PRESENTACION

EL PRESENTE TRABAJO DEL PROF. BRAUN VERSA SOBRE MODELOS SENCILLOS DE CRECIMIENTOS DE POBLACIONES DE ESPECIES AISLADAS, CUYO OBJETIVO ES OBTENER MODELOS DE CRECIMIENTO POBLACIONAL Y ASÍ PREDECIR POBLACIONES EN EL FUTURO. MUCHOS DE LOS PRONÓSTICOS OBTENIDOS CON BASE EN LOS MODELOS INTRODUCIDOS SON COMPARADOS CON DATOS CONOCIDOS.

EL CONTENIDO PROPUESTO ES PARA EXPONERSE EN UNAS DOS SESIONES DE UNA HORA Y PUEDA SERVIR COMO COMPLEMENTO A TEMAS DE DERIVACIÓN, INTEGRACIÓN, Y PLANTEAMIENTO DE MODELOS VIA ECUACIONES QUE INVOLUCRAN LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INCÓGNITA.

ESTE COMO OTROS MUCHOS TRABAJO FUERON ENTREGADOS A "COMUNICACIONES INTERNAS" DE LA FACULTAD DE CIENCIAS PARA SU PUBLICACIÓN HABIENDOSE QUEDADO SIN ÉLLA DEBIDO A LA ACTITUD DE LAS AUTORIDADES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS (1980-1986)

MODELOS DE CRECIMIENTO DE POBLACION DE ESPECIES AISLADAS .

POR MARTIN BRAUN*

En este módulo estudiaremos las ecuaciones diferenciales de primer orden, que gobiernan el crecimiento de varias especies. A primera vista parecería imposible modelar el crecimiento de una especie a través de ecuaciones diferenciales puesto que la población de cualquier especie cambia en cantidades enteras. De aquí que la población de cualquier especie nunca será una función diferenciable del tiempo. Sin embargo, si una población dada es muy grande y se incrementa repentinamente en uno, entonces el cambio es muy pequeño comparado con dicha población. Así, hacemos la aproximación de que las grandes poblaciones cambian continuamente y aún diferenciablemente con el tiempo.

Sea $p(t)$ la población de una especie dada al tiempo t y sea $r(t,p)$ la diferencia entre la tasa de nacimiento y la de mortalidad de dicha población. Si la población está aislada, es decir, si no hay inmigración ó emigración, entonces dp/dt, la tasa de cambio de la población, es igual a $rp(t)$. En el modelo más simplista, suponemos que r es constante, esto es, no cambia ni con el tiempo ni con la población. Entonces podemos escribir la siguiente ecuación diferencial como la representante del crecimiento de la población:

(*) Traducido por estudiantes de matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM, de Modulos en Matematicas Aplicadas, Cornell Univ.

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t) \qquad a = cte.$$

Esta es una ecuación lineal, conocida como la Ley Malthusiana del crecimiento de población. Si la población de una especie dada es p_0 al tiempo t_0, entonces $p(t)$ satisface el problema con condicion inicial

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t) \quad ; \quad p(t_0) = p_0$$

La solución de este problema es

$$p(t) = p_0\, e^{a(t - t_0)}$$

De aquí cualquier especie que satisface la Ley Malthusiana de crecimiento de población, crece exponencialmente con el tiempo.

Ahora, hemos formulado un modelo muy simple para el crecimiento de población, tan simple de hecho que lo hemos resuelto completamente en unas pocas líneas. Es importante, entonces, ver si este modelo, tan simple -- tiene alguna relación con la realidad. Sea $p(t)$ la población humana en la tierra al tiempo t. En 1961 fué estimada en 3 060 millones y su tasa de incremento durante la década pasada fue estimada en un 2% anual. De este modo

$$t_0 = 1961, \quad a = .02 \quad p_0 = (3.06)10^9$$

y

$$p(t) = (3.06)10^9\, e^{0.02(t - 1961)}$$

Ahora, podemos comprobar esta fórmula tanto como sea posible en poblaciones pasadas.

