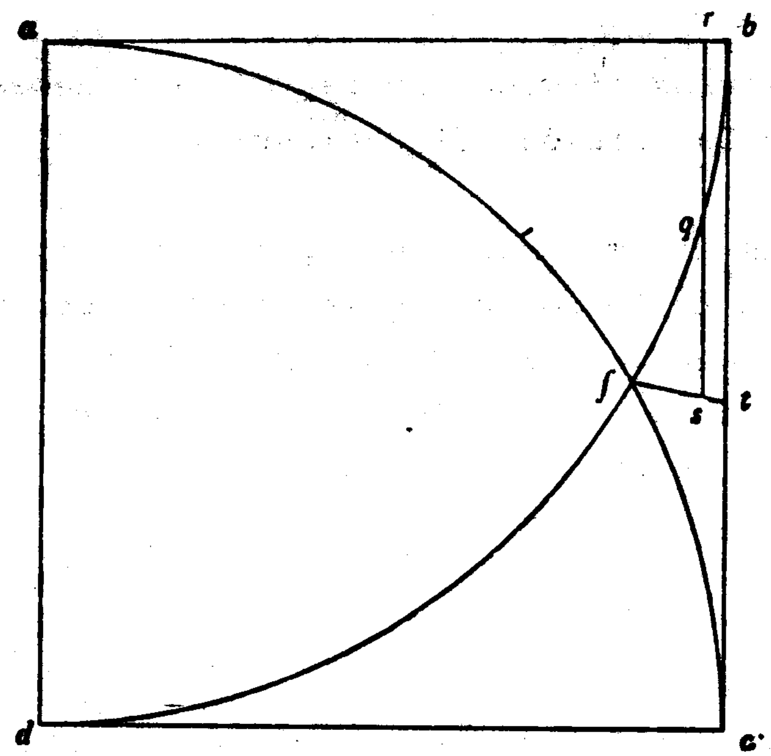
REVISTA DEL SEMINARIO de ENSEÑANZA Y TITULACION

AÑO I NUM 3



NOVIEMBRE

1984

SUSCRIPCION. Todas las personas que deseen una suscripción, deberán manifestarlo por escrito, enviando su nombre y dirección a:

- Arquitectura 69, Copilco Universidad, D.F. C.P. 04510.
- Departamento de Matemáticas, Cúbiculos 239 y 240. Facultad de Ciencias, UNAM. Ciudad Universitaria.

Dicha suscripción será gratuita y anual, mientras esto sea posible.

Los artículos firmados no representan necesariamente la opinión del Seminario.

Si deseas la impresión de algún material, puedes solicitarlo con cualquier miembro del Seminario o enviandolos a la dirección arriba anotada, al igual que todo tipo de correspondencia relacionada con el Seminario.

ESTE NUMERO DE LA REVISTA FUE IMPRESO EN LOS TALLERES DE IMPRESION DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES, PLANTEL NAUCALPAN. SE TIRARON 500 EJEMPLARES. NOVIEMBRE DE 1984. MEXICO,D.F.

"LA MATEMATICA ESTUDIA LAS FORMAS ESPACIALES Y LAS RELACIONES CUANTITATIVAS DEL MUNDO REAL" (+)

(+) Introdución de la tesis con la que se titularon los profesores Fermin Mejia y Alberto Monzoy.

INTRODUCCION

Presentamos una serie de reflexiones sobre el entender a la Matemática más alla de lo puramente conceptual y de lo que se -- ubica exclusicamente en el manejo de símbolos; estas reflexiones surgen en nuestro quehacer cotidiano en el salón de clases y en la elaboración de materiales de apoyo a los alumnos; considera-- ciones que se presentan en forma más sistemática en la elabora-- ción de este texto y aun después de probar su aplicabilidad.

Consideramos que esta serie de opiniones son un primer esbozo, que éstas se precisaran en la medida que se adentre uno más en la práctica docente así como el tener un conocimiento cada -- vez más profundo de la Matemática y del desarrollo científico.

UBICACION DE LA MATEMATICA

La Matemática surge y se desarrolla en la interacción del - hombre con la naturaleza para su transformación, es decir, en la práctica social que el hombre realiza; en esta interacción le corresponde a la Matemática estudiar las formas y las relaciones - cuantitativas del mundo real. Y es a partir de esta práctica donde surgen los conceptos matemáticos, como un medio para resolver problemas que la misma práctica le plantea, fundamentalmente en las ciencias naturales y la tecnología.

Los conceptos matemáticos debido a que son cada vez [illegible] tractos no son de manera directa reflejo de aspectos re[illegible] ro estos tendrán aplicabilidad práctica en la medida que esta -- abstracción creciente parte de aspectos reales y que el movimien to de los conceptos matemáticos estan en consonancia con las leyes del movimiento de la materia, es decir de acuerdo al Materia lismo Dialéctico, en este sentido podemos decir que el ciclo que sigue el conocimiento matemático es de la percepción viva al pen samiento abstracto y de éste a la práctica y asi obtener el cono cimiento de la realidad objetiva.

Es en la actividad práctica, en la práctica social donde la Matemática encuentra su razón de ser, manifestandose ésta en tres direcciones: planteándole nuevos problemas, estimulando desarrollos particulares y proporcionando criterios para la validez de sus resultados.

DE LA ADQUISICION DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO

En la obtención de todo conocimiento científico, en particu lar de la Matemática, se distinguen dos etapas: la sensorial y - la racional. La primera se refiere al conocimiento fragmentario, unilateral aislado, es "un primer acercamiento al problema"; y - en la medida que este conocimiento es cada vez más profundo, cuan do se encuentran las interrelaciones del problema, se da un salto a la etapa racional, es decir a la etapa de formación de los conceptos, de los raciocinios.

