por ceros, si da lugar a unos la secuencia de la segunda generación estará formada tan sólo por unos, es decir:

Generación	caso 1) 111 → 0	caso 2) 111 → 1
1A	1111111111	1111111111
2A	0000000000	1111111111

En el caso 1) tenemos nuevamente dos posibilidades, pues la secuencia 000 puede dar origen a un cero o a un uno; si sucede lo primero, de la 3ª generación en adelante tendremos una secuencia de ceros; si sucede lo segundo, tendremos una secuencia de unos:

Generación	caso 1a) 000 → 0	caso 1b) 000 → 1
1A	1111111111	1111111111
2A	0000000000	0000000000
3A	0000000000	1111111111

El caso 2) y los casos 1a) y 1b) definen los únicos tres patrones distintos posibles: un patrón formado por "unos", uno formado por "ceros" y un último formado por la alternancia de ambos. Puesto que únicamente existen tres patrones distintos, tendríamos que preguntarnos qué propiedades de los AC elementales son la causa para que autómatas celulares con reglas distintas e incluso AC de clase distintas puedan agruparse en una sola familia de acuerdo al patrón que generan con esta condición inicial. Para este caso la respuesta es muy simple: si el segmento 111 propaga un uno, entonces la regla del autómata celular forzosamente es igual o mayor a 128. Si propaga un cero, es un AC con regla menor

o igual a 127. Si el segmento 000 propaga un uno, la regla es número impar. Si propaga un cero la regla es par (notemos que el segmento 111 define al bit más significativo de la regla, mientras que el segmento 000 define al bit menos significativo). El anterior queda resumido en la siguiente tabla:

111	000	Propiedades	Tipo de patrón
1	1	$R \geq 128$, R impar	unos
1	0	$R \geq 128$, R par	alternado
0	1	$R \leq 127$, R impar	alternado
0	0	$R \leq 127$, R par	ceros

Una condición inicial ordenada distinta a los casos límite ($p/q=1$ ó 0) genera una mayor variedad de patrones³; pero la identificación de las propiedades de las reglas que permite agrupar a los autómatas celulares en grupos de patrones se complica a medida que el número máximo de patrones distintos aumenta.

Estrictamente el número máximo de patrones distintos que pueden obtenerse es igual al número de autómatas distintos. Si los AC son binarios, el número máximo será $2^{2^{(2r+1)}}$.

Hemos revisado una gran cantidad de condiciones iniciales distintas para los AC elementales y se ha encontrado que la mayor diversidad de patrones se obtiene cuando la configuración inicial es aleatoria con $p_1=0.5$; pero aún así el número máximo de patrones distintos no es 256. A propósito, es necesario precisar que se entiende por "patrones distintos" ya que el número de tales patrones dependerá del criterio de semejanza que estemos empleando; tanto éste como el problema de la clasificación de patrones los abordaremos a continuación.

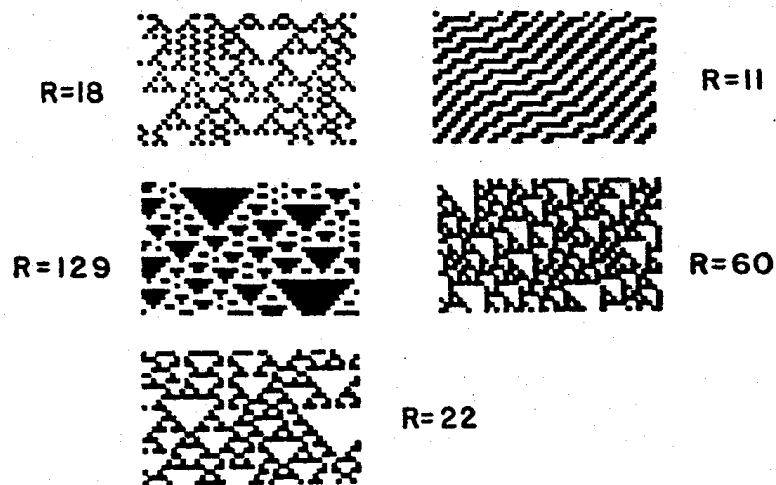
³ Podríamos establecer como un teorema, que el número mínimo de patrones que pueden obtenerse con los autómatas celulares binarios es tres, independientemente del parámetro r ; la demostración tendría los mismos argumentos que la discusión que dimos arriba.

Haremos uso de la siguiente definición:

Df.7 Sea \mathcal{L} el conjunto de todas las p -variables que describen a un conjunto \mathcal{P} de patrones y sean $\mathcal{P}_{R_1}(t)$ y $\mathcal{P}_{R_2}(t)$ dos patrones de \mathcal{P} generados por las reglas R_1 y R_2 . Diremos que ambos patrones son **próximos** si los subconjuntos \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 de \mathcal{L} que los describen son iguales y diremos, en este caso, que las reglas R_1 y R_2 son **sinónimas**. Además entenderemos como grupo, clase o familia al conjunto formado por los patrones que son próximos entre sí.

Veamos un ejemplo para aclarar lo anterior. El conjunto \mathcal{L} de variables que caracterizan a los patrones generados por los AC elementales bajo condiciones iniciales ordenadas con $p/q=1$, está formado por tres variables únicas: la variable "unos", la variable "ceros" y la variable "alternados". Todos los patrones que pertenecen a la clase "alternados" son patrones próximos (en este caso simple son, además, idénticos punto a punto); los que pertenecen a la clase "unos" son próximos entre sí y lo mismo sucede con los de la clase "ceros". Haremos uso de otro ejemplo con el objeto de precisar aún más, el término proximidad y para introducir las primeras ideas de una clasificación jerárquica de patrones.

Consideremos los cinco patrones que aparecen en la figura siguiente:



que corresponden a las reglas 18, 11, 129, 60 y 22 y definamos al conjunto \mathcal{F} formado por las siguientes variables (o rasgos) subjetivas:

Variable	Característica
V1	triángulos
V2	triángulos blancos
V3	triángulos negros
V4	triángulos equiláteros
V5	triángulos rectos
V6	corrimiento izquierdo

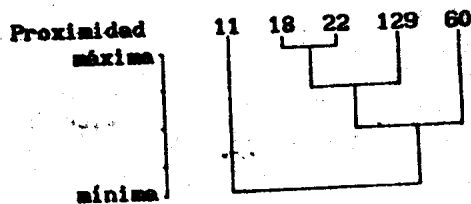
que utilizaremos para describir a los patrones de la siguiente manera:

Patrón	Variablas
18	V1, V2, V4
11	V6
129	V1, V3, V4
60	V1, V2, V5
22	V1, V2, V4

Observemos en la tabla anterior, que los subconjuntos de variables para el patrón 18 y el patrón 22 tienen las mismas variables y por ello son iguales, lo anterior nos permite afirmar que bajo el conjunto \mathcal{F} de variables ambos patrones son próximos (y sus reglas sinónimas). La intersección del subconjunto de variables para las reglas 129 y 60 con las reglas 18 ó 22 no es vacía, es decir poseen características comunes en sus patrones; por ejemplo, la regla 18 y la regla 129 comparten las variables v_1 y v_4 que caracterizan a las estructuras triangulares que son equiláteras; pero en un caso son blancas y en el otro negras. Por otra parte la regla 18 y la regla 60 comparten las variables que representan a las estructuras triangulares blancas; pero en un caso son equiláteras y en el otro rectas. Lo anterior vuelve necesario referirnos al término proximidad no ya en términos

absolutos sino relativos; así, podríamos decir que existe "mayor proximidad" entre las reglas 18 y 22 que entre las reglas 18 y 60 o entre las reglas 22 y 129; pero también es necesario jerarquizar la importancia de las variables para poder distinguir entre "mayor" o "menor" proximidad, por ejemplo, las reglas 18 y 129 comparten dos variables y las reglas 18 y 60 también, es necesario entonces, decidir cual de ambas es "más importante". Supongamos que hemos otorgado mayor importancia a las variables "forma del triángulo" que a las variables "color del triángulo". Jerarquizadas de esta manera las reglas 18 y 129 son "más próximas entre sí de lo que son las reglas 18 y 60".

Basándonos en el razonamiento anterior podemos proponer la siguiente clasificación: los patrones 18 y 22 forman una primera familia con el nivel "máximo" de proximidad; los patrones 18,22 y 129 forman un segundo grupo con un nivel menor de proximidad; los patrones 18,22,129 y 60 forman un tercer grupo con un nivel aún menor de proximidad y por último, el patrón 11 se agrega a los anteriores para formar el grupo con la menor proximidad. De hecho, el razonamiento anterior es el principio de un método de la estadística multivariada que se conoce con el nombre de Análisis de cúmulos (e.g. Jardine y Sibson, 1971; Gordon, 1981). La clasificación anterior la podemos expresar graficamente através de un árbol jerárquico llamado Dendrograma:



En el caso de los AC elementales con condiciones iniciales al azar, tenemos 256 patrones (ver el apéndice B), para describirlos, se define el conjunto \mathcal{L} de p -variables que en este caso suman 29 (la elección de las variables es completamente arbitraria y

subjetiva, tanto en el número como en el tipo. Ver el apéndice A), a continuación se define una matriz A que llamaremos matriz de datos formada por 256 renglones que corresponden a cada uno de los AC y 29 columnas que corresponden a cada una de las variables de \mathcal{X} . Cada entrada a_{ij} de la matriz de datos registra la presencia o ausencia de la j -ésima variable en el patrón del i -ésimo autómata celular, la ausencia se registra con un "0" y la presencia con un "1"; lo anterior nos dice que la matriz de datos será una matriz binaria (ver el apéndice A) a la que podremos dar la siguiente interpretación: la matriz de datos representa un conjunto de 256 vectores en un espacio ortogonal de dimensión 29, cada una de las componentes de un vector son las proyecciones al conjunto \mathcal{X} de variables. La interpretación geométrica anterior nos facilitará el entendimiento de la forma en la cual se cuantifica la proximidad entre patrones, a través de un coeficiente de disimilitud que definiremos a continuación:

Def. Sea \mathcal{P} el conjunto de patrones a clasificar, un coeficiente de disimilitud Cd es una función de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ a los reales tal que:

- i) $Cd_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{P}.$
- ii) $Cd_{ii} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{P}.$
- iii) $Cd_{ij} = Cd_{ji}, \quad \forall i, j \in \mathcal{P}.$

Las tres propiedades de Cd definen, en el espacio vectorial \mathcal{P} , una propiedad métrica. El tipo de métrica que se utiliza en el análisis de cúmulos depende del problema particular y no existe un criterio único para seleccionarla; en nuestro caso hemos utilizado la métrica λ_1 de Minkowski:

$$Cd_{i,j}^{(\lambda)} = \left[\sum_{k=1}^p |x_{ik} - x_{jk}|^\lambda \right]^{1/\lambda}, \quad \lambda=1$$

es decir:

$$Cd_{i,j} = \sum_{k=1}^p |x_{ik} - x_{jk}|$$

recibe el nombre de métrica Manhattan.

Podemos reconocer que la proximidad está relacionada con la distancia que existe entre los vectores del conjunto \mathcal{P} , sin embargo una vez que se han calculado los coeficientes de disimilitud para todos los vectores y que se procede a aglomerar aquellos de menor disimilitud (los más próximos), es evidente que se requiere de otra manera de medir la disimilitud para poder comparar entre un grupo de vectores y un único vector; por ello se define el coeficiente de disimilitud para grupos de la siguiente manera:

Sean G_i y G_j dos grupos que contienen n_i y n_j elementos, si ambos se aglomeran para formar una nueva familia, la disimilitud entre este nuevo grupo y el grupo G_k se expresa como:

$$Cd_{k,(i,j)} = \frac{n_i}{n_i+n_j} Cd_{ki} + \frac{n_j}{n_i+n_j} Cd_{kj} \quad (1)$$

Desde luego, este coeficiente de disimilitud se reduce a la métrica Manhattan cuando los grupos que se aglomeran tienen un solo elemento, es decir un solo vector. El método de aglomeración que utiliza el coeficiente de disimilitud definido en (1) se conoce como Método de agrupamiento promediado con peso y su algoritmo es el siguiente (Gordon, 1981):

- 1) Se agrupan los dos grupos G_i , G_j que tengan el valor mínimo de Cd_{ij} .
- 2) Se recalcula la disimilitud entre el grupo nuevo y el resto de los vectores utilizando la expresión (1).

La matriz de datos en nuestro caso la hemos dividido en dos submatrices, una de ellas contiene todos los AC que poseen como característica "corrimientos" en sus patrones, la otra submatriz contiene a los AC cuyos patrones no presentan esa característica. La primera submatriz contiene 95 AC y la segunda 20, en total son 115 reglas no sinónimas (la lista de las reglas sinónimas aparece

en el apéndice A). Los resultados de la clasificación jerárquica según el conjunto \mathcal{P} de variables aparece en los dendrogramas de las figuras 12 y 13.

Haremos uso de la siguiente definición que nos será útil para cuantificar la proximidad entre patrones o grupos de patrones:

Def10. Sea Cd_k el coeficiente de disimilitud para el grupo G_k y sea Cd_{\max} el valor máximo de disimilitud que se obtiene tras aplicar el algoritmo de agrupamiento a un conjunto de vectores, el Índice Normalizado de Proximidad para el grupo G_k será:

$$I_{p_k} = 1 - \frac{Cd_k}{Cd_{\max}} ; I_{p_k} \in [0,1]$$

Como un ejemplo, podemos decir el índice normalizado de proximidad para los patrones 18 y 22 es igual a 1, y por ello tienen la máxima proximidad bajo el conjunto \mathcal{P} de variables. Las reglas 110, 124, 234, 248, 136, 137, 192 y 193 (así como sus respectivas sinónimas) se agrupan en una gran familia con un coeficiente de disimilitud de 4.5 (véase la figura 12), por otra parte las reglas 0, 160, 237, 250, 129, 18, 146, 45, 169, 106, 120 y 255 (y sus respectivas sinónimas) se agrupan en otra gran familia con un coeficiente de disimilitud igual a 4.37. Ambas familias se agrupan posteriormente a un nivel de disimilitud igual a 5.27, y éste es precisamente, el valor máximo de disimilitud para ese subconjunto de vectores. El índice normalizado de similitud es cero y por ello ambas familias tienen la menor proximidad posible.

El índice normalizado de proximidad, así como la clasificación que hemos dado de los patrones de los AC elementales serán de gran utilidad en el capítulo siguiente, en el que propondremos a los AC como modelo en morfogénesis.

Titulo 4

5 AUTOMATAS CELULARES COMO MODELO MORFOGENETICO.

4.1 INFORMACION POSICIONAL Y CRECIMIENTO CLONAL

Vamos a proponer un modelo que utiliza el marco teórico planteado por dos modelos anteriores (Cocho et. al., 1986a; Hart, 1968, 1978). Consideremos un número pequeño de células que inicialmente se acomodan en una secuencia lineal. Una vez que cada célula se acomoda, se "congela" en su sitio y no posee más la propiedad de movilidad; tal congelamiento puede ocurrir mediante mecanismos diversos: se ha propuesto que para algunos tipos celulares, sobre todo tejidos vegetales, las células son capaces de fijarse entre sí por medio de estructuras especializadas que actúan como "tabiques de enlace" (Albershelm, 1975) o bien se ha propuesto la existencia de moléculas especializadas en las superficies de las membranas que son capaces de actuar como "pegamentos" celulares (Edelman, 1984). Las células son capaces de interactuar químicamente entre sí y pueden reproducirse una sola vez por bipartición. Las células madres pueden crecer y aumentar de tamaño (le llamaremos crecimiento clonal, véase Cocho et. al., 1986a); las células hijas se adhieren a las madres en una segunda secuencia lineal.

A medida que el "tejido celular" se propaga en el tiempo y en el espacio, se encuentra sujeto (además de las interacciones celulares locales) a influencias ejercidas por "campos" químicos externos que son capaces de modificar las interacciones celulares, tales campos reciben el nombre de gradientes de morfógenos (Wolpert, 1968). Un morfógeno es pues un agente químico capaz de modificar la reproducción y la diferenciación celular. Si bien es cierto que no se conoce ninguna sustancia identificada como un morfógeno específico, se sabe de la existencia de moléculas cuya presencia en las zonas de reproducción celular contribuyen decisivamente al proceso de la diferenciación celular (Gierer,

1974; Levi-Montalcini et. al., 1979).

Supongamos que se tiene un espacio en el cual va a ocurrir el crecimiento de un tejido celular (e.g. una caja de petri con un medio de cultivo), en un extremo se coloca una cadena lineal de células. En el medio existe un gradiente de concentración de una sustancia con acción morfogéna, de tal manera que existe la mayor concentración en el zona donde se colocó el arreglo celular inicial, y la concentración disminuye en la dirección en la que ocurre la división celular¹. A medida que el frente celular formado por las células más jóvenes avanza, encuentra una disminución gradual de la concentración del morfógeno. Si las células son capaces de percibir la concentración por medio de mecanismos de umbral, las células podrían diferenciarse en distintos tipos celulares, dependiendo de la concentración. Así, las células se diferenciarían de acuerdo a su posición relativa en el gradiente de concentración. Esta hipótesis se conoce como hipótesis de información posicional (véase Wolpert, 1978).

4.2) LOS AC COMO MODELO EN LA FORMACION DE PATRONES BIOLÓGICOS

El esquema anterior lo podemos modelar con autómatas celulares de la siguiente manera: consideremos un arreglo binario inicial de sitios que poseen interacciones de primeros vecinos. Supongamos que en el espacio en el que se propagan los AC, está acotado al cabo de una cierta longitud x_0 . En este espacio se encuentran distribuidos dos "morfógenos" (m_1 y m_2) de tal manera que la concentración de m_1 es máxima al inicio y mínima en x_0 , mientras que la concentración de m_2 es mínima al inicio y máxima en x_0 . Supongamos que la concentración de m_1 es análoga a la probabilidad de que el autómata celular se propague bajo la regla R_1 (p_{R1}) y la concentración de m_2 es análoga a p_{R2} . p_{R1} decrece

¹ Se sabe perfectamente que un tejido celular que crece en un medio de cultivo, se inhibe cuando la capa celular toca las paredes del recipiente. Si el arreglo celular se coloca en el extremo de un recipiente rectangular, el tejido crece en una sola dirección. *

linealmente al mismo tiempo que p_{R2} crece, de tal manera que $p_{R1} + p_{R2} = 1$ en todo momento. La interacción entre las reglas se produce en un espacio delimitado por 200 generaciones de propagación y 120 sitios de longitud en la condición inicial. Para las definiciones del estado en cada sitio, se genera un número fraccionario al azar en el intervalo $[0,1]$; si resulta mayor o igual a p_{R1} , el autómata celular se propaga en ese sitio con la regla R1, en caso contrario se propaga con la regla R2. En todos los casos que hemos analizado, la condición inicial se ha tomado con una distribución al azar y equiprobable para los dos estados.

Consideremos la figura 14 en la que $R_1=126$ y $R_2=129$; en la primera generación el autómata se reproduce con $p_{R1}=1$ y genera un patrón estructurado de triángulos "equilateros" blancos; cuando $p_{R1}=0.75$ las estructuras blancas comienzan a perderse en el fondo negro; cuando $p_{R1}=0.5$ el número de sitios caracterizados por el color blanco igualan a los de color negro, podríamos decir que esta zona está caracterizada por "ruido estadístico"; cuando $p_{R1}=0.25$ comienzan a evidenciarse los triángulos negros sobre fondo blanco y por último cuando $p_{R1}=0$ las estructuras negras dominan el patrón.

Lo que hemos descrito anteriormente puede ser interpretado de la siguiente forma: la concentración de m_1 provoca que las "células" se "diferencien" de tal manera que la interacción entre ellas da lugar a un patrón caracterizado por estructuras triangulares blancas. Cuando la concentración del mismo morfógeno es 75% de su valor máximo, las "células" responden mediante un mecanismo de umbral probabilístico de tal modo que el 75% de ellas se "diferencian" de acuerdo a m_1 y el 25% de acuerdo a m_2 . A medida que la concentración de m_1 disminuye, el porcentaje de "células" que se "diferencian" con este morfógeno disminuye, de tal manera que cuando la concentración es cero, las "células" en su totalidad se "diferencian" de acuerdo a m_2 para dar lugar a estructuras triangulares negras. De esta manera, las "células" adquieren la "información" de como interaccionar, de acuerdo a su

posición relativa en el espacio. Esta interpretación le daría a nuestro modelo, la equivalencia con la hipótesis de información posicional.

Podemos dar una discusión adicional, ahora en base a lo afirmado sobre las perturbaciones a los AC en el capítulo anterior. Consideremos de nuevo la figura 14, en la primera generación el autómata celular se propaga sin perturbaciones bajo la regla 126; a medida que transcurre el tiempo, comienzan a aparecer perturbaciones con una probabilidad baja de ocurrencia, sabemos que el autómata celular 126 es un AC de clase 3 y que por lo tanto es sensible a las perturbaciones siempre y cuando las condiciones iniciales de su propagación sean ordenadas de energía mínima, pero una vez que el patrón generado es estructurado multiescalado y aperiódico, las perturbaciones sólo pueden provocar distorsiones a las estructuras, por ello, las perturbaciones que aparecen en la propagación del AC distorsionan el patrón y la distorsión es mayor a medida que aumenta la probabilidad de ocurrencia de la perturbación; que por cierto no es del todo azarosa, pues de hecho, obedece una regla: la regla 129. Cuando la probabilidad de ocurrencia alcanza el valor 0.75 la perturbación es tan fuerte que domina el patrón, de ahí en adelante la regla 129 domina la propagación. Es importante insistir sobre los efectos de la perturbación; en el ejemplo de la figura 14 tanto el AC 126 como el 129 son autómatas celulares de clase 3, tenemos entonces la transición gradual entre autómatas celulares de una misma clase (es decir entre comportamientos dinámicos caóticos). Si denominamos a la región acotada por $\rho=0.25$ y $\rho=0.75$ (la zona alrededor del punto de equiprobabilidad) como la región de transición, entonces en este caso tal región está caracterizada también por un comportamiento caótico.

Surgen inmediatamente dos tipos de preguntas: ¿que efecto tiene sobre los patrones la transición de autómatas celulares de distintas clases? y ¿que efectos tiene sobre los patrones la interacción de reglas con distintos índices de similitud?

Vamos a distinguir un subconjunto de variables del conjunto a las que llamaremos variables dicotomas o variables de conflicto, debido a que aparecen en pares y, a que describen características "encontradas" de los patrones. Estas variables son, por ejemplo, las dos variables color (blanco y negro) y las variables de dirección de corrimiento lateral (izquierda y derecha). Volvamos al ejemplo de la figura 14, los AC con reglas 126 (sinónima a la 18) y 129 son autómatas celulares muy próximos, el índice normalizado de proximidad es $I_p = 1 - (1.5/5.27) = 0.72$. De hecho la única variable que les impide ser próximos y sinónimos es la variable color, por ello la interacción de ambos autómatas celulares es una "interacción de conflicto". En lo sucesivo vamos a revisar diversos ejemplos en los que esten involucrados patrones con distintas proximidades, distintas clases y distintas variables de conflicto.

En la figura 15 tenemos la interacción de las reglas 12 y 68, ambas reglas son sinónimas (y también lo son con la regla 4), ambos autómatas celulares son clase 1 y no poseen variables de conflicto entre sí. Lo anterior ocasiona una transición suave, continua y homogénea de una regla a la otra.

En la figura 16 tenemos la interacción de las reglas 74 y 88, ambas corresponden a autómatas celulares de clase 2; la proximidad de sus patrones es de 0.33 y poseen variables de conflicto, en el caso de la regla 74 el corrimiento lateral ocurre hacia la izquierda, mientras que en la regla 88 ocurre a la derecha. El resultado es un fuerte conflicto que provoca la muerte del autómata al comienzo de la región de interacción, lo interesante es notar sin embargo, que el patrón que se obtiene en esta zona es un patrón ramificado que no corresponde a ninguno de los 256 AC elementales individuales.

En la figura 17 la interacción sucede entre las reglas 67 y 107, ambos son autómatas de clase 2 con proximidad de 0.33 y con la dirección de corrimiento como variable de conflicto. El resultado es un patrón con "manchas" en la región de interacción.

además, que los tres autómatas celulares "intermedios" de clase 3!

Si regresamos a nuestro modelo morfogenético podríamos, en analogía a la discusión anterior, sugerir que la acción cooperativa de los gradientes químicos en los espacios de producción celular, es capaz de generar una mayor diversidad en las conductas morfogenéticas de los tejidos, que la que podría tenerse sin tal interacción. Por el momento, no intentaremos variar tal sugerencia más allá del contexto del modelo.

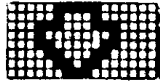
Examinaremos a continuación dos variantes de nuestro modelo. Lo primero es considerar que la concentración de los morfógenos no decrece de modo lineal con la distancia, en lugar de eso, la concentración varía periódicamente de manera sinusoidal. Como resultado tendremos una alternancia de zonas de máxima y mínima concentración de morfógenos. La fenomenología de la interacción de ambos morfógenos es la misma que ya discutimos, sin embargo, lo interesante en este caso, es destacar la aparición de una nueva organización espacial global en el patrón. La propagación del autómata celular bajo una u otra regla origina una organización espacial local, formada por el tipo de estructuras que son características propias del patrón de una regla; esta organización local está caracterizada por una escala "celular" típicamente con una longitud de pocos espacios celulares. La nueva organización global posee una escala de mayor longitud que no depende del tipo particular de reglas sino de la longitud de las zonas de probabilidad, o si se quiere, de la longitud del alcance de los campos químicos. Consideremos la figura 22, en ella interactúan periódicamente los autómatas con reglas 126 y 129, los patrones estructurados triangulares son la organización local del patrón, la sucesión en bandas es la organización global. En la figura 23 se destaca mejor el fenómeno, en este patrón la regla 126 ha sido reemplazada por la regla 255. Por último en la figura 24 interactúan las reglas 120 y 106; lo notable en el patrón que resulta, es la nueva organización global que se destaca junto a la

interacción de conflicto de las reglas, de tal modo, que el patrón está lejos de recordarnos al que se obtiene con las mismas reglas por separado, en este sentido podríamos hablar de un verdadero cambio cualitativo debido a la interacción cooperativa de los dos autómatas celulares.

La segunda variante al modelo supone que la distribución periódica de los morfógenos es bidimensional, tanto en la dirección longitudinal de la reproducción como en la dirección perpendicular a ella. El resultado es una organización espacial global caracterizada por zonas "circulares" alternadas de máxima y mínima concentración. Como ejemplo tenemos la figura 25 en la cual interactúan las reglas 129 y 0, las zonas de mayor concentración del morfógeno equivalente a la probabilidad de propagación según la regla 129 muestra una organización local estructurada, el otro morfógeno exhibe zonas blancas.

La anterior variante del modelo la utilizaremos para mostrar una posible conexión con el problema de la coloración en la piel de animales. Recordemos lo que se había dicho del crecimiento clonal. Si este crecimiento se realiza arbitrariamente en cada "célula" (en ambas direcciones), el crecimiento clonal inhomogeneo provoca distorsiones tanto en la organización local como en la global. Veamos el ejemplo de la figura 26, en (a) tenemos el patrón generado por la propagación del autómata celular con regla 54. En (b) se ha tomado una porción de "tejido" para ilustrar con detalle las "células" que darían origen a las estructuras triangulares del patrón del AC 54, se muestran las tres "células" que forman las estructuras 1,2,3 y 4. En (c) el crecimiento clonal ocurre en la misma dirección de la reproducción. Las estructuras triangulares han sufrido una deformación en una sola dimensión, pero la distorsión no afecta grandemente las estructuras triangulares. En (d) el crecimiento clonal ocurre en dos direcciones y deforma tanto a las estructuras triangulares que difícilmente se pueden identificar como tales. El crecimiento clonal es capaz de distorsionar tanto la organización local que

blemente la destruye, en cambio, la organización global sufre
distorsiones pero se conserva, debido a que ocurre en una escala
de longitud mayor. Con los argumentos anteriores, consideremos la
figura 27(a) las dos reglas de interacción son 0 y 255, la primera
es una "ceros" y la otra "unos". Se ha dibujado una línea que
divide a cuatro zonas de estructura local de color negro de tal
manera que su trazo fronterizo pasa por la zona de interacción
probable, los puntos sobreimpuestos coinciden con una malla
cuadrangular. En (b) se muestra un posible mecanismo de crecimiento
que provoca la distorsión del patrón, dando lugar a manchas
irregulares del tipo de las que se muestran en el dibujo de la
cabeza de un jaguar (c). En (d) se muestra un dibujo de este
patrón³.



Las figuras (c) y (d) fueron tomadas de Cocho et. al., 1986b.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

los autómatas celulares son capaces de exhibir comportamientos complejos similares a los que se observan en diversos fenómenos naturales, lo cual sugiere que podrían ser adecuados para modelar tales fenómenos. Los AC elementales pueden ser clasificados en base a las propiedades cualitativas que exhiben en su espacio de configuración, en el histograma de densidad de estado o bien, debido a los rasgos característicos que exhiben en sus patrones. Una clasificación de patrones es posible en la medida en que puedan identificarse comportamientos y propiedades que sean invariantes frente a cambios en las configuraciones iniciales y frente a situaciones en las que existan perturbaciones durante la propagación de los AC. La clasificación de patrones es útil cuando se pretende utilizar los AC como modelos de formación de patrones biológicos, debido a que permite agrupar a los patrones en familias que reducen el número total de patrones distintos. Tal clasificación permite, pues, hablar de patrones distintos e iguales, permitiendo incluso cuantificar tales diferencias.

Los autómatas celulares pueden ser utilizados como modelos morfogénéticos con los cuales, pueden ser implementadas y verificadas hipótesis de otros modelos, en particular las de información posicional. Un modelo de esta naturaleza es capaz de exhibir algunos de los posibles comportamientos que resultan de la interacción célula-célula y célula-sustrato (gradientes químicos). Es capaz por ejemplo, de sugerir posibles mecanismos que resultan en una mayor diversidad de patrones y es capaz, de implementar comportamientos de simulación de patrones (comportamientos miméticos).

- (1975). Alberseim L., "The walls of growing plant". En: *Scientific American* 232(4), (1975).
- (1986a). Cocho, G., Perez-Pascual, R. y Rius J.L., "Systems, cell-cell interactions and color patterns of conflict dynamics and pattern formation", preprint de Física, UNAM).
- (1986b). Cocho, G., Perez-Pascual, R., Rius J.L. y Soto F., "Systems, cell-cell interactions and color patterns of conflict dynamics and pattern formation", preprint de Física, UNAM).
- (1971). Edelman, G.M., "Cell adhesion molecules: a basis for animal form". En: *Scientific American* (abril 1971).
- (1974). Gierer, A., "Hydra as a model for the development of animal form". En: *Scientific American* 231(6), (1974).
- (1981). Gordon, A.D., *Classification*, (Chapman and Hall: 1981).
- (1971). Jardine, N. y Sibson R., *Mathematical Classification*, (John Wiley & Sons Ltd: London, 1971).
- (1979). Levi-Montalcini, R. y Calissano, "Nerve-grow factor". En: *Scientific American* 240(6), (1979).
- (1976). Wolpert, L., "El problema de la bandera francesa: aplicación al estudio sobre desarrollo y regulación de un organismo". En: Waddington, H. (comp), *Hacia una biología teórica*. Madrid: Madrid, 1976).
- (1978). Wolpert, L., "Pattern Formation in biological systems". En: *Scientific American* 239(4), (1978).
- (1983). Wolfram, S., "Statistical mechanics of cellular automata". En: *Rev of Mod Physics* 55(3), (1983).
- (1984). Wolfram, S., "Universality and complexity in cellular automata". En: *Physica* 10D (1984) 1-35.
- (1984). Wolfram, S., "Cellular automata as models of complexity". En: *Nature* 311(4), (1984).