Resultado: Se refleja con sorprendente exactitud - la población estimada para el periodo 1700 - 1961. La - población de la tierra se ha duplicado cada 35 años - - aproximadamente y nuestra ecuación predice una duplicación cada 34.6 años. Para probar esto hay que observar que la población humana se duplica en un tiempo $T=t-t_0$ donde $e^{.02T}=2$. Tomando logaritmos en ambos lados de - la ecuación, tenemos $.02T=\ln 2$ así, $T=50\ln 2\approx 34.3$. Sin embargo, veamos hacia un futuro distante. Nuestra ecuación predice que la población de la tierra será de 200.000 billones* en el año 2510, 1 800 000 billones en el año 2635 y 3 600 000 billones en el año 2670. Estas cifras son astronómicas y su significancia es difícil - de medir. La superficie del planeta es aproximadamente de 167 000 billones de metros cuadrados. El 80% de esta superficie está cubierta de agua. Asumiendo que estamos dispuestos a vivir en embarcaciones, así como en la tierra, es fácil ver que cerca del año 2510 habrá -- únicamente .837 m^2 por persona; para 2635 solo .09 m^2 y para 2670 estaremos 3 parados, uno sobre los hombros de otro.

Parece ser por consiguiente, que el modelo no es - razonable y debería desecharse. Como sea no podemos ignorar el hecho de que ofrece excepcional concordancia - con el pasado. Además, tenemos evidencia adicional de que algunas poblaciones crecen exponencialmente. Consideremos al Microtus Aruallis Pall, un pequeño roedor --

*1 Billón = 10^9

que se reproduce muy rápidamente, tomemos como unidad de tiempo el mes y supongamos que la población se incrementa a una tasa del 40% mensual. Si hay dos roedores al tiempo $t = 0$, entonces $p(t)$, el número de roedores al tiempo t, satisface la condición

$$\frac{dp(t)}{dt} = .4p(t) \ , \ p(0) = 2$$

consecuentemente

$$p(t) = 2e^{.4t} \ldots (1)$$

La tabla 1 compara la población observada con la calculada con la ecuación (1).

Como podrá observarse hay una aproximación excelente.

MES	0	2	6	10
p OBSERVADA	2	5	20	109
p CALCULADA	2	4.5	22	109.1

TABLA 1. Crecimiento del Microtus Arvallis Pall.

Observación: En el caso del Microtus Arvallis Pall la p observada es muy exacta, ya que el periodo de gestación es de 3 semanas y el tiempo requerido para el censo es considerablemente menor. Si el periodo de gestación fuera muy corto, entonces la p observada podría no ser exacta ya que muchos de los roedores preñados hubieran parido antes de que el censo fuera completado.

La solución a nuestro dilema es observar que los modelos lineales para el crecimiento de la población son satisfactorios siempre y cuando ésta no sea muy grande. Cuando la población crece extremadamente, el modelo no puede ser preciso, ya que no refleja el hecho de que -- los miembros estarán compitiendo entre sí por el espacio de vivienda, los recursos naturales y la comida disponi ble ya que son limitados. Por lo tanto, debemos agre-- gar un término de competencia a nuestra ecuación dife-- rencial lineal. Una elección apropiada es $-bp^2$, donde b es una constante, ya que el promedio estadístico del número de disputas de dos miembros, por unidad de tiem- po, es proporcional a p^2. Consideremos, por consiguien te, la ecuación modificada

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2.$$

Esta ecuación es conocida como la Ley Logística del cre cimiento de la población y los números a, b son llama-- dos coeficientes vitales de la población. Fue introdu- cida en 1837 por el biólogo - matemático Verhulst.