Estas etapas son relativas al grado de desarrollo que se --

tiene de los conceptos. Por ejemplo el conoci[illegible] alumno tiene de la Lógica Simbólica, adquirida en la Secundaria, es sensitivo de acuerdo al grado de comprensión que se plantea en estas notas; así como este sera sensitivo cuando emprenda estudios más completos de esta disciplina. Cabe aclarar que con respecto de los conocimientos adquiridos por los alumnos que ingresan al Colegio, consideramos que tienen un aprovechamiento medio de sus estudios en Secundaria, así mismo suponemos que en este nivel han tenido un acercamiento a problemas prácticos que lo sensibilicen para comprender el conocimiento matemático cada vez más abstracto. Esto último lo consideramos al conocer únicamente los planes y programas de estudio.

Estas etapas se manifiestan en el desarrollo y formación de los conceptos, y es donde surge un rasgo distintivo de la Matemática: que los conceptos matemáticos cobran "vida propia"; veamos con más detenimiento esto.

Al estudiar la Matemática las relaciones cuantitativas y las formas especiales* separadas de su contenido concreto, por un lado necesariamente conduce a un desarrollo simbólico y por otra parte a un proceso de abstracción ilimitado; a diferencia de otras disciplinas que llegan a abstraer determinadas cualidades de la materia y se desarrollan de acuerdo al marco teórico que

* Cabe aclarar que esta precisión de la Matemática tiene un posterior desarrollo, pero esta precisión la consideramos convincente para la Matemática de Bachillerato.

se trata de presentar, en la Matemática la abstracción "no tiene límites" más que aquellos que el propio desarrollo conceptual le impone, es decir, para la Matemática es característico lo absoluto de la abstracción.** Por ejemplo en el desarrollo de función aún siendo reflejo de situaciones concretas, la presentamos como un desarrollo conceptual de la situación más general que es el de una relación de un conjunto A en un conjunto B.

UBICACION DEL ALUMNO

Considerando el grado de comprensión adquirido en estudios anteriores, y ahora como estudiante de Bachillerato, el alumno debe adentrarse en el estudio de los conceptos, que no son innatos en él, que no surgen de la simple experiencia cotidiana, sino que estos tienen su propio desarrollo, una larga historia de experiencias. En este sentido ubicamos el texto como un primer intento de hacer comprender al alumno la necesidad de conceptualizar; que su experiencia, la aparentemente caótica acumulación de conocimientos que tiene; llegan a un nivel superior si es capaz de formar conceptos, que no es más que la busqueda esencial de las cosas. En el texto no se hace énfasis en el método de demostración o en el manejo formal de los conceptos, sino principalmente en la precisión de éstos.

Por otro lado, respecto de la formación del alumno, partimos

** Visión General de la Matemática. Sección 8. Aleksandrov, Kolmogorov. Ed. Mimeografiada. F.C. - U.N.A.M.

de que el alumno cuenta con un nivel medio de conocimientos matemáticos, por lo tanto, nos planteamos desarrollar [illegible] una sistematización de los conceptos por él ya estudiados. Por ejemplo, al avanzar en el desarrollo conceptual que el alumno tiene de la Secundaria, presentamos la interrelación de la Lógica y los Conjuntos por medio del Axioma de Especificación (Ver pag. 84), de esta forma construimos un lenguaje, el de los conjuntos, que nos proporciona elementos que permiten estudiar aspectos particulares de la Matemática.

Todo lo cual, es un proceso el que durante su estudio en el nivel medio debe cubrir una fase de dicho desarrollo que le permite tener una visión global de lo que llamamos Matemática Básica.

UBICACION DEL PROFESOR

Sin proponerse hacer la historia de la Ciencia, debemos apuntar ciertos elementos de ella para ubicar concretamente la actividad del Profesor. La Ciencia, como forma especial del conocimiento, surge con el nacimiento de las clases (y de la lucha de clases) con ella surge una nueva división social del trabajo: la actividad intelectual es separada del trabajo físico. Desde la aparición de esta división, las clases dominantes se han apropiado del conocimiento utilizándolo para su fortalecimiento. En el curso del desarrollo histórico de la lucha de clases, se forman las siguientes funciones del trabajo intelectual.

1.- La organización de la producción material, el control de la distribución de los recursos de producción y de los bienes materiales en la sociedad.

2.- La dirección sobre quienes participan en el proceso de trabajo.

3.- La creación del aparato estatal y la administración de la actividad cotidiana.

4.- La elaboración de las distintas formas de la ideología que permiten fortalecer y aclarar las relaciones de producción fundadas en el dominio de unas clases por otras.

5.- El desarrollo de la Ciencia, el arte y otras ramas de la actividad espiritual.*

Estas funciones del trabajo intelectual desempeñan un papel importante, ellas conducen a la diferenciación interna de las clases dominantes mismas, comienzan a formarse grupos especiales de personas que realizan estas o aquellas funciones concretas del trabajo intelectual. Al mismo tiempo, junto a la complejidad de estas funciones, surge la necesidad de la preparación profesional de dichos grupos. La enseñanza y con ella el Profesor, surge co

* Metodología del Conocimiento Científico. Ins. de Fil. Acad. de Ciencias de la URSS. Dep. de Fil. Academia de Ciencias de Cuba. Presencia Latinoamericana, S.A.

mo una necesidad del desarrollo mismo de la sociedad de clases. En ella el Profesor funge como un mero transmisor de conocimientos y es, al mismo tiempo, un reforzador del sistema social en el terreno ideológico. Ese desarrollo de la sociedad deja al Profesor en la escala de un asalariado más; su trabajo se circunscribe al salón de clases con todas las limitaciones que ello conlleva, pues ni aun las clases de "laboratorio le dan esa posibilidad de investigar, por lo cual ese Profesor no es un experimentador y de esta manera esa transmisión del conocimiento es cada vez más fragmentada, cada vez más unilateral. Sin embargo, como ser social, él tiene una concepción de ella, un punto de vista formado de esta ubicación y de su hacer.

