EDO 1

Introducción.

La noción de ED.

Analíticamente. Se llama *ED explícita respecto a la derivada* a toda *igualdad* (=), que incluye a *constantes* (números), *funciones de la única variable* x , y sobre todo al operador derivada $\frac{d}{dx}$, bajo la función incógnita y , *todas ellas evaluadas en el mismo valor de la variable* x:

$$y'(x) = f(x,y(x))$$

la cual usualmente se denota como:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \#$$

con f usualmente continua en cierto dominio D ($f \in \mathbf{C}_D$, con D una región (abierto conexo) de $\mathbb{R}^2$ y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Geométricamente. A cada (x,y) se le hace corresponder el valor, dado por $f(x,y)$, de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f , es decir el valor de su derivada $\left(\forall(x,y) \mapsto m_T = \frac{dy}{dx} = f(x,y)\right)$ A todas las (x,y) se les hace corresponder el campo de velocidades dado por $\frac{dy}{dx}$.

Las ED expresan los *modelos* típicos que involucran *cambio o movimiento*.

En esta primera parte se estudiarán las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (EDO) de *Primer Orden*. Lo de *Ordinaria* se refiere a que la función incógnita y es una función de una sola variable x. Lo de *Primer Orden* determina que la derivada de máximo orden que aparece involucrada en la ecuación es la primera derivada. Se tratarán ecuaciones explícitas respecto a la derivada de la forma (ref: 1) aunque admitan formas equivalentes como:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

con $f = -\frac{M}{N}$.

Tipos de Solución de una ED.

1. **La noción de ED**. Dada la función $\begin{cases} f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ z = f(x,y) \end{cases}$ donde usualmente D denotará a una región. Se dice que (ref: 1) es una ecuación diferencial (ED).

   Las ED expresan los *modelos* típicos que involucran *cambio o movimiento*.

   Junto con la ED (ref: 1) se considera, en una vecindad de aquellos puntos del plano (x^*,y^*) en los que $f(x^*,y^*) = \infty$, la ED recíproca

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \qquad \#$$

a. El conjunto de puntos (x^*, y^*) se unen a D.

b. Las soluciones $x = x(y)$ de (ref: 2) se unen a las soluciones de (ref: 1).

c. Si $f(x,y) \neq \infty$ en D, entonces (ref: 1) y (ref: 2) poseén las mismas soluciones.

2. **Solución particular** *o* simplemente **solución** *de una ED.*

a. *La solución* $y = \varphi(x)$ se llama particular si cada uno de sus puntos es punto de unicidad de la solución del problema de Cauchy correspondiente.

b. Solución de la ED (ref: 1) se le llama a toda *función* φ *continuamente diferenciable*, que reduce la *igualdad* de la ED en una *identidad* (igualdad para todos los valores admisibles de la variable).

c. En símbolos se llama *solución* de la ED (ref: 1) a toda función $\varphi \in \mathbf{C}^1_{(a,b)}$, tal que

$$\begin{cases} i)\varphi \text{ definida en las } x \text{ donde está definida } f \\ ii)\exists \varphi' \in \mathbf{C}_{(a,b)} \\ iii)(\forall x \in (a,b)) \;\; \varphi'(x) \equiv f(x,\varphi(x)) \end{cases} \qquad \#$$

d. Las soluciones contenidas en la fórmula de la solución general $y = \varphi(x,C)$, es decir, las soluciones obtenidas de élla para valores concretos admisibles: $C = C_0$ (cualquier real incluso los símbolos $\pm\infty$), o sus equivalentes condiciones iniciales (x_0, y_0) admisibles que determinan los C_0, son *soluciones particulares*.

e. La curva (la gráfica $(x,\varphi(x))$) correspondiente a una solución de la ED se le llama *curva integral o trayectoria* de dicha ED.

3. **Integral** *de una ED*. Al proceso de hallar las soluciones de una ED se le llama "*integración*" de la ED. El problema fundamental de la integración de una ED consiste en hallar *todas las soluciones* y en estudiar sus *propiedades*. Por ello la comprobación de las condiciones suficientes para existencia y unicidad del problema con condición inicial, los métodos de integración, sus métodos numéricos, los métodos cualitativos y en particular la estabilidad de sus soluciones, así como las ecuaciones en diferencias cuando procedan, serán los tópicos básicos que se enfrentarán a través de los problemas planteados.

4. **Solución general**.

a. A la función que depende de la variable x y de una constante arbitraria (real arbitrario) C se le llama *solución general* de la ED tipo (ref: 1): $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.

b. Lo usual es que al integrar una ED tipo (ref: 1) se obtenga no una, sino toda una familia 1-parámetro de soluciones que se denomina *solución general* y que se denota por

$$y = \varphi(x,C) \qquad \#$$

donde C es el parámetro. Se intentará dar una definición más precisa:

Definition *A la función $y = \varphi(x,C)$ definida en cierta región R, donde varían x y C, y donde φ es continuamente diferenciable respecto de x, se le llama solución general de la ED (*ref: 1*): $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ en D $[f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$, si dicha función φ satisface las siguientes dos condiciones:*

a. *En $y = \varphi(x,C)$ la C es despejable en la región D (en D se cumple el Teorema de la función implícita), representable como: $C = \psi(x,y)$.*

b. *$y = \varphi(x,C)$ es solución de (*ref: 1*) para cada valor de C, definido por $C = \psi(x,y)$, para toda $(x,y) \in D$.*

5. Solución singular.

a. La solución en cada uno de cuyos puntos se infringe la unicidad del problema de Cauchy se llama *solución singular*.

b. Si la curva integral $y = \varphi(x)$ del problema de Cauchy, en cada uno de cuyos puntos se rompe la unicidad de la solución, o sea a través de cada punto (x_0,y_0) de dicha solución pasa no una única curva integral, entonces tal curva es una *solución singular*.

c. En el proceso de integración de una ED del tipo (ref: 1) las soluciones singulares son aquellas posibles soluciones que pueden perderse al transformar la ED en alguna de sus equivalentes, por ejemplo al separar variables dividiendo entre alguna función $\alpha(x,y)$, dichas soluciones singulares pueden estar contenidas entre las raíces de $\alpha(x,y) = 0$.

d. Las *posibles soluciones singulares* pueden ser obtenidas en la ED (ref: 1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

si su parte derecha i) si $f \in \mathbf{C}_D$ y ii) si $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbf{C}_D$, entonces una posible solución singular es aquella curva $y = \varphi(x)$ en cada uno de cuyos puntos la $\frac{\partial f}{\partial y}$ *no es continua* (o bien si $\overline{D}$ es cerrado, entonces la $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ no es acotada), o sea cuando

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\varphi(x)} = \infty \qquad \#$$

a tales curvas integrales $y = \varphi(x)$ se les llama *posibles soluciones singulares*.

e. Otra forma de obtener las *posibles soluciones singulares* también pueden ser buscadas con base en la forma analítica de la familia 1-parámetro de curvas integrales. Así, si la ED admite la familia 1-parámetro de curvas integrales expresada en su forma más general, o sea en su forma implícita

$$\Phi(x,y,C) = 0 \qquad \#$$

entonces se supondrá que la familia de curvas admite *envolvente*, esto es existe para dicha familia aquella curva, en cada uno de cuyos puntos es tangente al menos a una de las curvas integrales de la familia y tal que en ningún intervalo coincida con alguna de las curvas integrales de la familia.

Falta Fig??

Es evidente que la envolvente de la familia 1 parámetro de curvas Φ es también una solución de la ED (ref: 1) $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ¿Por qué?, porque está formada por puntos que pertenecen a soluciones (de la familia de curvas integrales de la ED), pero además es una solución singular ¿ Por qué?, pues porque por cada punto de la envolvente pasa más de una solución: la envolvente misma y la curva integral de la familia, rompiendose así la unicidad. Se impondrán algunas restricciones al caracter tanto de la familia de curvas integrales como a la envolvente de manera que se puedan tener teoremas que sean condiciones necesarias y condiciones suficientes para que una familia de curvas integrales resulte tener envolvente.

Primero supóngase que la familia (ref: 6) Φ de curvas integrales de la ED, sea tal que la función Φ esté definida y admita derivadas parciales con respecto a x,y y C en todos los $(x,y) \in D$ y todos los valores de $C \in [C_1,C_2]$ y tal que para cada valor de $C \in [C_1,C_2]$ la ecuación de Φ dada por (ref: 6) defina una cierta curva. En este caso se dice que la ecuación (ref: 6) define en D una *familia regular de curvas* que dependen del parámetro $C \in [C_1,C_2]$.

Segundo. Se dirá que $\gamma : [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una *curva suave*, si está dada por una parametrización suave, es deccir si γ está dada por

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [\alpha,\beta] \qquad \#$$

con $x,\, y \in \mathbf{C}^1_{[\alpha,\beta]}$, y con derivadas no 0 simultáneamente para ningún valor de t ($\dot{x}, \dot{y} \neq 0, \forall t \in [\alpha, \beta]$).

Suponiendo que la envolvente de la familia de curvas integrales es una curva suave (una curva dada por una parametrización suave) se tendrá el siguiente:

Theorem *(Condición necesaria para ser envolvente). Suponiendo que la curva suave γ es envolvente de la familia regular de curvas $\Phi(x,y,C) = 0$. Si para $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$ la curva suave γ es tangente a la curva integral específica $\Phi(x,y,C_0) = 0$ (de la familia $\Phi(x,y,C) = 0$, con $C_0 \in [C_1, C_2]$). Entonces los números x_0 ($= x(t_0)$), y_0($= y(t_0)$) y C_0 satisfacen el sistema*

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x,y,C) = 0 \end{cases}$$

#

Del Teorema anterior se sigue que la envolvente de una familia regular de curvas es una curva discriminante o una de sus partes, pero una curva discriminantre puede contener también puntos distintos de la envolvente.