La constante b, en general, será muy pequeña en compara ción con a, así que, si p no es muy grande, el término $-bp^2$ será insignificante comparado con ap y la pobla- - ción crecerá exponencialmente. Pero, cuando p es muy - grande el término $-bp^2$ ya no es insignificante y sirve para frenar la tasa de incremento de la población. No hace falta decir que conforme un país es más industria- lizado, tiene mayor territorio, y dispone de más alimen tos, el coeficiente b es más pequeño.

satisfactorios siempre y cuando ésta no sea muy grande. Cuando la población crece extremadamente, el modelo no puede ser preciso, ya que no refleja el hecho de que -- los miembros estarán compitiendo entre sí por el espacio de vivienda, los recursos naturales y la comida disponible ya que son limitados. Por lo tanto, debemos agregar un término de competencia a nuestra ecuación diferencial lineal. Una elección apropiada es $-bp^2$, donde b es una constante, ya que el promedio estadístico del número de disputas de dos miembros, por unidad de tiempo, es proporcional a p^2. Consideremos, por consiguiente, la ecuación modificada

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2.$$

Esta ecuación es conocida como la Ley Logística del crecimiento de la población y los números a, b son llamados coeficientes vitales de la población. Fue introducida en 1837 por el biólogo - matemático Verhulst.

La constante b, en general, será muy pequeña en comparación con a, así que, si p no es muy grande, el término $-bp^2$ será insignificante comparado con ap y la población crecerá exponencialmente. Pero, cuando p es muy grande el término $-bp^2$ ya no es insignificante y sirve para frenar la tasa de incremento de la población. No hace falta decir que conforme un país es más industrializado, tiene mayor territorio, y dispone de más alimentos, el coeficiente b es más pequeño.

Usaremos la ecuación logística para predecir el futuro crecimiento de una población aislada. Si p_0 es la población al tiempo t_0, entonces $p(t)$, la población al tiempo t, satisface el problema con condición inicial

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 \;;\; p(t_0) = p_0$$

Esta es una ecuación diferencial separable y su solución es

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dr}{ar - br^2} = \int_{t_0}^{t} ds = t - t_0$$

Para integrar la función $1/(ar - br^2)$ recurriremos a fracciones parciales. Sea

$$\frac{1}{ar - br^2} \equiv \frac{1}{r(a - br)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{a-br}$$

Para encontrar A y B, observamos que

$$\frac{A}{r} + \frac{B}{a - br} = \frac{A(a - br) + Br}{r(a - br)}$$

$$= \frac{Aa + (B - bA)r}{r(a - br)}$$

Por lo tanto, $Aa + (B - bA)r = 1$. Como esta ecuación es válida para todos los valores de r, vemos que $Aa = 1$ y $B - bA = 0$. Consecuentemente $A = 1/a$, $B = b/a$ y

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dr}{r(a - br)} = \frac{1}{a}\int_{p_0}^{p} \left(\frac{1}{r} + \frac{b}{a - br}\right) dr$$

$$= \frac{1}{a}\left(\ln \frac{p}{p_0} + \ln \left|\frac{a - b\,p_0}{a - b\,p}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{a} \ln \frac{p}{p_0} \left|\frac{a - bp_0}{a - bp}\right|$$

Así

$$a(t - t_0) = \ln \frac{p}{p_0} \left|\frac{a - bp_0}{a - bp}\right| \ldots \qquad (2)$$

Es fácil demostrar que $\frac{a - bp_0}{a - bp(t)}$ es siempre positivo. (ver ejercicio 1), y por lo tanto,

$$a(t - t_0) = \ln \frac{p}{p_0} \frac{(a - bp_0)}{(a - bp)}$$

tomando exponenciales en ambos lados de la ecuación tenemos

$$e^{a(t - t_0)} = \frac{p}{p_0} \frac{a - bp_0}{a - bp}$$

ó

$$p_0(a - bp)\, e^{a(t - t_0)} = (a - bp_0)p$$

agrupando todos los términos que contienen a p del lado izquierdo de la ecuación tenemos que

$$(a - bp_0 + bp_0 e^{a(t - t_0)})p(t) = ap_0 e^{a(t - t_0)}$$

consecuentemente

$$p(t) = \frac{ap_0 e^{a(t - t_0)}}{a - bp_0 + bp_0 e^{a(t - t_0)}}$$

$$= \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t - t_0)}} \ldots \qquad (3)$$

Examinemos ahora la ecuación (3) para ver qué población predice. Observamos que conforme $t \to \infty$

$$p(t) \to \frac{ap_0}{bp_0} = \frac{a}{b}$$

De este modo, *independientemente de la condición inicial, la población siempre se aproxima al valor límite* a/b; el cual es llamado "capacidad de carga" del microcosmos. Además, se observa que $p(t)$ es una función monótona creciente si $0 < p_0 < a/b$. Ya que

$$\frac{d^2p}{dt^2} = a\frac{dp}{dt} - 2bp\frac{dp}{dt} = (a-2bp)p(a-bp),$$

vemos que dp/dt es creciente si $p(t) < a/2b$ y que dp/dt es decreciente si $p(t) > a/2b$. Por tanto, si $p_0 < a/2b$, la gráfica de $p(t)$ debe tener la forma dada en la figura 1.