No obstante esta problemática, el Profesor conciente de su trabajo y hacer en la sociedad, debe plantearse la tarea de posibilitar en el alumno una visión más completa de ella, para lo cual debe contemplar que el desarrollo de los conceptos no tan solo se da a través del tiempo, sino que a la vez dentro de una problemática más amplia que no se circunscribe tan solo a las teorías en las que se sustenta, sino que forma parte del desarrollo de la actividad de la sociedad (Ver Capítulo I).

DESARROLLO DEL TEXTO

Modelo-Lenguaje

Presentamos en el capítulo elementos para comprender el propósito y el contenido de la Matemática; bosquejamos el desarro--

llo de la Matemática Griega, dada su "simplicidad" en comparación al desarrollo actual de la Matemática como un ejemplo en el que él alumno obtenga elementos para ubicar a la Matemática ligada a las condiciones sociales, y pueda explicarse su contenido material y su carácter práctico.

Además se puede considerar como una introducción a la forma como abordamos el estudio de los conceptos posteriormente, esto es, la presentación Modelo-Lenguaje, se muestra mediante ejemplos que para la solución de un problema en el que se usa la Matemática se requiere hacer resaltar sus rasgos y propiedades esenciales expresandose esto mediante un lenguaje, que a su vez este lenguaje esta sujeto a reglas para conformarlo.

Lógica

En el Capítulo II consideramos que todo lenguaje simbólico en sus expresiones manifiesta una forma y una validez, estudiamos algunos rasgos de estos, considerando como elemento básico a las proposiciones simples (enunciados con validez); partiendo de estos se consideran las proposiciones compuestas (enfatizando la forma). Posteriormente se abstrae de estas proposiciones su contenido específico y trabajamos únicamente con lo que serian los moldes lógicos que llamamos simplemente proposiciones; o sea trabajamos únicamente la validez y la forma. A partir de estos moldes lógicos se definen la tabla de verdad, la condicional, la bicondicional, la equivalencia lógica y sus leyes.

Los ejercicios que se presentan en este Capítulo dan una -- aplicación de las proposiciones: los circuitos eléctricos y un - desarrollo conceptual de estas al presentar la negación asociada, la negación alternativa y la implicación lógica. (Ver pag. 66 y 67 del Texto).

Conjuntos

En el Capítulo III y IV presentamos lo que consideramos un lenguaje útil en la expresión de conceptos matemáticos: los conjuntos y las relaciones. El estudio de las operaciones en los - conjuntos lo abordamos mediante la ligazón con las proposiciones lógicas: definiendo las proposiciones abiertas en un conjunto y enunciando el axioma de especificación. Esto posibilita por una parte presentar la interrelación que los conceptos matemáticos - tienen (esto se adquiere mediante el desarrollo un tanto independiente de cada parte) y por otra justifica propiedades de las -- operaciones utilizando las propiedades de los moldes lógicos.

Al estudio de los conjuntos se le da una estructura axiomática, pero en este caso únicamente como una manera de organizar los conceptos y no como un esquema definición-teorema-demostración.

Después de estudiar las operaciones entre conjuntos trataremos un caso particular de éstos: las relaciones y las funciones. La importancia de este tema no esta a discusión, avocandonos a - realizar la construcción de ellos con los elementos anteriormente estudiados (Cap. II y III).

En las relaciones y funciones se estudia la manera de "asociar" los elementos de dos conjuntos cualesquiera, esto es, la manera de poder "relacionar" con cada elemento de un conjunto uno, varios o ninguno de otro conjunto, aqui nace la necesidad de hablar de un orden entre los elementos involucrados: la pareja ordenada. Esta idea es un caso particular de ordenación de objetos, para lo cual hacemos uso del concepto de potencia de un conjunto. Ya establecida la pareja ordenada se construyen los conjuntos de parejas ordenadas, los que podemos representar geométricamente (gráficas cartesianas); a los subconjuntos de parejas ordenadas le llamamos relación y la función un caso especial de éstas.

DE LAS LIMITACIONES

Presentar un material acabado sobre cualquier tema es imposible. En la docencia esto cobra validez, ya que la práctica cotidiana, así como las ideas proporcionadas por personas relacionadas directa o indirectamente con la enseñanza, dan día a día elementos nuevos que acaban por rebazar lo que en un momento dado se pudo considerar como "la última palabra". Sin embargo, sistematizar ideas que se han trabajado a través de varios años y una práctica constante en el interior de los salones de clase y fuera de ellos es una tarea que no se puede dejar de lado.

Esto no significa que la sistematización de las ideas de origen a un material definitivo, más bien a partir de esta sistematización, creemos poder avanzar en una conformación más coherente de las ideas que a partir de la práctica docente estamos extrayendo con respecto a la enseñanza de las matemáticas elementales y así avanzar en el intrincado sendero de la docencia. Empero este sendero esta lleno de bifurcaciones.

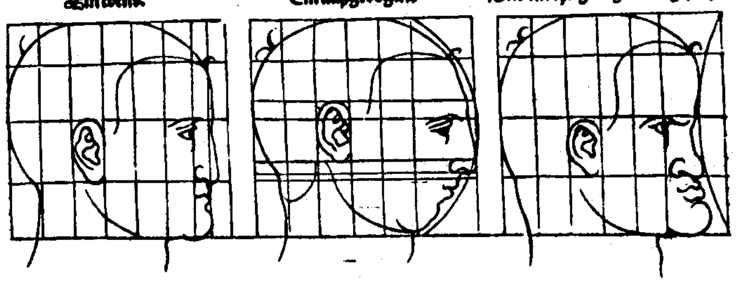
Estas notas solo son un pequeño avance en todo ese camino a recorrer, pues ellas carecen de una orientación concreta (o tan siquiera una propuesta) de como implementarlas en el salón de clase. La experiencia sobre ello ha sido dejada un tanto a la improvización -"previstas" por las particularidades de cada grupo académico y el momento por el que se atraviese-. Tampoco resuelve cuestiones de motivación, las cuales también son resueltas de manera personal e implementadas en el desarrollo del curso.