Theorem *(Condición suficiente para ser envolvente). Si $\Phi(x,y,C) = 0$ es una familia regular de curvas, si γ es la curva parametrizada $\{x = x(t),\ y = y(t)$ y si $C = C(t)$, con $t \in [\alpha, \beta]\}$. Además x, y, C satisfacen el sistema (*ref: 8*)*

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x,y,C) = 0 \end{cases}$$

Si bajo estas condiciones: i) La curva γ es suave (está dada por una parametrización suave). ii) La función $C \in \mathbf{C}^1_{[\alpha,\beta]}$, con $\frac{d}{dt}C(t) \not\equiv 0$ en todo segmento de $[\alpha, \beta]$. iii) $\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y,C) + \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,C) \neq 0$ (sus parciales en x y y a la vez no son 0). Entonces la curva suave γ resulta ser la envolvente de la familia regular de curvas $\Phi(x,y,C) = 0$.

f. Dos *casos particulares* del Teorema sobre la Condición suficiente para ser envolvente.

i. Si se supone que el sistema (ref: 8) $\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x,y,C) = 0 \end{cases}$

define a y y C como funciones de x: $\begin{cases} y = y(x) \\ C = C(x) \end{cases}$, donde $y, C \in \mathbf{C}^1_{[a,b]}$ y $C'(x) \neq 0$, para las $x \in [a,b]$. Entonces $y = y(x)$ es una curva *discriminante*.

Tomando a x como parámetro se puede escribir a la curva discriminante como $\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases}$ y esta es la representación de una curva suave. En efecto, la curva γ es suave porque está dada por una parametrización suave, dado que $x, y(x)$ son funciones continuas junto con sus derivadas respecto del parámetro, en este caso x, además al menos una la $\frac{dx}{dx} = 1 \neq 0$, luego se cumple la 1a. condición del Teorema. La 2a. condición también se cumple, dado que C como función del parámetro x, por hipótesis se supuso continuamente diferenciable y $\frac{dC(x)}{dx} \neq 0$ en $[a,b]$. Finalmente la 3a. condición asegura que debe cumplirse: $\left|\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y(x),C(x))\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y(x),C(x))\right| \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$ y de cumplirse, entonces la curva $y = y(x)$ será envolvente de la familia de curvas $\Phi(x,y,C) = 0$.

ii. Si se supone que el sistema (ref: 8) $\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x,y,C) = 0 \end{cases}$ determina a x y y como funciones de C, entonces queda definida la curva discriminante:

$$\begin{cases} x = x(C) \\ y = y(C) \end{cases}$$

y si $x(C), y(C) \in \mathbf{C}^1_{[C_1,C_2]}$, para las $C \in [C_1,C_2]$ y si $\left|\frac{dx(C)}{dC}\right| + \left|\frac{dy(C)}{dC}\right| \neq 0$. Entonces $\begin{cases} x = x(C) \\ y = y(C) \end{cases}$ es una curva suave (1a. condición del Teorema). Por otro lado $\frac{d}{dt}C(t) = \frac{d}{dC}C = 1 \neq 0$ (2a. condición del Teorema). La 3a. condición del Teorema toma la forma: $\left|\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x(C),y(C),C)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x(C),y(C),C)\right| \neq 0$, $\forall C \in [C_1,C_2]$ y si se cumple, entonces se puede decir que la curva $\begin{cases} x = x(C) \\ y = y(C) \end{cases}$ será la envolvente de la familia de curvas $\Phi(x,y,C) = 0$.

g. *Noción de* **Integral** *de una ED*.

i. Por *integral* de una ED del tipo (ref: 1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

se entiende a cualquier función continuamente diferenciable $\psi(x,y)$($\not\equiv$ const), cuya diferencial total

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \qquad \#$$

se reduce idénticamente a 0 a lo largo de la ED (ref: 1) , o sea, al sustituir en la fórmula (ref: 9) de la diferencial total $d\psi$ la dy de la ED se reduce idénticamente a 0:

$$d\psi(x,y)|_{dy=f(x,y)dx} = \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}f(x,y)dx \equiv 0 \qquad \#$$

ii. Una *propiedad* de la integral ψ de la ED (ref: 1) consiste en que dicha integral ψ se reduce idénticamente a una constante, sobre cualquier solución particular $y = \varphi(x, C_0)$ de la ED (ref: 1), es decir:

$$\psi(x,y)|_{y=\varphi(x,C_0)} = \psi(x, \varphi(x, C_0)) \equiv const \qquad \#$$

iii. Si la parte derecha f de la ED del tipo (ref: 1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

satisface las condiciones del Teorema de existencia y unicidad de Picard en $\overline{D} = \left\{(x,y) : \begin{pmatrix} |x - x_0| \leq a \\ |y - y_0| \leq b \end{pmatrix}\right\}$ y además f es continuamente diferenciables en tal región respecto de y, entonces se puede señalar a una región con centro en el mismo (x_0, y_0) contenida en $\bar{D}$, tal que en esa vecindad exista la integral $\psi(x,y)$ de la ED.

iv. Para la existencia de la integral, definida en una vecindad $V(x_0)$ del punto inicial x_0, de la ED dada en la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \#$$

es suficiente con las restricciones: i) las funciones M y N sean continuamente diferenciables en tal vecindad $V(x_0) \subset \bar{D} = \left\{(x,y) : \begin{pmatrix} |x - x_0| \leq a \\ |y - y_0| \leq b \end{pmatrix}\right\}$ y ii) que ambas funciones M y N en (x_0, y_0) no sean 0 simultaneamente: $M^2(x_0,y_0) + N^2(x_0,y_0) \neq 0$.

v. Dos integrales cualesquiera ψ_1 y ψ_2 tanto de la ED tipo (ref: 1) como tipo (ref: 12), definidas en alguna región D, donde se satisfacen las condiciones de existencia y unicidad del Teorema de Picard, dependen entre sí. Esto significa que en D existe algún punto (x^*, y^*), en una vecindad del cual se cumple idénticamente respecto a x y a y la relación

$$\psi_2 = F(\psi_1)$$

donde F es una cierta función continuamente diferenciable.

•Para su demostración basta con verificar que ψ_2 admite derivadas parciales continuas en x y y:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = \frac{dF}{d\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}; \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = \frac{dF}{d\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}$$

porque se expresan a través de derivadas de funciones continuamente diferenciables, teniendose además que $\frac{\partial\psi_2}{\partial y} \neq 0$ en D. Finalmente como

$$d\psi_2 = \frac{\partial F}{\partial\psi_1}d\psi_1$$

y por ser ψ_1 integral de la ED se obtiene que $d\psi_1 \equiv 0$, pero entonces también $d\psi_2 \equiv 0$ por esta última ecuación, y por ende ψ_2 es integral de la ED (ref: 1) en D.

vi. Si ψ es integral de la ED (ref: 12) en D, entonces $\psi(x,y) = C$ es la *integral general de la ED* (ref: 12) en D y por ende también la expresión $F(\psi) = C$ es también integral general de la misma ED en D.

Teorema de existencia y unicidad (Punto Fijo).

En la base misma de todos los Teoremas de Existencia y Unicidad aparece un importante Principio Geométrico del Análisis, llamado *Principio del Punto Fijo*. Si se supone dado un conjunto M y una transformación T de dicho conjunto en sí mismo, es decir, aquella regla de correspondencia, con base en la cual a cada punto $x \in M$ se le asocia el punto $y = Tx$ también perteneciente al conjunto M.

La definición básica es la de *punto fijo de la transformación* T, o sea la de todo aquel $x^* \in M$, que es enviado por T a sí mismo, esto es que cumpla con:

$$Tx^* = x^* \qquad \#$$

Ejemplos previos:

1. La transformación T de un *círculo plano M en sí mismo*, mediante la *rotación en* 90° alrededor de su centro O. El punto fijo de T resulta ser el centro O del círculo.

2. Si la transformación T de un círculo M en sí mismo, consiste en *contraérlo* hacia su centro en la relación $2 : 1$ y luego con un movimiento de *translación* llevarlo hasta que el círculo contraido toque interior y tangencialmente al círculo original, entonces el punto de tangencia será punto fijo de la transformación T (aunque tal punto no resulta ser punto fijo para cada transformación por separado, constituyente de la transformación dada. Lo importante aquí no es la trayectoria de la translación, sino el resultado de la tangencia)

3. Si la transformación T manda la *circunferencia M en sí misma*, mediante una *rotación de* 90° alrededor de su centro O, entonces dicha transformación no tiene puntos fijos.

Se plantea la necesidad de contar con condiciones generales (suficientes) que aseguren la *existencia* de punto fijo (Banach). Se enunciará y demostrará ese mismo el más sencillo de los Teoremas de Existencia de Punto Fijo, asegurándose además la *Unicidad* del mismo, bajo ciertas restricciones tanto en el conjunto M, como en la transformación T. Para ello se impone la restricción de que el conjunto M sea *métrico* y *completo*, ya que si se agrega la suposición de que la transformación T sea de *contracción* entonces se tendrá el

Theorem *(de Punto fijo de Banach, o del mapeo de contracción)*
Una transformación de contracción T del espacio métrico completo M en sí mismo tiene un único punto fijo x^*, el cual puede ser obtenido por aproximaciones sucesivas.

Proof •*La idea de la demostración es mostrar que toda sucesión de M generada mediante T es de Cauchy y por ser M completo cualquiera de dichas sucesiones convergerá a un elemento de M. Se verifica que tal elemento de M es punto fijo de T además es único y puede ser obtenido por aproximaciones sucesivas .*

•*Así pues, se toma un elemento cualquiera $x_0 \in M$ y se genera la sucesión de elementos de M obtenidos sucesivamente mediante la aplicación de T :*

$$x_n = Tx_{n-1}, \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \#$$

*Por verificar que la sucesión generada por (*ref: 14*) $\{x_n \in M\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, o sea que se cumple con:*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) \quad d(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon \qquad \#$$

En efecto, por la desigualdad del triángulo de la función distancia:

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+m}) \leq$$
$$\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+m}) \leq \cdots$$

de donde

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \qquad \#$$

*si se estiman las distancias de la parte derecha de (*ref: 16*), para lo cual se deduce en forma recurrente una fórmula de estimación a través de la distancia base $d(x_0, x_1)$:*

$$d(x_1,x_2) = d(Tx_0,Tx_1) \le \alpha d(x_0,x_1)$$
$$d(x_2,x_3) = d(Tx_1,Tx_2) \le \alpha d(x_1,x_2) \le \alpha^2 d(x_0,x_1)$$
$$\vdots$$
$$d(x_{n-1},x_n) \le \alpha^{n-1} d(x_0,x_1),\ \text{(Hip. de Ind.)}$$
$$d(x_n,x_{n+1}) = d(Tx_{n-1},Tx_n) \le \alpha d(x_{n-1},x_n) \le \alpha^n d(x_0,x_1)$$

luego por el Teorema de Inducción $\forall n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n,x_{n+1}) \le \alpha^n d(x_0,x_1) \qquad \#$$