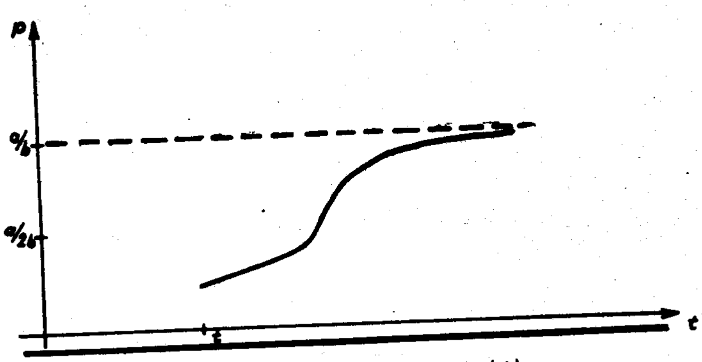

FIGURA 1. Gráfica de $p(t)$

esta curva es llamada logística o sigmoide. A partir de su forma concluimos que el periodo de tiempo anterior a que la población alcance la mitad de su valor límite es un periodo de crecimiento acelerado. Después de este punto, la tasa de crecimiento decrece y con el tiempo llega a cero, este es un período de disminución del crecimiento.

Estas predicciones aparecieron en un experimento realizado con el Protozoario Paramecium Caudatum, llevado a cabo por el Biólogo-Matemático G. F. Gausé. 5 individuos del Paramecium fueron puestos en pequeños tubos de ensayo, conteniendo .5 cm^3 de un medio nutritivo y durante 6 días el número de individuos en cada tubo fué contado diariamente. Se encontró que éste crecía a una tasa de 230.9% por día cuando su número era bajo. El número de individuos se incrementó rápidamente al principio y después un poco más lentamente hasta que al cuarto día alcanzó un nivel máximo de 375, saturando el tubo de ensayo. De estos datos, concluimos que si el Paramecium Caudatum crece de acuerdo a la Ley Logística

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2,$$

entonces $a = 2.309$ y $b = \frac{2.309}{375}$. Consecuentemente la Ley Logística predice que

$$p(t) = \frac{(2.309)5}{\frac{(2.309)5}{375} + \left(2.309 - \frac{(2.309)5}{375}\right)e^{-2.309t}}$$

$$= \frac{375}{1 + 74\, e^{-2.309\, t}} \quad \ldots \quad (4)$$

(Hemos supuesto que el tiempo inicial $t_0 = 0$). La figura 2 compara la gráfica de $p(t)$ que se obtiene de la ecuación (4) con las mediciones reales, denotadas por *0*. Como podemos ver, la concordancia es notablemente buena.

Para aplicar nuestros resultados a la predicción de la futura población humana en la tierra, debemos estimar los coeficientes vitales a y b en la ecuación logística que gobierna su crecimiento. Algunos ecólogos han estimado que el valor natural de a es 0.029, también sabemos que la población humana se incrementaba a razón del 2% anual cuando ésta era $(3.06)10^9$. Partiendo de que

$$\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dt} = a - bp$$

vemos que $.02 = a - b(3.06)10^9$. Consecuentemente, $b = 2.941(10)^{-12}$. De este modo, de acuerdo a la Ley Logística del crecimiento, la población humana en la tierra tiende al valor límite

$$\frac{a}{b} = \frac{0.029}{(2.941)10^{-12}} = 9.86 \text{ Billones de personas.}$$

Nótese que de acuerdo a esto, en 1961 nos encontrábamos todavía en la parte de crecimiento acelerado de la curva logística ya que aún no se alcanzaba la mitad del valor límite estimado.