APENDICE A

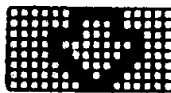
CONJUNTO 2 DE 29 VARIABLES SUBJETIVAS

Variable	Característica o rasgo
1	Corrimiento
2	Corrimiento alternado
3	Corrimiento izquierdo
4	Corrimiento derecho
5	Corrimiento recto
6	Corrimiento "trebol"
7	Corrimiento doble
8	Corrimiento "L"
9	Corrimiento simple
10	Triangulo blanco
11	Escalamiento multiple
12	Triangulo recto
13	Triangulo equilatero
14	Triangulo negro
15	Triangulo recto izquierdo
16	Triangulo recto derecho
17	Triangulo alternado
18	Pseudo triangulos
19	Homogeneo en "ceros"
20	Homogeneo en "unos"
21	Fondo en "malla"
22	Estructuras "H"
23	Monte izquierdo
24	Monte Derecho
25	Monte Blanco
26	Monte Negro
27	Corrimiento Sierra
28	Monte
29	Triangulo no fractal

DE REGLAS SINONIMAS EN EL CONJUNTO DE AC ELEMENTALES

Regla	Reglas sinónimas
0	8, 32, 40, 64, 96, 128.
00	5, 19, 23, 33, 37, 51, 55, 91, 127
000	34, 66, 98, 130
001	7, 31, 63, 123
002	12, 36, 44, 68, 100, 203, 207, 217, 219, 221, 223
003	19, 23, 33, 37, 51, 55, 91, 127
004	38, 155, 159
005	25, 27, 39, 41, 103, 111
006	42, 138, 139
007	43, 47, 59, 81, 113, 115, 117
008	87
009	24, 48, 56, 231, 243, 247
010	21, 61, 119
011	22, 54, 122, 126
012	52, 211, 215
013	71
014	86, 90
015	49
016	75, 89, 101, 105
017	142
018	65, 67, 83, 125
019	104
020	173
021	204, 205
022	208, 209, 240, 241, 244, 245
023	210
024	212, 213
025	121
026	147, 151, 161, 183
027	162
028	164
029	149, 165
030	168
031	141, 172
032	182
033	158
034	198
035	
036	
037	
038	
039	
040	
041	
042	
043	
044	
045	
046	
047	
048	
049	
050	
051	
052	
053	
054	
055	
056	
057	
058	
059	
060	
061	
062	
063	
064	
065	
066	
067	
068	
069	
070	
071	
072	
073	
074	
075	
076	
077	
078	
079	
080	
081	
082	
083	
084	
085	
086	
087	
088	
089	
090	
091	
092	
093	
094	
095	
096	
097	
098	
099	
100	
101	

166	167
170	171, 174, 175, 185, 187, 189, 190, 191
180	181
184	226, 227
192	224
193	195
196	197, 228
200	232, 233, 236
216	220
218	222
234	235, 238
237	239, 251, 253, 255
248	249, 252
250	254



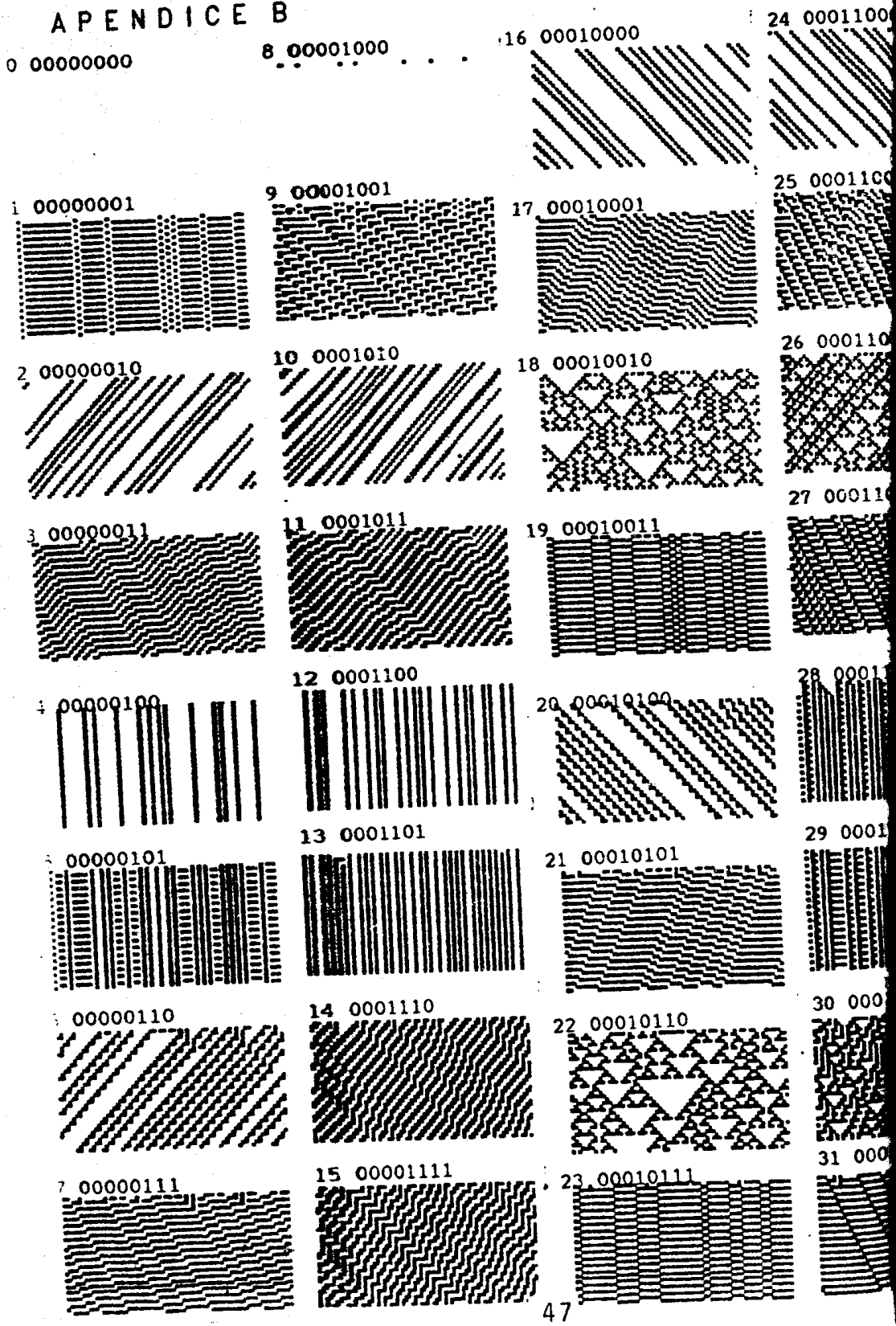
LISTA DE DATOS PARA LOS 256 AUTOMATAS CELULARES

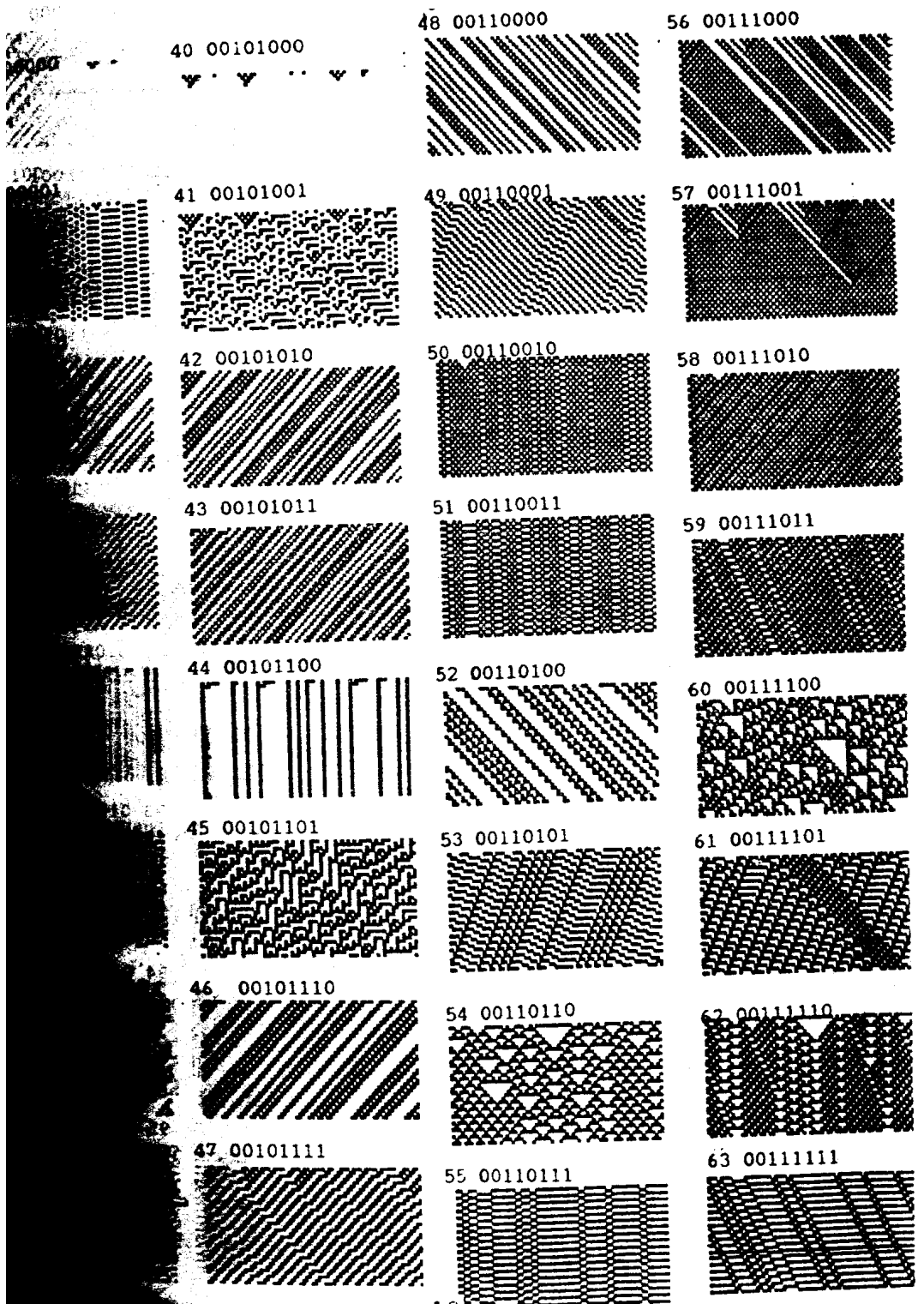
variables	29	R	i	variables	29	R
000000010000000000	0		1	11001000000000000000000000000000	1	
000000000000000000	2			11010000000000000000000000000000	3	
000000000000000000	4			11001000000000000000000000000000	5	
000000000000000000	6			11010000000000000000000000000000	7	
000000010000000000	8			11010001000000000000000000000000	9	
000000000000000000	10			11110010000000000000000000000000	11	
000000000000000000	12			10001000100000001000000000000000	13	
000000000000000000	14			11101000100000000000000000000000	15	
000000000000000000	16			11100000000000000000000000000000	17	
010000000000000000	18			11001000000000000000000000000000	19	
000000000000000000	20			11100000000000000000000000000000	21	
010000000000000000	22			11001000000000000000000000000000	23	
000000000000000000	24			11010001000000000000000000000000	25	
010000000000000001	26			11010001000000000000000000000000	27	
010001000000000000	28			11001100100000000000000000000000	29	
010000000000000000	30			11010000000000000000000000000000	31	
000000001000000000	32			11001000000000000000000000000000	33	
000000000000000000	34			11110000100000000000000000000000	35	
000000000000000000	36			11001000000000000000000000000000	37	
000000000000000000	38			11010001000000000000000000000000	39	
000000001000000000	40			11010001000000000000000000000000	41	
000000000000000000	42			11110010000000000000000000000000	43	
000000000000000000	44			00000000001000000100000000000000	45	
000000000000000000	46			11110010000000000000000000000000	47	
000000000000000000	48			11110000100000000000000000000000	49	
001000000010000000	50			11001000000000000000000000000000	51	
000000000000000000	52			11100001000000000000000000000000	53	
001000000000000000	54			11001000000000000000000000000000	55	
000000000000000000	56			10000000000000001000100000000000	57	
000100000001000000	58			11110010000000000000000000000000	59	
010001000000000000	60			11100000000000000000000000000000	61	
001000000000000000	62			11010000000000000000000000000000	63	
000000000100000000	64			11100001000000000000000000000000	65	
000000000000000000	66			11100001000000000000000000000000	67	
000000000000000000	68			10000000100100101000000000000000	69	
001001000000000000	70			11001100100000000000000000000000	71	
000000000000000000	72			10001010000000000000001000000000	73	
010000000000000000	74			00000000001000000100000000000000	75	
010000000000000000	76			10001010100010001000000000000000	77	
010100100000000000	78			10001010100100011000000000000000	79	

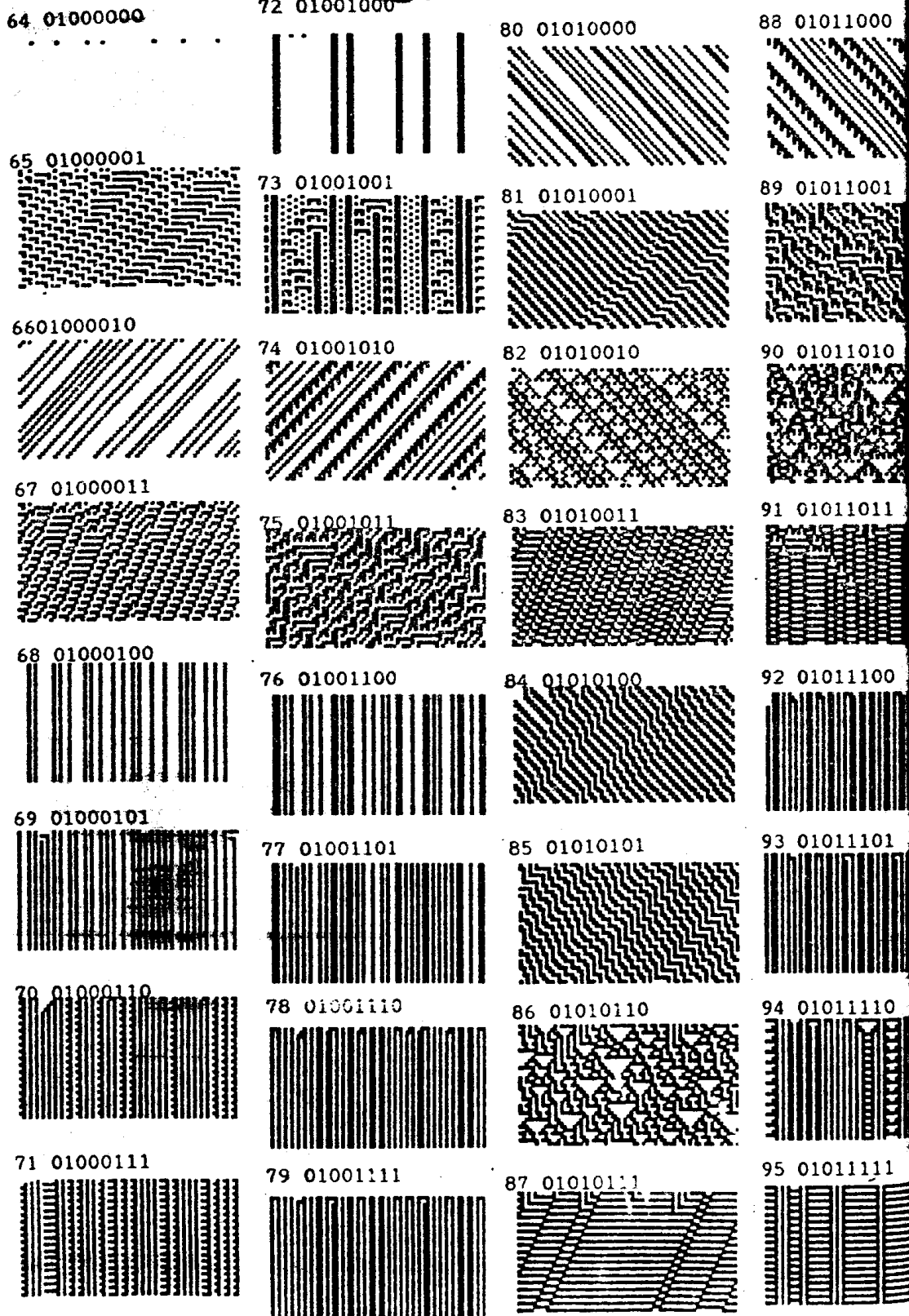
10010010100000000000000000000000	80	11110010000000000000000000000000	80
10010100010010000000000000000001	82	11100001000000000000000000000000	82
10011010100000000000000000000000	84	11111010100000000000000000000000	84
10001000111010000000000000000000	86	11101000100000000000000000000000	86
1001010010000000000000000000000100	88	00000000001000000100000000000000	88
10001000111010000000000000000000	90	11001000000000000000000000000000	90
10001010110100010000000000000000	92	10001010100100101000000000000000	92
100010101100100000000100000000	94	110010101000000000000100000000	94
000000000000000000010000000000	96	10100001000000000000000000000000	96
10100000100000000000000000000000	98	10110010000000001000000000000000	98
10001000100000000000000000000000	100	00000000001000000100000000000000	100
10010000011100100000000000000000	102	11010001000000000000000000000000	102
10001010000000000000000000000000	104	00000000001000000100000000000000	104
00000000001000000000001000010	106	10010001000000000000000000000000	106
100010001000000000000010000000	108	100010101000100010000100000000	108
00000000011100100000000000000000	110	11010001000000000000000000000000	110
101100101000000000000100000000	112	11110010000000000000000000000000	112
10010010010010000000000000000000	114	11110010000000000000000000000000	114
10010010000000000000000000000000	116	11110010000000000000000000000000	116
10010010010010000000000000000001	118	11100000000000000000000000000000	118
00000000000000000000000000000100010	120	10100001000000000000000000000000	120
00000000011010000000000000000000	122	11010000000000000000000000000000	122
00000000011100010000000000000000	124	11100001000000000000000000000000	124
00000000011010000000000000000000	126	11001000000000000000000000000000	126
000000000000000000010000000000	128	000000000010110000000000000000	128
10100000100000000000000000000000	130	101000001000110000000000000000	130
10001000100011000000000000000000	132	100010001000110000000100000000	132
10100100000011000000000000000000	134	100010001010110000000000000000	134
000000000001011000100000000000	136	000000000011011000000000000000	136
10100010100000000000000000000000	138	10100010100000000000000000000000	138
10001000100101100000000000000000	140	10001000100101100000000000000000	140
10100010000000000000000000000000	142	10100000100100000000000000000000	142
10010000100011000000000000000000	144	1010000010001100000000000000001	144
000000000110110000000000000000	146	000000000010110000000000000000	146
10010100000011000000000000000000	148	100010001010110000000000000000	148
10100000111011000000000000000000	150	000000000010110000000000000000	150
10010000100101100000000000000000	152	100100001011011000000000000000	152
10100100010010000000000000000000	154	101001000000000000000000000000	154
10001100110101110000000000000000	156	100011001001011000000000000000	156
10100100010010000000000000000000	158	101001000000000000000000000000	158
000000000000110000100000000000	160	000000000010110000000000000000	160
10100000100011000000000000000000	162	101000001000110000001000000000	162
10001000100011000000000000000000	164	100010001010110000000000000000	164
10100100000011000000000000000001	166	1010010000001100000000000000001	166
000000000000101100010000000000	168	00000000001000000000010000100	168
10100000000000000000000000000000	170	10100000000000000000000000000000	170
10001000100101100000000000000000	172	1010000010000000000000000000100	172
10100000000000000000000000000000	174	10100000000000000000000000000000	174
100100001000110000001000000000	176	101000000000110000001000000000	176
100010100000000000001000000000	178	100010100000110000001000000000	178
1001010000001100000000000000001	180	1001010000001100000000000000001	180

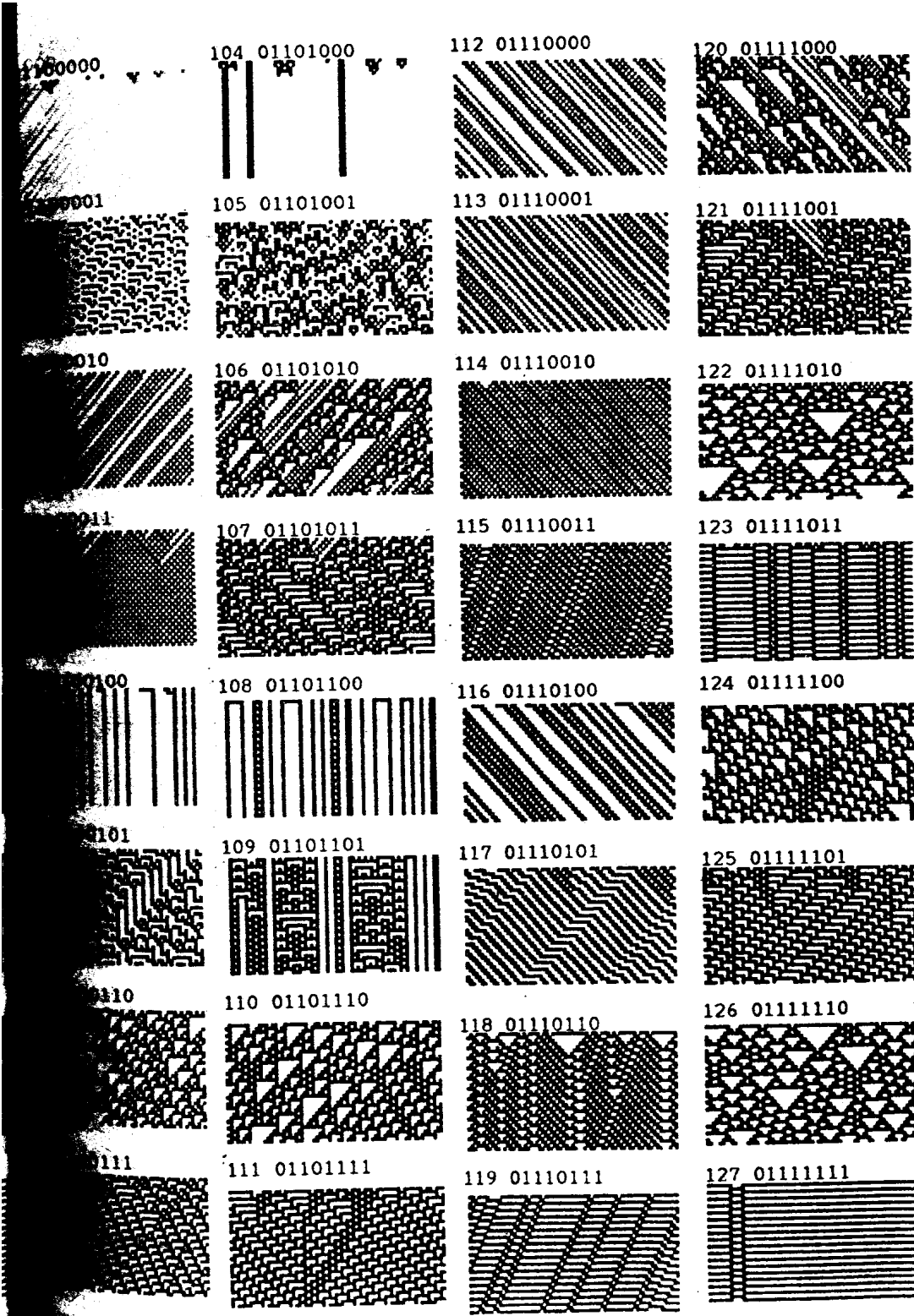
00000000000000000000	182	000000000010110000000000000000	183
000000010000000000	184	101000000000000000000000000000	185
000000100000000000	186	101000000000000000000000000000	187
000000000000000000	188	101000000000000000000000000000	189
000000000000000000	190	101000000000000000000000000000	191
000100000000000000	192	000000000011010100000000000000	193
000000000000000000	194	000000000011010100000000000000	195
010000000000000000	196	100010001001010100000000000000	197
010000000000000000	198	100011001001010100000000000000	199
000000000000000000	200	100010000000000000000010000000	201
000000000000000000	202	100010001000000000000000000000	203
000000000000000000	204	100010101000000000000000000000	205
000000000000000000	206	100010001000000000000000000000	207
000000000000000000	208	100100101000000000000000000000	209
000000000000000001	210	100101000000000000000000000000	211
000000000000000000	212	100110101000000000000000000000	213
000000000000000000	214	100101000000000000000000000000	215
000000000000000000	216	100010001000000000000000000000	217
000000000000000000	218	100010001000000000000000000000	219
000000000000000000	220	100010001000000000000000000000	221
000000000000000000	222	100010001000000000000000000000	223
000010000000000000	224	00000000001000000000000100010	225
000000100000000000	226	101100000000000000000100000000	227
000000000000000000	228	100100001000000000000000000100	229
000000000000000000	230	100100001000000000000000000000	231
000000000000000000	232	100010000000000000000000000000	233
001000010000000000	234	00000000010100100001000000000	235
000000000000000000	236	000000000000000000001000000000	237
000000100000000000	238	000000000000000000001000000000	239
000000000000000000	240	100100101000000000000000000000	241
000000000000000000	242	100100001000000000000000000000	243
000000000000000000	244	100100101000000000000000000000	245
000000000000000000	246	100100001000000000000000000000	247
000100010000000000	248	00000000010100010001000000000	249
000000100000000000	250	000000000000000000001000000000	251
000000100000000000	252	000000000000000000001000000000	253
000000100000000000	254	000000000000000000001000000000	255