*y usando sucesivamente (*ref: 17*) en (*ref: 16*) se llega a*

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+m}) &\le \alpha^n d(x_0,x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0,x_1) + \cdots + \alpha^{n+m-1} d(x_0,x_1) \\ &= [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{n+m-1}] d(x_0,x_1) \\ &= \alpha^n (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1}) d(x_0,x_1) \\ &= \alpha^n \left(\frac{1-\alpha^m}{1-\alpha} \right) d(x_0,x_1) \le \alpha^n \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

de donde, para que se cumpla que $d(x_n,x_{n+m}) < \varepsilon$ *deberá cumplirse que*

$$\alpha^n \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) d(x_0,x_1) < \varepsilon$$

pero entonces

$$\alpha^n < \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{d(x_0,x_1)}$$
$$n \ln\alpha < \ln \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{d(x_0,x_1)},\ (0 \le \alpha < 1 \Rightarrow \ln\alpha < 0)\ \therefore$$
$$n > \ln \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{d(x_0,x_1)\ln\alpha} \ge \left[\ln \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{d(x_0,x_1)\ln\alpha} \right] \stackrel{not}{=} N$$

Es así que

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists N = \left[\ln \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{d(x_0,x_1)\ln\alpha} \right] \right)(\forall n > N)\ d(x_n,x_{n+m}) < \varepsilon \qquad \#$$

*es decir toda sucesión (*ref: 14*)* $x_n = Tx_{n-1} \in M$ *es de Cauchy (convergente).*

•*Como toda sucesión (*ref: 14*)* $\{x_n = Tx_{n-1} \in M\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente y* M *es completo, entonces converge a un elemento de* M

$$\lim x_n \stackrel{not}{=} x^* \in M \qquad \#$$

Ahora se puede verificar que el punto límite x^* *del espacio* M *obtenido es un punto fijo de* T*. En efecto,*

$$Tx^* = T\lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^* \qquad \#$$

se puede observar que todo depende de que se cumpla la segunda igualdad, pero ésta significa que T *sea una transformación continua. Pero* *en efecto,* $lim_{n\to\infty} x_n = x^* \Rightarrow lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx^*$*, ya que*

$$d(Tx_n, Tx^*) \leq \alpha d(x_n, x^*) < \alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon \qquad \#$$

•*Finalmente el punto fijo* x^* *es único. Efectivamente, basta con suponer que existe un segundo punto fijo* x^{**}*, porque entonces*

$$d(Tx^*, Tx^{**}) = 1d(x^*, x^{**})$$

que contradice la hipótesis de que la transformación T *es de contracción, puesto que* $\alpha < 1$ *y en esta última igualdad se obtuvo* $\alpha = 1$*.*

•*Con base en (*ref: 19*)* $x^* = lim_{n\to\infty} x_n$ *y esto lo que significa es que cualquiera que sea la sucesión de elementos* x_n *con tal de que esté generada mediante* T *con* $x_{n+1} = Tx_n$*, y con un* x_0 *inicial dado; y dicha sucesión es lo que se reconoce como las aproximaciones sucesivas del punto fijo* x^**.*

•*Con esto se concluye la demostración completa del Teorema de Punto Fijo.*

Ahora apliquemos este Teorema de Punto Fijo a la demostración de varios tipos de ecuaciones, en particular del Teorema de Existencia y Unicidad de Picard.

Aplicaciones del Teorema de Punto Fijo.

Existencia y unicidad de la ecuación $x = f(x)$.

Theorem *Si* f *es una función de variable real con valores reales (*$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*), que es diferenciable para todos los valores* $x \in \mathbb{R}$ *, entonces para la ecuación*

$$x = f(x) \qquad \#$$

existe y es única la solución de tal ecuación, si $|f'(x)| \leq \alpha < 1$ *y tal solución puede ser hallada por aproximaciones suesivas.*

Proof *En efecto, si se toma al operador* $Tx \stackrel{def}{=} f(x)$ *y el espacio métrico completo* $M \stackrel{def}{=} \mathbb{R}$ *, con la métrica usual* $d(x,y) = |y - x|$ *, entonces para (*ref: 22*) se cumple el Teorema de Punto Fijo.*

Lo que se afirma es cierto, ya que T *por ser* f *manda reales en reales y además es de contracción, ya que* $d(Tx, Ty) = |Ty - Tx| = |f(y) - f(x)| \underset{x<\xi<y}{=} |f'(\xi)||y - x| \stackrel{!!!}{\leq} \alpha|y - x|$ *, siempre que* $|f'(\xi)| \leq \alpha < 1$*, pero esa es precisamente la restricción que se impuso a* f*.*

Teorema de existencia y unicidad del Problema de Cauchy

Theorem *de existencia y unicidad de Picard (versión no simplificada, usando el Teorema de Punto Fijo de Banach). Si la parte derecha* f *de la ED del Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \#$$

está definida en el rectángulo cerrado $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b;$ $a,b \in \mathbb{R}^+\}$ *y satisface las condiciones siguientes: i)* f *continua y ii)*f *es Lipschitz, es decir, en símbolos:*

$$\begin{cases} 1.\ f \in C_{\overline{D}}\ \therefore\ |f(x,y)| \leq M \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x,y) \in \overline{D} \\ 2.\ |f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y - z|,\ L \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall y,z \in \overline{D} \end{cases} \qquad \#$$

Entonces dicho Problema de Cauchy tiene una única solución $y = \varphi(x)$*, definida y continuamente diferenciable en la vecindad* $V_h(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < h\right\}$*, con* h *susceptible de ser determinada,según el método de demostración, por ejemplo por el método de punto fijo de Banach, queda definida por* $h < \frac{a}{L}$*, y dicha solución no se sale del rectángulo* $\overline{D}$ *con* $|x - x_0| < h$ *(esto es, cumple con:* $|\varphi(x) - y_0| \leq b$*, cuando* $|x - x_0| < h$*).*

Proof *Como el Problema de Cauchy* $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ *no se presta para definir adecuadamente el operador* T *, se considera su equivalente obtenido de la ED formalmente integrando de* x_0 *a* x *y así se obtiene la ecuación integral:* $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx$ *. Aquí la equivalencia entre el Problema de Cauchy y la ecuación integral es en el sentido de que la solución de una implica ser solución de la otra y viceversa, lo cual es casi inmediato: la solución de la ED convierte a ésta en una identidad y esta identidad al integrarla de de* x_0 *a* x *se obtiene la ecuación integral, pero en forma de identidad lo que comprueba que en efecto es solución de la ecuación integral. E inversamente si se tiene una solución de la ecuación integral convierte a ésta en una identidad y ésta al derivarla se convierte en la ED, pero en forma de identidad, lo que comprueba que en efecto también es solución de la ED y adicionalmente que satisface la condición inicial cosa que se comprueba de inmediato de la misma ecuación integral de partida, ya que en* $x = x_0$ *se obtiene* $y(x_0) = y_0$ *dado que la integral de* x_0 *a* x_0 *es evidentemente* 0*.*

La equivalencia entre las 2 ecuaciones permite definir al operador T *mediante la ecuación integral como:*

$$Ty \overset{def}{=} y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx$$

y este mapeo

i) manda a los elementos de $M \overset{def}{\equiv} \mathbf{C}_{\overline{V}_h(x_0)}$ *(con* $\overline{V}_h(x_0)$ *una cierta vecindad cerrada con centro en* x_0 *y de radio* h*) en elementos del mismo* $\mathbf{C}_{\overline{V}_h(x_0)}$*. En efecto, dada una* $y(x) \in \mathbf{C}_{\overline{V}_h(x_0)}$ *y como por hipótesis* $f \in \mathbf{C}_D$ *y por tanto interpretando a* $f(x,y(x))$ *como una composición de continuas que es continua y su* $\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx$ *con límite superior variable será continua, que a su vez sumada con la constate* y_0*, que también es continua se obtiene que* $y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx$ *es continua, esto es* $Ty \in \mathbf{C}_{\overline{V}_h(x_0)}$*.*

ii) El mapeo propuesto es de contracción. En efecto,

$$\forall y,z \in \mathbf{C}_{\overline{V}_h(x_0)} : d(Ty,Tz) = \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} |Tz - Ty| =$$

$$= \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,z(x))dx - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx \right|$$

$$= \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,z(x))dx - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx \right|$$

$$= \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} f(x,z(x))dx - \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx \right|$$

$$= \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} [f(x,z(x))dx - f(x,y(x))]dx \right|$$

$$\leq \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} \int_{x_0}^{x} |f(x,z(x))dx - f(x,y(x))|dx$$

$$\leq \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} |f(x,z(x))dx - f(x,y(x))|dx \right|$$

$$\leq L \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} |z(x) - y(x)|dx \right|$$

$$\leq L \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} |z(x) - y(x)| \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} dx \right|$$

$$\leq Ld(y(x),z(x)) \max_{t\in\overline{V}_h(x_0)} |x - x_0| = Lhd(y,z)$$

y de aquí ya se puede escoger la h *de manera que el mapeo* T *sea de contracción, es decir* h *debe ser tal que* $0 \leq Lh < \alpha < 1 \Rightarrow h < \frac{\alpha}{L} \Rightarrow \boxed{h < \frac{1}{L}}$.

Se puede concluir que por el Teorema de Banach existe un único punto fijo y^* *del mapeo* $T : Ty^* = y^*$, *o sea una única solución de* $Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$ *luego una única solución del Problema de Cauchy* $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. *Más aun el mismo Teorema da posibilidades a poder obtener dicha solución* $y^*(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$, *donde las* $y_n(x)$ *son las aproximaciones sucesivas que deben cumplir con* $y_n(x) = Ty_{n-1}(x)$ $= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx$.

Teorema de Existencia y Unicidad de una Ecuación Integral.

Theorem *La ecuación integral dada por*

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s, y(s))ds \qquad \#$$

para ciertas funciones continuas conocidas f *y* K *donde en particular el nucleo* K *es cierta función que satisface la condición de Lipschitz respecto de su tercera variable la función incógnita* y *y para valores suficientemente grandes de* $|\lambda|$, *se asegura que existe una única solución de dicha ecuación integral que puede ser obtenida por el método de aproximaciones sucesivas.*

Proof *Considérese el operador* T *como*

$$Ty = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s, y(s))ds \qquad \#$$

definido en el espacio M *tomado como el espacio métrico y completo de convergencia uniforme (de las funciones continuas)* $\boldsymbol{C}_{[a,b]}$.