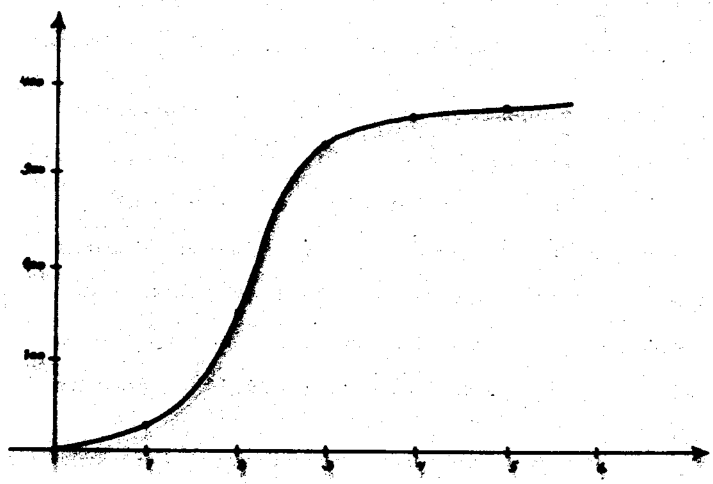

FIGURA 2: Crecimiento del Paramecium Caudatum.

Como otra verificación de la ley logística, consideremos la ecuación

$$p(t) = \frac{197\ 273\ 000}{1 + e^{-0.03134\ (t - 1913.25)}} \quad \ldots \quad (5)$$

que fué introducida por Pearl y Reed como un modelo para la población de E.U.A. Este fué deducido de la siguiente manera. Primero, usando los censos de los años 1790, 1850 y 1910 encontraron, de la ecuación (3), que $a = 00.03134$ y $b = (1.5887)10^{-10}$ (ver ejercicio 2a). Después, para simplificar la ecuación (3), calcularon que la población de los E.U.A alcanzó la mitad de su valor límite de población $a/b = 197\ 273\ 000$ en abril de 1913 - (ejercicio 2b). Consecuentemente (ejercicio 2c) podemos reescribir la ecuación (3) en la forma más simple, (5).

La tabla 2 compara las predicciones de Pearl y Reed con los valores observados. Estos resultados son notables, especialmente porque no se tomaron en cuenta los grandes flujos de inmigración a los E.U.A. y el hecho de que este país participó en 5 guerras durante este periodo.

AÑO	VALOR REAL	VALOR PREDECIDO	ERROR	%
1790	3,929,000	3,929,000	0	0.0
1800	5,308,000	5,336,000	28,000	.5
1810	7,240,000	7,228,000	-12,000	-0.2
1820	9,638,000	9,757,000	119,000	1.2
1830	12,866,000	13,109,000	243,000	1.9
1840	17,069,000	17,506,000	437,000	2.6
1850	23,192,000	23,192,000	0	0.0
1860	31,443,000	30,412,000	-1,031,000	-3.3
1870	38,558,000	39,372,000	814,000	2.1
1880	50,156,000	50,177,000	21,000	0.0
1890	62,948,000	62,769,000	-179,000	-0.3
1900	75,995,000	76,870,000	875,000	1.2
1910	91,972,000	91,972,000	0	0.0
1920	105,711,000	107,559,000	1,848,000	1.7
1930	122,775,000	123,124,000	349,000	0.3
1940	131,669,000	136,653,000	4,984,000	3.8
1950	150,697,000	149,053,000	-1,644,000	-1.1

TABLA 2.- Población de los E.E.U.U. de 1790 a 1950 (Los últimos 4 datos fueron añadidos por The Dartmouth College Writing Group).

En 1845 Verhulst profetizó una población máxima para Bélgica de 6 600 000 y de 40 000 000 para Francia. La población de Bélgica en 1930 era ya de 8 092 000. Es ta gran discrepancia parece indicar que la ley logística es inexacta por lo menos en lo que se refiere a Bélgica; sin embargo, puede ser explicada por el asombroso crecimiento de la industria y la adquisición del Congo que aseguró al país suficiente riqueza para sostener la población adicional. Tomando esto en cuenta, Verhulst debió haber reducido el coeficiente vital *b* después de estos sucesos.