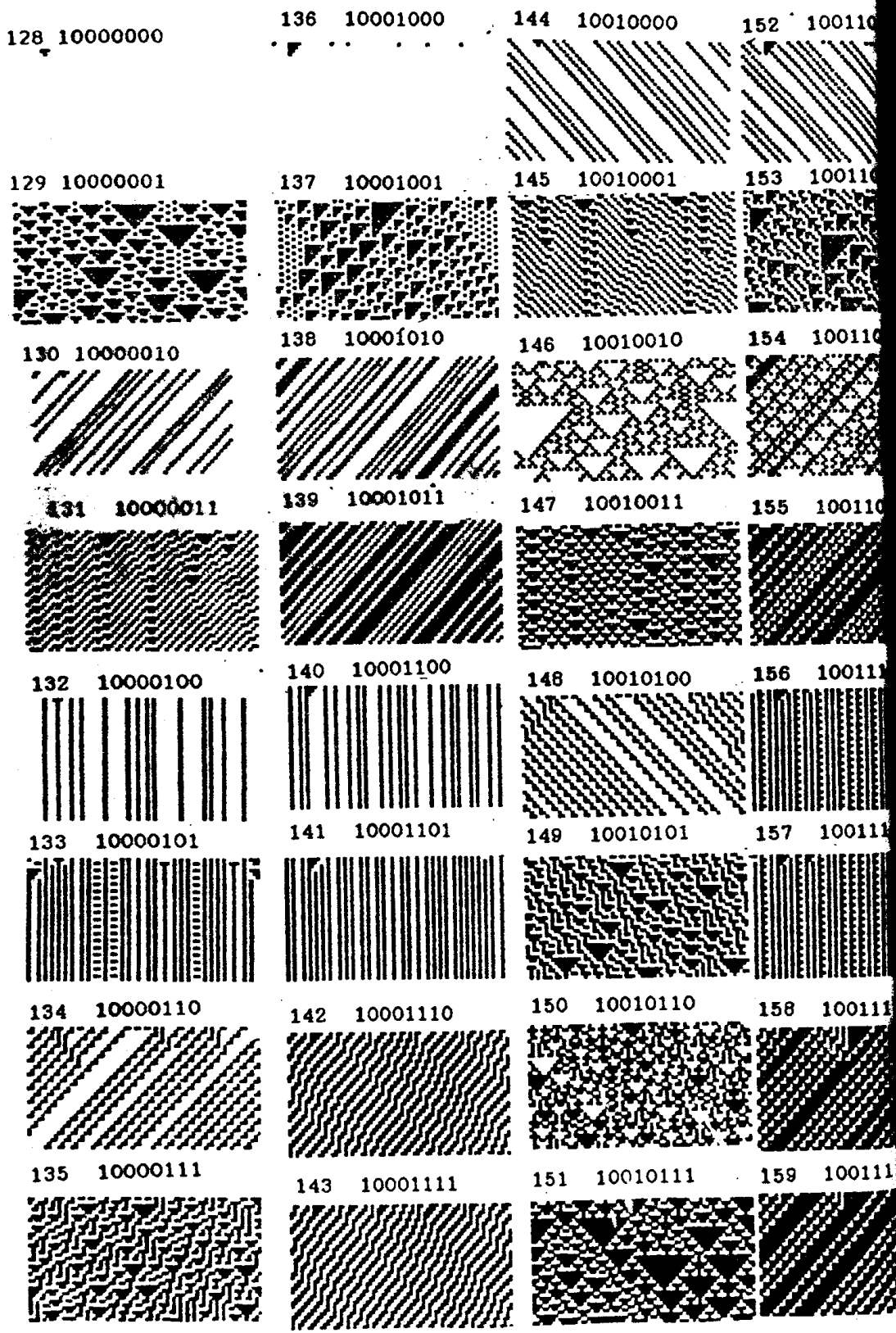
APENDICE B

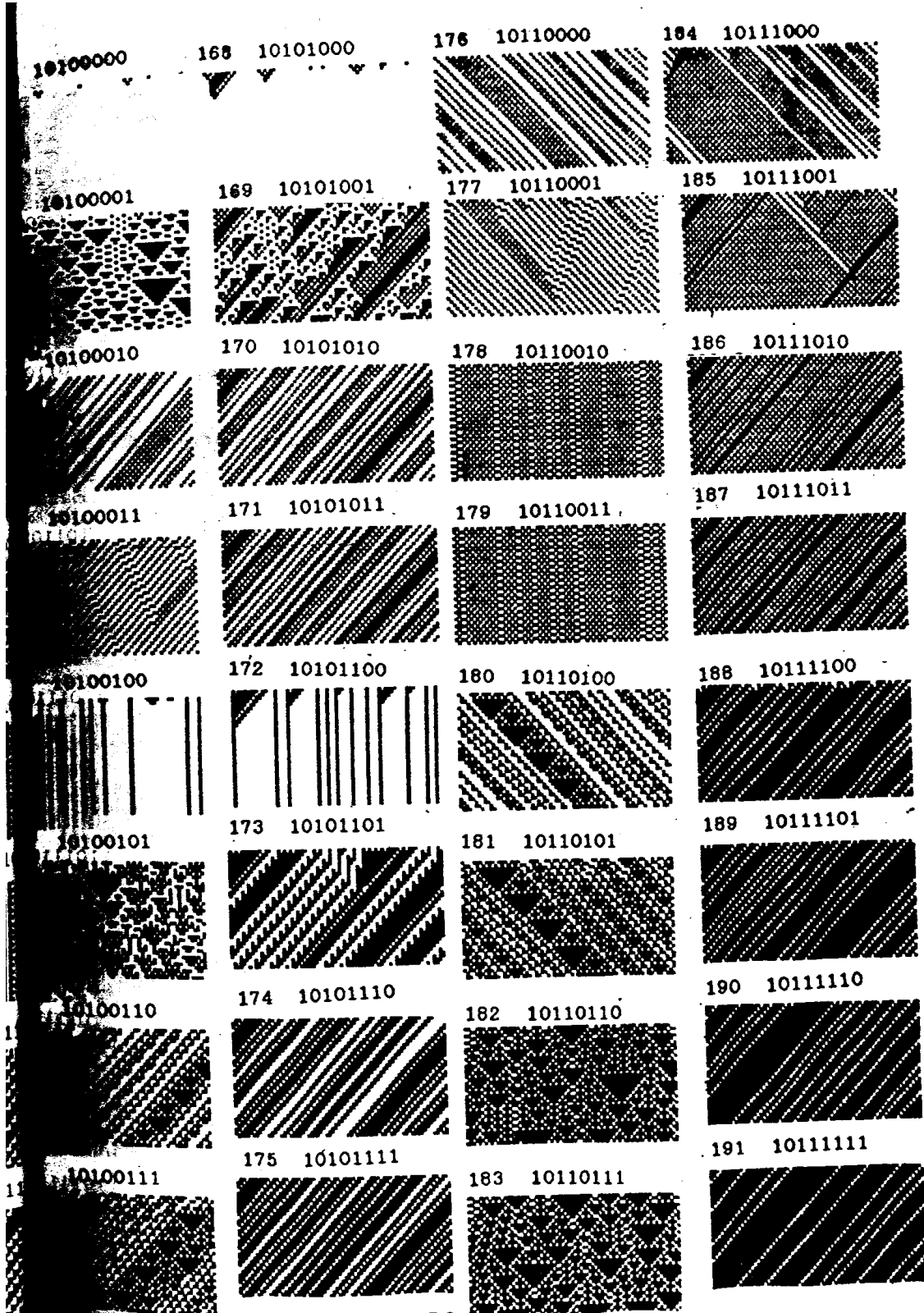


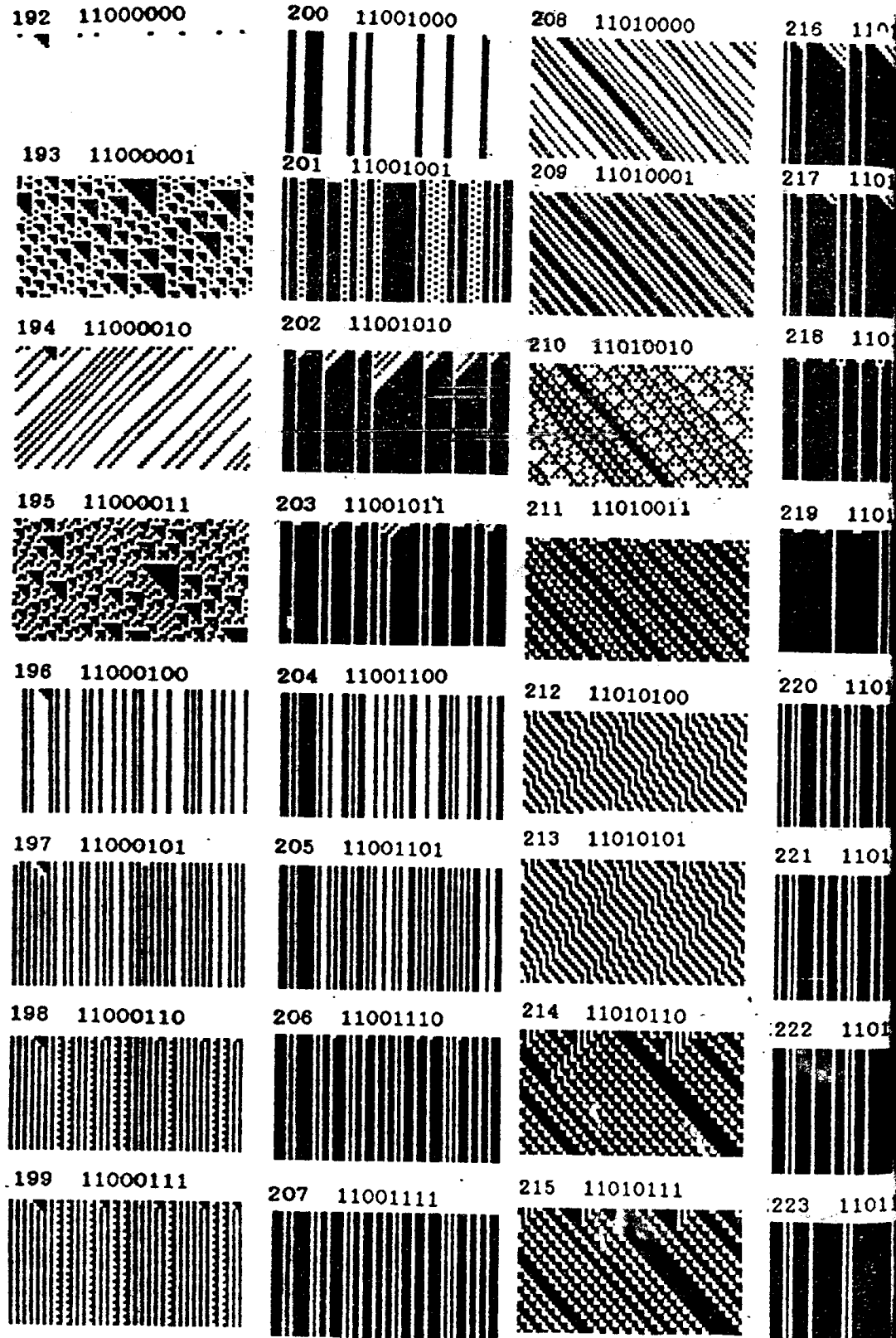


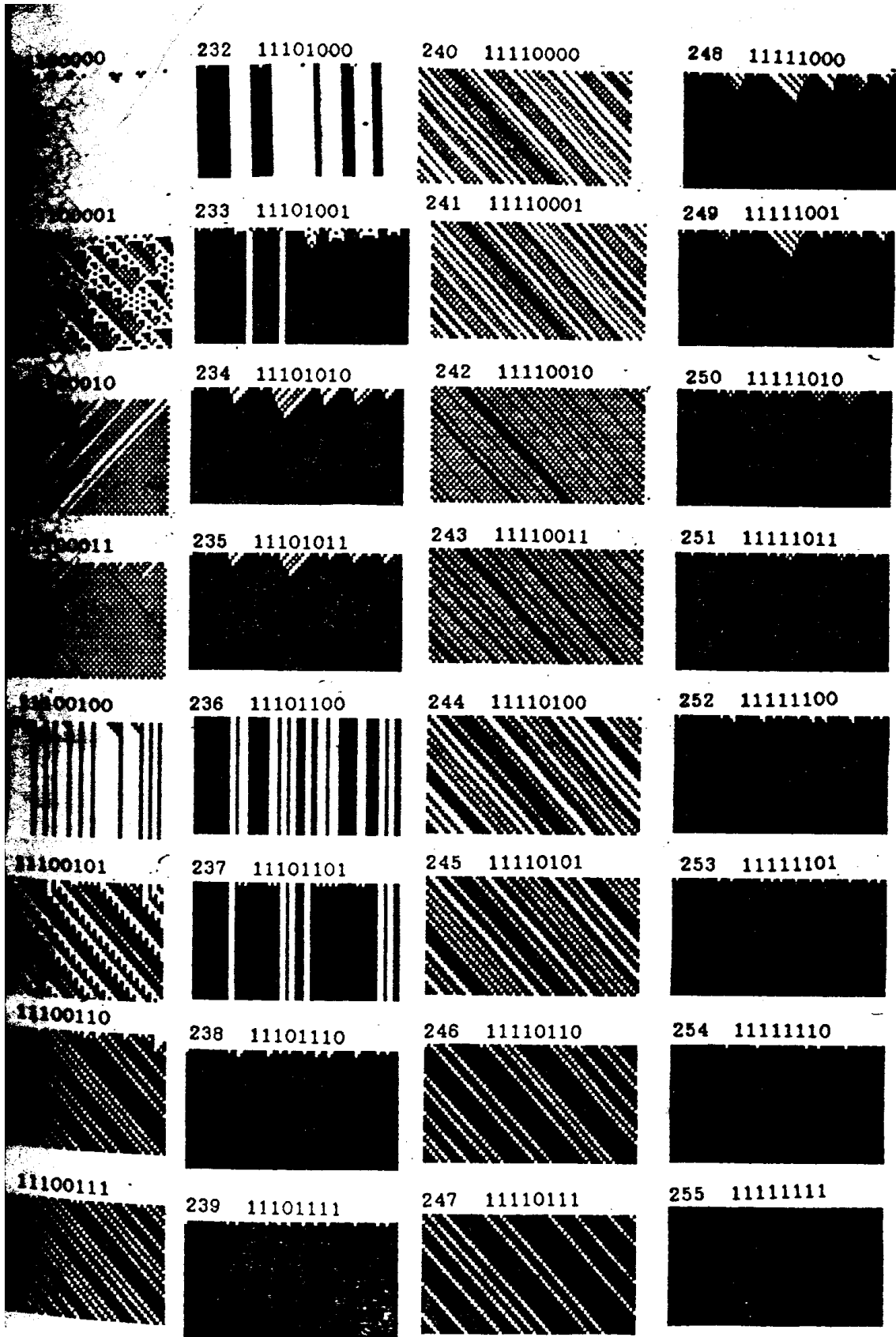


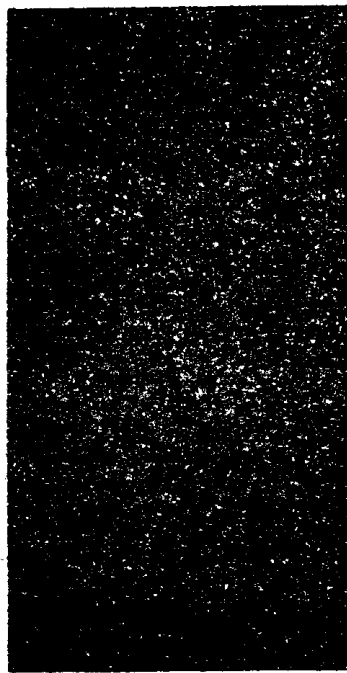




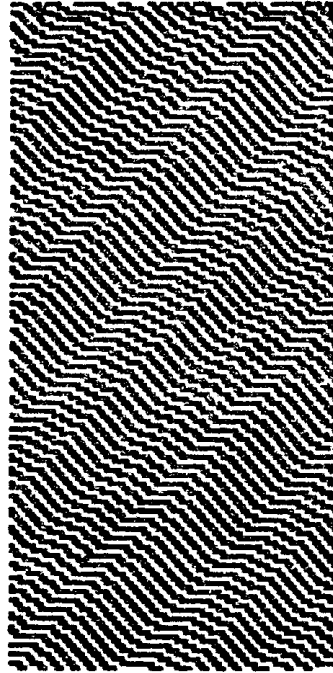




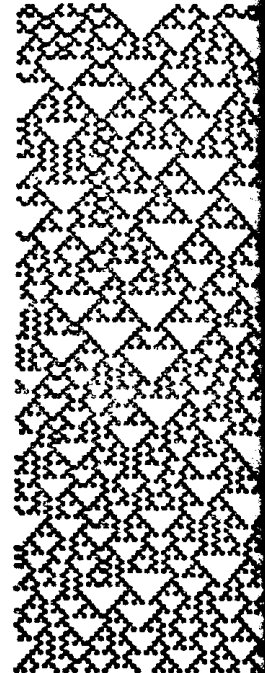




(a) regla 255



(b) regla 117



(c) regla 18

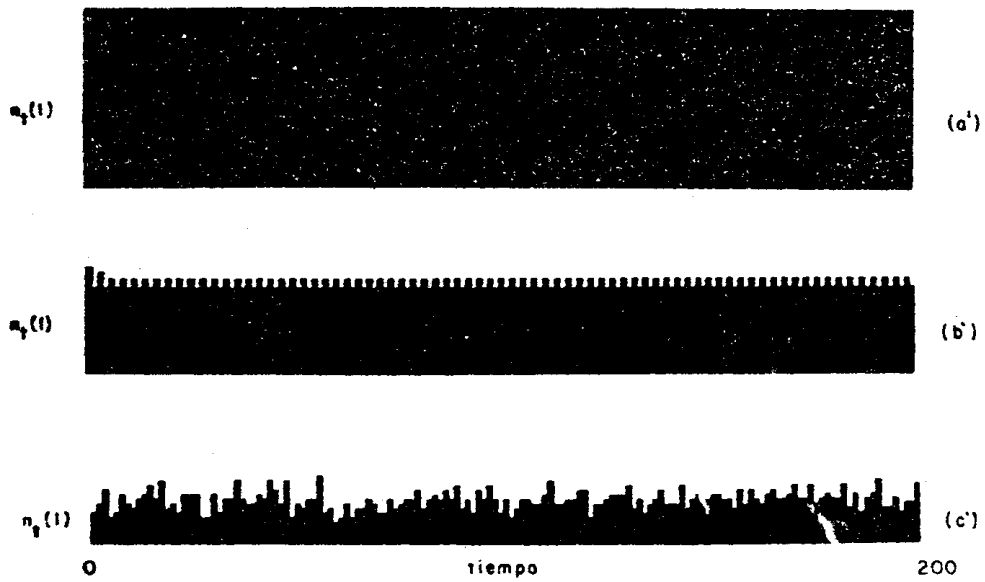


Figura 2

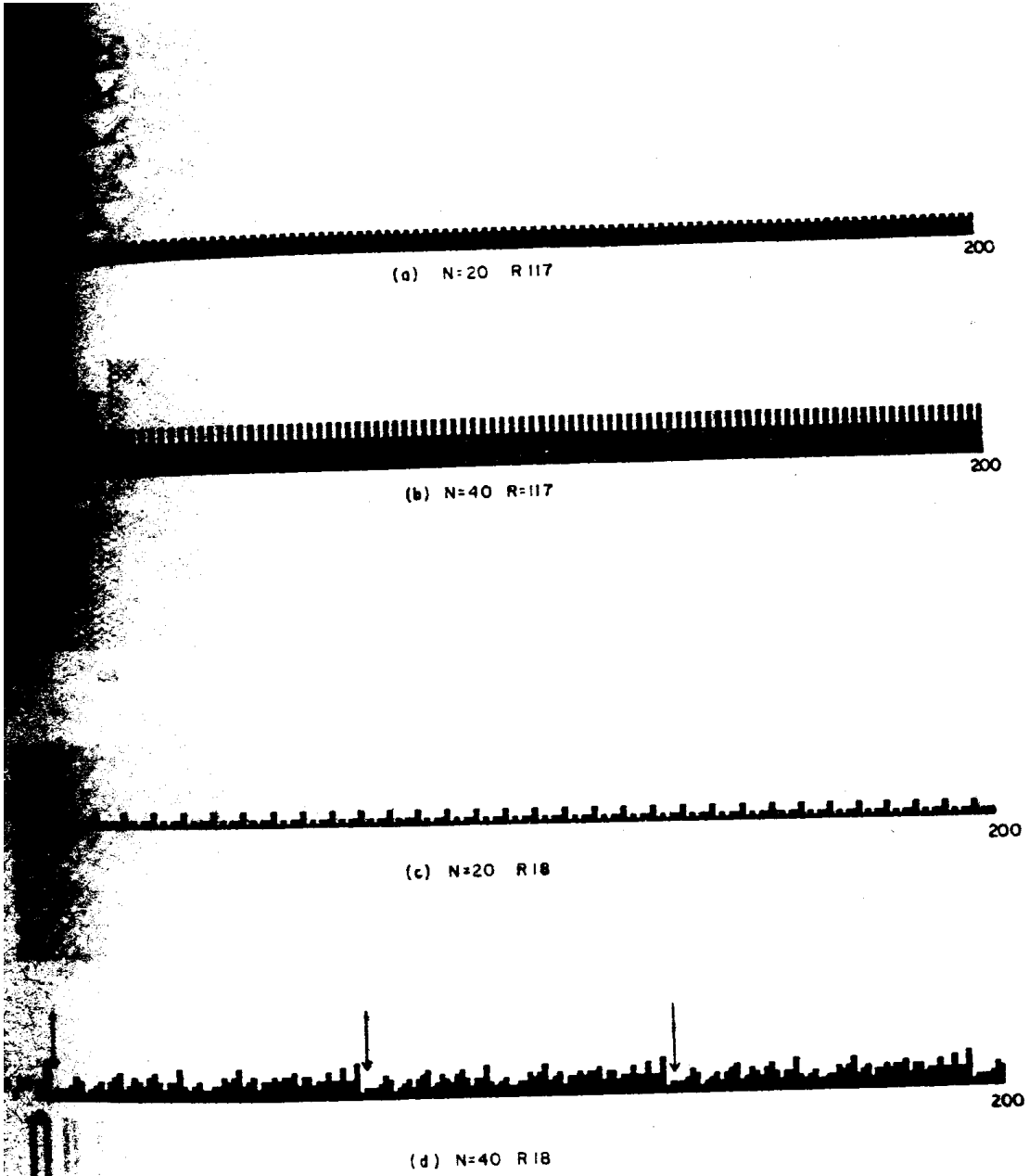


Figura 3

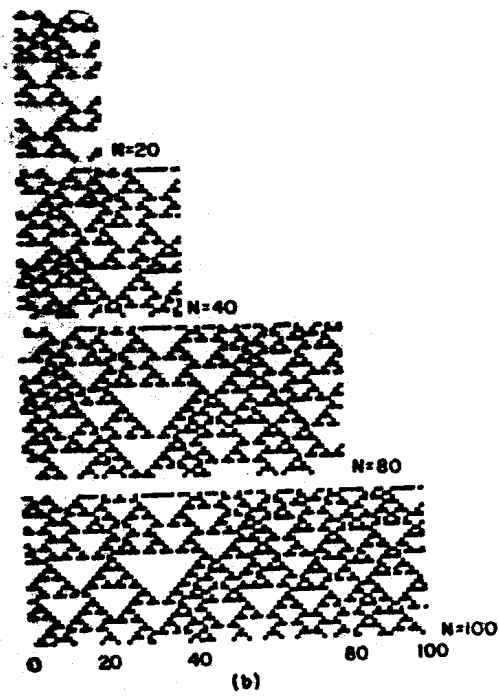
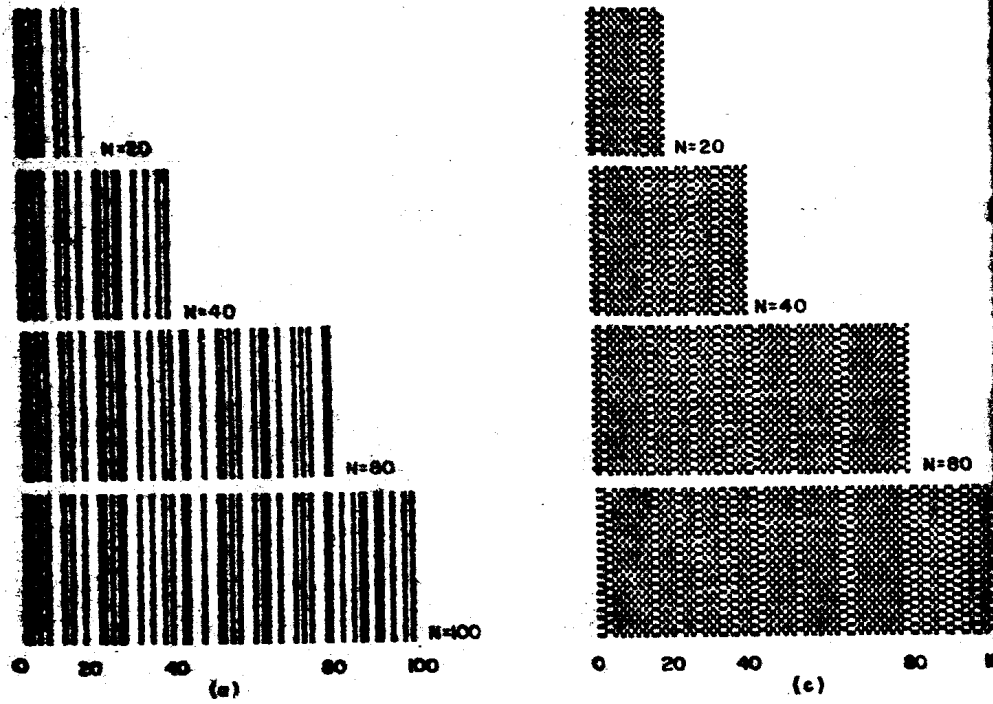


FIGURA 4
57

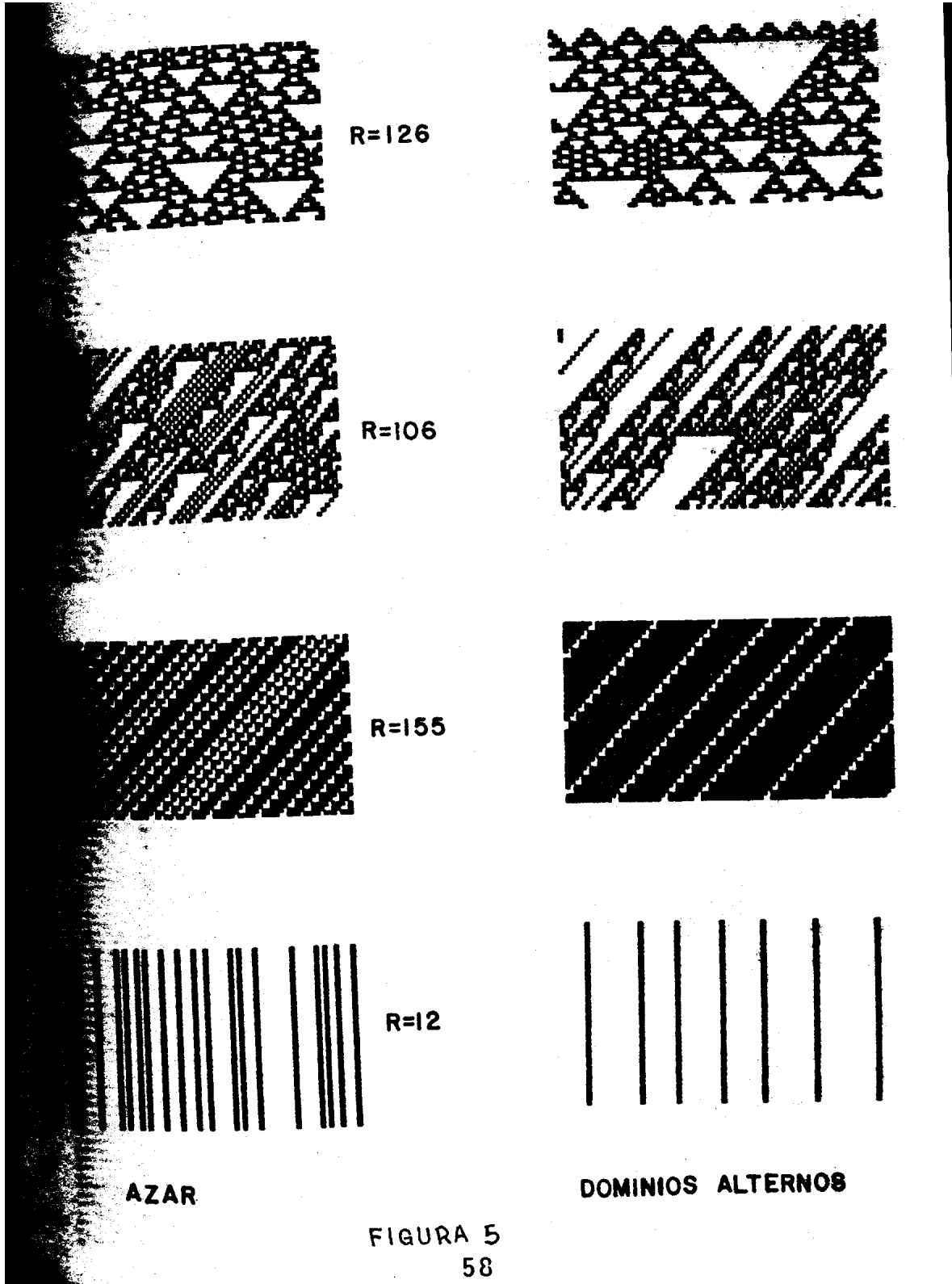
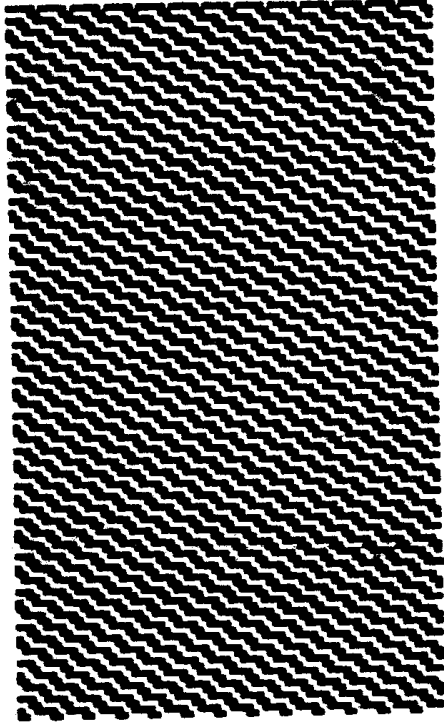
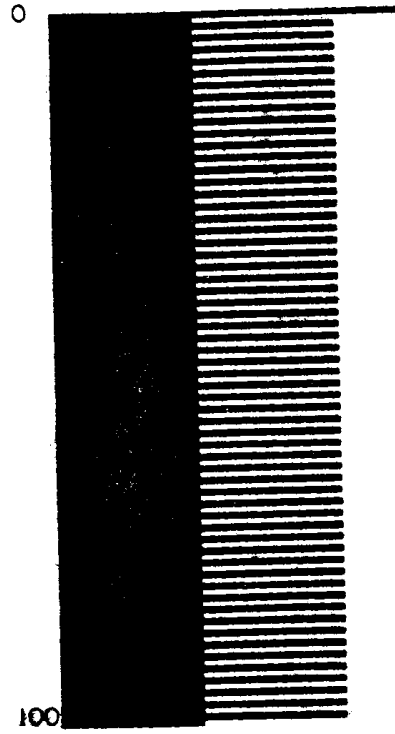


FIGURA 5
58

N=80 R117

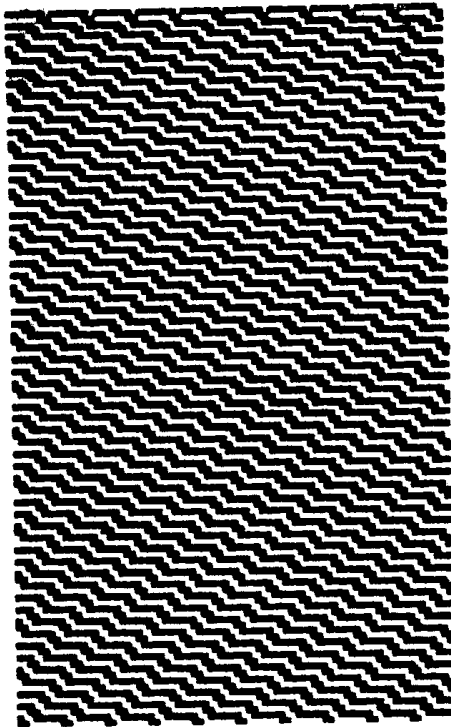


$n_f(l)$

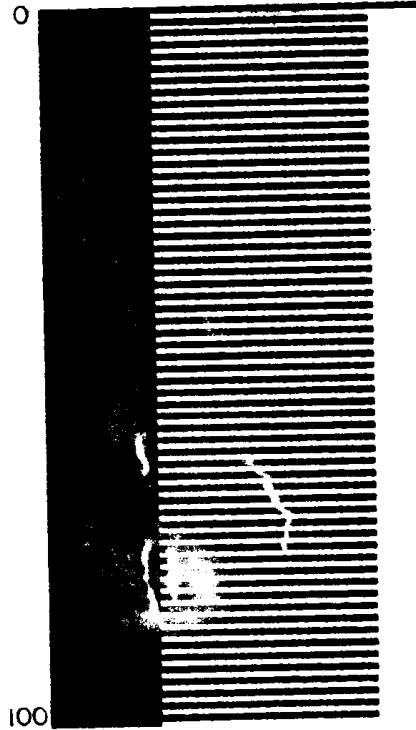


(a) $p/q = 1/6$

N=80 R117



$n_f(l)$



(b) $p/q = 1/8$

FIGURA 6

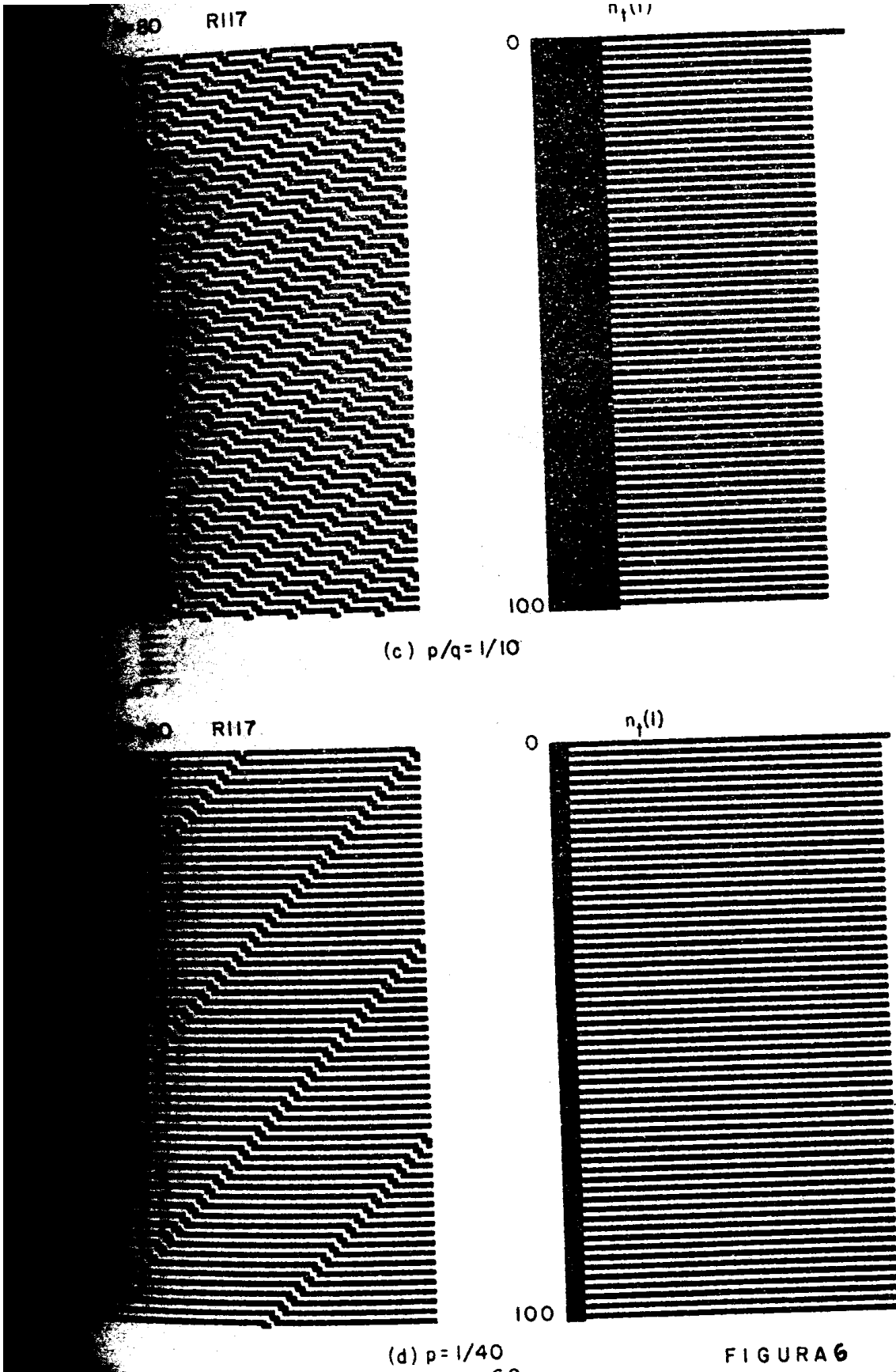
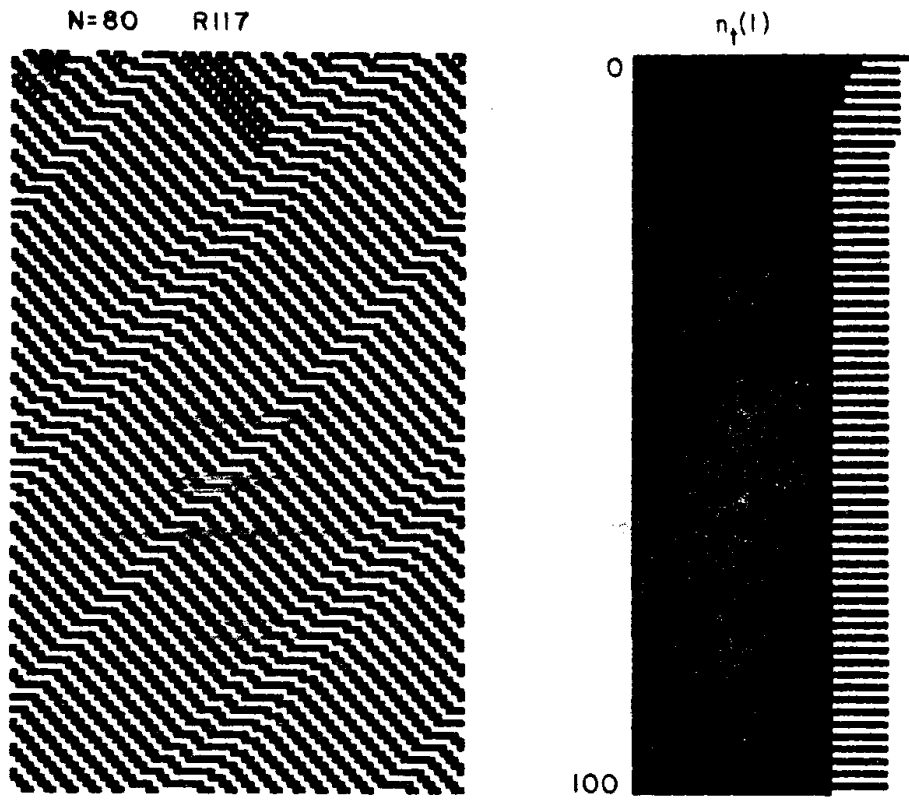
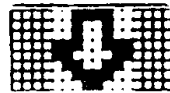