Estos dos aspectos, relativos a las condiciones ambientales "del aquí y ahora del salón de clases" no pueden ser resueltas por la tecnología educativa, (es al contrario un problema de concepción de la enseñanza) pues todas ellas - al menos las que conocemos- corresponden a corrientes cuya base filosófica corresponde al neopositivismo y creemos que ninguna de ellas resuelve científicamente el problema de la educación.

Tampoco estas notas resuelven la problemática educativa nacional pues, creemos, la solución a éste es en lo fundamental de

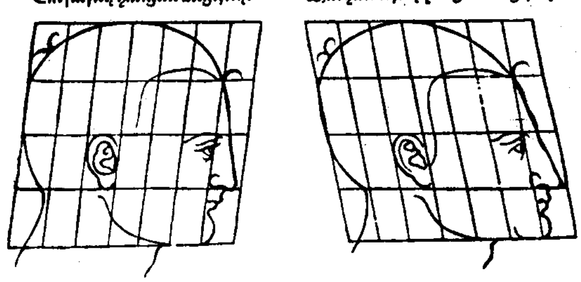
bido a carencias económicas, y en este plano el horizonte es ca
da vez más negro.

Ein ebens. Ein aufgebogens Und ein eyngebogens angesicht



Es sind nach zweyerley fort der angesicht die da nach der seyten anzusehen inn jrer vie rung also zu rucken sind/ Die zwo zwerch linien der vierung unden und oben beleyben an beden vierungen recht zwerch linien die sichbarnn / doch müssen bede vierungen rautens weyß geruckt werdenn / das vernym also / Die erst vierung werde mit jrem fodern obe- ren eck herfür/ unnd mit dem undern hindern eck hinhinder gezogenn / Des gleychenn thut man dem widersins / Darnach teylt man durch die gestracktenn zwerch linien all for beschriebne teyl wider ein / Aber so man die auffrechtenn wider eyn teylt / so werden mit sambt beden seyten eytel ort lini darauß / die da inn der ersten fürsich inn der andern hin- dersich hangen / Darnach zeucht man die gestalt linien des angesichts wider darein/ dann so findst u in beden vierungen was darauß wirdet / wie ich dann dise angesicht zu negst nach den dreyen forgemelten angesichten hab auffgerissen.

Ein fürsich hangent angesicht Ein hindersich hangent angesicht.



MAS PROBLEMAS SOBRE "ROMPECABEZAS" O "CORTE Y CONFECCION".

(Continuación de los problemas aparecidos en el N° 1 pags. 9 a 16)

Problema 18.- i) Para formar un rectángulo a partir de cuadrados enteros de longitudes distintas, es necesario al menos disponer de nueve cuadrados ¿cuáles?

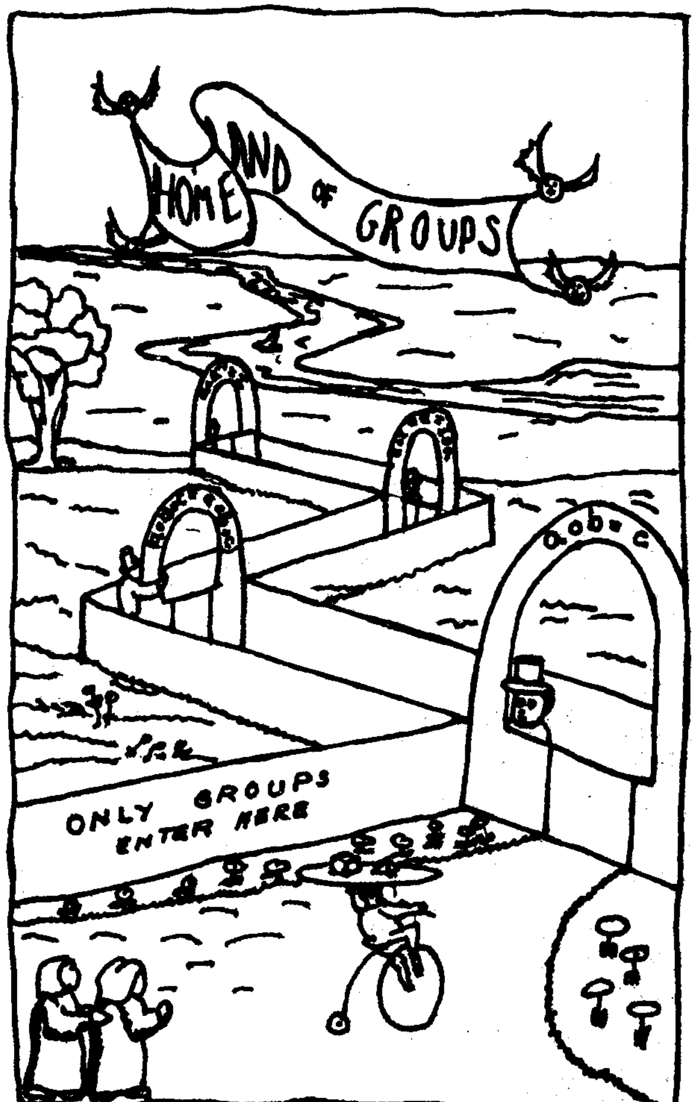
Sería deseable recibir referencias o intentos de solución respecto de las siguientes variantes:

ii) ¿Es posible conformar un rectángulo de cuadrados de longitudes enteras distintas pero menores que las encontradas en i)?

iii) ¿Es posible partir un cuadrado en cuadrados de longitudes distintas?

Problema 19.- Dados los cuadrados de longitudes distintas, cómo cortar el cuadrado mayor de manera que pueda formarse con el cuadrado menor un nuevo cuadrado.