Por otro lado, la población de Francia en 1930 fué notablemente concordante con los pronósticos de Verhulst. Por cierto, ahora podemos contestar la siguiente paradoja: ¿porqué la población de Francia crecía extremadamente despacio en 1930, mientras que la población francesa del Canadá la hacía rápidamente? ¡Después de todo, son el mismo pueblo! la respuesta es, por supuesto, que la población de Francia en 1930 estaba muy próxima a su valor límite y por lo tanto dentro del periodo de disminución de su crecimiento, mientras que la población del Canadá en 1930 estaba aún en el periodo de crecimiento acelerado.

Observaciones:

1) Es claro que el desarrollo tecnológico, la contaminación y las tendencias sociológicas tienen una influencia significativa en *a* y *b*, por lo tanto estos deben ser evaluados muy frecuentemente.

2) Para obtener modelos de crecimiento de la población más precisos, no debemos considerar dicha población como formada por un grupo homogéneo de individuos, sino que debemos subdividir la población en grupos de diferentes edades, y también en grupos de distinto sexo ya que la tasa de reproducción usualmente depende más del número de hembras que en el de machos.

3) Quizá la crítica más severa a la Ley Logística es que se ha observado que ciertas poblaciones fluctúan periódicamente entre dos valores y ningún tipo de fluctuación es previsto en una curva logística. Sin embargo algunas de estas fluctuaciones pueden explicarse por el hecho de que cuando ciertas poblaciones alcanzan una densidad suficientemente alta y se vuelven susceptibles a epidemias, las epidemias disminuyen la población, después ésta comienza a incrementarse de nuevo hasta que es suficientemente grande y la epidemia ataca otra vez. En el ejercicio 7 deducimos un modelo que describe este fenómeno y aplicamos dicho modelo en el ejercicio 8 para explicar la repentina aparición y desaparición de grupos de pequeños roedores.

REFERENCIAS

Gause, G.F. "The Struggle for Existence", Hafner - Publishing Co., New York - London, 1964.

Pearl and Reed, Proceedings of the National Academy of Sciences, 1920 p. 275.

Ejercicios

1. Demuestre que $(a - bp_0)/(a - bp(t))$ es positivo para $t_0 < t < \infty$. ***Sugerencia:*** Use la ecuación (2) para demostrar que $p(t)$ nunca puede ser igual a a/b si $p_0 \neq a/b$.

2a) Elija t_0, t_1, t_2 con $t_1 - t_0 = t_2 - t_1$ y demuestre que la ecuación (3) determina a y b únicos, en términos de t_0, $p(t_0)$, t_1, $p(t_1)$, t_2 y $p(t_2)$.

b) Demuestre que el período de crecimiento acelerado para la población de E.U.A., finalizó en Abril de 1913. (De acuerdo al modelo de Pearl y Reed).

c) Supongamos que una población $p(t)$, crece de acuerdo a la ley logística (3), y sea $\bar{t}$ el tiempo en el que se alcanza la mitad del valor límite de la población. Demuestre que

$$p(t) = \frac{a/b}{1 + e^{-a(t - \bar{t})}} .$$

3. En 1879 y 1881 un cierto número de crías de peces fue tomada de Nueva Jersey y Nevado a la Bahía de San Francisco. Solamente sobrevinieron un total de 435 peces. Sin embargo, en 1889, la pesca comercial de estos, fue de 1,234,000 libras. Como el crecimiento de esta población fué tan rápido, es razonable suponer que obedeció a la Ley Malthusiana,

$$\frac{dp}{dt} = ap.$$

Suponiendo que el peso promedio de cada pez es de 3 libras, y que en 1899 se pescó uno de cada diez, encontrar una cota inferior para a.

4. Una población crece de acuerdo a la Ley logística, con una población límite de 5×10^8 individuos. Cuando la población es poca, ésta se duplica cada 40 minutos. ¿Cuál será la población después de 2 horas si inicialmente es de : (a) 10^8, (b) 10^9.?