FIGURA 6



(e) azar

FIGURA 6



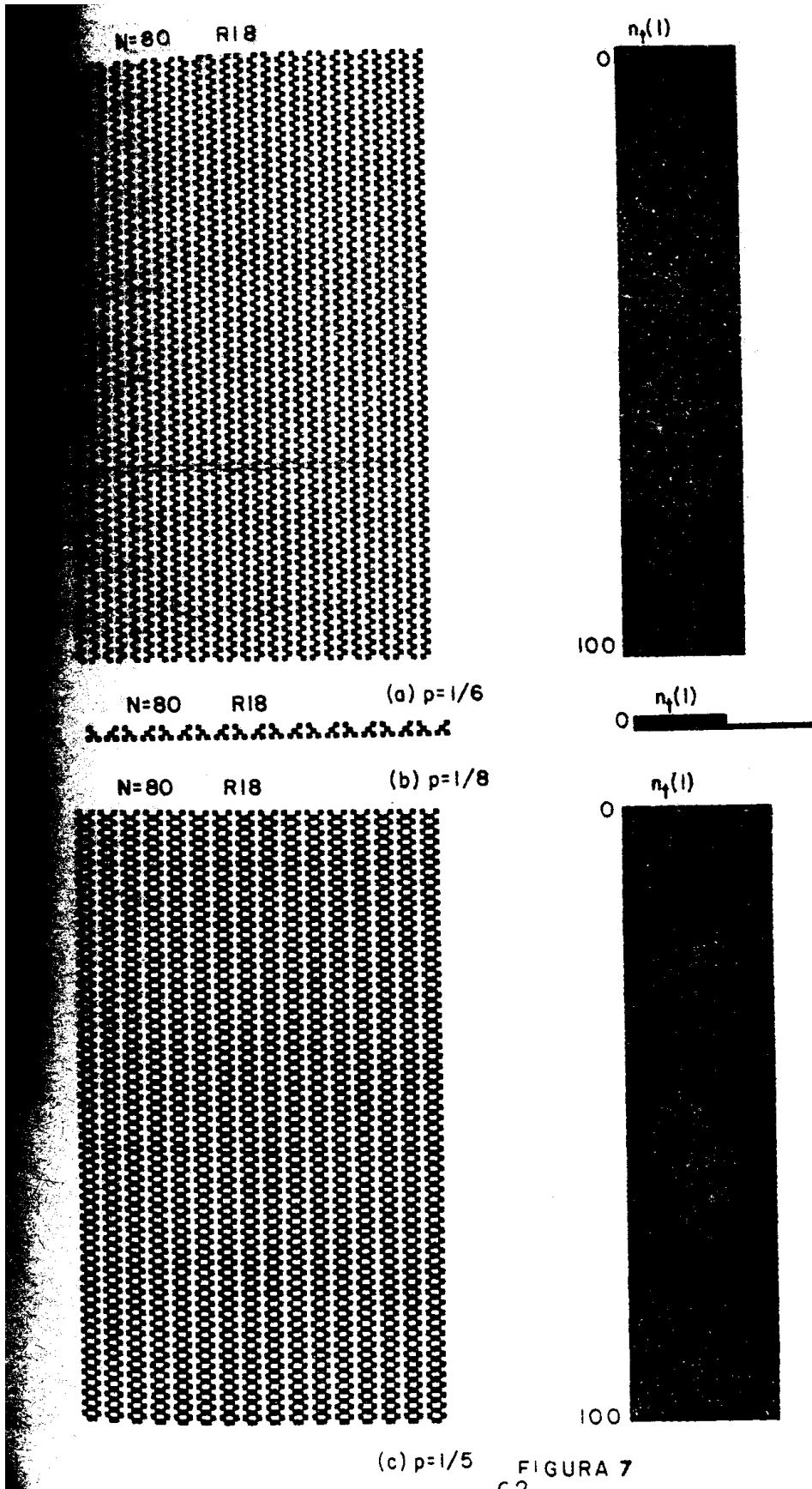


FIGURA 7
2

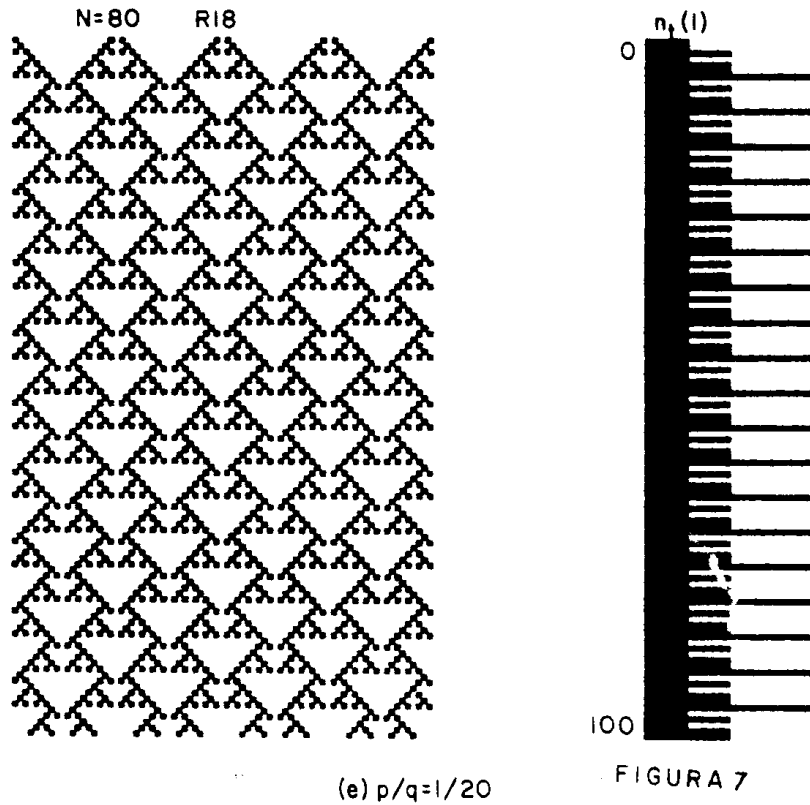
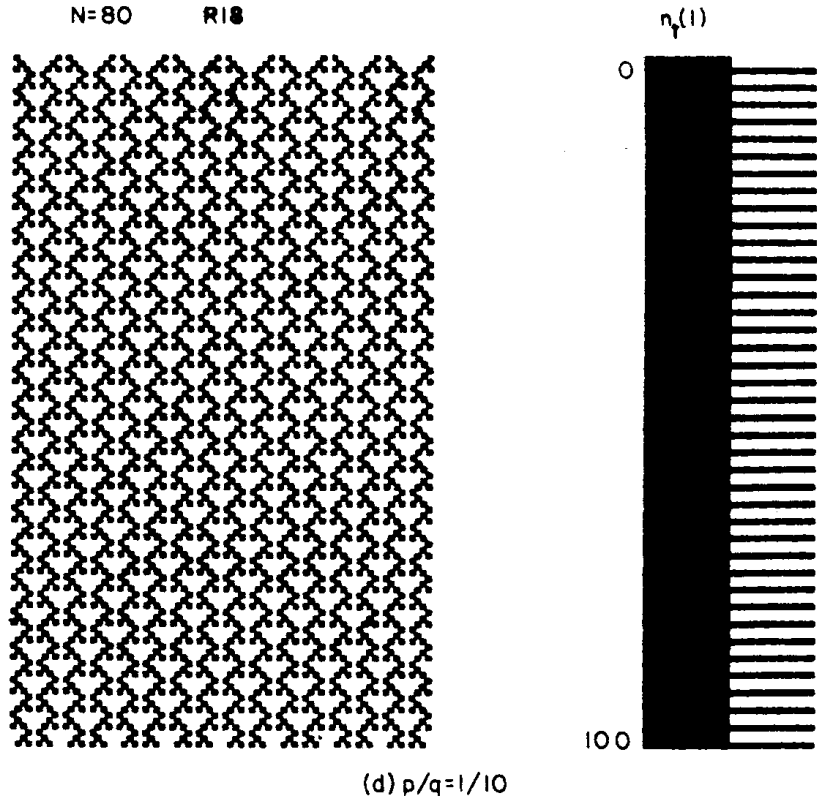
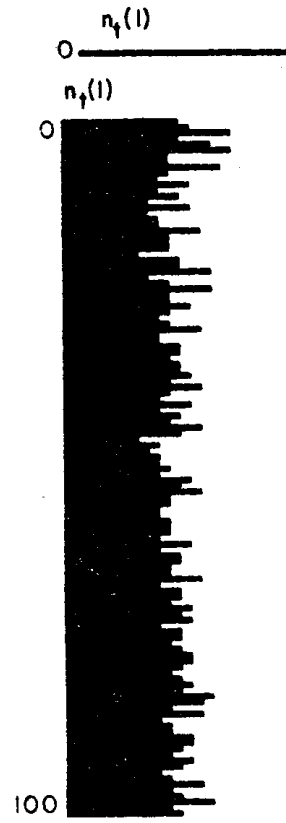
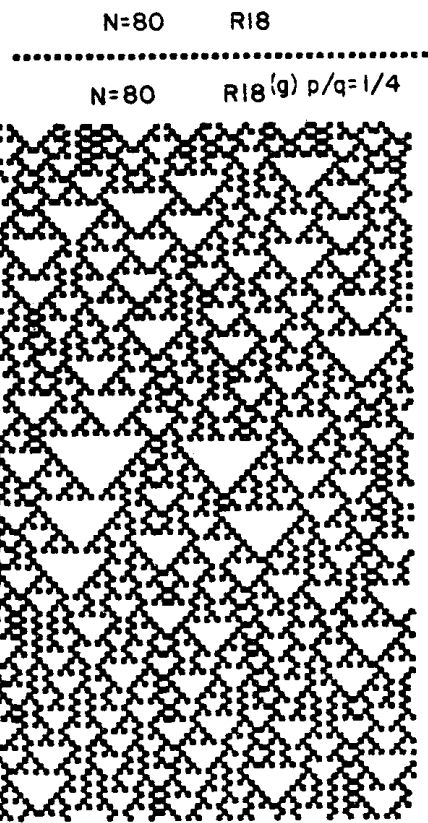
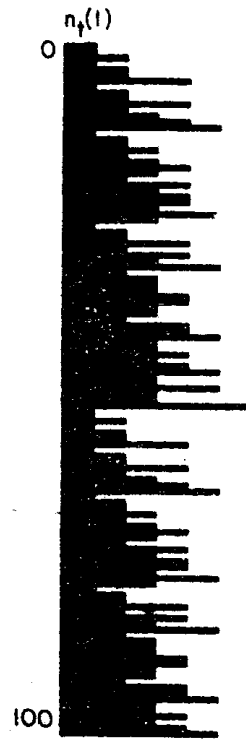
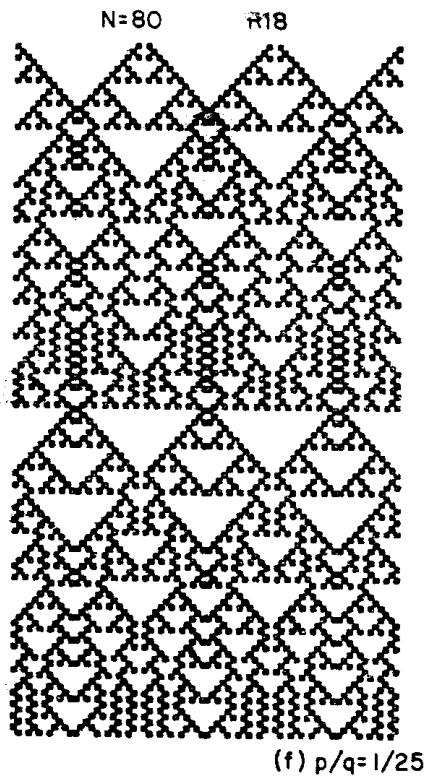
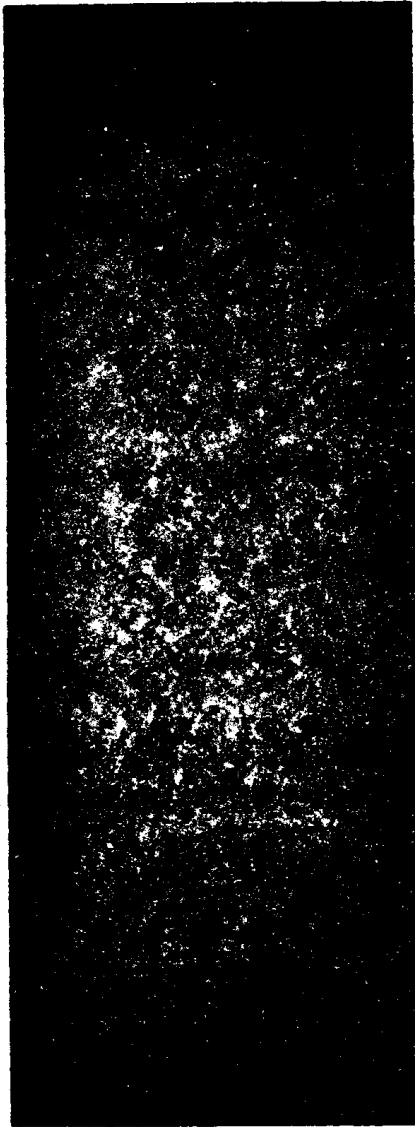
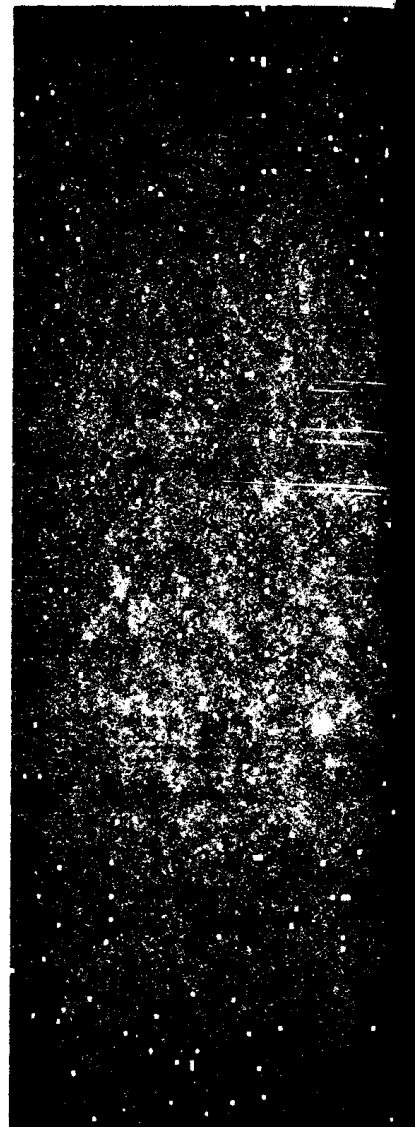


FIGURA 7





(a) $P=0.0001$



(b) $P=0.01$

FIGURA 8

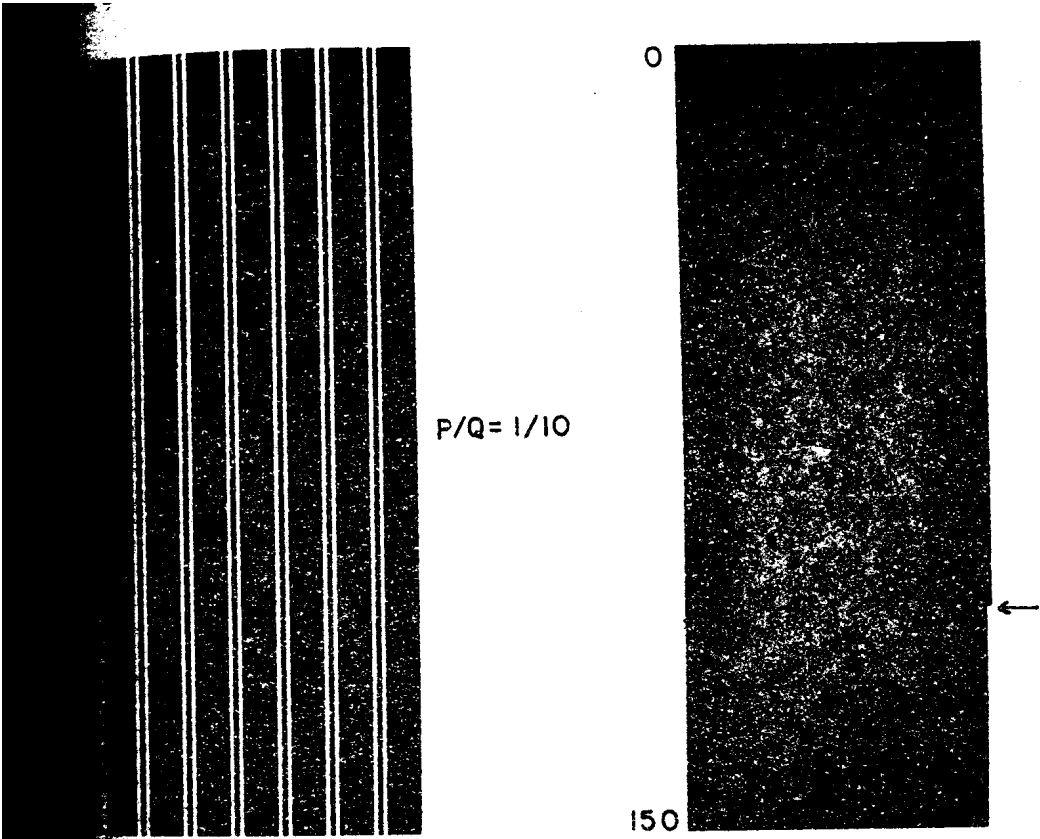
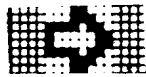


FIGURA 9



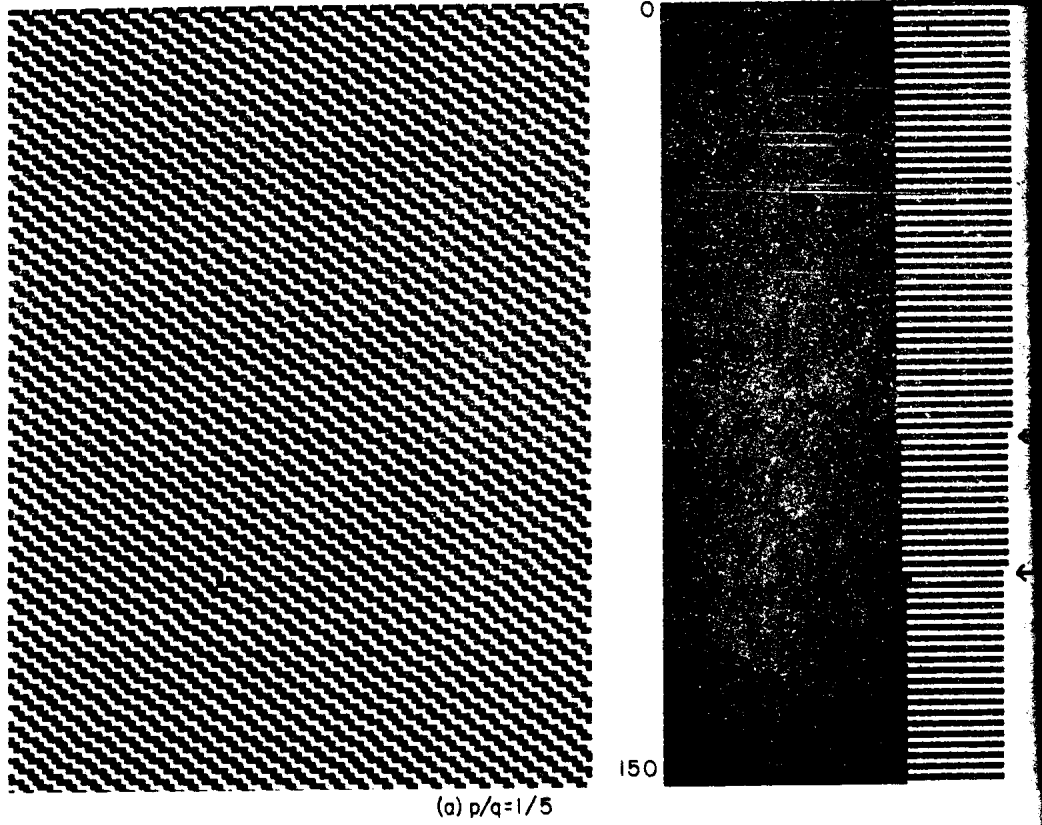
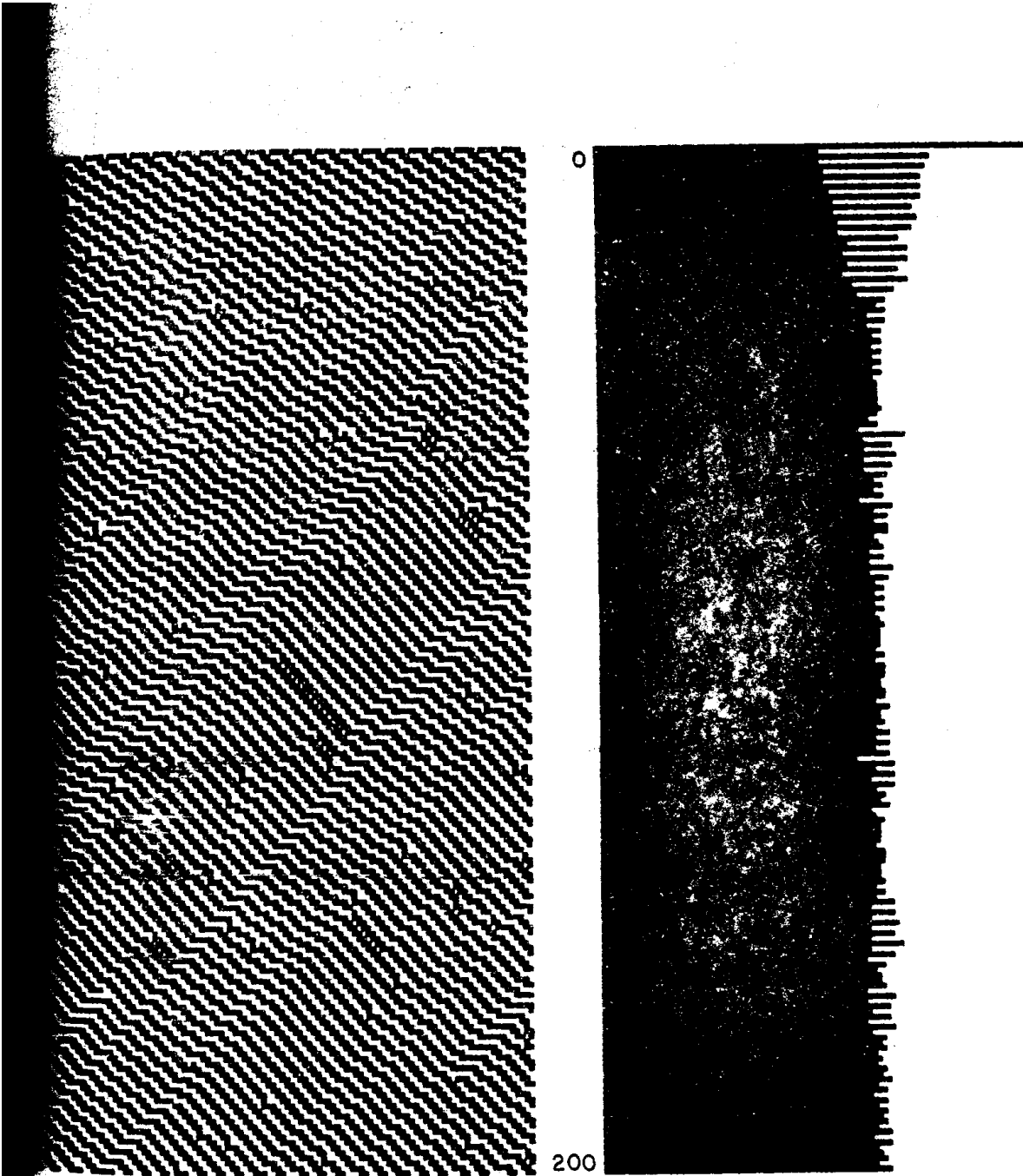
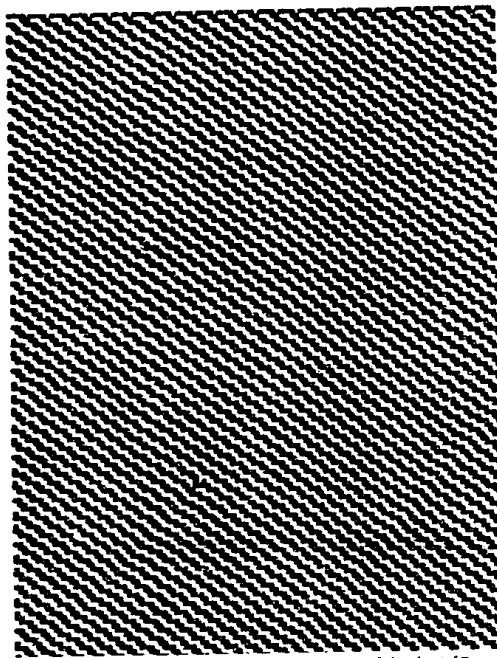


FIGURA 10

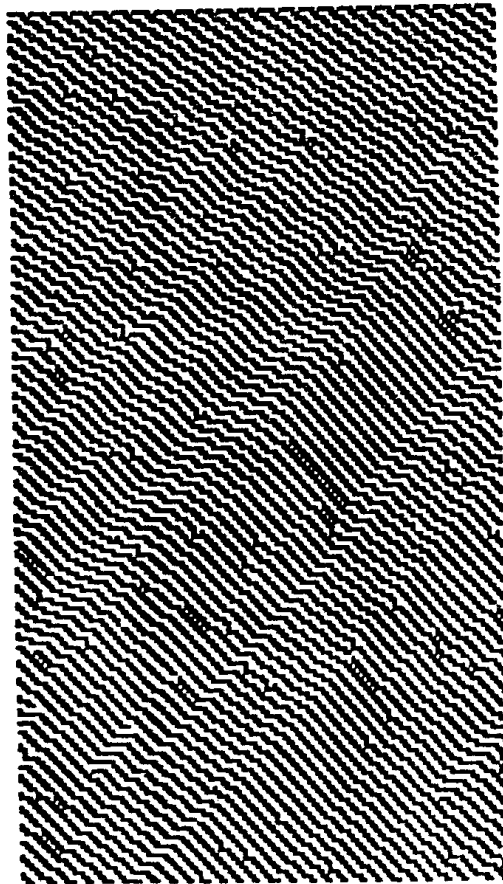
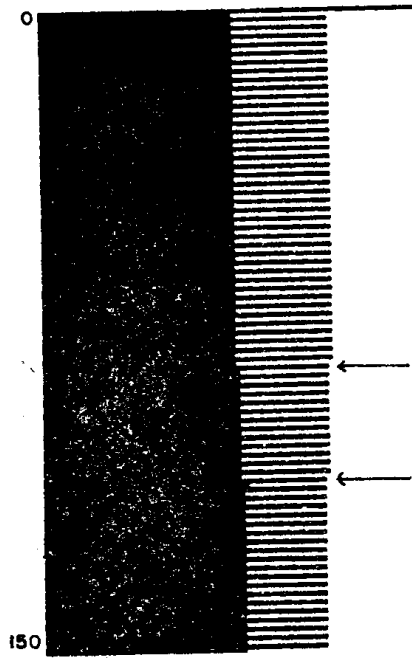


200

(b) $p/q=1/5$ FIGURA 10



(a) $p/q=1/5$



(b) $p/q=1/5$

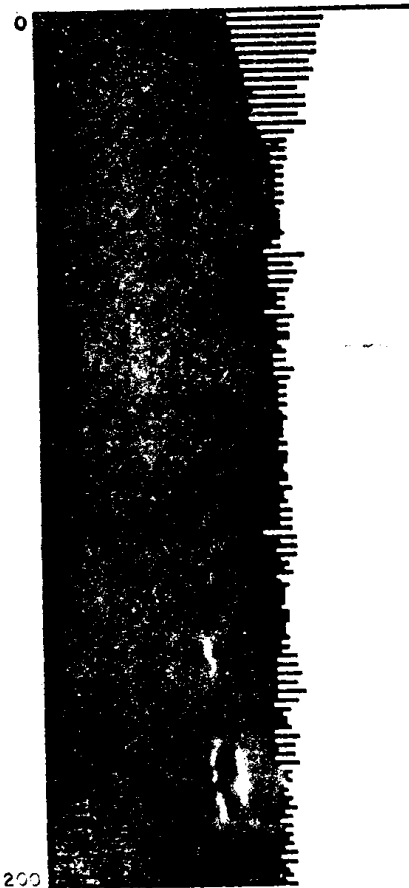


FIGURA 10

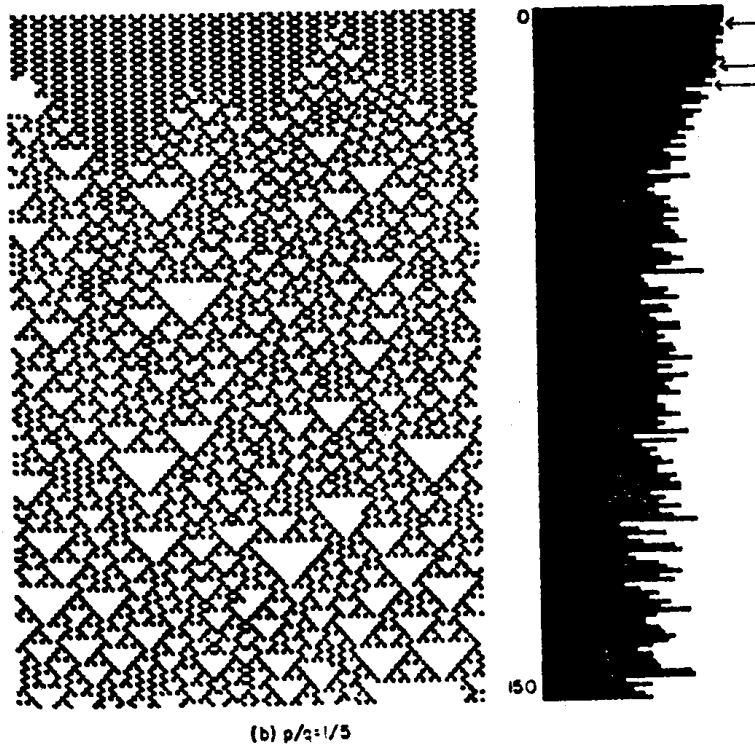
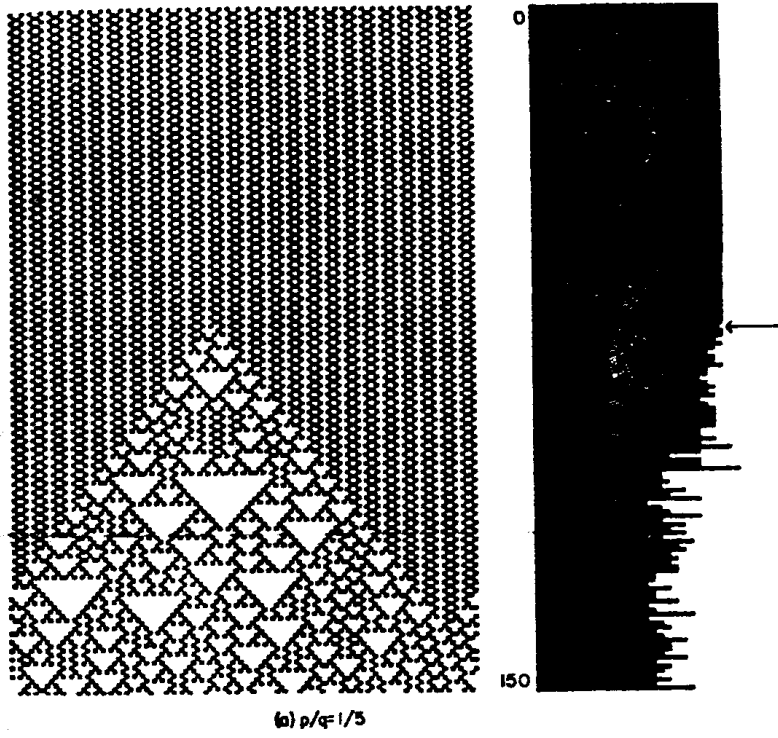