Es comprobable de inmediato que el operador T *manda funciones continuas en continuas, ya que si* $y \in \boldsymbol{C}_{[a,b]}$, *y como* K *es continua, entonces puede ser interpretada como una composición de continuas que seguirá siendo continua y por ende la* $\int_a^b K(x, s.y(s))ds$ *será una función continua de* x, *la cual multiplicada por la constante* λ *seguirá siendo continua y al sumarle la función continua* f *terminará por ser continua, es decir* $Ty \in \boldsymbol{C}_{[a,b]}$.

La segunda condición que debe cumplir el mapeo T es que sea de contracción, pero en efecto,

$$d(Ty,Tz) = \max_{s\in[a,b]}\left| f(x) + \lambda\int_a^b K(x,s.y(s))ds - f(x) - \lambda\int_a^b K(x,s.z(s))ds \right|$$

$$d(Ty,Tz) = \max_{s\in[a,b]}\left| \lambda\int_a^b K(x,s,y(s))ds - \lambda\int_a^b K(x,s.z(s))ds \right|$$

$$= \max_{s\in[a,b]}\left| \lambda\int_a^b [K(x,s,y(s)) - K(x,s.z(s))]ds \right| \leq$$

$$\leq \max_{s\in[a,b]}|\lambda|\int_a^b |K(x,s,y(s)) - K(x,s.z(s))|ds \leq$$

$$\leq \max_{s\in[a,b]}|\lambda|\left|\int_a^b |K(x,s,y(s)) - K(x,s.z(s))|ds\right| \leq$$

$$\leq \max_{s\in[a,b]}|\lambda|\left|\int_a^b L|y(s) - z(s)|ds\right| \leq$$

$$\leq |\lambda|L \max_{s\in[a,b]}|y(s) - z(s)| \max_{s\in[a,b]}\left|\int_a^b ds\right| \leq$$

$$\leq |\lambda|L \bullet d(y(s),z(s)) \bullet |b-a| \leq$$

$$\leq |\lambda|L|b-a|d(y(s),z(s))$$

donde finalmente se puede obligar a que el coeficiente obtenido sea

$$|\lambda|L|b-a| \leq \alpha < 1 \Rightarrow$$

$$|\lambda| < \frac{1}{L|b-a|}$$

Problemas sobre Funciones de Lipschitz.

Se estudiarán algunos ejemplos de la condición que asegura la unicidad de la solución, o sea, de la *condición de Lipschitz*. De nuevo se dice que f es una *función de Lipschitz* en cualquier subconjunto de los reales del tipo $[a,b]$ si existe un real positivo L, tal que para cualesquier par de valores x , y pertenecientes al segmento $[a,b]$ se cumpla la desigualdad (*condición de Lipschitz*)

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y-x| \qquad \#$$

y al menor de los números L, que entra en la condición de Lipschitz (ref: 27) se le llama la *constante de Lipschitz*. En símbolos:

(f es *Lipschitz* en $[a,b]$) $\Leftrightarrow (\exists L \in \mathbb{R}^+)(\forall x,y \in [a,b])\ |f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$

Obsérvese: i) Que la condición de Lipschitz puede interpretarse como una *estimación del incremento de la función a través del incremento de la variable*: $\Delta f(x) \leq L\Delta x$. ii) Al variar $[a,b]$, en general varía L.

1. La función

$$f(x) = kx \qquad \#$$

es Lipshitz en $\mathbb{R}$ y en consecuencia en cualquier intervalo finito.

En efecto, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$$|f(y) - f(x)| = |ky - kx| = |k||y - x|$$

de donde se deduce que $L = |k|$.

2. La función

$$f(x) = x^2 \qquad \#$$

¿Es Lipshitz en $\mathbb{R}$?. $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$$|f(y) - f(x)| = |y^2 - x^2| = |y + x||y - x| \qquad \#$$

por consiguiente en todo $(-\infty,+\infty)$ el factor $|y + x|$ se puede hacer más grande que cualquier cota dada, luego no será posible definir la constante L de Lipschitz y por ende la función (ref: 29) no es Lipschitz en todo $\mathbb{R}$.

Pero, en un segmento finito. ¿Será, por ejemplo Lipshitz en $[-a,a]$?. Ahora $\forall x,y \in [-a,a]$ se tendrá la misma expresión (ref: 30), pero el factor $|y + x|$ se puede acotar, ya que $|y + x|\big|_{[-a,a]} \leq |a + a| \leq |a| + |a| = a + a = 2a$, esto es, ahora

$$|y + x| \leq 2a$$

luego

$$|y^2 - x^2| \leq 2a|y - x| \qquad \#$$

por lo que la constante de Lipschitz será $L = 2a$, con la particularidad de que al crecer la longitud del intervalo (al crecer a) crecerá la constante L de Lipschitz, teniendose en el límite que si el intervalo es infinito, esto es, en $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ la constante de Lipschitz deja de existir, lo cual quedó comprobado arriba.

3. La función $\sqrt{x}$ es continua en cualquier intervalo del tipo $[0,a]$, sin embargo

$$f(x) = \sqrt{x} \in C_{[0,a]} \qquad \#$$

¿Será Lipshitz en $[0,a]$?

$\forall x,y \in [0,a]$ se tendrá:

$$|f(y)-f(x)| = \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)}\right|$$
$$= \left|\frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}\right| |y-x|$$

pero entonces el factor $\left|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ tendría que ser acotado en cualquier intervalo en x, de la forma $[0,a]$, y cualquier a, en particular para valores muy pequeños de a, habrá valores de x, para los cuales el valor del factor $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ sería muy grande, pero entonces este factor no es acotable para toda a, y por tanto no se satisface la condición de Lipschitz, ya que en ningún intervalo del tipo $[0,a]$ la función $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ será acotada superiormente. Luego la constante de Lipschitz L no existiría y por consiguiente $\sqrt{x}$ no es una función Lipschitz.

•Sin embargo, si existen proposiciones, donde *continuidad más alguna otra propiedad de la función sí implique ser Lipschitz*. Por ejemplo:

4. Si f no sólo es continua en $[a,b]$, sino además admite tener derivada acotada: $\left|\frac{df}{dx}\right| \leq K$, entonces la función f es Lipschitz. En símbolos:

$$(f \in \mathbf{C}_{[a,b]})\left(\forall x \in [a,b] : \left|\frac{df(x)}{dx}\right| \leq K \in \mathbb{R}^+\right) \Rightarrow f \in Lip[a,b] \qquad \#$$

con $L = K$.

En efecto, del Teorema del Valor Medio:

$$(\forall x,y \in |y-x|)(\exists c : x < c < y)\ f(y)-f(x) = \frac{df(c)}{dx}(y-x) \qquad \#$$

pero por $\left|\frac{df(x)}{dx}\right| \leq K$, se tendrá $|f(y)-f(x)| = \left|\frac{df(c)}{dx}\right||y-x| \leq K|y-x|$, luego $L = K$ y por ende f es Lipschitz en $[a,b]$.

5. Pero si $(f \in \mathbf{C}_{[a,b]})$ $\left(\text{y al menos para un } x_0 : \frac{df(x_0)}{dx} \nleq K\right) \Rightarrow f \notin Lip[a,b]$.

De nuevo el ejemplo típico es:

$$(f(x) = \sqrt{x} \in \mathbf{C}_{[0,a]})\left(\frac{df}{dx}(x)\ |_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ |_{x=0} \nleq K\right) \qquad \#$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} \notin Lip[0,a]$$

No obstante todo lo anterior existen funciones continuas para las que la derivada no sólo no es acotada, sino incluso no existe en algún punto y sin embargo la función es Lipschitz:

6. Por ejemplo:

$$(f(x) = |x| \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}})(\nexists f'(0)) \text{ y sin embargo } |x| \in Lip\mathbb{R} \qquad \#$$

En efecto, $\forall x,y \in \mathbb{R}$:

$$|f(y) - f(x)| = ||y| - |x|| \leq |y - x| \leq 1|y - x|$$

y esto implica que $L = 1$ y por tanto que la función $|x|$ es Lipschitz en $\mathbb{R}$.

7. Para *funciones de varias variables*:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ w = f(\vec{x}) \end{cases} \qquad \#$$

Se dice que f es una *función de Lipschitz*, en el paralelepípedo:

$$\bar{D} = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) \ : \ |y_k - x_k| \leq a_k, \ k = \overline{1,n} \right\} \qquad \#$$

si existe un número positivo L, tal que para 2 vectores cualesquiera $\vec{x}$ y $\vec{y}$, que estén en el paralelepípedo (ref: 38) cumplen con la desigualdad

$$\left| f(\vec{y}) - f(\vec{x}) \right| \leq L \| \vec{y} - \vec{x} \| \qquad \#$$

(*condición de Lipschitz* en dicho paralelepípedo), donde por $\| \vec{y} - \vec{x} \|$ se sobreentiende la norma

$$\| \vec{y} - \vec{x} \| = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| \qquad \#$$

En símbolos:

$$\begin{cases} \left(f \in Lip \ \bar{D} \right) \overset{def}{\equiv} (\exists L \in \mathbb{R}^+) \left(\forall \vec{x}, \vec{y} \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^{\ltimes} \right) \\ \left| f(\vec{y}) - f(\vec{x}) \right| \leq L \| \vec{y} - \vec{x} \| \end{cases} \qquad \#$$

La condición de Lipschitz (ref: 39) con seguridad se cumple si las derivadas parciales de f respecto de todas sus variables existen y son acotadas:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \leq K, \quad k = \overline{1,n} \qquad \#$$

(condición suficiente para que se cumpla la condición de Lipschitz) teniéndose que $L = K$ (¿por qué?). Conforme a lo que interesa: el Teorema de Existencia y Unicidad de Picard lo usual es que se cumpla la condición de Lipschitz para todas sus variables excepto respecto a una de ellas, por lo que tiene sentido la siguiente definición:

Se dice que la función f definida en el paralelepípedo (ref: 38) $\bar{D}$ satisface la condición de Lipschitz respecto de todas sus variables, excepto digamos de la primera, si existe $L > 0$, tal que ahora no se cumple (ref: 39), sino

$$\left| f(\vec{y}) - f(\vec{x}) \right| \leq L \sum_{k=2}^{n} |y_k - x_k| \qquad \#$$

donde debe observarse que la sumatoria empieza en $k = 2$. Y ahora esta condición de Lipschitz se cumple si f es continua en $\bar{D}$ y sus $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ($k = \overline{2,n}$) existen y son acotadas: $\left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \leq K$, ($k = \overline{2,n}$) y $L = K$.