5. Una familia de salmón que vive cerca de las costas de Alaska, obedece a la ley Malthusiana de crecimiento de población, $\frac{dp(t)}{dt} = .003p(t)$, donde t se mide en minutos. En el tiempo $t = 0$, un grupo de tiburones se establece en estas aguas y comienza a atacar a los salmones. La tasa a la cual los tiburones matan los salmones es de $.001\ p^2(t)$, donde $p(t)$ es la población de salmones en el tiempo t. Además, desde la aparición del tiburón, $.002$ salmones por minuto, abandonan esas aguas.

a) Modifique la ley Malthusiana de crecimiento de población para tomar en cuenta estos dos factores.

b) Suponiendo que en el tiempo $t = 0$ hay un millón de salmones, encontrar la población $p(t)$. ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$?.

6. La población de Nueva York satisfaría la ley logística:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{25}p - \frac{1}{(25)10^6}p^2,$$

donde t se mide en años, si no tomamos en cuenta altos índices de emigración y de homicidios.

a) Modifique esta ecuación tomando en cuenta los hechos de que 6,000 personas por año abandonan la ciudad y 4,000 son asesinadas.

b) Suponiendo que la población de Nueva York era de 8,000,000 en 1970. Encontrar la población futura. ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$?.

7. Se puede hacer el modelo de una población suceptible a epidemias de la siguiente manera: Supóngase que originalmente nuestra población está regida por la ley logística,

$$(i) \quad \frac{dp}{dt} = ap - bp^2$$

y que ataca una epidemia cuando p alcanza cierto valor Q, donde Q es menor que el valor límite de población a/b. En este punto, los coeficientes vitales se vuelven, $A < a$, $B < b$, y la ecuación (i) es -- reemplazada por

$$(ii) \quad \frac{dp}{dt} = Ap - Bp^2 .$$

Supóngase que $Q > A/B$. Entonces la población empieza a decrecer. Se llega a un punto en el que la población es menor que cierto valor $q > A/B$. En este momento, cesa la epidemia y la población comienza - a crecer nuevamente de acuerdo a la ecuación (i), - hasta que aparece una nueva epidemia. De esta manera, existen fluctuaciones periódicas de p, entre q y Q. Ahora, indicaremos cómo calcular el periodo T de estas fluctuaciones.

a) Demuéstrese que el tiempo T_1 de la primera parte -- del ciclo, cuando p se incremente de q a Q, está dado por

$$T_1 = \frac{1}{a} \ell n \frac{Q(a - bq)}{q(a - bQ)} .$$

b) Demuéstrese que el tiempo T_2 de la segunda parte -- del ciclo, cuando p decrece de Q a q, está dado por

$$T_2 = \frac{1}{a} \ell n \frac{q(QB - A)}{Q(qB - A)} .$$

Entonces, el tiempo para el ciclo completo es $T_1 + T_2$.

8. Se ha observado que aparecen plagas en poblaciones de ratones cuando la población se vuelve muy grande. Además, un incremento local de densidad atrae un -- gran número de depredadores. Estos dos factores --

unidos, destruyen el 97 ó 98% de una población de pequeños roedores en 2 ó 3 semanas, y entonces la densidad decae a un nivel en el que la plaga ya no se puede extender. La población, reducida a un 2% de su máximo, encuentra refugio suficiente para huir de sus depredadores y comida abundante, entonces, comienza a crecer de nuevo hasta llegar a un nivel favorable a otra plaga y a la depredación.
la velocidad de reproducción de los ratones es tan grande que podemos suponer $b = 0$ en la ecuación (i) del ejercicio 7. Por el contrario, en la segunda parte del ciclo, A es muy pequeño comparado con B y por lo tanto pueda quitarse de la ecuación (ii).

a) Bajo las hipótesis anteriores, demostrar que

$$T_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{Q}{q} \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{Q - q}{q Q B}.$$

b) Suponiendo que T_1 es aproximadamente cuatro años, y Q/q es aproximadamente 50, demostrar que a es aproximadamente 1. Este valor de a corresponde muy bien con la tasa de multiplicación de los ratones en circunstancias normales.