FIGURA II

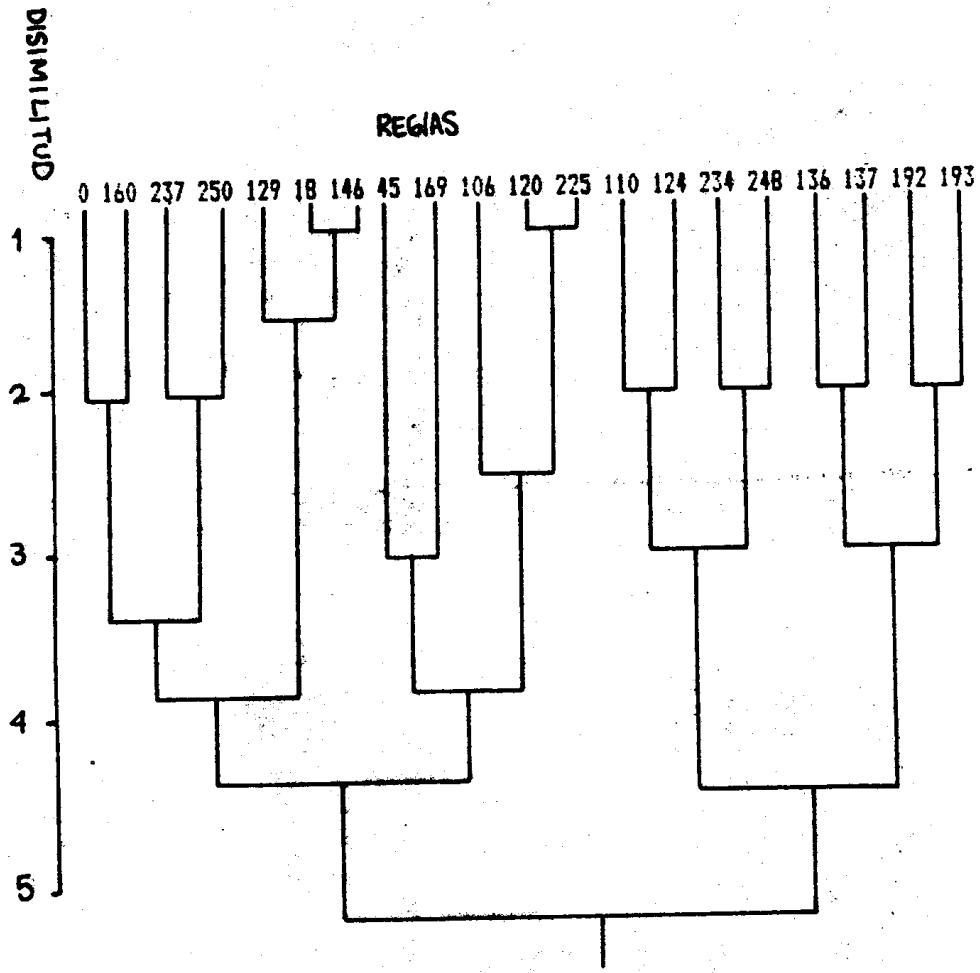


FIGURA 12

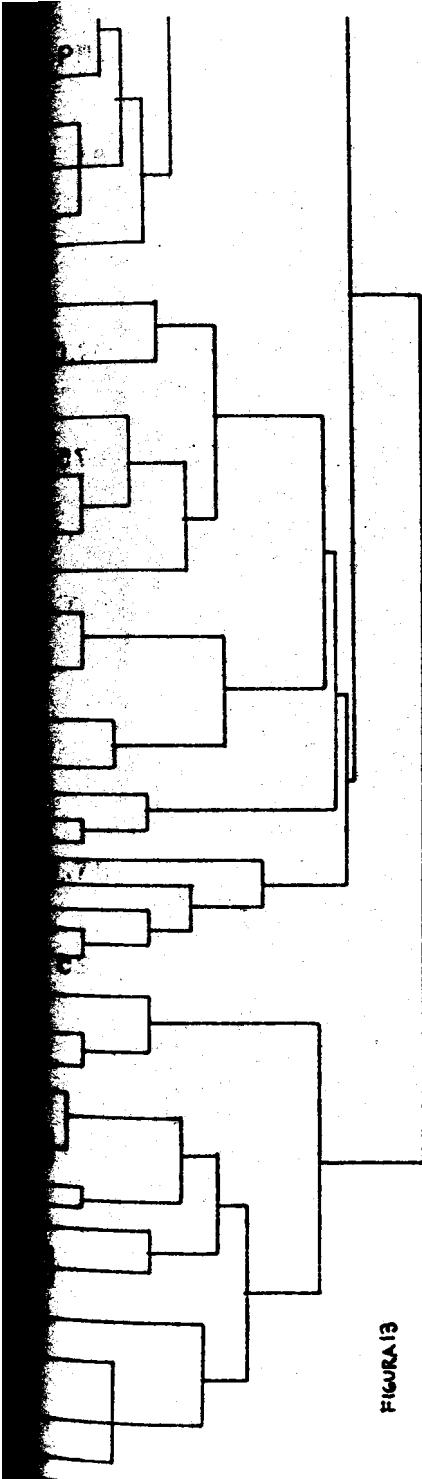


FIGURA 13

REGIAS

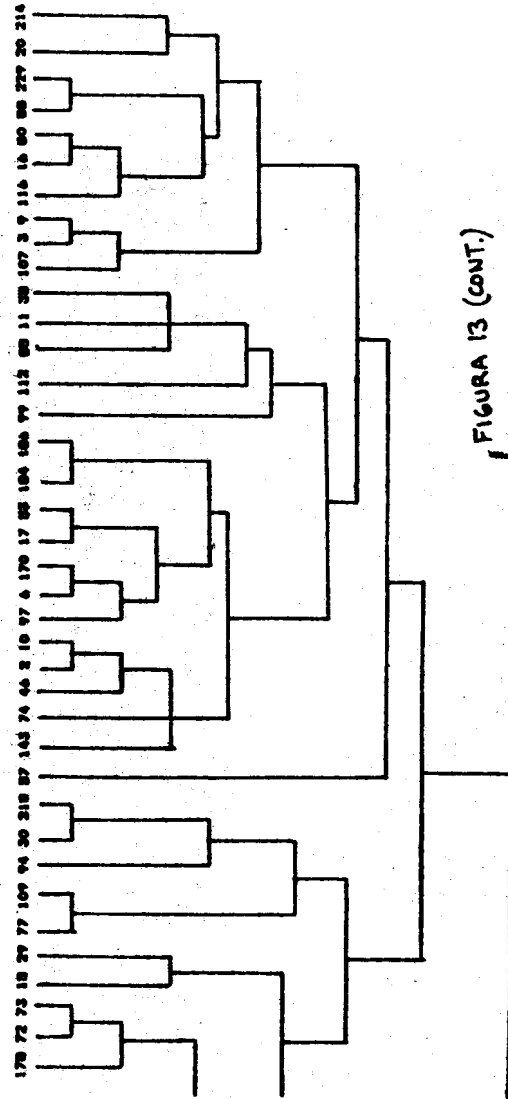
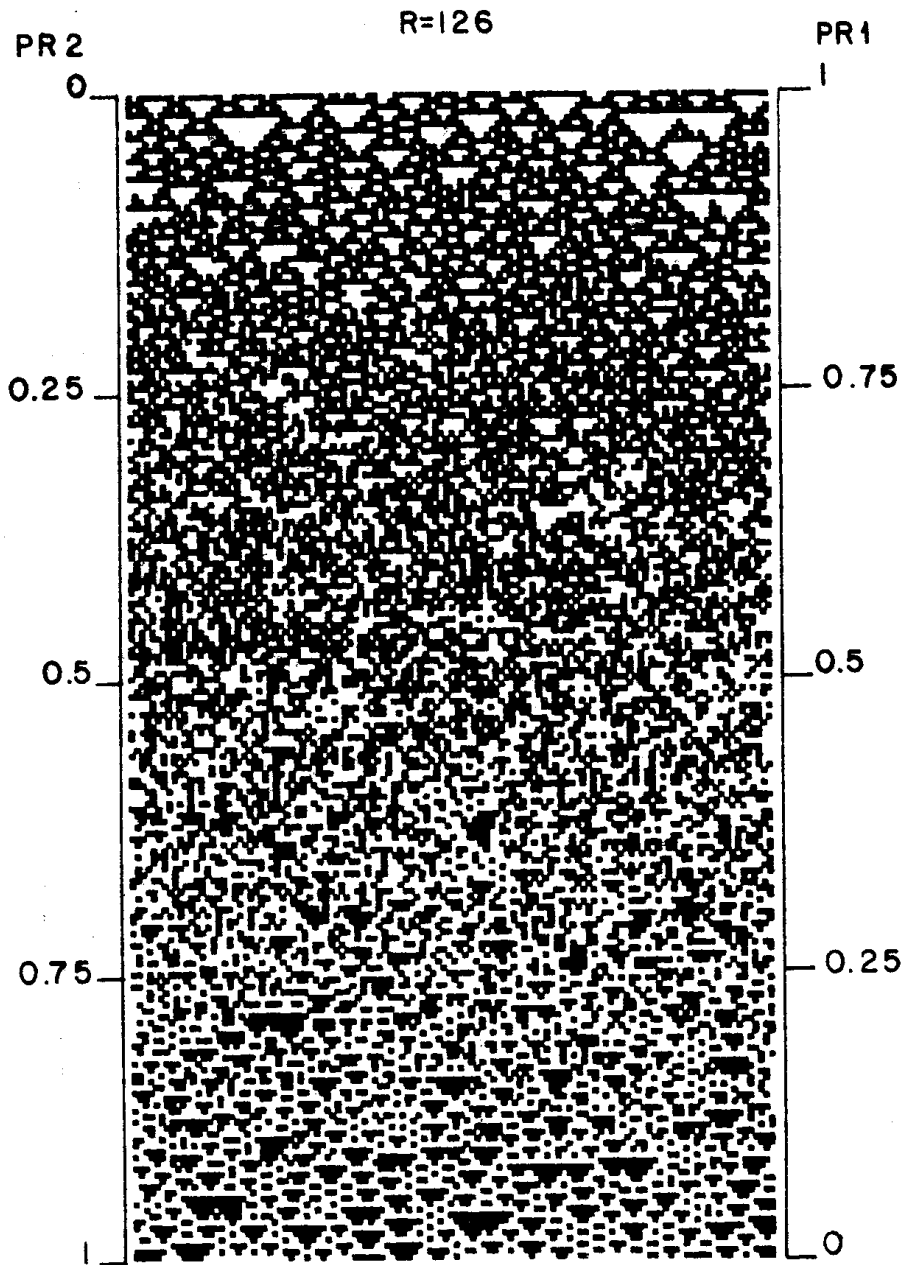


FIGURA 13 (CONT.)



R2=129

FIGURA 14

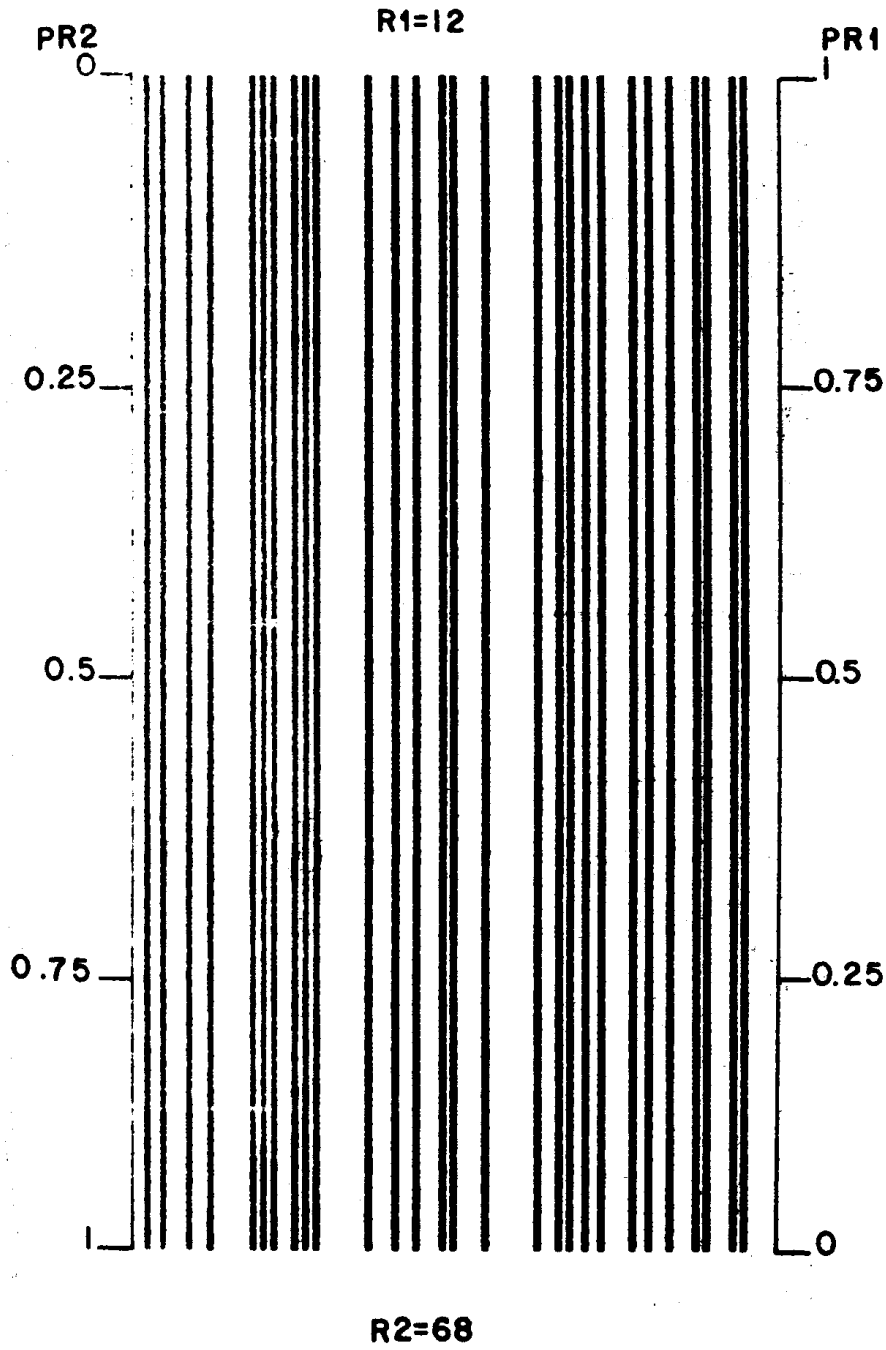
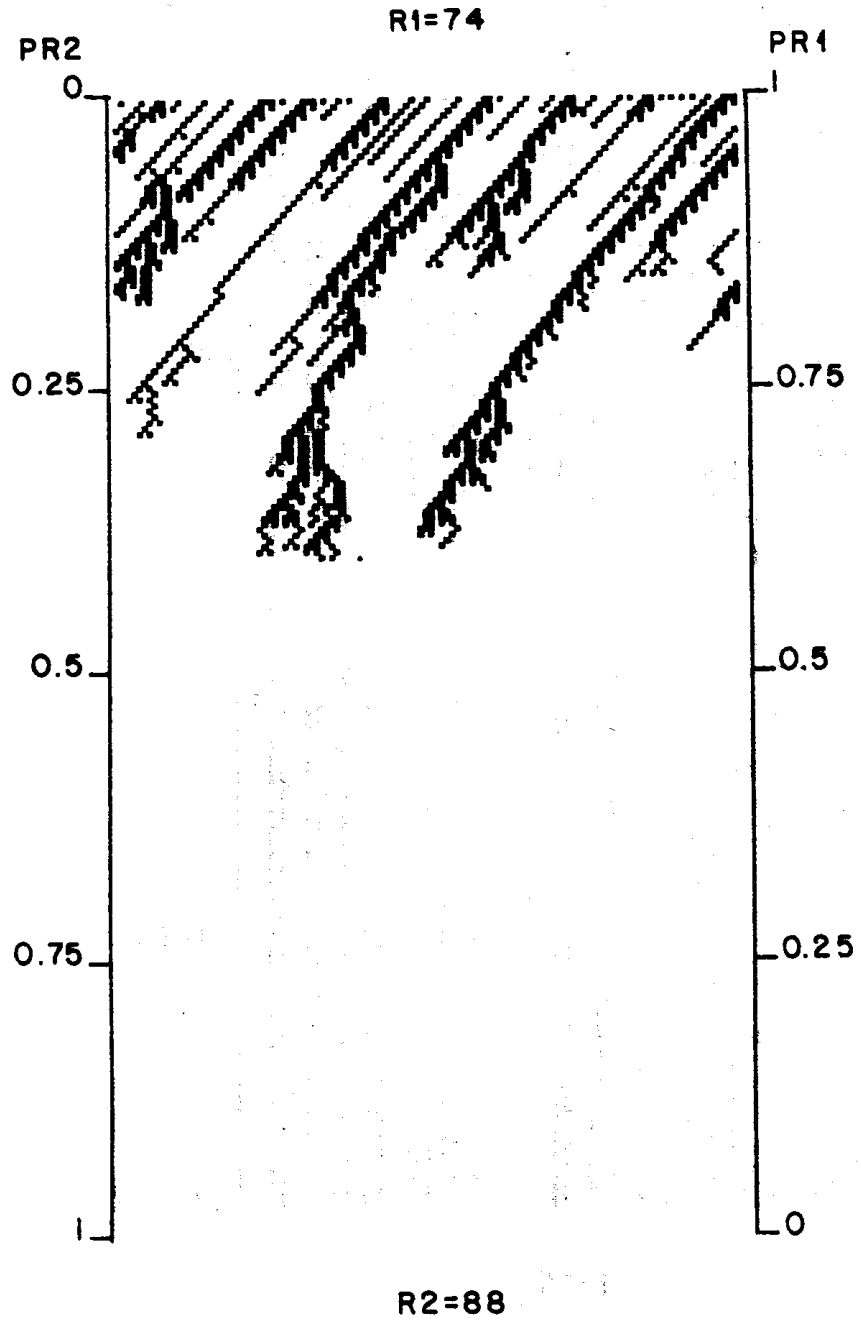