Problema 20.- Entendiendo por polígono regular de n lados a toda figura cerrada de n lados iguales y ángulos iguales. Se pregunta cuántos pentágonos (polígonos regulares de 5 lados) existen.
Cuántos hexágonos (polígonos regulares de 6 lados, hay. Cuantos heptágonos (polígonos regulares de 7 lados) existen. En todos los casos la figura geométrica resultante no necesariamente es convexa.
Si aparecen dificultades te recomendamos empezar con el triángulo equilátero, cuadrado, etc.
Si todo resulta muy fácil agregariamos la pregunta ¿existe alguna regularidad que pueda expresarse mediante fórmula(s)?


HOME LAND OF GROUPS
a∘b = c
ONLY GROUPS ENTER HERE

II. ¿QUE ES UN GRUPO?

Las partes esenciales
de una máquina matemática o "sistema"
son:

1. Los elementos
2. Una operación

Por ejemplo,

(a) 1. Los elementos pueden ser los enteros (Positivos, negativos y el cero)

2. La operación puede ser la adición.

o

(b) 1. Los elementos pueden ser los números racionales[1] (excepto el cero)

2. La operación puede ser la multiplicación.

o

(c) 1. Los elementos pueden ser Substituciones de un número dado de letras, Digamos x_1, x_2, x_3.

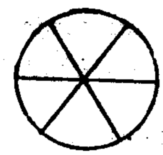
2. La operación puede ser realizar una substitución después de otra, como se ilustrará después.

---

(1) Un número racional, es aquel que puede ser expresado como la razón de dos enteros:
Así 3/5 es un número racional, pero $\sqrt{2}$ no es racional, puesto que no puede ser expresado en la forma a/b, donde a y b son enteros.

0

(d) 1. Los elementos pueden ser
las rotaciones de la figura



por medio de un ángulo de 60°,
o múltiplos de 60°.

2. Y la operación, como en (c)
aplicando una rotación de estas
después de otra.

Entre otros ejemplos.

Puede parecer
que no podemos hacer mucho
con un inicio tan pobre.
Pero la potencia de él
es sorprendente,
como pronto se verá.

Para que uno de estos sistemas
sea un "Grupo"
debe tener
las siguientes CUATRO características:

1. Si dos elementos [1]
son combinados por la operación dada
el resultado debe ser
un elemento del sistema.

Por ejemplo,
En el ejemplo (a) anterior
Si un ENTERO
es SUMADO a otro ENTERO
el resultado es un ENTERO

---

(1) Los elementos pueden ser distintos
o el mismo tomado dos veces.

En (b)
Si dos NUMEROS RACIONALES
son multiplicados
el resultado es
un NUMERO RACIONAL.

En (c)
Si la SUBSTITUCION
x_2 por x_1, x_3 por x_2, x_1 por x_3
es hecha en
x_1 x_2 x_3
Obtenemos
x_2 x_3 x_1
y esta SUBSTITUCION
SEGUIDA POR
la SUBSTITUCION
x_3 por x_2, x_1 por x_3, x_2 por x_1,
produce
x_3 x_1 x_2
El resultado es
la SUBSTITUCION
x_3 por x_1, x_1 por x_2, x_2 por x_3
en la expresión dada originalmente.

En (d)
Si la ROTACION de la figura
en un ángulo de 60° (En contra de las manecillas del reloj)
es SEGUIDA POR
la ROTACION 120° (Contra las manecillas del reloj)
El resultado es
la ROTACION 180° (Contra las manecillas del reloj).

2. El sistema debe contener
el ELEMENTO IDENTIDAD.
El cual cuando es combinado
con cualquier otro elemento
deja a ese otro elemento sin cambiar.

Así en (a)
el ELEMENTO IDENTIDAD es el NUMERO CERO

Ya que
cuando el CERO es SUMADO
a cualquier ENTERO
deja a dicho entero
sin variación.

En (b)
El ELEMENTO IDENTIDAD es
el número UNO
puesto que
cuando el UNO ES MULTIPLICADO
por cualquier NUMERO RACIONAL
el deja a ese número racional
sin cambio.

En (c)
El ELEMENTO IDENTIDAD es
la SUBSTITUCION
x_1 por x_1, x_2 por x_2, x_3 por x_3,
Dado que
Cuando esta SUBSTITUCION
es SEGUIDA POR
cualquier otra SUBSTITUCION
El resultado es equivalente a
la última substitución unicamente

En (d)
El ELEMENTO IDENTIDAD es
la ROTACION 360°,
pues,
si esta ROTACION
es SEGUIDA POR
cualquier otra ROTACION en el sistema
el resultado es equivalente a
realizar la segunda rotación sola.

3. Cada elemento debe tener
   un ELEMENTO INVERSO,
   tal que
   si un ELEMENTO es
   combinado con su INVERSO
   por medio de la OPERACION DADA.

el resultado es
el ELEMENTO IDENTIDAD.

Así en (a)
EL INVERSO de 3 es - 3
pues 3 SUMADO a - 3
dá cero.

En (b)
El Inverso de a/b es b/a
puesto que
a/b MULTIPLICADO por b/a
da 1.

En (c)
El Inverso de
x_2 por x_1, x_3 por x_2, x_1 por x_3
es
x_1 por x_2, x_2 por x_3, x_3 por x_1
ya que,
si una de estas SUBSTITUCIONES
es SEGUIDA POR la otra
el resultado es
la SUBSTITUCION
x_2 por x_2, x_3 por x_3, x_1 por x_1,
que es
la SUBSTITUCION IDENTIDAD.

En (d)
El INVERSO de
Una ROTACION de 60° (Contra las manecillas del reloj)
es una ROTACION de - 60° (en el sentido de las manecillas)
pues una de ellas
SEGUIDA POR la otra
es equivalente a
el ELEMENTO IDENTIDAD.