8. Es la función

$$z = y^2\sqrt{x} \qquad \#$$

Lipschitz en

$$\begin{cases} 0 \le x \le a \\ -b \le y \le b \end{cases} \qquad \#$$

respecto de la variable y. Para ello hay que verificar si en la región cerrada $\bar{D}$ se cumple o no la condición de Lipschitz respecto de la variable y:

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x},\tilde{y}) - f(x,y)| &= \left|\tilde{y}^2\sqrt{\tilde{x}} - y^2\sqrt{x}\right| \le |\sqrt{a}|\left|\tilde{y}^2 - y^2\right| = \\ &= \sqrt{a}\,(|(\tilde{y}-y)(\tilde{y}+y)|) = \sqrt{a}\,|(\tilde{y}+y)||(\tilde{y}-y)| \\ &\le \sqrt{a}\,(|\tilde{y}| + |y|)|(\tilde{y}-y)| \le \sqrt{a}\,2b|(\tilde{y}-y)| \\ &\le 2b\sqrt{a}\,|\tilde{y}-y| \end{aligned}$$

luego $L = 2b\sqrt{a}$ y por ende la función (ref: 44) es Lipschitz respecto de la variable y, en el rectángulo (ref: 45).

9. La función lineal respecto de $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, con coeficientes $\vec{p}(x) = (p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x))$ continuos en $[a,b]$:

$$u = \sum_{k=1}^{n} p_k(x) y_k \qquad \#$$

será Lipschitz en

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ |y_k| < +\infty,\ k = \overline{1,n} \end{cases} \qquad \#$$

Sí lo es. En efecto:

$$\frac{\partial u}{\partial y_k} = p_k(x),\ k = \overline{1,n} \qquad \#$$

pero los coeficientes p_k por hipótesis son funciones continuas en el cerrado $[a,b]$, luego serán acotadas: $|p_k(x)| \le K,\ k = \overline{1,n}$, por consiguiente de (ref: 48) :

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y_k}\right| = |p_k(x)| \le K,\ k = \overline{1,n} \qquad \#$$

pero entonces se cumple la condición suficiente para que sea cierta la condición de Lipschitz para (ref: 46) en (ref: 47), con $L = K$.

Ahora sí se puede regresar a la demostración del Teorema de Picard, cuyos pasos básicos son reducir el Problema original del Problema de Cauchy (ref: 23) a una ecuación integral, la cual se resuelve por el método de aproximaciones sucesivas (método de Picard), se comprueba que dicha solución es única (la unicidad puede demostrarse antes de la demostración de la existencia).

Problemas sobre Existencia y Unicidad

1. **Problema 1**. Hallar la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \#$$

por aproximaciones sucesivas.

Solution *Aquí* $f(x,y) = y$ *cumple con las condiciones suficientes del Teorema de Picard (restringido, Apéndice 6):*

i) $f(x,y) = y \in C_{\mathbb{R}^2}$, ii) Existe y es acotada su $\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial y} y = 1$. Luego existe y es única la solución del Problema de Cauchy y puede obtenerse por aproximaciones sucesivas.

O las condiciones suficientes del Teorema de Picard (no restringido, Apéndice 6):

i) $f(x,y) = y \in C_{\mathbb{R}^2}$, ii) $f(x,y) = y$ es Lipschitz respecto de la segunda variable:

$|f(x,y) - f(x,z)| = |y - z|$, luego la constante de Lipschitz es $L = 1$ y por ende $f(x,y) = y$ es una función Lipschitz en todo $\mathbb{R}$. El problema de Cauchy es equivalente a la ecuación integral $y = 1 + \int_{x_0}^{x} y(t)dt \overset{def}{=} Ty$. Luego existe y es única la solución del Problema de Cauchy y puede obtenerse por aproximaciones sucesivas:

$$y_0(x) \equiv 1$$

$$y_1(x) = Ty_0(x) = 1 + \int_0^x y_0(t)dt = 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x$$

$$y_2(x) = Ty_1(x) = 1 + \int_0^x y_1(t)dt = 1 + \int_0^x (1+t)dt$$

$$= 1 + \left[\frac{(1+t)^2}{2} \right]_0^x = 1 + \left[\frac{(1+x)^2}{2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right] = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_3(x) = Ty_2(x) = 1 + \int_0^x y_2(t)dt = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} \right) dt$$

$$= 1 + \left[t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{2!3} \right]_0^x = 1 + \left[x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!3} \right]$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\therefore\ y_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \text{ (Hip. de Ind.)}$$

$$\therefore\ y_n(x) = Ty_{n-1}(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t)dt$$

$$= 1 + \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}dt = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x \frac{t^k}{k!}dt =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \right]_0^x = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

de la misma forma que la hipótesis de inducción, sólo que en lugar de $n-1$ aparece n. Luego por el Teorema de inducción:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},\ (\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \#$$

El límite de $y_n(x)$ *converge uniformemente* en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ a la función exponencial, esto es

$$y^*(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \overset{\forall x\in[a,b]}{\rightrightarrows} e^x \qquad \#$$

que en efecto satisface trivialmente la ED $y' = y$, y además también satisface la condición inicial $y(0) = 1$.

2. **Problema 2**. ¿Existe y es única la solución de

$$\begin{cases} y' = \alpha y,\ (\alpha = const) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \#$$

en todo $\mathbb{R}^2$?

Solution *Dado que: i) $f(x,y) = \alpha y \in C_{\mathbb{R}^2}$ (la solución existe), ii) $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{d}{dy}\alpha y = \alpha \in C_{\mathbb{R}^2}$ (asegura la unicidad), entonces si existe y es única la solución del problema de Cauchy en todo $\mathbb{R}^2$.*

3. **Problema 3**. ¿Existe y es única la solución de

$$y' = \sqrt[3]{y} \qquad \#$$

en $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$?

   a. Como $f(x,y) = \sqrt[3]{y} \in C_{\mathbb{R}^2}$, luego por el Teorema de Peano existe solución en todo $\mathbb{R}^2$. Respecto de la unicidad en la versión restringida del Teorema de Picard: la parcial respecto de la función

incógnita y existe $\frac{\partial}{\partial y}f = \frac{d}{dy}\sqrt[3]{y} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$, pero en $\overline{D}$ no es acotada:
$\left|\frac{\partial}{\partial y}f\right|\Big|_{(x,0)} = \left|\frac{d}{dy}\sqrt[3]{y}\right|\Big|_{(x,0)} = \left|\frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}\right|\Bigg|_{(x,0)} = \infty$, luego no se cumple con la condición suficiente para que sea Lipschitz.

b. La función $f(x,y) = \sqrt[3]{y}$ en $\overline{D}$ no es Lipschitz y para convencernos sólo se necesita un par adecuado de puntos para los cuales la condición de Lipschitz: $|f(x,z) - f(x,y)| \leq L|z-y|$ no se cumpla, esto es que: $\frac{|f(x,z)-f(x,y)|}{|z-y|}$ sea mayor que cualquier constante dada de antemano. En efecto, basta considerar los puntos: $(x,0)$ y (x,z_1) con $-1 \leq x \leq 1$, y $z_1 > 0$, luego

$$\frac{|f(x,z_1) - f(x,0)|}{|z_1 - 0|} = \frac{\sqrt[3]{z_1}}{z_1} = z_1^{-\frac{2}{3}} \qquad \#$$

y ahora escogiendo a $z_1 > 0$ suficientemente pequeño es claro que $z_1^{-\frac{2}{3}}$ puede hacerse más grande que cualquier cota K dada de antemano, o sea, que la condición de Lipschitz no se cumple para ninguna K.

c. En forma directa:

$$\begin{aligned}|f(x,z) - f(x,y)| &= \left|\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{y}\right| \\ &= \left|\left(\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{y}\right)\frac{\left((\sqrt[3]{z})^2 + \sqrt[3]{z}\sqrt[3]{y} + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right)}{\left((\sqrt[3]{z})^2 + \sqrt[3]{z}\sqrt[3]{y} + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right)}\right| \\ &= \left|\frac{z-y}{(\sqrt[3]{z})^2 + \sqrt[3]{z}\sqrt[3]{y} + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2}\right|\end{aligned}$$

luego

$$|f(x,z) - f(x,y)| = \frac{1}{\left|(\sqrt[3]{z})^2 + \sqrt[3]{z}\sqrt[3]{y} + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right|}|z-y| \qquad \#$$

si para todas las parejas (x,y) y (x,z) el factor $\frac{1}{\left|(\sqrt[3]{z})^2 + \sqrt[3]{z}\sqrt[3]{y} + \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right|}$ fuera constante, entonces la menor de esas constantes sería la constante de Lipschitz L. Pero en $\overline{D} = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$ se antoja lo contrario, a saber: que existan al menos 2 puntos, donde tal factor no sea acotado. Helos aquí: $(x,0)$ y $(x,0)$. Luego la función $f(x,y) = \sqrt[3]{y}$ en $\overline{D} = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$ no es Lipschitz.

4. **Problema 4**. ¿Existe y es única la solución de

$$y' = x^2 + y^2 \qquad \#$$

en $\overline{D} = \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$?

Solución.

a. Esta ED no es integrable en forma finita, ya que no es integrable mediante funciones elementales, ni en cuadraturas.

b. El método cualitativo más elemental para el análisis de esta ED y delinear sus curvas integrales, es el *método de las isoclinas*. Para ello se obtienen las isoclinas, es decir, las curvas sobre las que la pendiente de las rectas tangentes a las soluciones son iguales a una constante, o sea que se les genera de : $y' = \tan\alpha = k =$ const., esto es

$$y' = \tan\alpha = f(x,y) = x^2 + y^2 = k \qquad \#$$

•Si $k = 0$, entonces la isoclina se reduce: $0^2 + 0^2 = 0$ a un punto el $(0,0)$ y en él la pendiente de la recta tangente será: $\tan\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$.

Falta Fig. ??

•Si $k = 1$, entonces la isoclina es: $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia unitaria con centro en el punto el $(0,0)$ y en élla la pendiente de la recta tangente será: $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$.