FIGURA 15

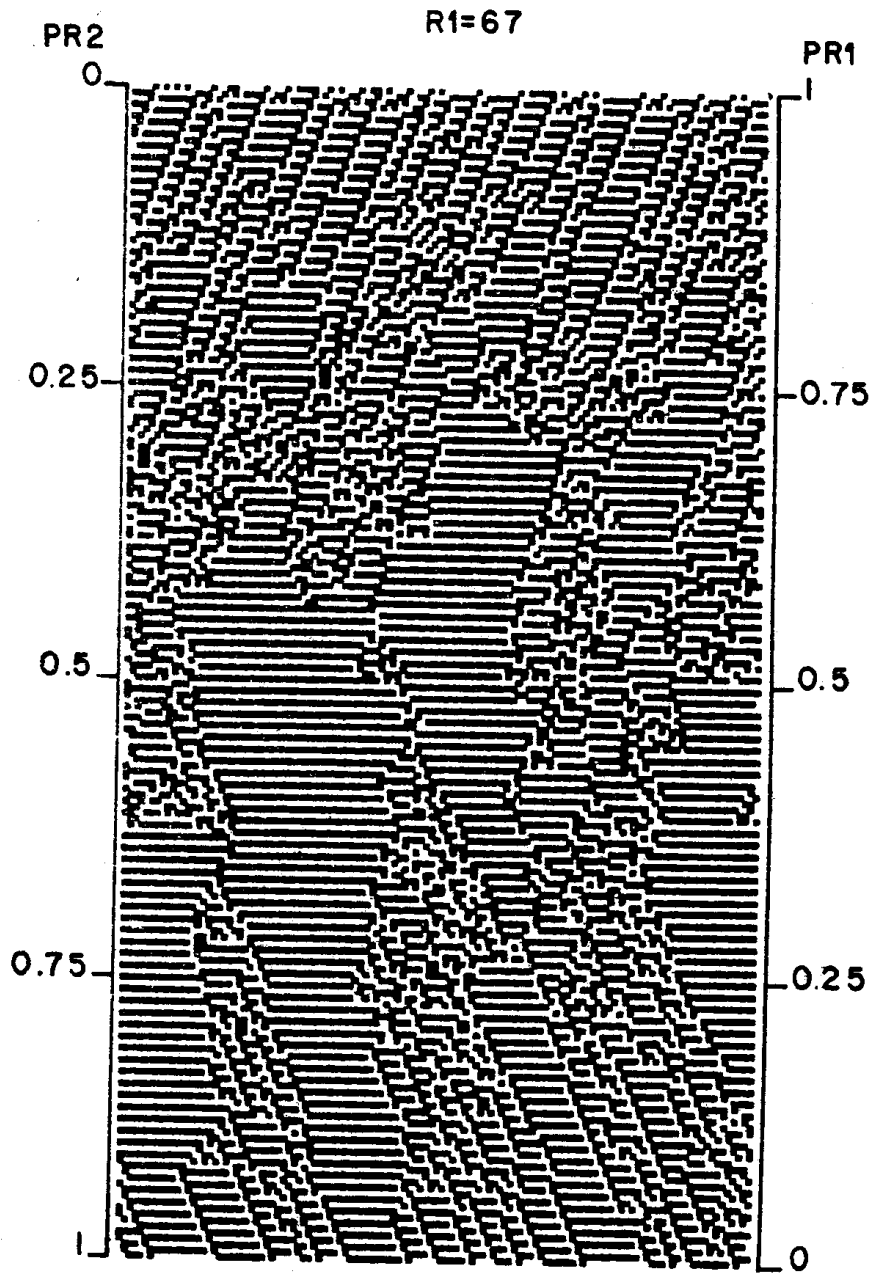
74

FIGURA 15



75

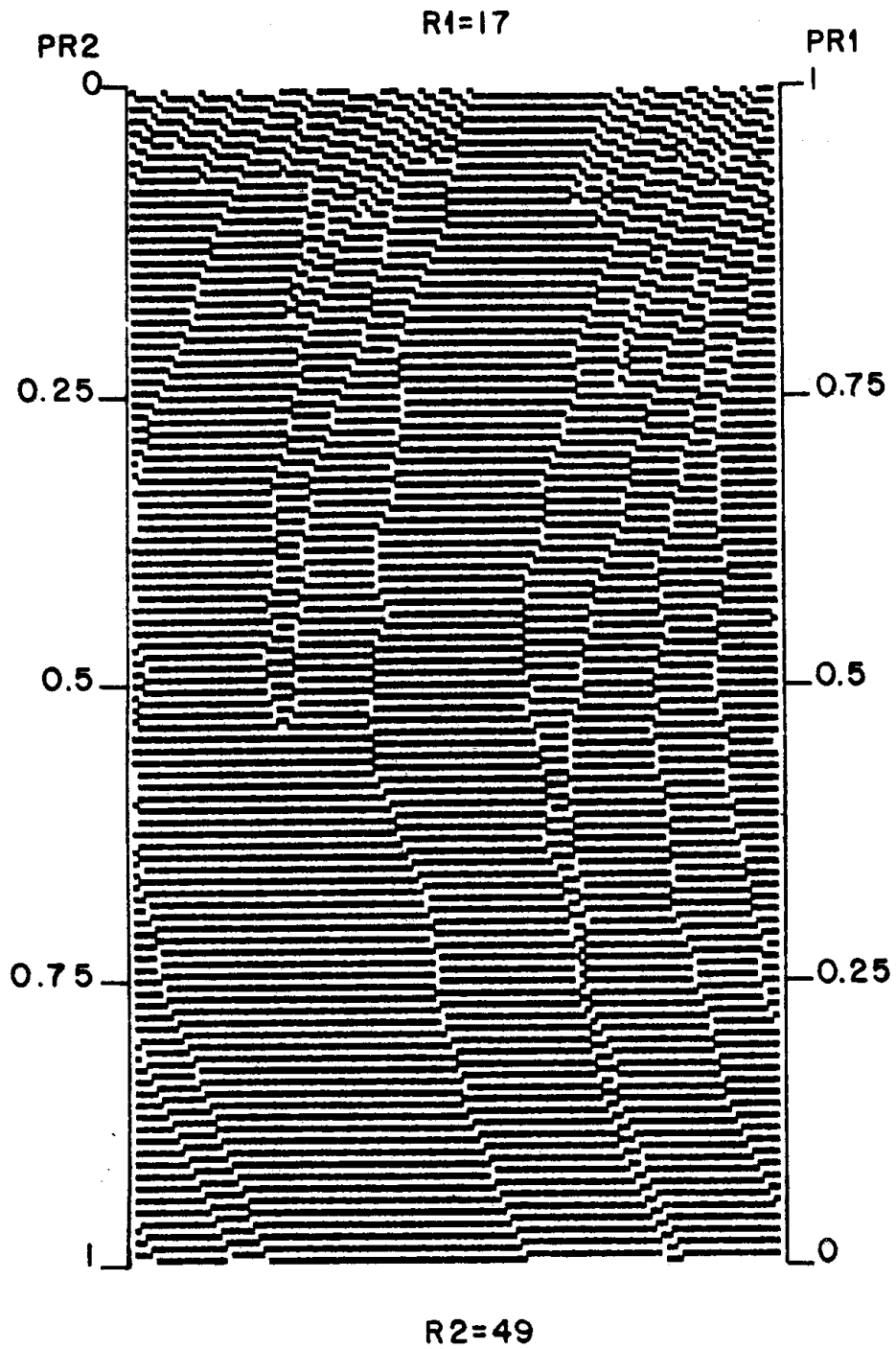
FIGURA 16

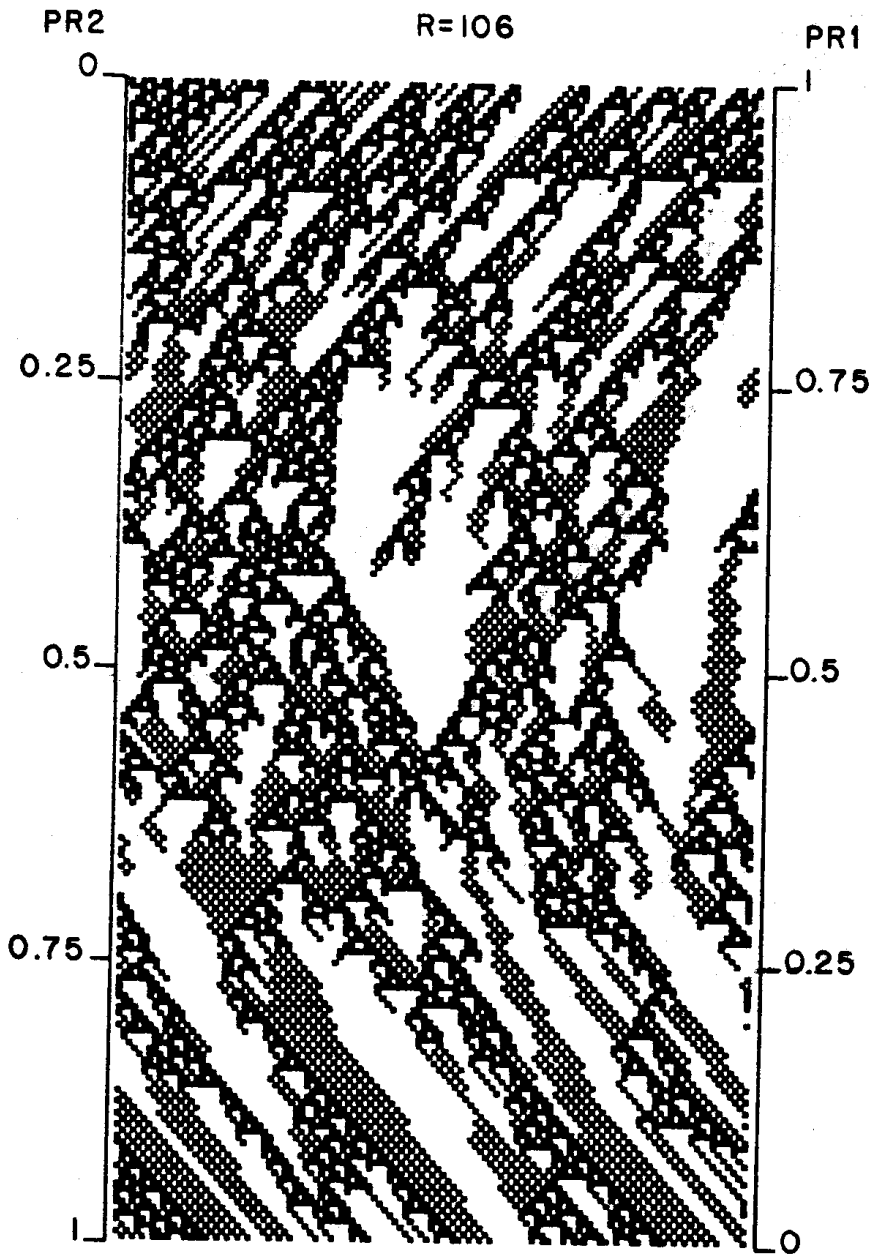


R2=107

76

FIGURA 17





R2=120

78

FIGURA 19

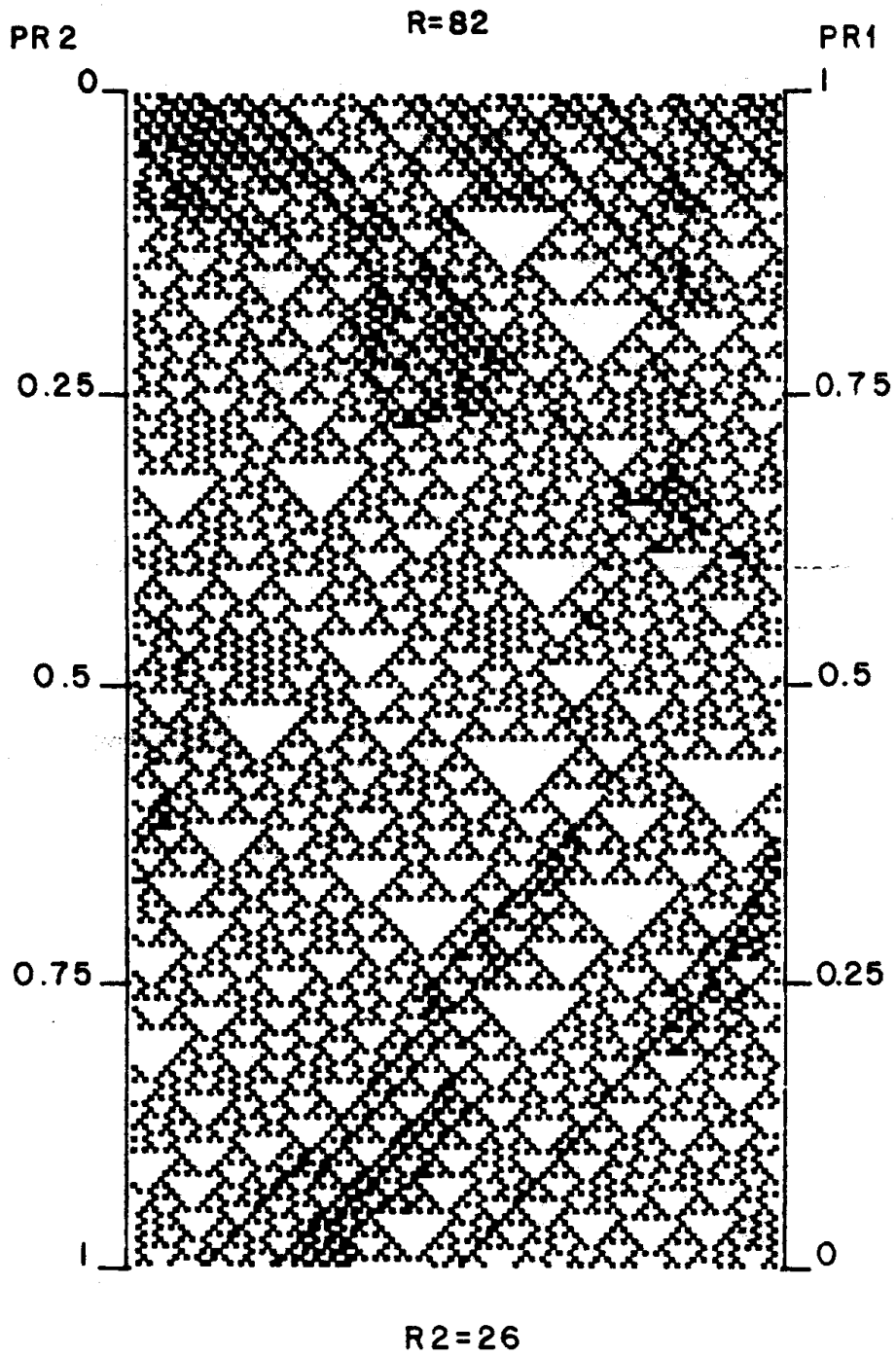


FIGURA 20

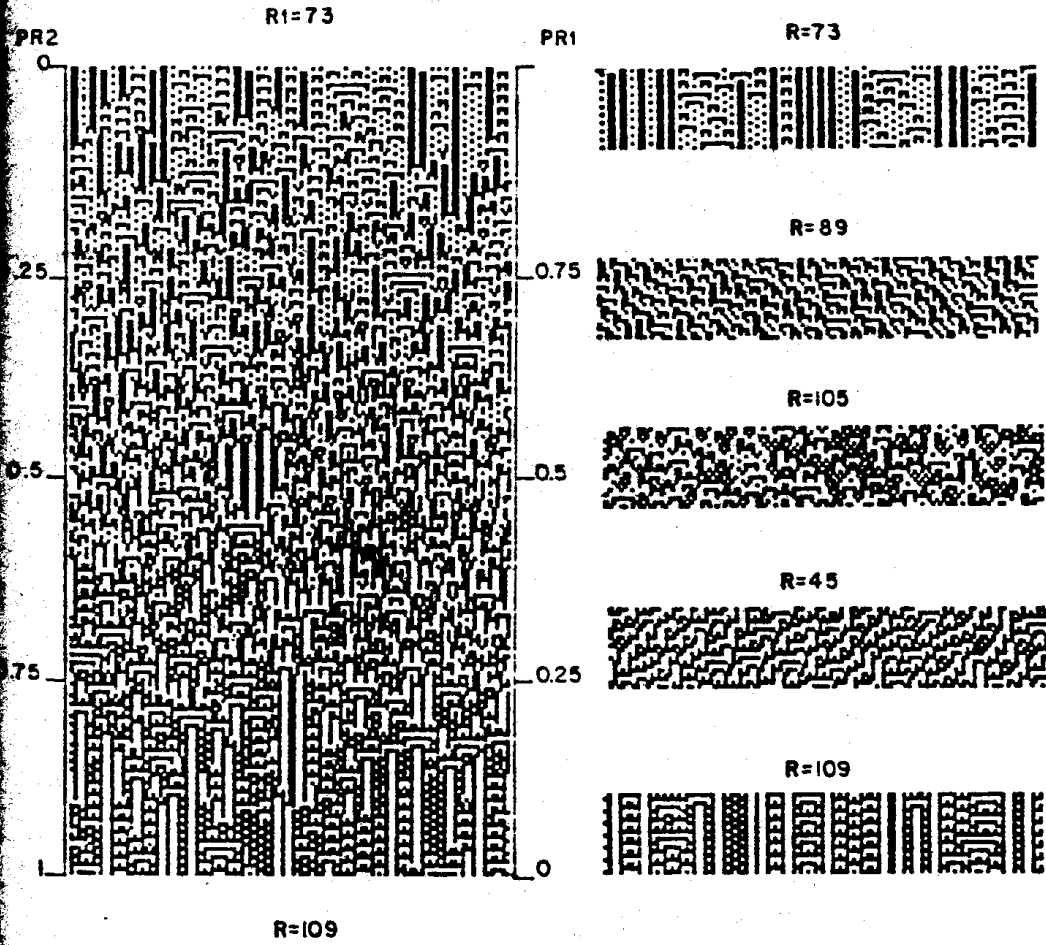


FIGURA 21

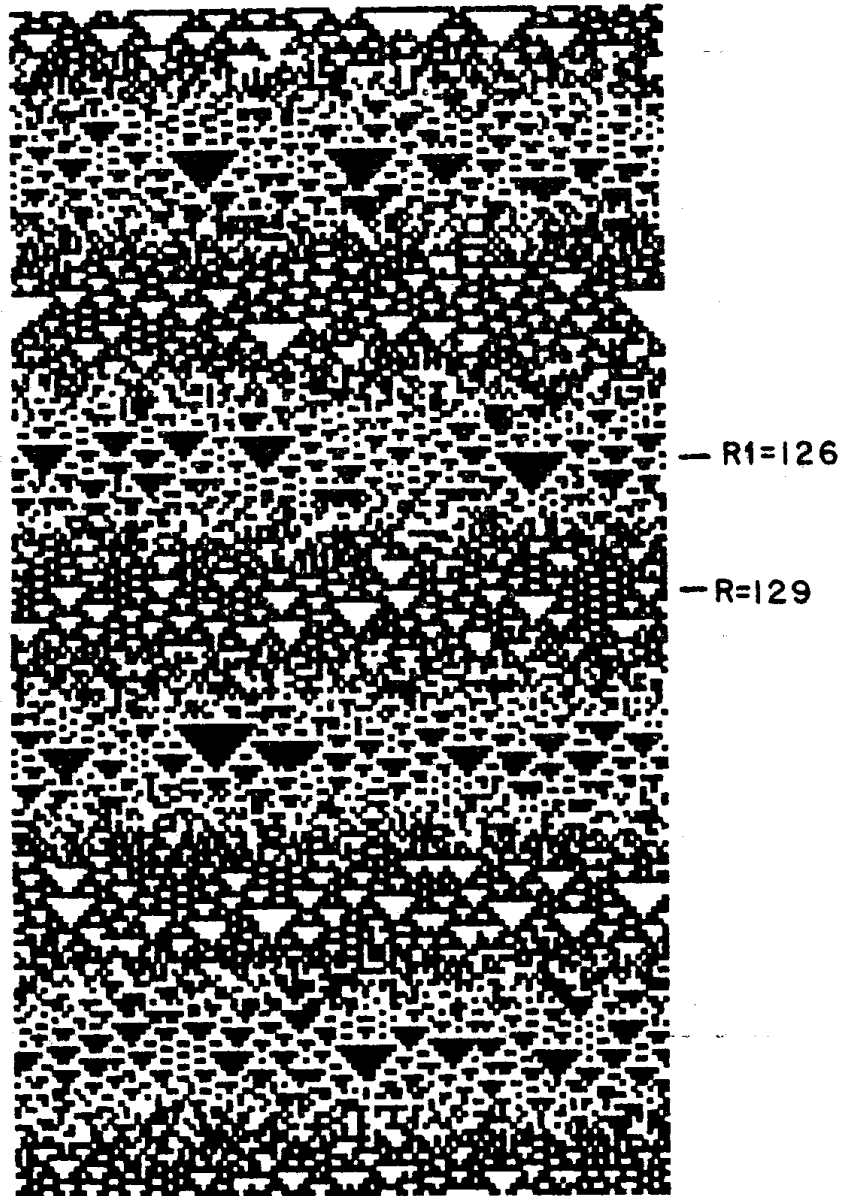


FIGURA 22

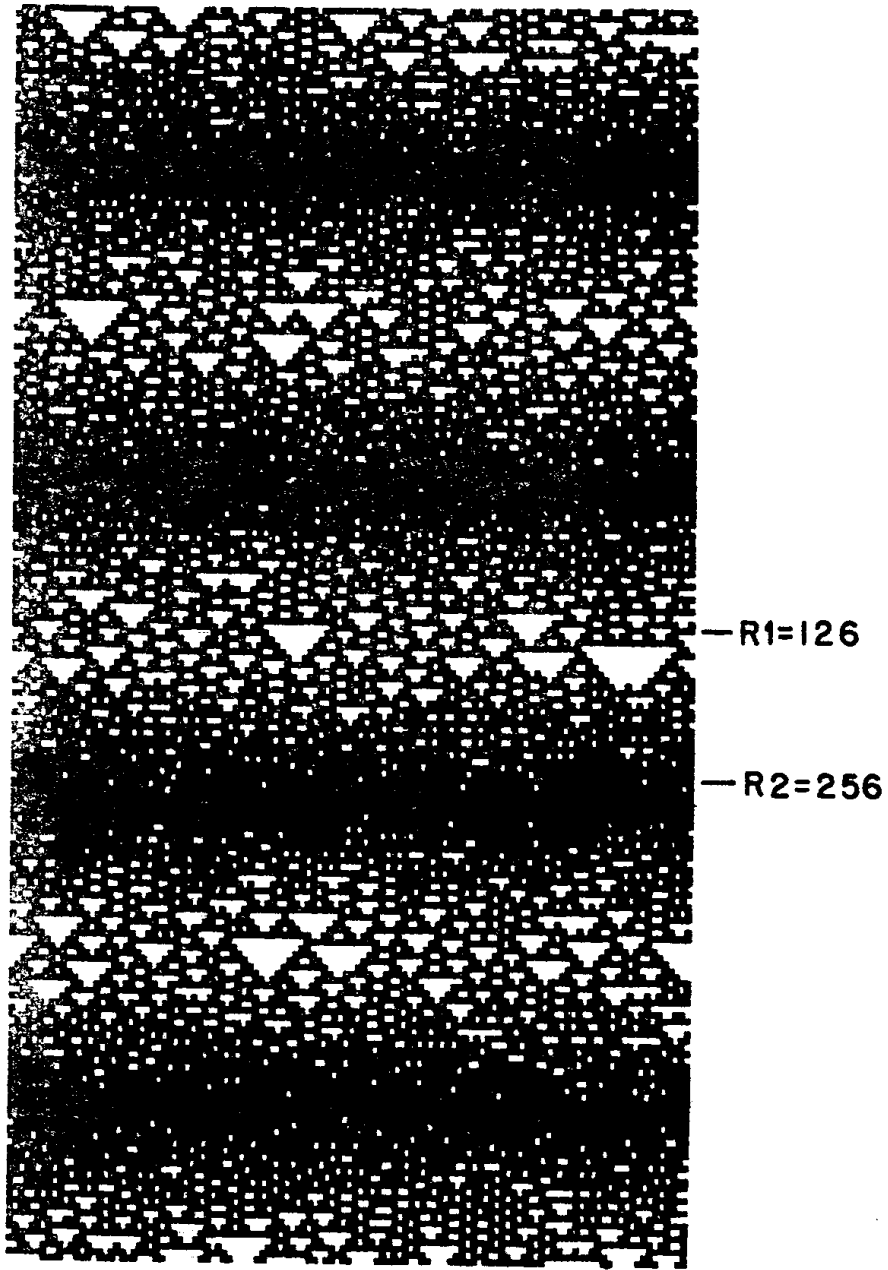


FIGURA 23

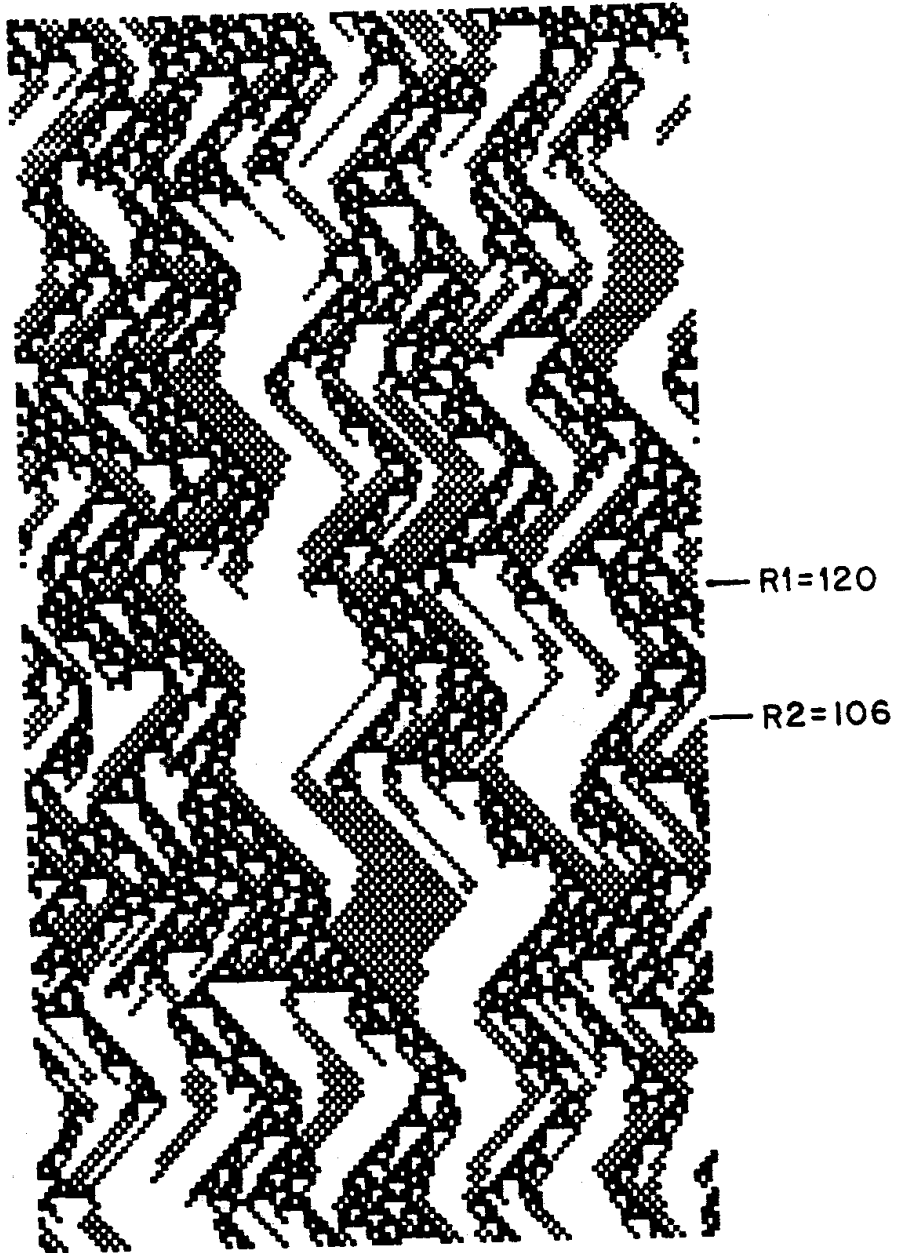


FIGURA 24

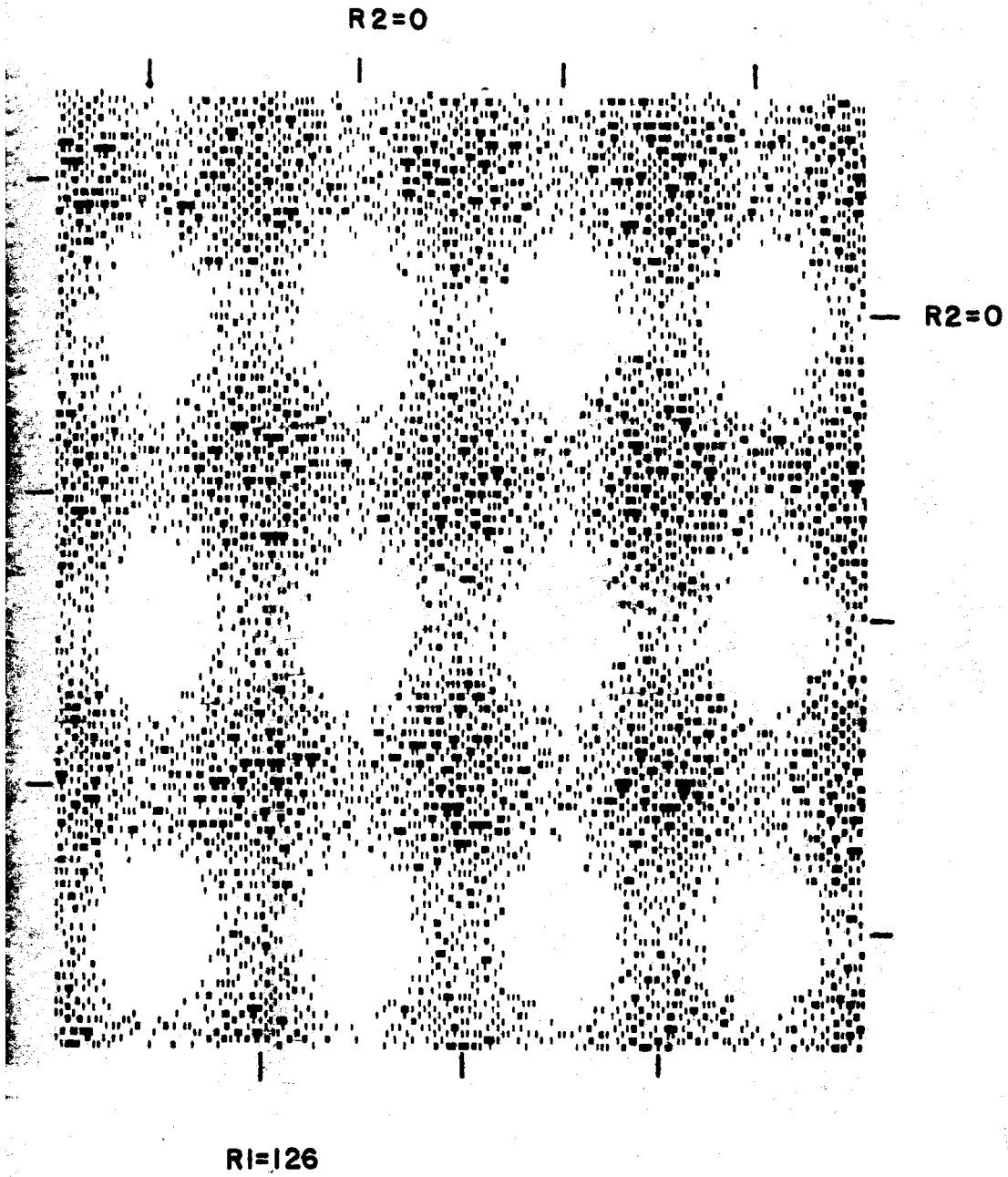
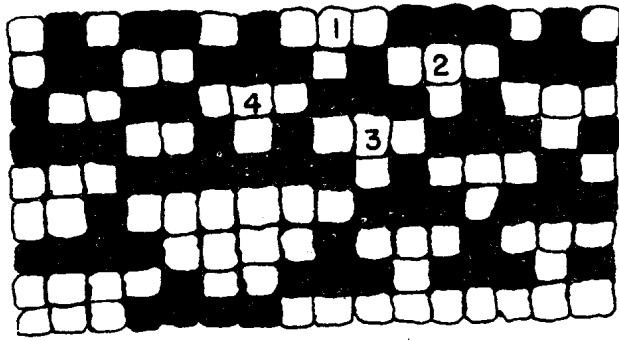
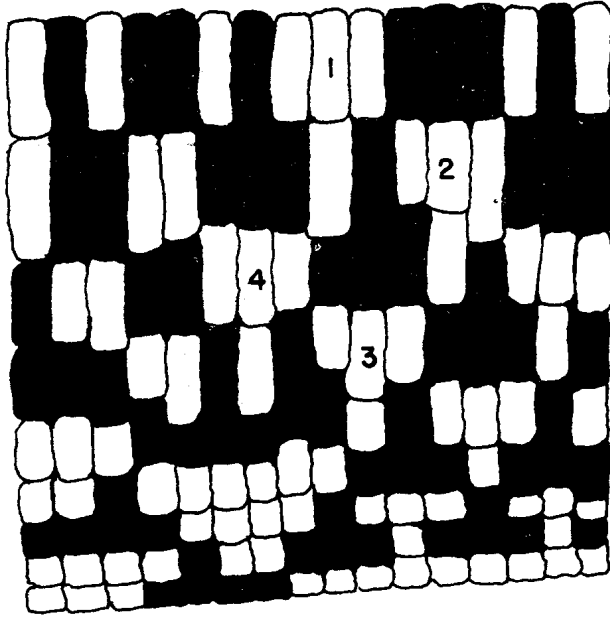


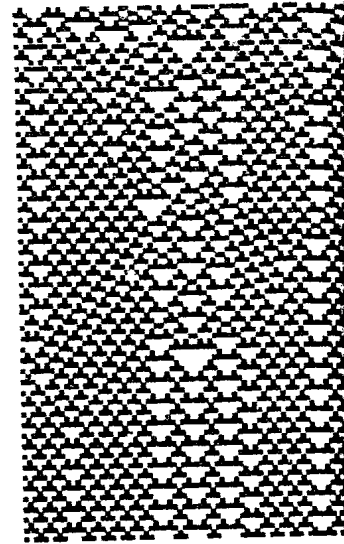
FIGURA 25



(B)

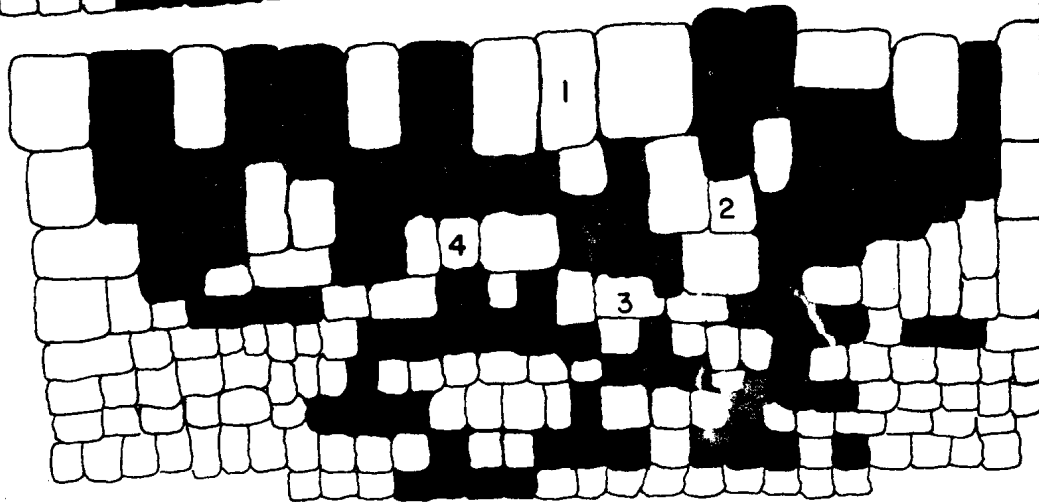


(C)

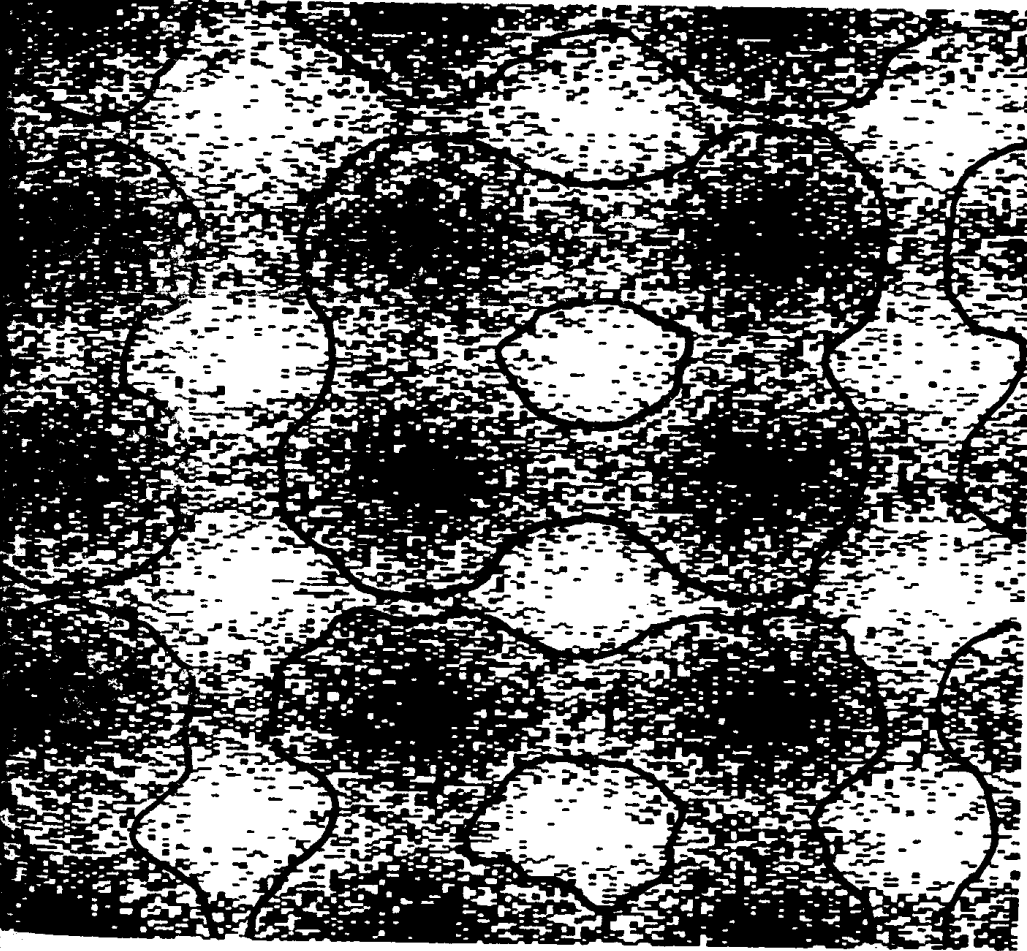


(A)

FIGURA 26

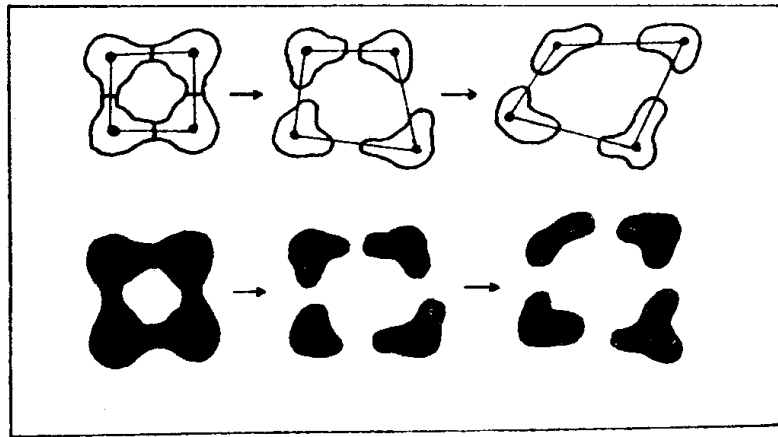


(D)



(A)

FIGURA 27



(B)

(C)



(D)



**LA COMPUTACION EN LA UNAM
EN EL PERIODO 1968-1980.
UNA INTERPRETACION.**

**Christian Lemaitre
Facultad de Ciencias UNAM**

I INTRODUCCION

A pesar de su corta historia la computación electrónica ha mostrado un dinamismo sin par acumulando una sorprendente cantidad de hechos y permeando las más diversas actividades humanas. Se ha convertido así en un complejo fenómeno social, económico, científico y técnico, que para comprenderse requiere ser estudiado históricamente.

Para poder llevar a cabo un estudio histórico profundo, una antigüedad de treinta años, como es el caso de la Computación Electrónica en México, no parece ser muy grande; sin embargo es posible sacar provecho de esta debilidad, en la medida en que se pueda rescatar la memoria colectiva todavía fresca de muchos de los protagonistas y separar, lo mejor posible, los hechos e ideas fundamentales de las cuestiones más anecdóticas y subjetivas.

El presente trabajo no pretende abarcar el estudio de los treinta años de computación en México, sino solamente un intervalo de doce años circunscrito a lo sucedido esencialmente alrededor de la Facultad de Ciencias y de los sucesivos descendientes del Centro de Cómputo Electrónico, instituciones a las cuales he estado ligado de una u otra forma desde entonces. El periodo propuesto, se puede caracterizar como periodo de "auge", abarca más o menos desde 1968 hasta 1980; si bien estos límites no deben tomarse en forma muy tajante, sí permiten distinguir la etapa que se desea estudiar de la fase de los "pioneros", 1958-1968, y de la etapa actual de "crisis", 1980-1988.



El periodo de "auge", como se verá más adelante, se caracteriza por la existencia de dos momentos muy claramente definidos que se diferencian entre sí por las distintas políticas relativas a la Investigación y Desarrollo (I/D) en computación que se impulsaron en el principal centro de investigación en computación de la UNAM y que de alguna forma involucró a gran parte de la computación en toda la institución.

En las siguientes secciones se buscará extraer del estudio de esta época, los principales hechos e ideas que conformaron las políticas de I/D, y discutirlos a la luz de los resultados a los que condujeron. En la última parte del trabajo, a manera de conclusión, se propondrá a la discusión colectiva una serie de ideas que se derivan de esta experiencia histórica, acerca de cómo se podría impulsar en la actualidad la I/D en computación en la UNAM para poder hacer frente a la crítica situación en la que se encuentra.

II LOS HECHOS Y LAS IDEAS

El periodo 1968-1980 cubre una etapa muy clara de expansión y difusión de las aplicaciones informáticas a nivel de todo el país basadas en los equipos grandes y medianos; se trata por lo tanto de la etapa previa a la introducción masiva de las computadoras personales de los años ochenta. Durante ese periodo se da una importante multiplicación de centros de cómputo en los sectores público y privado así como en las universidades de todo el país. En algunos casos se llegaron a crear centros extremadamente grandes a los que se les asignó la producción, operación y mantenimiento de sistemas de programación complejos que manejaban grandes volúmenes de datos. Este era el caso en los años setenta, por ejemplo, de los centros de cómputo de las Secretarías de Hacienda, Educación Pública y Programación y Presupuesto, de organismos como el INFONAVYT, IMSS y de los Bancos y Aseguradoras.

A lo largo de estos años se percibe, al menos a nivel del discurso y de ciertos gastos de infraestructura, un interés creciente por parte del Estado hacia la ciencia y la tecnología en general y hacia la computación en particular. Se crea así el CONACYT y en los diversos planes de desarrollo de este organismo va quedando cada vez más clara la importancia que se asigna a la computación. El Gobierno Federal crea además, a mediados de los setenta, una oficina encargada de coordinar, optimizar y fomentar el uso de la informática en sus diferentes dependencias.

En el ámbito particular de la UNAM, el periodo analizado se inicia con la adquisición y la instalación de un equipo de cómputo grande y moderno para la época que representaba un salto cualitativo en la capacidad de procesamiento de datos en la Universidad. Por lo que se refiere a la enseñanza de la computación, es en este periodo que se inicia el proceso de inclusión de cursos específicos de temas relacionados directa o indirectamente con la computación dentro de las distintas carreras impartidas en la UNAM. A este respecto es interesante recordar lo sucedido en la Facultad de Ciencias a finales de los años sesenta y principio de los setenta, ya que fue una de las primeras, sino la primera, en buscar incorporar esta rama de conocimiento dentro de la enseñanza que venía impartiendo.