4. Debe cumplirse la LEY ASOCIATIVA [1].

Como un GRUPO[2] debe satisfacer
estas CUATRO CONDICIONES,
es obvio que
si el CERO fuera excluido de (a)
el sistema podría
no llegar a ser un grupo,
pues podría no existir
ningún elemento identidad.
También
los Enteros
(Positivos, Negativos y Cero)
No forman
Un GRUPO
bajo la MULTIPLICACION
ya que
el inverso de 3, por ejemplo,
sería $^1/_3$,
que no existe en este sistema.

---

[1] Esta significa que
si tres elementos a, b y c
son dados,
Y si denotamos la operación por *
entonces,
si la ley asociativa se cumple,
(a* b)*c debe dar
el mismo resultado que
a*(b*c).
Así, en (a)
3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5
pues
3 + 9 = 7 + 5
Es decir
la ley asociativa se cumple en (a)
Puede verse que
también se cumple
en (b),(c) y (d) anteriores.

[2] Para ver otros ejemplos de Grupos
simples e interesantes
ver L.C. Mathewson:
Elementary Theory of Finite Groups.

Así, el decidir
si un sistema es o no es un grupo
depende de
LOS ELEMENTOS DE EL SISTEMA,
de LA OPERACION USADA
y DE COMO SE COMPORTAN ESTOS ELEMENTOS
BAJO ESTA OPERACION.

Puede notarse que:

1. Los elementos
NO NECESARIAMENTE SON NUMEROS
ellos pueden ser
MOVIMIENTOS, como en (d)
o
Actos, como en (c),
etc., etc.,

Así ampliamos el
ALCANCE DE LAS MATEMATICAS,
liberándola de
SU SUJECION A LOS NUMEROS SOLAMENTE

2. La operación es
NO NECESARIAMENTE
la adición o la multiplicación
o cualquiera de los otros procesos
que generalmente son llamados operaciones
en Aritmética o álgebra,
sino que pueden ser como la
operación SEGUIDA DE
(un acto por otro)
como en (a) y (d).

Es costumbre,
sin importar la operación,
el llamarla "MULTIPLICACION"
Así en (c) diremos
una SUBSTITUCION
es MULTIPLICADA POR otra,
en lugar de
ES SEGUIDA POR otra.

Pero de hecho, este uso de la palabra
"MULTIPLICACION"
no debe ser confundido con
la multiplicación en aritmética y álgebra.
Para esta MULTIPLICACION
más general podemos tener
PROPIEDADES muy DIFERENTES
a las de la multiplicación ordinaria.

Por ejemplo,
en la multiplicación ordinaria

$$2X3 = 3X2$$

y por lo tanto decimos que
la multiplicación es CONMUTATIVA.
Esto es,
se obtiene el mismo resultado
si el orden de los factores es invertido.

Pero si
"MULTIPLICAMOS" en (c)
una substitución por otra,
podríamos NO obtener el mismo resultado,
si el orden en que se aplican
las dos substituciones es invertido.

Ejemplo, en la expresión

$$x_1x_2+x_3$$

aplicamos primero la substitución
x_3 por x_1, x_1 por x_3, y x_2 por x_2
obtenemos

$$x_3x_2+x_1$$

y "MULTIPLICANDOLA" después por
la substitución
x_2 por x_1, x_3 por x_2, y x_1 por x_3
obtenemos

$$x_1x_3+x_2$$

como resultado final.
Si ahora invertimos las substituciones
y aplicamos primero la substitución
x_2 por x_1, x_3 por x_2, y x_1 por x_3

obtenemos

$x_2x_1+x_1$

y "MULTIPLICANDO" esta substitución
por la substitución
x_3 por x_1, x_1 por x_3, y x_2 por x_2,
obtenemos

$x_2x_1+x_3$

como resultado final,
el cual es
DIFERENTE DE

$x_1x_3+x_2$

el resultado final anterior.
Por lo tanto,
este tipo de
"MULTIPLICACION"
es NO CONMUTATIVO
y por esto, es de
GRAN IMPORTANCIA
el indicar
la secuencia seguida
y el orden en que se
efectuó la operación.

En el capítulo siguiente
mostraremos algunos hechos interesantes
relacionados con
GRUPOS de SUBSTITUCIONES
ya que, este tipo de grupos
usó Galois
en la solución de ecuaciones.

Pero antes
mostraremos como
la notación puede ser simplificada.

Por que una notación simple
es vital
para el progreso
dentro de un tema[1].

Tomemos por ejemplo
la substitución
x_2 *por* x_1, x_3 *por* x_2, *y* x_1 *por* x_3.
En lugar de escribirlas de esta forma,
podemos omitir todas las x
y usar sólo los índices,
así

(1 2 3)

Esto significa que

1 *es cambiado a* 2
2 *es cambiado a* 3
y 3 *es cambiado a* 1.

En otras palabras,

x_1 *es cambiado a* x_2
x_2 *es cambiada a* x_3
y x_3 *es cambiada a* x_1

o como decíamos primero,
substituímos
x_2 *por* x_1, x_3 *por* x_2, *y* x_1 *por* x_3
En forma semejante
x_3 *por* x_2, x_1 *por* x_3, *y* x_2 *por* x_1

---

[1] Es fácil entender que
la solución de ecuaciones
no progresó rapidamente
mientras las ecuaciones eran escritas
en "palabras"
en lugar de en "simbolos"!
(Ver: "Ahmes Papyrus"
Publicado bajo el auspicio de
The Mathematical Association of America).

Se puede denotar por

$(2\ 3\ 1)$

En la cual, cada número
es cambiado en
el número que le sigue,
y el último número, 1,
es cambiado en el primer número, 2,
completando así el ciclo.