•Si $k > 0$ $(k = 4)$, entonces la isoclina es: $\left\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = \left(\sqrt{k}\right)^2\right\}$ la circunferencia de radio $\sqrt{k}\,(= 2)$, con centro en el punto $(0,0)$ y en élla la pendiente de la recta tangente será: $\tan\alpha = \sqrt{k}\,(2) \Rightarrow \alpha = (\frac{3\pi}{4})$. No existe la línea de extremos, dado que las soluciones son crecientes Fig. ??. $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\; y' > 0$.

•La línea de puntos de inflexión queda dada por la ecuación:

$$y'' = 0$$

$$2t + 2yy' = 0$$

de donde

$$2t + 2y(x^2 + y^2) = 0 \qquad \#$$

Es así que con una maya suficientemente grande de isoclinas, complementada por las líneas de extremos y líneas de puntos de inflexión se pueden delinear las curvas integrales.

Falta Fig.??.

c. Se estimará el dominio de existencia y unicidad usando el Método de Picard (Apéndice 6) para el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \#$$

en $\bar{D} = \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$.

Aquí evidentemente: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = 2$, $b = 2$, M: $|f(x,y)| = |x^2 + y^2| \leq |x^2| + |y^2| \leq 4 + 4 = 8 \;\therefore\; M = 8$,
$h = \min(a, \frac{b}{M}) = \min\left(2, \frac{2}{8}\right) = \frac{1}{4}$, luego por el Teorema de Picard se puede asegurar la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy para los valores de t en la vecindad cerrada $\bar{V}_h\ (0) = \{t : |t| \leq \frac{1}{4}\}$. Y las aproximaciones sucesivas serían:

$$y_0(x) \equiv y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x (t^2 + y_0^2(t))dt = y_0 + \int_0^x t^2 dt + \int_0^x y_0^2 dt = y_0 + y_0^2 x + \frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x (t^2 + y_1^2(t))dt = y_0 + \int_0^x t^2 dt + \int_0^x \left(y_0 + \frac{t^3}{3} + y_0^2 t\right)^2 dt =$$

$$= y_0 + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \left(y_0^2 + \frac{t^6}{3^2} + y_0^4 t^2 + 2y_0 \frac{t^3}{3} + 2y_0^3 t + 2y_0^2 \frac{t^4}{3}\right)dt =$$

$$= y_0 + \frac{x^3}{3} + y_0^2 x + \frac{x^7}{3^2 7} + y_0^4 \frac{x^3}{3} + 2y_0 \frac{x^4}{3 \cdot 4} + y_0^3 \frac{x^2}{2} + 2y_0^2 \frac{x^5}{3 \cdot 5}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_0^x (t^2 + y_2^2(t))dt =$$

$$= y_0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(y_0 + \frac{x^3}{3} + y_0^2 x + \frac{x^7}{3^2 7} + \frac{y_0^4 x^3}{3} + \frac{2y_0 x^4}{3 \cdot 4} + \frac{y_0^3 x^2}{2} + \frac{2y_0^2 x^5}{3 \cdot 5}\right)^2\right]dt, \ldots$$

que como se ve no parece que se vaya a formar regularidad reconocible alguna.

5. **Problema 5.** Hallar la solución del Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sin(xy) \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \#$$

Solution *Esta ED no es de ninguno de los tipos de ED estudiados. Es una ED que no se integra en forma finita, esto es ni a través de funciones elementales ni en cuadraturas. Eso si es una ED no lineal y debido a que satisface la condición inicial de pasar por $y_0 = 0$ (en $x_0 = 0$) y si satisface las condiciones del Teorema de existencia y unicidad, por ejemplo, en la variante de Picard, entonces la solución que pase por $(0,0)$ será la solución única. Por esto es que todo se reduce a buscar una solución que satisfaga la condición inicial, pero esa solución es fácil de buscar dado que $y(x) \equiv 0$ es solución de la ED. En efecto, si en ella se sustituye se verifica que $0' \equiv \sin(x \cdot 0)$, esto es $0 \equiv 0$. Entonces sólo resta verificar que en efecto se satisfacen las condiciones suficientes del Teorema de existencia y unicidad de Picard:*

$$\begin{cases} i)(\forall D = \{(x,y) : |x| < a, |y| < b\} \subset \mathbb{R}^2) \\ f(x,y) = sin(xy) \in C_{D\subset\mathbb{R}^2} \\ ii)(\forall D = \{(x,y) : |x| < a, |y| < b\} \subset \mathbb{R}^2) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x\,cos(xy) \in C_D \end{cases} \qquad \#$$

o si se restrige a un rectángulo cerrado $\overline{D}$

$$\begin{cases} i)(\forall\overline{D} = \{(x,y) : |x| \leq a, |y| \leq b\} \subset \mathbb{R}^2) \\ |f(x,y)| = |\sin(xy)| \leq |xy| \leq ab \\ ii)(\forall\overline{D} = \{(x,y) : |x| \leq a, |y| \leq b\} \subset \mathbb{R}^2) \\ \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = |x\cos(xy)| \leq |x| \leq a \end{cases} \qquad \#$$

luego existe y es única la solución $y(x) \equiv 0$ (eje x) del problema de Cauchy planteado, incluso en todo $\mathbb{R}^2$.

6. Hallar la solución del Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\frac{2}{x^3} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \#$$

Solution *Dado que la ED es del tipo:* $y' = f(x)$, *pero con* $f(0) = -\infty$, *(véase el Apéndice 8), entonces tiene sentido analizar la ED recíproca*

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^3}{2} \qquad \#$$

para la cual según el Teorema de Picard existe y es única la solución en $\bar{D} = \{(x,y) : |x| \leq a,\ |y| \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$, *ya que*

$$\begin{cases} i)(\forall\overline{D} \subset \mathbb{R}^2)\ f(x,y) = -\frac{x^3}{2} \in C_{\bar{D}\subset\mathbb{R}^2} \\ ii)(\forall\overline{D} \subset \mathbb{R}^2)\ \frac{\partial\left(-\frac{x^3}{2}\right)}{\partial x} = -\frac{3x^2}{2} \in C_{\bar{D}\subset\mathbb{R}^2} \end{cases} \qquad \#$$

luego existe y es única la solución del problema de Cauchy. Y tal solución es trivialmente $x \equiv 0$ *(el eje* y*), puesto que satisface a la ED :* $\frac{d0}{dy} = -\frac{0^3}{2}$, *esto es* $0 \equiv 0$ *y satisface evidentemente la condición inicial* $x(1) = 0$.

7. i) Determinar la región de existencia y unicidad de la ED

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \qquad \#$$

ii) Determinar las posibles soluciones singulares.

iii) Hallar y verificar, según su definición, la solución general.

a. Del Teorema de Picard: a) $f(x,y) = 2\sqrt{y} \in C_{\mathbb{R}\times(y\geq 0)}$, ya que $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, b) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(2\sqrt{y}\right)}{\partial y} = 2\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \in C_{\mathbb{R}\times(y>0)}$. Luego el

dominio de existencia y unicidad será:
$[\mathbb{R}\times(y\geq 0)]\cap[\mathbb{R}\times(y>0)]=\mathbb{R}\times(y>0)$, esto es, el semiplano superior estríctamente positivo.

b. Cualquier conjunto que incluya el $y=0$ (o cualquier subconjunto finito de él)

i. En particular $\mathbb{R}\times(y\geq 0)$ incluirá a la posible solución singular, ya que i) $f(x,y)=2\sqrt{y}\in C_{\mathbb{R}\times(y\geq 0)}$, y ii) existe su $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(2\sqrt{y})}{\partial y}=2\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{y}}$, y la posible solución singular es aquella curva $y=\varphi(x)$ que satisfaga $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}|_{y=\varphi(x)}=\infty$, esto es $\frac{1}{\sqrt{y}}=\infty$, la cual se cumple sólo si $y\equiv 0$. Entonces $y\equiv 0$ (el eje x) es una posible solución singular.

ii. Lo de posible en este caso lo podemos quitar acudiendo a la geometría de las soluciones particulares, ya que en este caso la solución general de la ED (véase el Prolema 3N,2a) resulta ser la familia 1- parámetro de semiparábolas derechas, transladadas en $-C$ a lo largo del eje horizontal

$$y=(x+C)^2,\ \forall x>-C \qquad \#$$

Sin embargo, qué pasa si $y=0$, pues resulta que $y(x)\equiv 0$ (el eje x) es también solución de la ED, ya que la satisface: $0'\equiv 2\sqrt{0}\Rightarrow 0\equiv 0$, pero $y(x)\equiv 0$ significa incluir la $x=-C$ $\therefore$

$$y=(x+C)^2,\ \forall x\geq -C \qquad \#$$

pero, esto significa que en la región $y\geq 0$ estamos agregando la solución $y(x)\equiv 0$ (el eje x). A esta solución $y(x)\equiv 0$ llegan ahora las correspondientes soluciones de las semiparábolas derechas y por ende en cada punto de la forma $(x_0,0)$, en particular por el punto $(0,0)$ pasan 2 soluciones: $\begin{cases} y(x)\equiv 0 \\ y=x^2\end{cases}$. Así se ha mostrado que $y(x)\equiv 0$ rompe su unicidad en $x=0$. Esto se generaliza como arriba se insinuó a cada punto de la forma $(x_0,0)$ sobre la solución $y(x)\equiv 0$. En efecto se toma un punto cualquiera de la forma $(x_0,0)$ sobre la solución $y(x)\equiv 0$ y al sustituir las coordenadas del punto $(x_0,0)$ como inicial sobre la fórmula de la solución general que incluye a $y=0$ (ref: 69) $y=(x+C)^2$, $\forall x\geq -C$, se tendrá:

$$y(x_0)=(x_0+C)^2\Rightarrow 0=(x_0+C)^2\Rightarrow x_0=-C$$

y de nuevo sustituyendo el valor obtenido de C en la fórmula de la solución general que incluye a $y=0$ (ref: 69), se tendrá: $y(x)=(x-x_0)^2$, $\forall x\geq x_0$, la cual tiene por peculiaridad que $\lim_{x \to x_0} y(x) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 = 0$, y esto significa geométricamente que la solución en efecto no sólo se acerca tanto como se quiera al punto inicial $(x_0, 0)$, sino que llega a él. Por consiguiente, dado que $(x_0, 0)$ es un punto arbitrario sobre el eje x, entonces queda demostrado que la solución $y(x) \equiv 0$ es una solución singular, ya que por cualquiera de dichos puntos pasan 2 soluciones:

$$\begin{cases} \text{la trivial: } y(x) \equiv 0 \\ \text{la semiparábola: } y(x) = (x - x_0)^2, \forall x \geq x_0 \end{cases}.$$

iii. Obsérvese adicionalmente que existen soluciones que no son ni particulares ni singulares, a saber: aquellas que son combinación de solución particular con solución singular, por ejemplo:

$$y(x) = \begin{cases} 0, \ si\ a \leq x \leq x_0 \ (-\infty < a < x_0) \\ (x - x_0)^2, \ si\ x_0 \leq x \leq b \ (x_0 < b < +\infty) \end{cases}.$$

iv. Y ahora con el fin de determinar la solución singular se puede intentar hallar la solución singular como la envolvente de la familia de curvas integrales (ref: 69) $y = (x + C)^2, \ (\forall x \geq -C)$. En este caso el sistema (ref: 8)