Los primeros cursos de computación y temas afines dentro de la Facultad de Ciencias fueron los cursos de doctorado y de licenciatura del Dr. Alejandro Medina, maestro extraordinario que con su entusiasmo realmente contagioso se dedicó a difundir los más variados temas relacionados directa o indirectamente con la computación. En sus cursos desfilaron temas tan variados como teoría de control, programación lineal, teoría de autómatas e inteligencia artificial, todo ello salpicado de brillantes disquisiciones sobre problemas de física. El papel desempeñado por el Dr. A. Medina fue de gran importancia para toda una generación de estudiantes de física y matemáticas a quienes sus cursos abrieron nuevas y amplias perspectivas. Posteriormente se fueron introduciendo cursos más específicos dentro de la licenciatura y el posgrado como el de lógica matemática y el de teoría de autómatas, y a principios de los años setenta se estableció un amplio conjunto de cursos optativos de diversas materias de computación que conformaron una especialidad dentro de la carrera de matemáticas. En 1974 se creó un pequeño grupo de computación dentro del departamento de matemáticas de la Facultad de Ciencias que junto con los investigadores del CIMAS y del CSC conformaban una importante base docente para esta especialidad.

En lo relativo a la I/D y la formación de investigadores y profesionales de alto nivel, se analizará esencialmente lo sucedido en el principal centro de I/D en computación de esa época, el descendiente del Centro de Cómputo Electrónico que llevó a lo largo de esos años los sucesivos nombres de CIMASS, CIMAS y finalmente IIMAS.

En toda una primera etapa, se estableció una política sistemática de acercamiento a la Facultad de Ciencias buscando atraer estudiantes de licenciatura ofreciéndoles pequeñas becas, acceso al equipo de cómputo, participación en seminarios y dirección de tesis. Una vez concluida la

tesis, se les animaba y ayudaba a salir a doctorarse al extranjero. Se retomaba, sistematizaba y generalizaba un planteamiento que ya había rendido frutos en la etapa pionera.

Conforme fueron transcurriendo los años setenta, esta política se fue relajando y dejando a iniciativa personal de los investigadores abandonando por completo el apoyo "institucional" y sistemático de los primeros años. La alternativa que se impulsó a partir de 1974 fue la constitución de una maestría en Ciencias de la Computación cuyo control residiría en el CIMAS y luego en el IIMAS. Se iniciaba así en la UNAM un desprendimiento de los estudios de posgrado de las Facultades a favor de los Centros e Institutos, creando una mayor confusión en la estructura global de la Universidad y rompiendo, o en todo caso dañando, la unidad de la investigación y la docencia a todos los niveles.

En esos años se manejaba la idea de que la computación en la UNAM había llegado a una cierta "mayoría de edad" y que el CIMAS contaba ya con la "masa crítica" y el nivel científico necesarios como para convertirse en un Instituto; ya se podía "jugar en las grandes ligas", y sobretodo, entrar a resolver "Problemas Nacionales". Estos planteamientos iban enmarcados dentro de todo un pretendido esquema moderno de financiación de la investigación: los investigadores deberían vender sus proyectos fuera de la UNAM, así fuese sólo al CONACYT. En caso de no tomarse esa vía, se exigía hacer como en los otros "centros de excelencia", publicar en revistas internacionales con arbitraje.

Se buscaba así responder a la doble característica de la computación que por un lado tiene una componente de ciencia básica y por el otro de tecnología o ciencia aplicada. La disyuntiva era la de "competir" según los estándares vigentes en institutos de larga tradición como Astronomía o Física o bien concursar más o menos abiertamente en el mercado de la informática extrauniversitaria.

El resultado para fines de la década de los setenta era claro. El espíritu empresarial era cada vez más dominante y los criterios clásicos de producción científica más difíciles de cumplir. Si bien el instituto contaba ya con un buen número de investigadores y ayudantes, mostraba una incapacidad creciente para retener el tiempo suficiente a sus investigadores como para asegurar la permanencia de los grupos de investigación y una mínima continuidad en el trabajo. La política de formación de nuevos investigadores era errática y se sostenía sólo por iniciativa de unos pocos investigadores; el mercado de la informática se había convertido en la preocupación central del Instituto.

Lo sucedido en el IIMAS en el periodo de 1980 a la fecha se explica en gran parte por lo sucedido en el periodo estudiado, agravado naturalmente, por la enorme crisis económica que vive la UNAM. Por esta razón, en la siguiente sección se retomarán algunos de los puntos centrales de la discusión de esos años acerca de lo que debería ser una política de desarrollo de la computación en la UNAM para analizarlos con más detenimiento.

III LA QUIEBRA DE UNA POLITICA CIENTIFICA

Al margen por completo de las personas involucradas, lo que se discutía y decidía en esos años en relación a la I/D en computación eran cuestiones estratégicas que se siguen planteando y discutiendo en la actualidad. De ahí la importancia de sacar las lecciones de la historia y buscar contraponer nuevas directrices que eviten los errores del pasado.

Una fuente importante de errores en el diseño de políticas científicas concretas en países subdesarrollados como México, es el recurrir con demasiada frecuencia a copiar mecánicamente rasgos superficiales, principalmente, de la organización científica norteamericana. A continuación se ejemplificará este punto alrededor de tres de las problemáticas centrales mencionadas en el apartado anterior: El financiamiento de la ciencia, la utilidad social de la I/D y el sistema de difusión y evaluación de la investigación a través de las publicaciones.

EL FINANCIAMIENTO

No se puede comprender cabalmente la evolución de la I/D en computación si no se contempla con detenimiento el problema del financiamiento. Es bien conocido, basta consultar cualquier memoria de congreso o revista especializada, que en Estados Unidos el principal financiador de trabajos de I/D es el Pentágono; financia no sólo los trabajos de las universidades a través del sistema de subvenciones a proyectos, los llamados "grants", sino también a los centros de I/D de la industria mediante contratos específicos de I/D. Anualmente el Pentágono publica la lista de sus principales contratistas de I/D en la que se mezclan tanto Universidades como centros de Investigación privados o laboratorios industriales. En el caso de la industria el siguiente paso, una vez

conseguido un contrato de I/D, es lograr un contrato para proveer al Pentágono de los productos resultantes de la investigación. Desde el punto de vista empresarial se trata de un negocio redondo en donde gran parte de los gastos de Investigación básica, desarrollo de prototipos y producción en serie es absorbido por el Estado. Una buena parte de estos productos son clasificados como de uso restringido a las fuerzas armadas y la industria debe esperar un cierto número de años antes de poder introducirlos al mercado civil donde el volumen de las ganancias es aún mayor.

En el caso de la I/D dentro de las universidades existen otras fuentes de financiamiento como son, por un lado, la National Science Foundation y los Institutos Nacionales de Salud que suelen financiar ciertas áreas no prioritarias para la investigación militar, o bien participar conjuntamente con el Pentágono en el financiamiento de proyectos, y por el otro las propias universidades que suelen sostener con sus propios fondos un cierto porcentaje de investigaciones mientras obtienen un patrocinador externo.

En resumen, la I/D en el país líder del liberalismo económico resulta ser, muy en contra de las apariencias, una actividad altamente subvencionada por el Estado.

Los países de la Comunidad Económica Europea sacaron, hace unos años, las conclusiones de este hecho e instituyeron los grandes proyectos ESPRIT y EUREKA, así como diversos programas nacionales para financiar la I/D tanto de la Universidad como de la Industria.

Estos mecanismos de subvención a la I/D tienen consecuencias importantes en la división del trabajo que se establece en un país como Estados Unidos entre las Universidades y los laboratorios de investigación industriales. En la mayoría de los casos, las Universidades producen toda una gama de trabajos que van de los resultados más teóricos a la construcción de prototipos para los cuales las exigencias de tiempos y costos no son tan drásticos como para los productos ya comerciales. Se trata, en general, de desarrollar un sistema original y de generar una serie de conocimientos que la industria aún no domina. Consecuentemente este tipo de I/D debe estar mínimamente protegido de las presiones naturales del mercado informático.

En caso de obtenerse en las universidades resultados directamente comercializables, la historia de la computación en EE.UU. demuestra la tendencia natural a que los investigadores involucrados que puedan gozar de derechos sobre las patentes correspondientes, salgan de la universidad

para probar suerte en el mercado montando su propia compañía. Esta es una de las razones de la existencia de los parques industriales cercanos a los grandes centros universitarios norteamericanos, como son el Valle del Silicio en la bahía de San Francisco, o la Ruta 128 en la zona de Cambridge Massachussetts. En este caso, la Universidad se convierte directamente en productora de empresarios.

Es en esta perspectiva que hay que situar el insólito planteamiento en boga en los años setenta en la UNAM, y en particular en el IIMAS, de que los investigadores en computación salieran a vender sus proyectos, o en su defecto, emprendieran proyectos bajo solicitud de algún "cliente" extrauniversitario, buscando estructurar de ese modo una política de autofinanciamiento y fomento de la I/D tendiente a resolver problemas que se calificaban indistintamente de "reales", "nacionales" o "prioritarios". Este planteamiento rápidamente derivó en el desarrollo o búsqueda de proyectos de índole francamente comercial y empezaron a crearse algunas empresas alrededor de estas actividades. Se pasaba así, casi sin sentirlo, de una intención de autofinanciamiento de la I/D en computación y de investigación aplicada a problemas reales, al desarrollo de sistemas netamente comerciales y eventualmente, a la resolución de problemas financieros personales.

LA UTILIDAD SOCIAL DE LA I/D

Una de las principales características de la computación electrónica es su impresionante dinamismo, tanto en su aspecto científico y tecnológico en sí, como en su difusión y aplicación a cada vez más actividades humanas.

Esta peculiar situación de la computación plantea la necesidad de aclarar el papel que juega la I/D universitaria en el desarrollo general de un país, y más específicamente, qué se puede esperar de ella en un país como México. Este punto tiene una gran relevancia en relación con la discusión que se tenía en los años setenta y que con algunos matices sigue siendo actual. En efecto, en esos años una de las líneas directrices de apoyo institucional a proyectos de investigación en computación era, como ya se mencionó anteriormente, que estos atacaran problemas de interés nacional. Antes de analizar las implicaciones locales de este tipo de planteamientos, habría que referirse nuevamente y en forma breve, a la experiencia norteamericana que para tantos es el modelo a seguir.

Desde el punto de vista de su desarrollo como ciencia y tecnología, dentro de la economía de mercado, la computación es un producto moderno que se apoya en la larga experiencia de la producción científica en el capitalismo contemporáneo que se originó con la química orgánica en la Alemania de fines del siglo pasado y se consolidó en EE.UU. después de la segunda guerra mundial.

Es en este esquema de desarrollo de la ciencia y la tecnología que la mayor parte del conocimiento nuevo se genera en los laboratorios de I/D de las grandes industrias o de los llamados "Think Tanks", es decir de los laboratorios de investigación privados. La Universidad, si bien sigue jugando un papel importante éste es complementario, ya no es el centro único y privilegiado de desarrollo del conocimiento científico y tecnológico. Además, gran parte de la difusión y asimilación sociales de la computación y de sus aplicaciones no ha estado esencialmente en manos de las Universidades sino de la propia industria informática y de los grandes usuarios.

A pesar de todo esto, la Universidad sigue jugando en los países altamente industrializados un papel clave en muchos aspectos. A continuación se mencionan algunos de los más importantes:

- La Universidad sigue siendo la productora privilegiada de cuadros calificados y en particular de investigadores.
- La Universidad se ha encargado de la producción masiva de profesionales de la computación demandados por el mercado de trabajo.
- La Universidad es un centro importante de difusión de la computación en otras áreas del conocimiento.
- La Universidad es un lugar privilegiado para la investigación teórica y para las reflexiones de carácter más universal.
- La Universidad ha sido tradicionalmente un sitio para desarrollar prototipos de aplicación sin la presión directa de las exigencias de tiempos y costos del mercado. Un ejemplo de ello sería el papel central que jugó la Universidad en el desarrollo de las dos primeras generaciones de computadoras, y cómo después de haberlo perdido en favor de la industria, en los últimos años dentro de las Universidades han vuelto a resurgir los departamentos de diseño y arquitectura de computadoras alrededor de proyectos de máquinas RISC, SISTOLICAS, LISP, PRO LOG etc.

- Otro aspecto no menos importante es el papel de la universidad en la apertura de espacios privilegiados para la creación, multiplicación y florecimiento de nuevas industrias que se nutren de sus egresados y de sus profesores que la abandonan.

Retomando la discusión de la I/D de la computación en la UNAM en los años setenta a la luz de lo anteriormente expuesto queda claro que no sólo el planteamiento de vender los proyectos sino también el de atacar los problemas nacionales prioritarios, eran lineamientos que no llevaban a ninguna parte por las razones siguientes:

i) Por un lado, la definición y clasificación de los problemas nacionales, nunca se define concretamente, lo que deja abierta la posibilidad de todo tipo de interpretaciones subjetivas. Sin embargo en los círculos institucionales la mayoría de las veces se definen estos problemas nacionales prioritarios en función de las modas sexenales matizadas, según el caso, por los intereses de grupo más específicos. No vale la pena detenerse más en estas consideraciones dada la triste y larga experiencia de los grandes proyectos nacionales frustrados de los últimos sexenios. No se trata de negar las gravísimas carencias de la mayoría de la población del país, sino de denunciar el uso demagógico de términos mal definidos que se prestan más a satisfacer intereses, personales o de camarilla, que a los realmente colectivos.

En computación, estos planteamientos enfocados para seleccionar temas de investigación aplicada cuando se tenía apenas un núcleo relativamente modesto de investigadores, revelaba no sólo una grandilocuencia fuera de lugar, sino una miopía política y científica enormes, que impedían en particular, que los profesores e investigadores pudiesen emprender planes y acciones a largo plazo, primero para fortalecer sus grupos de investigación y luego para afinar y adecuar sus programas de investigación a sus entornos naturales.

ii) Por otra parte con planteamientos del tipo de "atacar problemas nacionales" se le está pidiendo a la Universidad algo que de entrada está fuera de sus posibilidades, a saber, la resolución de problemas que las esferas productiva y gubernamental no han podido resolver.

Ya hemos visto el papel limitado que se le asigna a la Universidad en los países desarrollados. Resulta que en un país subdesarrollado como México, con una infraestructura universitaria cada vez más pobre, se le asigna a ésta tareas muy por encima de sus posibilidades. Si la industria no ha generado los laboratorios de I/D necesarios para asegurar una mayor

competitividad en el mercado, y si el gobierno privilegia una estrategia de industrialización vía la apertura de zonas francas y de maquiladoras, es absolutamente insensato que se le exija a la Universidad suplir las deficiencias que acarrearán estas políticas.

En el caso concreto de la computación en la UNAM, en los años setenta, había una gran confusión acerca del papel que debería jugar la Universidad en la resolución de problemas prácticos y el tipo de investigaciones básicas y teóricas a impulsar. A las investigaciones de aplicación se les exigía resolver problemas importantes y sobretodo ser autofinanciables, y a las investigaciones más básicas, cumplir con los "estándares internacionales". Esto provocó que fuera el mercado el que actuara como principal planificador de la actividad científica, y que el IIMAS produjera, a finales de los setenta y principio de los ochenta, toda una serie de jóvenes empresarios en detrimento de los incipientes grupos de investigación que existían en esos años.

Vale la pena detenerse un instante a analizar la situación del mercado informático de esos años y el tipo de exigencias técnicas que presentaba. La inmensa mayoría de los problemas planteaba la necesidad de desarrollar sistemas de información tradicionales, si bien a lo más, basados en la creación y mantenimiento de una base de datos cuyo uso empezaba a generalizarse. Por otra parte, los problemas de mayor interés técnico eran sin duda los planteados por los centros de cómputo relacionados con el manejo de grandes volúmenes de información. En la mayoría de estos casos, era en los propios centros responsables de su procesamiento dónde se resolvían los problemas.

En esta azarosa relación de la Universidad con el mercado probablemente la experiencia más interesante haya sido la primera y más compleja del periodo estudiado. se trata del proyecto de creación y puesta en marcha del gran centro de cómputo del INFONAVYT a principios de los setenta.

La experiencia en la creación y puesta en marcha de centros de cómputo de gran envergadura que existía en esos años, fuera de las oficinas de las grandes transnacionales de la informática, era realmente escasa en México. Si se juzga el proyecto del INFONAVYT como el desarrollo de una especie de prototipo, la experiencia fue sin duda positiva para ambas instituciones. Si lo que se quería era la creación de un centro de cómputo de producción a corto plazo es evidente que el camino seguido no fue el más eficiente.

Recapitulando, se puede decir que las exigencias del mercado informático en esos años no representaban en general tareas de gran interés científico y tecnológico, y aquellos problemas que, por sus dimensiones, podrían presentar un atractivo para la investigación estaban sujetos a tales presiones de tiempo que no podían resolverse en el ámbito universitario. En este contexto habría que situar al proyecto INFONAVYT como un excepción a la regla.

DIFUSION Y EVALUACION DE LA INUESTIGACION

El tercer punto importante que se discutía en esos años, el de la bien conocida "publicacionitis", habría que situarlo dentro del contexto más general de la difusión y evaluación de la I/D.

Como actividad eminentemente social, la I/D establece una relación entre los grupos de investigación, o investigadores individuales y una o varias comunidades en las cuales se difunden los resultados de las investigaciones para su conocimiento, crítica y utilización. Estos entornos o comunidades retroalimentan a su vez a los investigadores de múltiples formas, tanto directas como indirectas, en un plazo breve o bien al cabo de muchos meses, proporcionandoles en los hechos un cierto tipo de evaluación global.

El objetivo de la difusión es el de afectar una o varias comunidades proponiendo soluciones a problemas conocidos, nuevas técnicas, nuevos enfoques o nuevas problemáticas. Es en función de que estos objetivos se cumplan, en mayor o menor grado en un cierto plazo de tiempo, que podemos considerar que la investigación ha sido fructífera. Una premisa inherente a este planteamiento es que debe existir una correlación estrecha entre el tipo de I/D y la comunidad en la cual se difunde. Si se envía un trabajo sobre el diseño de un nuevo entorno de programación enfocado a la enseñanza de un primer curso de computación basado en los conceptos de tipos de datos abstractos y especificación formal, a un centro de investigación que trabaja en problemas de toma de decisiones en tiempo real relacionados con proyectos militares de la "guerra de las galaxias", lo más seguro es que no se lea más que el título del trabajo y sea desechado de inmediato.

Por otra parte, la tradición científica de constituir comunidades internacionales hace que los investigadores posean de entrada una doble determinación, como miembros de una o varias comunidades internacionales y como miembros de una o varias comunidades nacionales. Pero esta es sólo una primera aproximación, ya que si analizamos más

detalladamente esta situación, las susodichas comunidades internacionales y nacionales suelen ser conjuntos más o menos difusos, frecuentemente ajenos y en algunos casos francamente antagónicos; conformando verdaderas cofradías organizadas en general alrededor de una o varias revistas y con un "codigo interno" muy estricto.

Valdría la pena recordar aquí un ejemplo clásico en la historia de la ciencia, el de la generación de los jóvenes físicos, principalmente alemanes y centro europeos, que revolucionaron la física a principio de este siglo, desarrollando la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad; sus trabajos eran muy mal vistos por la vieja escuela alemana de física que les había cerrado por completo el acceso a las revistas reconocidas de la época. Ante esta situación, estos jóvenes científicos decidieron buscar un patrocinador y crearon su propia revista científica, no con el afán de "hacer curriculum" sino de tener un foro en dónde difundir sus trabajos científicos. En poco tiempo esta revista se convirtió en la más importante publicación de la física moderna.

El investigador tiene ante sí una multiplicidad de comunidades, desde las más amplias comunidades sociales en donde se sitúa él mismo, hasta las más cerradas asociadas a cierta escuela de pensamiento bien definida en la especialidad en que trabaja. En estas condiciones se plantea a todo investigador el problema de decidir con qué comunidades desea interaccionar preferentemente. El caso más simple es cuando coinciden las comunidades nacionales e internacionales prioritarias del investigador. Es el caso normalmente de los investigadores en computación norteamericanos para quienes la cofradía nacional en la que se insertan suele controlar la correspondiente cofradía internacional. Basta con revisar las listas de los consejos editoriales de las revistas reputadas en los distintos campos de la computación y se verá que una buena parte de ellas pertenecen a asociaciones estadounidenses como es el caso de la ACM y la IEEE, o bien, cuando se denominan revistas internacionales la presencia de investigadores que trabajan en EE UU. es mayoritaria.

La relación entre el investigador y una comunidad se puede dar de múltiples formas, cursos, conferencias, libros, artículos de divulgación o especializados, desarrollo de prototipos, etc., y la retroalimentación de la comunidad hacia el investigador toma caminos igualmente variados. Es esta retroalimentación la que permite a los investigadores tener una idea del efecto de su trabajo en la comunidad que le interesa afectar; este conjunto de retroalimentaciones puede verse como la evaluación social del trabajo del investigador hecha por una comunidad dada. Este proceso de difusión y retroalimentación-evaluación forma un todo en la relación de

los investigadores con sus medios naturales. Privilegiar, como principal medida de evaluación, el número de trabajos insertados en cierto tipo particular de revista es por lo menos sumamente parcial y favorece a aquellos investigadores que surgen en los feudos naturales de los grupos que dominan las revistas en cuestión, además de empujar a aquellos que son ajenos en un inicio a estos feudos a desarrollar su trabajo según las pautas marcadas por esos grupos en forma por completo acrítica.

Una vez establecidas las consideraciones teóricas anteriores, es posible pasar a analizar la discusión que se daba en los años setenta alrededor de la investigación básica y teórica en computación. Lo primero sería tener una idea de cuáles eran las comunidades naturales con las cuales se podía relacionar un investigador en computación en esos años.

La mayoría de los investigadores eran jóvenes con una maestría o doctorado reciente y podían eventualmente mantener una cierta relación con el grupo en el cual habían desarrollado su investigación de posgrado. He ahí una primera comunidad natural; el problema de mantener viva esta relación residía generalmente en la diferencia extrema de las condiciones y facilidades para desarrollar su trabajo. Una dificultad adicional, no menos importante, en este caso era no caer en la "maquila", es decir en sacar adelante trabajos relativamente rutinarios que suelen requerir bastante trabajo pero cuya trascendencia científica no es muy grande, o en todo caso, sólo puede tener importancia para aquellos que trabajan en el grupo matriz extranjero con el problema más general.

La siguiente comunidad natural estaba formada por el conjunto de profesores e investigadores y estudiantes de computación. Como ya lo vimos anteriormente, esta comunidad era aún incipiente y en formación. Las problemáticas que planteaba eran en general mucho más básicas que las de artículos de investigación muy sofisticados. Es decir que no bastaba con trabajar en tareas de investigación de frontera, había que llevar a cabo toda una serie de labores colaterales indispensables como la de hacer un esfuerzo especial para mantenerse al día y servir de correa de transmisión hacia la comunidad universitaria en general, de los nuevos conocimientos generados en las distintas áreas de la computación. Al no existir grupos de investigación en computación bien establecidos, con larga tradición, contactos estables nacionales y extranjeros, con una afluencia natural de estudiantes de posgrado con los cuales trabajar temas de investigación originales, etc., había que buscar paliar todas esas deficiencias a base, la mayoría de las veces, de improvisaciones.

Una tercera comunidad, nada natural aunque muy real, era la de los funcionarios de la ciencia. Es decir, aquellas personas con puestos de poder que son los que en nuestra estructura universitaria y gubernamental, evalúan y deciden acerca de contrataciones, financiamiento de investigaciones, promociones, etc...

La principal característica de esta comunidad es que, por no ser una comunidad natural, se ve obligada a evaluar en función a cómo juzga ella que se da la relación de los investigadores con las otras comunidades. Al ser la comunidad nacional tan frágil e incipiente, aparecía como más serio e irrefutable, desde el punto de vista burocrático, considerar la relación con la comunidad internacional. Esto sesgaba toda posibilidad de juicio objetivo del trabajo real de los investigadores que se veían obligados a competir en desventaja en la carrera de los "papers" en revistas con arbitraje. La incompreensión de estos funcionarios de la ciencia tuvo repercusiones muy graves al no encauzar el trabajo hacia el fortalecimiento de la comunidad nacional, apoyando la creación de los diferentes canales de difusión de esta última, así como impulsando la vinculación con otras comunidades nacionales más allá del ámbito universitario. Otra característica de los funcionarios de la ciencia consistía en privilegiar los contactos con grupos norteamericanos y no buscar una diversificación tanto hacia los países europeos, la URSS y Japón, como con países latinoamericanos con los que poder conformar agrupaciones que permitieran actuar conjuntamente en el ámbito internacional.

Como se veía al principio de esta discusión, las comunidades internacionales tienen su propia historia y responden a criterios científicos, políticos y hasta personales bien definidos; verlos como los únicos jueces de la actividad científica mundial es extremadamente discutible. Lo primero que se debió privilegiar era la consolidación de la comunidad natural nacional y la eliminación de esta comunidad no natural de funcionarios de la ciencia.

IV LAS LECCIONES DE LA HISTORIA

El periodo de la historia de la computación en la UNAM analizado es muy rico en enseñanzas, en las secciones anteriores se ha analizado sólo algunas de las más importantes y de mayor actualidad. A continuación se

presenta, bajo la forma de un conjunto de propuestas, algunas ideas que se desprenden de la propia experiencia histórica, en la búsqueda de contribuir a una discusión colectiva mucho más amplia y profunda acerca de la línea que debería impulsarse para sacar de la crisis en la que está a la computación universitaria.

Con el fin de evitar el mayor número de malos entendidos, se ha juzgado importante establecer explícitamente las principales premisas en las que se fundamentan las proposiciones:

- 1) El desarrollo de la I/D en computación es una necesidad estratégica para México; contar con grupos de I/D consolidados en el país no sólo permite la producción de nuevos conocimientos y técnicas sino que también asegura una mejor asimilación de los desarrollos mundiales en computación. No se trata, evidentemente, de buscar abarcar todas las áreas de investigación en el campo, sino de contar con un número suficiente de grupos de investigación que jueguen el doble papel, por un lado, de generadores de conocimiento y, por el otro, de correa de transmisión de conocimientos generados en el exterior.
- 2) La I/D universitaria debe estar estrechamente vinculada con la enseñanza en sus diferentes niveles.
- 3) La I/D en las universidades no puede competir en la satisfacción de las necesidades más inmediatas del mercado informático, su papel no es el de sustituir los departamentos de desarrollo de sistemas comerciales de las empresas del sector.
- 4) La I/D, como actividad social, debe referirse a un entorno lo más amplio posible constituido por el conjunto de comunidades naturales interesadas, al menos potencialmente, en los resultados de las investigaciones, de sus usos y repercusiones sociales y económicas. Paralelamente al desarrollo y fortalecimiento de los grupos de I/D se deberá buscar la consolidación de sus comunidades naturales, así como de los lazos de comunicación que los unen.
- 5) La evaluación de la I/D debe ser un proceso igualmente social y multifacético en el que se destaquen los efectos causados en las distintas comunidades por los trabajos difundidos. No hay por qué privilegiar un criterio cuantitativo de publicaciones en ciertas revistas extranjeras.
- 6) La libertad de investigación debe permanecer como eje central de desarrollo.

Una vez establecidas estas premisas se establecerá el objetivo general buscado:

"Fomentar y consolidar un espacio de I/D en computación en la UNAM vinculado estrechamente a la enseñanza en sus diferentes niveles."

Este espacio de I/D que se plantea deberá abarcar las diferentes instituciones de la UNAM en donde surja esta actividad en forma natural. No se busca coartar, sino más bien, fomentar, coordinar y encauzar la I/D de los distintos grupos. Esto no excluye la existencia de un centro físico en donde se busque concentrar actividades comunes como, cursillos, conferencias, seminarios de trabajo, centro de documentación, etc., que sirva además para coordinar los esfuerzos de colaboración con los grupos de I/D tanto nacionales como extranjeros.

Para poder lograr este objetivo general es necesario dividir las tareas en el tiempo, estableciendo un calendario de objetivos concretos a largo, mediano y corto plazo.

I) A largo plazo, sería muy deseable poder contar con una amplia cobertura de I/D en computación con grupos estables y líneas de investigación bien definidas, que tengan una amplia gama de canales de difusión de sus actividades a todos los niveles y a las distintas comunidades nacionales y extranjeras, profesionales, de usuarios potenciales y de estudiantes con las que interaccionan.

Se debería contar, evidentemente, con las condiciones materiales adecuadas para asegurar el trabajo y la permanencia de las investigaciones, así como con un ambiente de libertad de trabajo y de colaboración suficientemente atractivo como para captar a nuevos investigadores, asegurando de esta forma el crecimiento de los grupos ya existentes y la creación de nuevos.

II) Para poder lograr esta situación de estabilidad indispensable, habría que establecer objetivos a mediano plazo que constituyeran las condiciones necesarias para asegurar la viabilidad de un mínimo de grupos de I/D dentro de la UNAM. Entre otros objetivos habría que asegurar la existencia de un número suficiente de grupos de I/D capaces de soportar un programa de doctorado viable y competitivo, aún cuando no tenga una muy amplia cobertura. Se debería además contar con los contactos y las colaboraciones con grupos extranjeros que permitan asegurar:

i) La formación y actualización de investigadores mexicanos en su seno, a través de alumnos de doctorado, estancias de posdoctorado y de año sabático.

ii) La organización de escuelas internacionales de computación con la participación de profesores nacionales y extranjeros, que sirvan para actualizar a nivel de frontera a los profesores y alumnos de posgrado en diferentes áreas de la computación.

iii) La conformación de acciones conjuntas con grupos afines de países con un desarrollo en computación similar al de México, que permitan tener una mejor representatividad en los congresos y revistas internacionales, así como organizar actividades conjuntas como revistas de habla hispana, etc.

En el aspecto nacional, igualmente se debería contar a mediano plazo con toda una gama de relaciones con los grupos de otras universidades y con los grupos de I/D de empresas comerciales y del sector público, que permitiese la organización periódica de conferencias nacionales especializadas, cursos de actualización, etc.

En cuanto a los canales de difusión, se debería contar para entonces con toda una gama de medios, desde las revistas técnicas, pasando por secciones especializadas en revistas de divulgación científica, edición de libros de texto y monográficos, producción de material audiovisual, hasta todo un programa de organización de pláticas y conferencias a públicos más amplios. Una tarea de particular importancia sería la de asegurar la salida regular de una revista técnica que sirviera de lazo entre los diferentes grupos de I/D, universitarios o no, del país.

III) Finalmente, para lograr los objetivos anteriores se tendría que plantear a corto plazo, en 3 ó 4 años, toda una serie de tareas prioritarias.

La más urgente es, sin lugar a dudas, invertir de inmediato la tendencia a la disgregación de los grupos de I/D y enseñanza de la computación. Lo primero, sin lo cual lo demás es letra muerta, es aumentar los salarios y mantenerlos en niveles decorosos, no sólo para los profesores e investigadores de computación, sino para todas las áreas. Las actividades de I/D y docencia son en sí atractivas para muchos, de modo que el elemento salario no es el único factor a considerar, pero si éste llega a límites tan lamentables como los de los últimos años, el factor financiero se vuelve prácticamente el único y anula cualquier otro tipo de interés.

Una vez resuelto este problema se debería establecer un programa de apoyo en equipo de cómputo a los grupos que estén interesados en comprometerse en desarrollar tareas de I/D en sus distintos niveles. Establecer un plan de becas de investigación de manera que los grupos que aún persisten en la UNAM puedan preparar estudiantes de licenciatura y maestría en tareas de investigación y enviarlos a doctorarse posteriormente al extranjero. Establecer un fondo bibliotecario y hemerográfico especializado, amplio y sin lagunas, estableciendo también un plan de adquisición de las actas de los congresos internacionales más importantes.

En forma menos urgente sería necesario emprender una serie de actividades importantes como la de establecer el proyecto de apoyo a la vinculación con el exterior de los investigadores y profesores de computación. Un lineamiento estratégico en este tipo de planes debería ser el de fomentar la diversificación de los contactos con el extranjero, buscando cubrir grupos de países como los de la Comunidad Económica Europea, Japón y los países Iberoamericanos, y no solamente Estados Unidos y Canadá. Las formas concretas de estos apoyos pueden ser muy variadas, desde el uso de convenios nacionales bilaterales ya existentes y el establecimiento de nuevos convenios, hasta visitas cortas y asistencia a seminarios o congresos que puedan servir para establecer los primeros contactos. En algunos casos puede ser factible ya la organización de una primera serie de escuelas internacionales que deberían apoyarse y programarse lo antes posible.