De igual forma

$(1\ 3\ 2)$

representa la substitución
x_3 por x_1, x_2 por x_3, x_1 por x_2
y

$(1\,3)\ (2)$

o simplemente $(1\,3)$
representa la substitución
x_3 por x_1, x_1 por x_3, y x_2 por x_2.

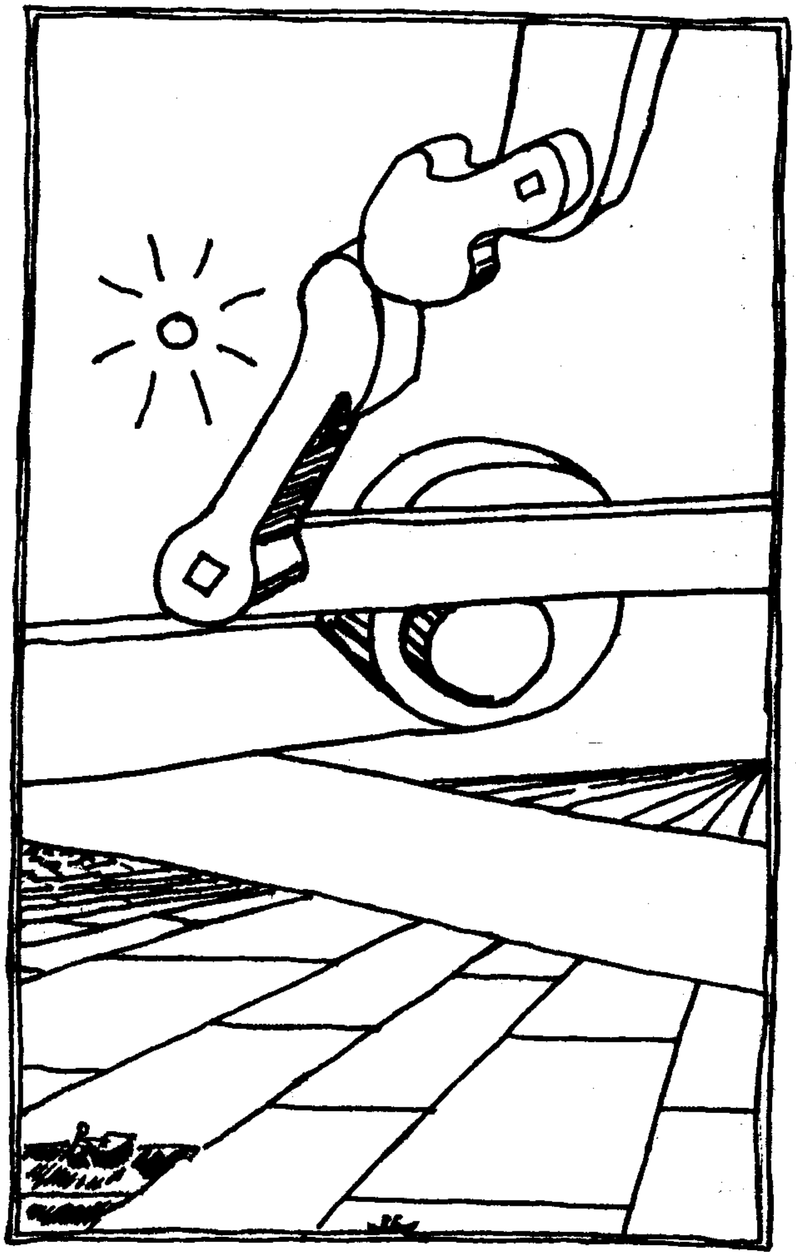
Así, el primer
PRODUCTO
mencionado en la página 20
puede ser escrito en la forma

$$(1\ 3)(123) = (23)$$

Y el producto invertido, página 21
es:

$$(1\ 2\ 3)(1\ 3) = (1\ 2)$$

Esto muestra que
LA MULTIPLICACION NO
ES CONMUTATIVA.
Es decir,
los resultados de
multiplicar un elemento dado
POR LA DERECHA o
POR LA IZQUIERDA
SON DIFERENTES!



III. ALGUNOS ASPECTOS IMPORTANTES SOBRE LOS GRUPOS

Puede suceder que
algunos de los elementos
de un grupo
formen un grupo entre ellos,
al que llamamos
SUB-GRUPO.

Por ejemplo,
consideremos el grupo (a)
del capítulo anterior
si tomamos
SOLO LOS ENTEROS PARES
(Positivos, negativos y cero)
Y mantenemos como operación a la adición
entonces ellos satisfacerán
las CUATRO CONDICIONES
para un grupo
Esto es:

1. La suma de
   cualesquiera dos ENTEROS PARES
   es un ENTERO PAR
2. El CERO es el ELEMENTO IDENTIDAD
3. EL INVERSO de
   cualquier ENTERO PAR POSITIVO
   es el
   correspondiente ENTERO PAR NEGATIVO
   (y viceversa)
   Porque
   la suma de dos de estos enteros
   es el elemento identidad, el CERO.
4. Se satisface la Ley asociativa (ver pág. 18)

Por lo tanto
los ENTEROS PARES solos
forman un SUB-GRUPO
del grupo de TODOS los enteros
bajo la ADICION.

En forma semejante
un grupo cuyos elementos son
SUBSTITUCIONES,
esto es,
un GRUPO de SUBSTITUCIONES
también puede tener
un SUB-GRUPO.