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x, y, C) = 0 \end{cases} \text{ se reduce a } \begin{cases} y = (x + C)^2 \\ 0 = 2(x + C) \end{cases} \text{, luego}$$

sustituyendo la 2a. ecuación en la 1a. la curva discriminante, esto es la envolvente será: $y(x) = 0$.

v. Finalmente la manera práctica más sencilla consiste en que al integrar la ED (ref: 67) tratando de separar las variables (Problema 3N, 2a), se divide ambas partes de la ED por $2\sqrt{y}$, por lo cual se supuso que obligadamente $y \neq 0$, pero resulta que $y = 0$ es solución de la ED (ref: 67) y por tanto se estaría perdiendo la solución $y(x) \equiv 0$, dado que no está incluida en la solución general allí mismo obtenida (Problema 3N, 2a) $y = (x + C)^2$, para ningún C real o $\pm\infty$. Por lo cual es una posible solución singular, verificable que realmente lo es con los métodos anteriores descritos.

c. Se verificará mediante la definición que la solución general, de (ref: 67) obtenida en el Problema 3N, es (ref: 68): $y = (x + C)^2, \ \forall x > -C$ en el semiplano estríctamente superior $D = \mathbb{R} \times \{y > 0\}$. Pero en efecto, esta fórmula es la solución general, dado que satisface las 2 condiciones de la definición de solución general:

i. De $y = (x+C)^2$ es despejable en el semiplano $D = \mathbb{R} \times \{y > 0\}$ como $C = \sqrt{y} - x$

ii. La fórmula $y = (x+C)^2,\ \forall x > -C$ es solución de la ED (ref: 68), pero para cuáles valores de C, pues dado que

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{d(x+C)^2}{dx} = 2\sqrt{(x+C)^2} \Rightarrow 2(x+C) = 2|x+C|$$

de donde se tendrá

$$2(x+C) \equiv 2(x+C)$$

sólo si $x + C > 0$, es decir para aquellos valores de C, que cumplen con $x > -C$

(en detalle véase en el Problema 3N), pero para las C generadas por $C = \sqrt{y} - x$, con $(x,y) \in D$ y sustituidas en la ED como arriba

$$\frac{d(x+C)^2}{dx} = 2\sqrt{(x+C)^2} \Rightarrow$$

$$2\left[x + \left(\sqrt{y} - x\right)\right] = 2\sqrt{\left[x + \left(\sqrt{y} - x\right)\right]^2} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{\left(\sqrt{y}\right)^2}$$

por lo que finalmente

$$\sqrt{y} \equiv \sqrt{|y|}$$

sólo si $y > 0$ (o sea, sólo en D), lo cual corresponde a la familia de semiparábolas derechas que no alcanzan a tocar el eje x.

8. Hallar una *integral* de la ED (ref: 67)

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

Solution *Si se toma en cuenta que la solución general de esta ED (*ref: 67*) es (Problema 3N)* $y = (x+C)^2,\ \forall x > -C$ *y como es despejable respecto de* C *en el semiplano* $D = \mathbb{R} \times \{y > 0\}$*, a saber:* $C = \sqrt{y} - x$*, la proposición natural es proponer como integral de la ED (*ref: 67*) a*

$$\psi(x,y) = \sqrt{y} - x \qquad \#$$

En efecto por definición (véase el Apéndice 6, e) su diferencial total a lo largo de la ED

$$d\psi(x,y)\big|_{dy=f(x,y)dx} = \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}f(x,y)dx$$

$$d\psi(x,y)\Big|_{dy=2\sqrt{y}\,dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}2\sqrt{y}\,dx$$

$$d\psi(x,y)\Big|_{dy=2\sqrt{y}\,dx} = \frac{\partial\left(\sqrt{y}-x\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\sqrt{y}-x\right)}{\partial y}2\sqrt{y}\,dx$$

$$d\psi(x,y)\Big|_{dy=2\sqrt{y}\,dx} = (-1)dx + \frac{1}{2\sqrt{y}}2\sqrt{y}\,dx \equiv 0$$

luego en efecto la ψ propuesta en (ref: 70) es integral de la ED .

9. Hallar una *integral general* en forma algebraica de la ED

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \#$$

Solución. Por ser una ED de variables separables en forma directa

$$dy = \frac{dy}{dx}dx \Rightarrow dy = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + C$$

de donde

$$\arcsin y - \arcsin x = C \qquad \#$$

por consiguiente, a proposito de (ref: 72) una integral de la ED (ref: 71) será

$$\psi_1(x,y) = \arcsin y - \arcsin x \qquad \#$$

Para intentar expresarla algebraicamente se puede usar el Teorema que afirma que si ψ_1 es una integral de la ED, entonces $F(\psi_1)$ también lo será. Por ende si se toma a F como la función $\sin$, que es continuamente diferenciable, entonces

$$\begin{aligned}\psi &= \Phi(\psi_1) = \sin(\psi_1) = \sin(\arcsin y - \arcsin x) = \\ &= \sin(\arcsin y)\cos(\arcsin x) - \cos(\arcsin y)\sin(\arcsin x) = \\ &= y\cos(\arcsin x) - \cos(\arcsin y)x = \\ &= y\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} - x\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}\end{aligned}$$

luego

$$\psi(x,y) = y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} \qquad \#$$

y en definitiva la integral general en forma algebraica será: $\psi(x,y) = C$, es decir

$$y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2} = C \qquad \#$$

Teorema sobre la diferenciabilidad de las soluciones de una ED.

Theorem *Si f la ED $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ admite derivadas continuas hasta de orden $k(> 0)$ respecto de x y y , entonces cualquier solución de dicha ED tiene derivadas continuas hasta de orden $k+1$ respecto de la variable x [2].*

Proof *(Idea de la misma). De la definición de solución $y = \varphi(x)$ de una ED la φ debe ser tal que cumpla con:*

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x,\varphi(x)),\ \text{cuando } (x,\varphi(x)) \in D,\ \text{con } x \in I \qquad \#$$

*Puesto que φ satisface la identidad, entonces en todo I la solución φ tiene derivada y consecuentemente es una función continua. Además si f es continua respecto de x y y, entonces el segundo término de (*ref: 76*), por lo que de esa misma ecuación se obtiene que $\frac{d\varphi}{dx}$ es también continua.*

*Por facilidad considérese el caso $k = 1$, entonces f en (*ref: 76*) tendrá derivada continua respecto de x, luego su primer término $\frac{d\varphi}{dx}$ también tiene derivada continua respecto de x, pero eso significa que φ tiene segunda derivada continua.*

*Si de nuevo se deriva implícitamente la ecuación (*ref: 76*) se tendrá:*

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \equiv \frac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \qquad \#$$

de nuevo aplicando el razonamiento anterior a esta identidad, si ahora se supone $k = 2$, se obtendrá que φ tendrá tercera derivada continua y así sucesivamente, de manera que por inducción puede concluirse la veracidad del Teorema.

Teorema sobre la dependencia continua respecto de las condiciones iniciales y parámetros de la solución de una ED.

Theorem *Tómese ahora a f como $\begin{cases} f : \widehat{D} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f = f(x,y,\lambda) \end{cases}$, con $\widehat{D}$ un dominio acotado y λ un parámetro. Considérese el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y,\lambda) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \#$$

con f tal que

$$\begin{cases} i) f(x,y,\lambda) \in C_{\widehat{D}\times\mathcal{I}} \\ ii) f \in Lip(y) \end{cases}$$

*donde $\mathcal{I}$ es un intervalo cerrado, donde varía λ. Entonces la solución de (*ref: fa132b*), dada por*

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, \lambda)$$

es una función continua de sus componentes (x, x_0, y_0, λ).

Proof *(Idea de la misma vía el Teorema de Aproximación) De acuerdo con la fórmula de aproximación*

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq \delta e^{y_0|x-x_0|} + \varepsilon|x - x_0|e^{y_1|x-x_0|} \qquad \#$$

*Una variación de y_0 corresponde en (*ref: fa132c*) al factor δ; una variación de x_0 también equivale a una variación de y_0, pero multiplicada por la pendiente inicial.*

Una variación de x equivale a la variación de y_0, pero multiplicada por la pendiente final.

Obsérvese que las pendientes a considerar están uniformemente acotadas en $\widehat{D}$.

Finalmente una variación del parámetro λ puede tenerse en cuenta considerando que al variar en "poco" a λ la función f varía en menos que ε en todo $\widehat{D}$, pues una función continua en un cerrado es uniformemente continua en un cerrado.

*La solución correspondiente al nuevo valor de λ es una solución ε aproximada de la ED original. Es así que se puede mostrar la veracidad de (*ref: fa132c*) con los correspondientes valores de ε y δ.*

Métodos de Integración.

La ED $y' = f(x)$

La ED

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad \#$$

con la función f, definida y continua, digamos en cierto intervalo (a,b), entonces para cada condición inicial adecuada existe una única solución, ya que $f \in \mathbf{C}_{(a,b)}$ y tal función es Lipschitz respecto a y (lo cual se cumple trivialmente, dado que $|f(x,y) - f(x,z)| = |f(x) - f(x)| = 0|y - z| = 0$ con $L = 0$ y del $\leq$ se cumple el $=$), o bien su parcial respecto a la función incógnita y: $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \in \mathbf{C}_{(a,b)}$, luego para una condición inicial $y(x_0) = y_0$, con $x_0 \in (a,b)$ existirá una única solución y a partir de (véase el Apéndice 2)

$$dy = y'dx$$

se tendrá debido a (ref: 80)

$$dy = f(x)dx \qquad \#$$

1. La **solución general** queda dada integrando (ref: 81):

$$y(x) = \int f(x)dx + C \qquad \#$$

en la región : $D = \{(x,y) : x \in (a,b),\ y \in \mathbb{R}\} = (a,b) \times \mathbb{R}$, donde el 1er.sumando de (ref: 82) es una primitiva de f y C es un real arbitrario, de manera que toda esta región D queda completamente llena de curvas integrales sin intersecciones de las soluciones de la ED (ref: 80) y por la forma de la solución general (ref: 82) todas esas soluciones pueden obtenerse de alguna de éllas, digamos de la función primitiva de f : $\int f(x)dx$ y el resto de las soluciones mediante translaciones paralelas con diferentes valores de C.