En la esfera de la difusión, debería echarse a andar cuanto antes el proyecto de la revista técnica, de y para, los distintos grupos de I/D de computación del país. En esta revista podrían tener una salida natural un buen número de trabajos que se realizan ya en estos grupos y que por lo general se quedan a nivel de publicaciones locales extremadamente limitadas, como tesis de licenciatura o de maestría, reportes internos de trabajo, etc.. Se trata de una grave carencia que existe en México ya que si bien se cuenta con algunas revistas o secciones de revistas en las que se pueden publicar artículos de divulgación, no se tiene una en la cual tratar temas con carácter más técnico y a un nivel más profundo. Por otro lado es indispensable reforzar sistemáticamente la creación de toda una gama de literatura de computación en castellano generada en México. Además de la revista técnica ya mencionada, habría que apoyar la creación de libros de texto, publicación de notas de clase o colecciones de ejercicios, etc., así como una producción sistemática de artículos de divulgación y de puesta al día en diferentes áreas de la computación y de sus aplicaciones. Es evidente que con políticas ciegas, como la que se llevaba a cabo en los

años setenta, que buscaba privilegiar la publicación de artículos en revistas extranjeras con arbitraje, y que prevalecen todavía en los medios de la "ciencia oficial", se ejerce una enorme presión contra el tipo de actividades arriba mencionadas que buscan consolidar no sólo los grupos de I/D, sino también a sus comunidades naturales y su relaciones mutuas.

Todo este conjunto de tareas a corto plazo, de emprenderse en forma seria y sistemática, irían creando un ambiente de trabajo tal que la UNAM se convertiría rápidamente en un polo de atracción para muchos de los estudiantes recién doctorados en el extranjero que se plantean hoy en día, muy seriamente, si regresar a México o, aceptar mejor las ofertas de trabajo en I/D que les hacen en el extranjero.

Naturalmente que todo esto cuesta dinero y este financiamiento debe provenir del Estado; como se ha visto más arriba, la I/D es una actividad altamente subvencionada por los Estados de los países más industrializados, con más razón debería serlo en los países subdesarrollados como el nuestro. El fomento de la I/D en Ciencia y Tecnología debe situarse dentro del conjunto de actividades prioritarias de la sociedad mexicana junto con la atención a la educación, la salud y el bienestar de las grandes mayorías del país.

Es evidente que los planteamientos aquí expuestos no concuerdan en nada con los lineamientos del neoliberalismo económico que sufrimos en la actualidad, y que la estrategia de "crecimiento" vía la reducción de los gastos del Estado en salud, educación y cultura, la venta del sector productivo al extranjero como pago parcial de la deuda externa, la reconversión industrial y nueva industrialización basada en la proliferación de maquiladoras y de zonas francas más o menos disfrazadas, no requiere para nada de una Universidad en dónde se haga I/D en áreas de punta como la computación. En nuestro país cada vez más, el fomento de la Ciencia y la Tecnología es un lujo, destinado a campañas de propaganda internacional, y para ello sólo se requiere de unos pocos botones de muestra. Este tipo de política científica, no sólo es miope, sino profundamente peligrosa para la sobrevivencia misma de la Universidad y de la Cultura nacionales. Nuestro deber como científicos y como universitarios es alertar a todos de los peligros que se están corriendo y organizar la lucha contra la tendencia actual de aniquilación de facto de la I/D en el país y en particular en la UNAM.

TEORÍA GENERAL DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS HIPERBÓLICOS SUAVES^{*)}

POR

YA. B. PESIN^{**)}

§1. HIPERBOLICIDAD DE TRAYECTORIAS

1.1 OBSERVACIONES INTRODUCTORIAS. APARECE COMO MUY ATRAYENTE LA IDEA DE ESTUDIAR EL COMPORTAMIENTO GLOBAL DE LAS TRAYECTORIAS DE UN SISTEMA DINÁMICO CON BASE EN LA INFORMACIÓN ACERCA DE SUS PROPIEDADES LOCALES. LA REALIZACIÓN PARCIAL DE ESTA IDEA SE PLASMA EN LAS INVESTIGACIONES DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS HIPERBÓLICOS.

EL COMPORTAMIENTO HIPERBÓLICO DE UNA TRAYECTORIA DE UN SISTEMA DINÁMICO SE FORMULA EN TÉRMINOS DEL COMPORTAMIENTO DE TRAYECTORIAS CERCANAS, MÁS PRECISAMENTE DE TRAYECTORIAS INFINITAMENTE CERCANAS.

EXISTEN TRES TIPOS BURDOS DE COMPORTAMIENTO DE LAS TRAYECTORIAS CERCANAS:

- A) LAS TRAYECTORIAS CERCANAS SON ATRAIDAS A LA TRAYECTORIA ORIGINAL CUANDO $t \rightarrow +\infty$ (COMPLETA ESTABILIDAD),
- B) TODAS LAS TRAYECTORIAS CERCANAS SON ATRAIDAS A LA TRAYECTORIA ORIGINAL CUANDO $t \rightarrow -\infty$ (COMPLETA INESTABILIDAD),

^{*)} Capítulo 7 de Sistemas Dinámicos -2 bajo la redacción de Sinai Ya. G., Itogi Nauki y Tehniki, Seriya Sobremennye Problemy Matematiki, Fundamentalnye Napravleniya, Tom. 2 Moscú, 1985. Versión Castellana de Guillermo Gómez Alcaraz.

^{**)} Facultad de Mecánica y Matemática. Universidad Estatal de Moscú.

- c) SE TIENE TRAYECTORIAS QUE SON ATRAIDAS A LA TRAYECTORIA ORIGINAL CUANDO $t \rightarrow +\infty$ Y OTRAS QUE SON ATRAIDAS A LA MISMA TRAYECTORIA ORIGINAL PERO CUANDO $t \rightarrow -\infty$.

PRECISAMENTE EL ÚLTIMO TIPO DE COMPORTAMIENTO SE TOMA COMO BASE DE LA DEFINICIÓN DE HIPERBOLICIDAD.

POR REGLA GENERAL, CONSIDERAREMOS EN ESTE CAPÍTULO, EL CASO CUANDO EL ESPACIO FASE M ES UNA VARIEDAD DE DIMENSIÓN n , COMPACTA, RIEMANIANA Y DE CLASE C^∞ , Y CUANDO LA TRANSFORMACIÓN T O EL FLUJO $\{S^t\}$ TAMBIÉN SON DE CLASE C^∞ (SI LA CLASE DE SUAVIDAD NO ES SEÑALADA).

SUPONGAMOS QUE EL FLUJO $\{S^t\}$ ES GENERADO POR UN CAMPO VECTORIAL SUAVE $X(x)$. A TAL FLUJO RESPONDE UN CAMPO VECTORIAL EN EL ESPACIO TANGENTE $\mathcal{T}M$ DEL TIPO $(X(x), X_x(x))$ LLAMADO CAMPO VECTORIAL DE LA VARIACIÓN DEL CAMPO X . EL FLUJO CORRESPONDIENTE A TAL CAMPO SE DENOTA POR

$$S^t(x, v) = (S^t x, dS_x^t v).$$

CADA TRANSFORMACIÓN S^t NOS DA UNA APLICACIÓN DEL ESPACIO TANGENTE $(\mathcal{T}M)_x$ EN EL PUNTO x AL ESPACIO TANGENTE $(\mathcal{T}M)_{S^t(x)}$ EN EL PUNTO $S^t(x)$. EL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES QUE RESPONDEN A $\{S^t\}$ ES EL SISTEMA DE ECUACIONES DE VARIACIÓN:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ \dot{v} = X_x(\dot{x})v \end{cases}$$

SI EL TIEMPO t ES DISCRETO TENDREMOS ENTONCES QUE EN LUGAR DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN APARECE LA DIFERENCIAL dT DEL DIFEOMORFISMO T QUE MANDA EL ESPACIO TANGENTE $\mathcal{T}x$ EN EL ESPACIO TANGENTE $\mathcal{T}_{T^t(x)}$.

LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN DEFINEN EL COCICLO $\mathcal{M}(x, t)$ QUE NOS DA UNA APLICACIÓN DEL PLANO TANGENTE \mathcal{T}_X AL PLANO TANGENTE $\mathcal{T}_{S^t(x)}$ (AL $\mathcal{T}_{T^t(x)}$ EN EL CASO DE TIEMPOS DISCRETOS).

SUPONGAMOS QUE EL SISTEMA DINÁMICO ADMITE UNA MEDIDA INVARIANTE ERGÓDICA ν . ENTONCES ES APLICABLE EL TEOREMA ERGÓDICO MULTIPLICATIVO^(*) DEL CUAL SE DESPRENDE LA EXISTENCIA DE LOS EXPONENTES DE LYAPUNOV $\chi_1 \leq \chi_2 \leq \dots \leq \chi_n$. ESTE TEOREMA TAMBIÉN MUESTRA QUE PARA LAS TRAYECTORIAS TÍPICAS LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN SE COMPORTAN SUFICIENTEMENTE BIEN.

LA TEORÍA EXPUESTA EN ESTE CAPÍTULO VERSA FUNDAMENTALMENTE SOBRE EL CASO EN QUE LOS EXPONENTES DE LYAPUNOV SON DISTINTOS DE CERO PARA TIEMPOS DISCRETOS, O SOLO UNO DE TALES EXPONENTES (EL GENERADO POR LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO) ES CERO PARA TIEMPOS CONTINUOS. SE CONSIDERA QUE ASÍ SERÁ EN EL CASO DE SISTEMAS "EN POSICIÓN GENERAL", PERO LOS CORRESPONDIENTES RESULTADOS RIGUROSOS AUN NO HAN SIDO DEMOSTRADOS.

EN MUCHOS PROBLEMAS DE ANTEMANO NO ES CONOCIDA LA MEDIDA INVARIANTE NATURAL. EL FUNDAMENTO DE LA TEORÍA DE ÉSTE CAPÍTULO SE HACE CAER EN LAS CONDICIONES SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN, QUE DE UNA U OTRA FORMA ESTÁN RELACIONADAS CON EL TEOREMA ERGÓDICO MULTIPLICATIVO. LUEGO RESULTA QUE FRECUENTEMENTE PARTIENDO DE ESTAS CONDICIONES PUEDEN CONSTRUIRSE MEDIDAS

^{*)} Véase §2 de Kornfeld I.P., Sinai Ya. G. Los Primeros Conceptos y los Ejemplos Fundamentales de la Teoría Ergódica, que aparecerá en nuestra revista.

INVARIANTES Y ESTAS MISMAS CONDICIONES COMPROBARLAS ANALIZANDO LAS PROPIEDADES LOCALES DEL SISTEMA DINÁMICO.

1.2 HIPERBOLICIDAD UNIFORME

PRIMERAMENTE CONSIDEREMOS SISTEMAS DINÁMICOS CON TIEMPO DISCRETO. PARA UNIFICAR LA NOTACIÓN DENOTAREMOS POR S^1 AL DIFEOMORFISMO Y EL GRUPO GENERADO POR ÉSTE SERÁ DENOTADO POR $\{S^t\}$, $t \in \mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN 1.1 LA TRAYECTORIA $\{S^t(x)\}$ SE LLAMA COMPLETAMENTE HIPERBÓLICA UNIFORME (*) SI EXISTEN SUBESPACIOS $E^s(S^t(x))$, $E^u(S^t(x)) / t \in \mathbb{Z}$ / DEL ESPACIO TANGENTE $\mathcal{T}_{S^t(x)}$ Y NÚMEROS $c > 0$, λ Y μ TALES QUE:

$$(2) \quad \mathcal{T}_{S^t(x)} = E^s(S^t(x)) \oplus E^u(S^t(x)) ,$$

$$(3) \quad \begin{cases} dS^\tau E^s(S^t(x)) = E^s(S^{t+\tau}(x)) \\ dS^\tau E^u(S^t(x)) = E^u(S^{t+\tau}(x)) \end{cases} ,$$

$$(4) \quad 0 < \lambda < 1 < \mu$$

Y PARA TODAS LAS t Y $\tau \geq 0$:

$$(5) \quad \begin{aligned} \|dS^\tau v\| &\leq c \lambda^\tau \|v\| , \text{ CON } v \in E^s(S^t(x)), \\ \|dS^\tau v\| &\geq c^{-1} \mu^\tau \|v\| , \text{ CON } v \in E^u(S^t(x)), \\ \angle(S^t(x)) &\geq \text{CONST.} , \text{ DONDE } \angle \text{ ES EL} \end{aligned}$$

ÁNGULO ENTRE LOS SUBESPACIOS E^s Y E^u .

SI x ES UN PUNTO PERIÓDICO (EN PARTICULAR UN PUNTO FIJO), ENTONCES LA COMPLETA HIPERBOLICIDAD UNIFORME DE LA TRAYECTORIA $\{S^t(x)\}$ ES EQUIVALENTE A QUE x SEA UN PUNTO PERIÓDICO (FIJO) HIPERBÓLICO.

*) En aquellos casos en que no lleve a malos entendidos hablaremos simplemente de HIPERBOLICIDAD UNIFORME.

LA DEFINICIÓN 1.1 POR ENDE PRESUPONE QUE EL ESPACIO TANGENTE \mathcal{T}_x QUEDA DIVIDIDO EN DOS SUBESPACIOS $E^s(x)$ Y $E^u(x)$ DEFINIDOS SEGÚN QUE LAS TRAYECTORIAS INFINITAMENTE CERCANAS CORRESPONDIENTES A $v \in E^s(x)$ ($v \in E^u(x)$) SE ACERQUEN EXPONENCIALMENTE CUANDO $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$). EN LO SUBSECUENTE VEREMOS QUE DE TAL COMPORTAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN IMPLICA UN COMPORTAMIENTO ANÁLOGO DE LAS VERDADERAS TRAYECTORIAS.

1.3 HIPERBOLICIDAD NO UNIFORME

EL DEBILITAMIENTO DE LA CONDICIÓN DE HIPERBOLICIDAD UNIFORME PUEDE SER REALIZADA EN DOS DIRECCIONES. EN PRIMER LUGAR LA HIPERBOLICIDAD PUEDE SER NO UNIFORME (PERO SEGUIR SIENDO COMPLETA) Y EN SEGUNDO PUEDE SER SOLO PARCIAL, ESTO ES, CUMPLIRSE, PERO NO PARA TODO EL ESPACIO TANGENTE.

DEFINICIÓN 1.2 LA TRAYECTORIA $\{S^t(x)\}$ SE LLAMA HIPERBÓLICA NO UNIFORME SI EXISTEN SUBESPACIOS $E^s(S^t(x))$ Y $E^u(S^t(x))$ QUE SATISFACEN LAS CONDICIONES (2) Y (3), LOS NÚMEROS λ Y μ SATISFACEN (4), EL NÚMERO $c < 1$ Y CUALQUIER ε : $0 < \varepsilon < \infty \cdot \min \{\ln \mu, (-\ln \lambda)\}$ ASEGURAN LA EXISTENCIA DE LA FUNCIÓN $C(x, \varepsilon) > 0$ TAL QUE

$$(6) \quad C(S^t(x), \varepsilon) \leq C(x, \varepsilon) e^{\varepsilon |t|} \quad /t \in \mathbb{Z}/,$$

Y PARA TODA t Y $\tau \geq 0$:

$$(7) \quad \begin{cases} \|dS^\tau v\| \leq C(S^{t+\tau}(x), \varepsilon) \lambda^\tau \|v\|, & v \in E^s(S^t(x)), \\ \|dS^\tau v\| \geq C^{-1}(S^{t+\tau}(x), \varepsilon) \mu^\tau \|v\|, & v \in E^u(S^t(x)), \\ Y(S^t(x)) \geq C^{-1}(S^t(x), \varepsilon) Y(x). \end{cases}$$

EL SIGNIFICADO DE (6) CONSISTE EN LO SIGUIENTE: LAS ESTIMACIONES DADAS EN (7) "EMPEORAN" A LO LARGO DE LA TRAYECTORIA (O SEA, CON EL CRECIMIENTO DE t) "NO MUY FUERTEMENTE" (ES DECIR, CON UNA VELOCIDAD EXPONENCIAL PEQUEÑA CON RESPECTO AL $\max \{ \ln \mu, \ln \lambda \}$).

ESTAS CONDICIONES JUEGAN NO SOLO UN PAPEL TÉCNICO, SINO SON EN PRINCIPIO BÁSICAS EN EL ESTUDIO DE LA HIPERBOLICIDAD NO UNIFORME. A PRIMERA VISTA LA CONDICIÓN (6) PODRÁ PARECER INCLUSO UN TANTO ARTIFICIAL Y RESTRICTIVA. SIN EMBARGO VEREMOS MAS ADELANTE QUE ESTO NO ES ASÍ Y QUE FRECUENTEMENTE LA SATISFACEN LAS TRAYECTORIAS TÍPICAS (RESPECTO DE ALGUNA MEDIDA INVARIANTE).

SEÑALEMOS QUE PARA UNA TRAYECTORIA PERIÓDICA $\{S^t(x)\}$ LAS CONDICIONES DE HIPERBOLICIDAD UNIFORME Y NO UNIFORME COINCIDEN.

LA HIPERBOLICIDAD PARCIAL PUEDE OBTENERSE FORMALMENTE AL SUSTITUIR TOTALMENTE LA CONDICIÓN (4) POR

$$(8) \quad 0 < \lambda < \min(1, \mu)$$

(ESTO ES, SIN LA SUPOSICIÓN $\mu > 1$).

CORRESPONDIENTEMENTE PODEMOS DISTINGUIR HIPERBOLICIDAD PARCIAL E HIPERBOLICIDAD PARCIAL NO UNIFORME. EN LOS EJEMPLOS CONCRETOS LA CONDICIÓN DE HIPERBOLICIDAD PARCIAL SE REALIZA ANTE TODO DE LA SIGUIENTE MANERA: EL ESPACIO TANGENTE EN EL PUNTO $S(x)$ SE DESCOMPONE EN UNA SUMA DIRECTA DE TRES SUBESPACIOS

$$(9) \quad \mathcal{T}_{S^t(x)} = E^s(S^t(x)) \oplus E^0(S^t(x)) \oplus E^u(S^t(x))$$

INVARIANTES RESPECTO DE dS^t . EN LOS SUBESPACIOS $E^s(S^t(x))$ Y $E^u(S^t(x))$ LA DIFERENCIAL DEL SISTEMA ACTÚA COMO UNA CONTRACCIÓN Y UNA DILATACIÓN RESPECTIVAMENTE (DE MANERA QUE SE CUMPLEN LAS DESIGUALDADES DE (5) O (7) SEGÚN SE TRATE DE HIPERBOLICIDAD UNIFORME O NO). EL SUBESPACIO $E^0(S^t(x))$ SE LLAMA NEU-

IRAL, LOS VECTORES DE ESTE SUBESPACIO PUEDEN TANTO CONTRAERSE COMO DILATARSE PERO CON VELOCIDADES "PEQUEÑAS", MÁS EXACTAMENTE (NOS RESTRINGIREMOS SOLO AL CASO DE HIPERBOLICIDAD PARCIAL UNIFORME) EXISTEN c_1, λ_1, μ_1 , TALES QUE

$$(10) \quad c_1 > 0, \quad 0 < \lambda < \lambda_1 \leq 1 \leq \mu_1 < \mu < \infty$$

Y PARA CUALESQUIERA t Y $\tau > 0$:

$$(11) \quad c_1^{-1} \lambda_1^{\tau} \|v\| \leq \|dS^{\tau}v\| \leq c_1 \mu_1^{\tau} \|v\|, \quad \text{CON } v \in E^0(s^{\tau}(x))$$

LA VARIANTE SEÑALADA DE HIPERBOLICIDAD PARCIAL LA LLAMAREMOS HIPERBOLICIDAD PARCIAL EN SENTIDO ESTRICTO.

EN EL CASO DE UN SISTEMA DINÁMICO CON TIEMPO CONTINUO LA CONDICIÓN DE HIPERBOLICIDAD (UNIFORME, NO UNIFORME Y PARCIAL) SE DEFINEN ANÁLOGAMENTE; LA DIFERENCIA TAN SOLO CONSISTE EN UNA DIFERENTE DESCOMPOSICIÓN, COMPARADA CON (2), DEL ESPACIO TANGENTE $\mathcal{T}_{S^t(x)}$ DE LA TRAYECTORIA ($t \in \mathbb{R}$), A SABER:

$$(12) \quad \mathcal{T}_{S^t(x)} = E^s(s^t(x)) \oplus E^u(s^t(x)) \oplus X(s^t(x))$$

DONDE $X(s^t(x))$ ES UN SUBESPACIO DE DIMENSIÓN 1, GENERADO POR EL FLUJO VECTORIAL (γ , EVIDENTEMENTE, INVARIANTE RESPECTO DE dS^t). SEÑALEMOS, COMO SE VE DE LA COMPARACIÓN DE (9) Y (12), QUE CUALQUIER DIFEOMORFISMO S^t (QUE RESULTE SER UNA TRANSLACIÓN A LO LARGO DE LAS TRAYECTORIAS DEL FLUJO AL TIEMPO t) SATISFAGA LAS CONDICIONES DE HIPERBOLICIDAD PARCIAL (UNIFORME O NO).

1.4 VARIETADES LOCALES

ANTE TODO LAS CONDICIONES DE HIPERBOLICIDAD PERMITEN ESTUDIAR EL COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS TRAYECTORIAS EN LA VECINDAD DE UN PUNTO HIPERBÓLICO. MÁS PRECISAMENTE LA DESCRIPCIÓN EXACTA ES

DADA POR EL SIGUIENTE TEOREMA EL CUAL RESULTA UNO DE LOS TEOREMAS CLAVE DE LA TEORÍA HIPERBÓLICA.

TEOREMA 1.1 (ACERCA DE LA VARIEDAD LOCAL, VÉASE [1])

SUPONGAMOS QUE $\{S^t(x)\}$ ($t \in \mathbb{Z}$) ES UNA TRAYECTORIA HIPERBÓLICA NO UNIFORME. ENTONCES EXISTE UNA VARIEDAD ESTABLE LOCAL (VEL) $V^s(x)$ TAL QUE SI $y \in V^s(x)$ LAS TRAYECTORIAS $\{S^t(x)\}$ Y $\{S^t(y)\}$ SE ACERCAN CON VELOCIDAD EXPONENCIAL, ES DECIR PARA CUALESQUIER t Y $\tau \geq 0$:

$$(13) \quad d(S^{t+\tau}(x), S^{t+\tau}(y)) \leq K C(S^t(x), \varepsilon) \lambda^\tau e^{\varepsilon \tau} d(S^t(x), S^t(y))$$

DONDE d ES LA DISTANCIA EN M INDUCIDA POR LA MÉTRICA RIEMANNIANA Y $K > 0$ ES CIERTA CONSTANTE.

HAGAMOS CIERTAS OBSERVACIONES.

OBSERVACIÓN 1.1 EL TÉRMINO "VARIEDAD LOCAL" APLICADO A NUESTRO CASO SIGNIFICA QUE EXISTE UNA APLICACIÓN SUAVE:

$$\psi: B^s(r) \rightarrow E^u(x)$$

($B^s(r)$ = LA BOLA EN $E^s(x)$ CON CENTRO EN EL CERO Y RADIO r ; AL NÚMERO $r = r(x)$ SE LE LLAMA DIMENSIÓN DE LA VARIEDAD ESTABLE LOCAL (VEL)), ADEMÁS

$$(14) \quad \psi(0) = 0 \quad \text{Y} \quad d\psi(0) = 0$$

LA VARIEDAD ESTABLE LOCAL (VEL) SE OBTIENE PROYECTANDO EN M LA GRÁFICA DE ψ (MEDIANTE LA APLICACIÓN EXPONENCIAL). DE (14) SE SIGUE QUE

$$(15) \quad x \in V^s(x) \quad , \quad \bigcup_x V^s(x) = E^s(x)$$

OBSERVACIÓN 1.2 LA EXISTENCIA DE LA VEL QUEDA ESTABLECIDA EN LA HIPÓTESIS CONSISTENTE EN QUE $\{S^t\} \in C^{r+\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ (ESTO ES, LAS PRIMERAS DERIVADAS SATISFACEN LA CONDICIÓN DE HÉLDER CON EXPONENTE α).

ADEMÁS SI $\{S^t\} \in C^{r+\alpha}$, $r \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$, ENTONCES

1.5 VARIEDADES GLOBALES

SE LLAMA VARIEDAD ESTABLE GLOBAL (VEG), QUE PASA POR EL PUNTO $x \in M$, A LA SUBVARIEDAD INMERSA SUAVE:

$$(17) \quad W^s(x) = \bigcup_{-\infty < t < \infty} S^{-t}(V^s(S^t(x))) \quad / \quad t \in \mathbb{Z} /$$

ESTA SUBVARIEDAD TIENE LA MISMA CLASE DE SUAVIDAD QUE LA VARIEDAD ESTABLE LOCAL (VEL). TAL SUBVARIEDAD ESTÁ CONSISTITUIDA POR AQUELLAS Y SOLO AQUELLAS Y PARA LAS QUE

$$d(S^t(x), S^t(y)) \rightarrow 0, \text{ CUANDO } t \rightarrow \infty.$$

ANÁLOGAMENTE SE DEFINE LA VARIEDAD INESTABLE GLOBAL (VIG).

PARA SISTEMAS DINÁMICOS CON TIEMPO CONTINUO LA VEG QUEDA DEFINIDA POR LA FÓRMULA (17) DONDE $t \in \mathbb{R}$. UNA ESTRUCTURA COMPLEMENTARIA, RELACIONADA CON LA CONTINUIDAD DEL TIEMPO, PERMITE CONSTRUIR UNA VARIEDAD INMERSA DÉBILMENTE ESTABLE Y SUAVE SEGÚN LA FÓRMULA

$$(18) \quad W^{so}(x) = \bigcup_{-\infty < t < \infty} W^s(S^t(x))$$

TENIÉNDOSE QUE PARA CADA $y \in W^{so}(x)$ TODA LA TRAYECTORIA $\{S^t(x)\} \in W^{so}(x)$. ANÁLOGAMENTE SE DEFINEN LA VARIEDAD GLOBALMENTE INESTABLE Y LA VARIEDAD GLOBAL DÉBILMENTE INESTABLE PARA FLUJOS (*)

$$V^s(x) \in \mathbb{E}^r \quad (\text{VÉASE [1]}).$$

*) Paralelamente a este sistema de notaciones y terminología se usa también otra distinta: Para sistemas dinámicos con tiempo continuo la variedad estable global VEG se denota por $W^{ss}(x)$ y se le llama variedad fuertemente estable (las "ss" vienen de "strong stable") y la variedad débilmente estable global se denota con $W^s(x)$. y se llama variedad estable. Un sistema análogo de notaciones y terminología se usa en relación a las variedades no estables.

OBSERVACIÓN 1.3 LA VEL PUEDE CONSTRUIRSE EN CADA PUNTO $y=S^t(x)$ DE UNA TRAYECTORIA HIPERBÓLICA NO UNIFORME (PUESTO QUE EL PUNTO y EN IGUALDAD DE CIRCUNSTANCIAS PUEDE TOMARSE COMO PUNTO INICIAL DE LA TRAYECTORIA). BAJO TALES CONDICIONES LAS DIMENSIONES DE LA VEL EN LOS PUNTOS x Y $S^t(x)$ SATISFACEN LA DESIGUALDAD:

$$(16) \quad r(S^t(x)) \geq K e^{-\epsilon|t|} r(x)$$

($K > 0$ CIERTA CONSTANTE). EN LOS CASOS TÍPICOS LA FUNCIÓN $r(S^t(x))$ COMO FUNCIÓN DE t ES UNA FUNCIÓN OSCILATORIA DE SUERTE QUE EN ALGUNOS INSTANTES DEL TIEMPO $r(S^t(x))$ TIENE EL MISMO ORDEN QUE $r(x)$. SIN EMBARGO PARA CIERTOS VALORES DE t LA MAGNITUD DE $r(S^t(x))$ RESULTA SER TAN PEQUEÑA CUANTO LO PERMITE LA RELACIÓN (16).

OBSERVACIÓN 1.4 COMPARANDO (13) Y (16) NO ES DIFÍCIL DARSE CUENTA QUE LAS DIMENSIONES DE LA VEL DECRECEN A LO LARGO DE LAS TRAYECTORIAS CON VELOCIDAD EXPONENCIAL "PEQUEÑA" COMPARADA CON LA VELOCIDAD DE ACERCAMIENTO DE LAS TRAYECTORIAS $\{S^t(x)\}$ Y $\{S^t(y)\}$.

OBSERVACIÓN 1.5 EVIDENTEMENTE SI LA TRAYECTORIA $\{S^t(x)\}$ SATISFACE LAS CONDICIONES DE HIPERBOLICIDAD UNIFORME (COMPLETA O PARCIAL), ENTONCES PARA TAL TRAYECTORIA SE CUMPLE EL TEOREMA SOBRE LA VARIEDAD LOCAL (PUESTO QUE ESTA HIPERBOLICIDAD RESULTA SER UN CASO PARTICULAR DE LA HIPERBOLICIDAD NO UNIFORME). LA PROPOSICIÓN CORRESPONDIENTE ES CONOCIDA COMO TEOREMA DE HADAMARD PERRON (VÉASE [2] Y [1]). TAL TEOREMA ES VÁLIDO PARA $\{S^t\} \in C^1$, Y SI $\{S^t\} \in C^r$, $r \geq 1$, ENTONCES $V^s(x) \in C^r$. ADEMÁS EN ESTE CASO PUEDE DEMOSTRARSE QUE: $r(S^t(x)) \geq \text{CONST.}$ Y $C(S^t(x), \epsilon) \leq \text{CONST.}$ (VÉASE (6)), UNIFORMEMENTE RESPECTO DE t .

OBSERVACIÓN 1.6 EN LA TEORÍA HIPERBÓLICA APARECE UNA SIMETRÍA ENTRE LOS OBJETOS SEÑALADOS CON ÍNDICES "s" Y "u" DE "ESTABLE" E "INESTABLE". A SABER, AL CAMBIAR LA DIRECCIÓN DEL TIEMPO LOS OBJETOS CON LOS ÍNDICES "s" Y "u" CAMBIAN SUS PAPELES. ESTO PERMITE, EN PARTICULAR, DETERMINAR LA VARIEDAD INESTABLE LOCAL (VIL) $V^u(x)$ EN EL PUNTO x COMO VEL PARA LA TRANSFORMACIÓN S^{-1} . SE SOBREENTIENDE QUE ESTA VARIEDAD INESTABLE LOCAL (VIL) POSEE PROPIEDADES ANÁLOGAS A LAS PROPIEDADES $V^s(x)$.

OBSERVACIÓN 1.7 PARA SISTEMAS DINÁMICOS CON TIEMPO CONTINUO LA VEL Y LA VIL SE DEFINEN COMO LAS CONSTRUIDAS PARA EL DIFEOMORFISMO S^1 (TRANSLADANDO EN UNA UNIDAD DE TIEMPO A LO LARGO DE LA TRÁYECTORIA DEL FLUJO).

COMO SE VERÁ EN LO SUCESIVO LA VEL Y LA VIL JUEGAN UN PAPEL FUNDAMENTAL EN EL ANÁLISIS DE LAS PROPIEDADES ERGÓDICAS Y TOPOLÓGICAS DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS HIPERBÓLICOS. SU FORMA EXPLICITA PUEDE DETERMINARSE SOLO EN CASOS DE SISTEMAS MUY ESPECIALES CON ALGUNA SIMETRÍA ADICIONAL (VÉASE MÁS ADELANTE). EN EL CASO GENERAL TALES VARIEDADES LOCALES SE CONSTRUYEN MEDIANTE UNA VARIANTE DEL MÉTODO DEL MAPEO DE CONTRACCIÓN (VÉASE [1]).

REFERENCIAS

[1] PESIN YA. B., LOS EXPONENTES CARACTERÍSTICOS DE LYAPUNOV Y LA TEORÍA ERGÓDICA SUAVE, USPEKHI MAT. NAUK 1977, 32, No 4 55-111 (EN RUSO; EXISTE VERSIÓN INGLESA).

2 ANOSOV D.V., FLUJOS GEODÉSICOS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS CERRADAS DE CURVATURA NEGATIVA (EN RUSO; EXISTE VERSIÓN INGLESA).

TRUDY MAT. INST. 'STEKLOV', 1967, No 90.