Por ejemplo,
tomemos las seis
substituciones: (1)
I, (1 2), (1 2 3), (1 2 3), (1 3), (2 3),
donde I representa
la SUBSTITUCION IDENTIDAD (ver pág. 16).
Estas constituyen un grupo,
pues ellas satisfacen
las CUATRO condiciones,
Veamos,

1. *El producto de cualquiera dos de ellas*
   es igual a otra substitución del conjunto,
   Así (2) *por ejemplo,* (*)

   (1 2)(1 2 3) = (1 3)
   (1 2 3)(1 3 2) = I
   (1 3)(2 3) = (1 2 3)

también,
el producto de

---

1. Ver pág. 22 para una explicación
   de la notación.

2. El resultado (1 3) se obtiene como sigue:
   En (1 2), 1 es reemplazado por 2
   y en (1 2 3), 2 es reemplazado por 3.
   El resultado es que 1 es reemplazado por 3.
   Ahora en (1 2), 2 es reemplazado por 1,
   y en (1 2 3), 1 es reemplazado por 2,
   El resultado es que 2 permanece sin cambiar
   (queda fijo)
   y finalmente,
   En (1 2), 3 no es mencionado
   y por consiguiente no es cambiado,
   pero en (1 2 3), 3 es cambiado a 1,
   el resultado es que 3 ES cambiado a 1.
   Todos estos resultados
   son considerados y representados en (1 3).

(*) El producto se desarrolla:
Se aplica primero la de la izquierda
y después la de la derecha, es
decir de izquierda a derecha.

cualquiera de ellas por sí misma
nos da otra del conjunto
Así,

(1 2 3)(1 2 3) = (1 3 2)

de igual forma para las restantes.

2. Existe el elemento identidad, I.

3. Cada elemento tiene un INVERSO:
El inverso de (1 2 3)
es (1 3 2).
Pues su producto es I
Así también
el inverso de (1 2) es (1 2)
etc.

4. Se cumple la ley asociativa.

De estas seis substituciones (pág. 25)
Consideremos las dos siguientes: I y (1 2)
Ellas dos solas forman un grupo,
pues satisfacen las CUATRO condiciones.
Entonces el grupo que consiste de
I y (1 2)
es un SUB-GRUPO
del grupo dado.
Puede mostrarse fácilmente que
el orden de cualquier sub-grupo
(Esto es, el número de sus elementos)
es un factor
del orden del grupo dado.
Un tipo de sub-grupos
muy importante
son
los SUB-GRUPOS INVARIANTES
para explicar esto,
es necesario explicar primero
que se entiende por
el TRANSFORMADO de
un elemento por otro.

Tomemos, por ejemplo,
el elemento (1 2)
y lo MULTIPLICAMOS
POR LA DERECHA por (1 2 3)
y POR LA IZQUIERDA por (1 3 2).
OBSERVE QUE (1 2 3) y (1 3 2) son
INVERSOS UNO DEL OTRO (ver pág. 26)
Obtenemos así

(1 3 2)(1 2)(1 2 3)

que es igual a (2 3)
Este resultado, (2 3) es llamado
la TRANSFORMADA de (1 2) por (1 2 3)

Así,
si un elemento dado de un grupo
es multiplicado por la derecha
por otro elemento
y por la izquierda
por el inverso de ese otro elemento
el resultado es llamado
la TRANSFORMADA del elemento dado
por el otro elemento.

Ahora,
Un sub-grupo es llamado
INVARIANTE
si el permanece sin cambio [1]
Cuando todos sus elementos son
TRANSFORMADOS
por todos los elementos
del grupo original.

---

[1] Sin cambio No significa necesariamente
que cada elemento del Subgrupo
permanezca inalterado,
sino que cada elemento se transforme
en algún elemento del subgrupo,
o sea que el subgrupo, COMO UN TODO,
no se transforme.

Los SUBGRUPOS INVARIANTES
son muy importantes
como veremos después.

Entre estos es particularmente importante
el SUBGRUPO PROPIO[1] INVARIANTE MAXIMO.
que es aquel que
NO ES CONTENIDO en
un subgrupo propio invariante MAYOR.

Si G es un grupo dado,
y si H es un
subgrupo propio invariante máximo de G,
K un subgrupo propio invariante máximo de H,
etc.

Entonces si el orden de G
(es decir, el número de elementos en G)
es dividido por el orden de H,
y el orden de H dividido por
el orden de K,
etc.
los números así obtenidos son llamados
la COMPOSICION FACTORIAL (o FACTORES DE COMPOSICION)
del grupo G.

Y si todos ellos son NUMEROS PRIMOS,
G es llamado un grupo SOLUBLE[2]
(El significado del término "soluble"
aparecerá después).

(1) En general
un grupo puede ser considerado
como un subgrupo de sí mismo,
pero un subgrupo PROPIO
es siempre menor que el grupo mismo.
Es decir la palabra "PROPIO"
enfatiza el SUB en SUBGRUPO.

(2) Es importante observar que
un grupo G puede, en algunos casos, ser
subdividido en una serie de
subgrupos propios invariantes máximos
EN MAS DE UNA FORMA

Pero siempre sus factores de Composición
son los mismos números, aunque
presentados en diferente secuencia

Esta observación importante
es ilustrada en el interior
de la cubierta.

Haremos un rodeo más:

Algunas veces sucede que
un grupo es de forma tal
que todos sus elementos
son potencias de alguno de ellos
distinto del elemento Identidad.
Por ejemplo,
Consideremos al grupo

$$I,\ (123),\ (132)$$

Aquí $(123)\ (123) = (132)$
o $(123)^2 = (132)$
También $(123)^3 = I$
Así todos los elementos
se pueden obtener a partir de (123)
elevando este elemento
a varias potencias.

Un grupo de este tipo es llamado "Cíclico"
además,
si un grupo es tal que
cada letra es cambiada
siempre en otra letra
(incluso en sí misma)
una vez y solo una vez,
este es un grupo "regular"
Este es el caso
del ejemplo anterior,
puesto que
x_1 es cambiado a x_1 en I
x_1 es cambiado a x_2 en (123)
x_1 es cambiado a x_3 en (132)
De igual manera
x_2 es cambiado a x_2, x_3, x_1
en I, (123) y (132) respectivamente
e igualmente para x_3.

Entonces este grupo es un
GRUPO CICLICO REGULAR
Este tipo de grupo es esencial en
la solución de ecuaciones
como se verá en el capítulo siguiente.