???FIG en el plano (x,y) con una franja vertical $(a,b) \times \mathbb{R}$ llena de curvas integrales transladadas.???

2. El **Problema de Cauchy.** La misma fórmula de la solución general (ref: 82) posibilita determinar la única solución del problema de Cauchy formado por la ED original (ref: 80) y una condición inicial $y(x_0) = y_0$, donde $x_0 \in (a,b)$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \#$$

escogiendo el valor concreto que le correspone tomar al real arbitrario C. Y para determinar tal valor basta con sustituir los valores iniciales (x_0,y_0) en lugar de (x,y) en la fórmula de la solución general (ref: 82) y resolviendo la ecuación obtenida con respecto a C se determina $C = C_0$ y así obtenemos la solución única del problema de Cauchy

$$y(x) = \int f(x)dx + C_0 \qquad \#$$

Esta fórmula por ser solución del problema de Cauchy planteado resulta ser una función definida y continuamente diferenciable en todo el intervalo (a,b), esto es, en todo el intervalo de continuidad de la parte derecha f de la ED original.

3. La **solución general y la solución particular en la forma de Cauchy.** Observese que si en lugar de la primitiva de f en la fórmula de la solución general (ref: 82) tomamos la integral definida con límite superior variable para que siga siendo primitiva de f obtendremos que la solución general de la ED (ref: 80) será:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C \qquad \#$$

donde x_0 es cierto valor fijo de (a,b) y en particular sustituyendo aquí en (ref: 85) la abscisa inicial $x = x_0$ se obtiene $C = y_0$, ya que la integral se convierte en la $\int_{x_0}^{x_0}$ que es 0, de manera que la *solución particular* del problema de Cauchy planteado es:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0 \qquad \#$$

Finalmente si se considera a y_0 un valor arbitrario, entonces esta última expresión también puede entenderse como la *solución general* de la ED original, en la región $(a,b) \times \mathbb{R}$, pero escrita *en la forma de Cauchy*.

Así interpretada la solución general, todas las curvas integrales intersectan a la recta vertical $x = x_0$ en los puntos de la forma (x_0, y_0) de manera que y_0 en la solución general escrita en la forma de Cauchy (ref: 86) representa la ordenada del correspondiente punto de interseccion. Haciendo variar continuamente el valor de esta ordenada y_0 obtenemos toda la familia de curvas integrales. De la representación de Cauchy de la solución general (ref: 86) es evidente que la solución del problema de Cauchy es una función continuamente diferenciable y por tanto continua de la variable x y de los valores iniciales x_0 y y_0.

???FIG en el plano (x,y) con la franja $(a,b) \times \mathbb{R}$, la grafica de una de las curvas integrales, un $x_0 \in (a,b)$ y el y_0 señalados.???

4. **Soluciones Singulares**. Tal solución sólo puede ser posible si i) $f \in C_{(a,b)\setminus\{\xi\}}$, ii) f resulta ser discontinua en dicho $x = \xi \in (a,b)$, y iii) $\lim_{x\to\xi} f(x) = \infty$ ($f(\xi) = \infty$), luego la fórmula (ref: 82) proporciona la solución general de la ED en cada una de las regiones:

$$D_1 = (a,\xi) \times \mathbb{R}, \quad D_2 = (\xi,b) \times \mathbb{R} \qquad \#$$

???FIG ?2? en el plano (x,y) , en la franja $(a,b) \times \mathbb{R}$, con la recta vertical $x = \xi \in (a,b)$ y las curvas integrales insidentes a la recta $x = \xi$ (solución singular) , o bien en la FIG ?2a?. asintóticas a la recta $x = \xi$ (solución particular).???

Pero en $x = \xi =$ const. por otro lado es fácil darse cuenta que la recta $x = \xi$ es evidentemente solución de la ED recíproca a la original:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)} \qquad \#$$

ya que se obtiene en la parte izquierda la derivada de una constante, esto es, 0 y en la parte derecha 1 dividido por algo que tiende a ∞ cuando $x \to \xi$, o sea también 0. Esto significa que a la solución general de la ED original (ref: 82) hay que adjuntar la solución $x = \xi$ de la ED recíproca, esto es, la verdadera solución general será:

$$\begin{cases} y(x) = \int f(x)dx + C \\ x = \xi \end{cases} \qquad \#$$

Pero esta última solución la $x = \xi$ puede resultar ser una *solución particular* más, como se puede apreciar en la figura en que las curvas integrales tienden asintóticamente a la gráfica de la solución $x = \xi$ (asíntota de la familia un parámetro de soluciones dadas por su solución general). En este caso se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(\xi,y)}\left[y(x) - \int f(x)dx\right] = +\infty\ (-\infty) \qquad \#$$

Aunque por otro lado puede que la solución $x = \xi$ resulte ser una *solución singular*, como se puede apreciar en la Fig.?? en que las curvas integrales intersectan a la gráfica de la solución $x = \xi$, perdiendose así la unicidad en cada punto de la solución $x = \xi$. En este caso se puede observar que $x = \xi$ resulta ser la envolvente de la familia de curvas integrales que constituyen la solución general y en cada punto de élla se rompe la unicidad. En este caso la solución singular se obtiene de la solución general, pero con $C = C(y)$, esto es de (ref: 89) se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(\xi,y)}\left[y(x) - \int f(x)dx\right] = C(y) \qquad \#$$

5. *Isoclinas*. Las curvas en cada uno de cuyos puntos el campo direccional tiene la misma inclinación (la misma pendiente), se obtienen de $y'(x) = f(x) = k =$ const. En este caso serán las curvas

$$x = x_0 = \text{const} \qquad \#$$

que son rectas verticales, ya que cumplen con que a lo largo de éllas: $m_T = y'(x_0) = f(x_0) = k =$ const. Fig??.

6. La ecuación $y' = k$ (const) queda incluida como un caso particular de la ecuación analizada : $y' = f(x)$.

ED de la forma $y' = f(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \qquad \#$$

1. Esta ED se caracteriza porque su parte derecha $f(x,y) = f(y) \in \mathbf{C}_{(c,d)}$, con $(\forall y \in (c,d))\ (\forall x \in \mathbb{R})\ f(y) \neq 0$. Directamente su solución general en $D = \mathbb{R} \times (c,d)$ será

$$dy = \frac{dy}{dx}dx \Rightarrow dy = f(y)dx \Rightarrow \frac{dy}{f(y)} = dx\ (f(y) \neq 0) \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int dx$$

de donde

$$x(y) = \int \frac{dy}{f(y)} + C \qquad \#$$

2. Esta ED puede reducirse al análisis de una ED de la forma $y' = f(x)$ (véase el Apéndice 8). En efecto, la ED recíproca de (ref: 93)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)},\ f(y) \neq 0 \qquad \#$$

donde aquí la y es la variable y la x es la función incógnita, por lo cual su parte derecha $\frac{1}{f(y)}$ sólo depende de la nueva variable y, no depende de la nueva función incógnita x. Y aquí cabe todo el análisis hecho en el Apéndice 8. En particular para esta ED (ref: 95) en $D = \mathbb{R} \times (c,d)$ su solución general será:

$$dx = \frac{dx}{dy}dy \Rightarrow dx = \frac{1}{f(y)}dy \Rightarrow \int dx = \int \frac{1}{f(y)}dy$$

de donde (ref: 94)

$$x(y) = \int \frac{dy}{f(y)} + C$$

Sólo podrá admitir soluciones singulares si en $y = \eta$(const)$\in (c,d)$: $f(\eta) = 0$, ya que en tal caso $y = \eta$(const) es solución de la ED original (ref: 93), en efecto: $\frac{d\eta}{dx} = f(\eta) \Rightarrow 0 \equiv 0$ y es una posible solución singular. En efecto,

a. la solución $y = \eta$(const) resulta o bien *envolvente* de la familia de soluciones de (ref: 93), Fig.??, con $C = C(x)$, o sea

$$\lim_{(x,y)\to(x,\eta)}\left[x(y) - \int \frac{dy}{f(y)}\right] = C(x) \qquad \#$$

b. o bien *asíntota* de la familia de la familia de curvas integrales, que forman la solución general , Fig.??, es decir

$$\lim_{(x,y)\to(x,\eta)}\left[x(y) - \int \frac{dy}{f(y)}\right] = \pm\infty \qquad \#$$

3. *Isoclinas*: en los puntos de la recta $y = b \in (c,d)$ el campo direccional es constante y por ende son las curvas isoclinas (ya que en $y = b : y' = f(b) = k = \tan\alpha \therefore \alpha = \arctan k$ y esta es la inclinación constante del campo). Fig.??

4. Si en $y = \eta^* \in (c,d)$ la función $f(\eta^*) = \infty$ permaneciendo en el resto de los puntos $(c,d)\backslash\{\eta^*\}$: $\begin{cases} f(y) \in \mathbf{C}_{(c,d)\backslash\{\eta^*\}} \\ f(y)|_{(c,d)\backslash\{\eta^*\}} \neq 0 \end{cases}$, entonces la ED recíproca (ref: 95) tiene parte derecha continua en todo (c,d) : $\frac{1}{f(y)} \in \mathbf{C}_{(c,d)}$ y por tanto en cada punto de la franja $\mathbb{R} \times (c,d)$ pasa una única curva integral, pero las curvas integrales en los puntos de la recta $y = \eta^*$ tienen rectas tangentes paralelas al eje vertical (lo cual se sigue de la ED original (ref: 93), dado que $f(\eta^*) = \infty$).

Falta Fig.??.

ED de variables separadas y separables)

Para ED de **variables separadas** son de la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{X(x)}{Y(y)} \qquad \#$$

con $X(x)$, $Y(y) \in C_{\overline{D}}$, o como buscamos soluciones $y(x)$ que por definición deben ser funciones continuamente diferenciables, luego para éllas deben existir sus derivadas y por tanto su derivada puede tratarse como cociente de diferenciales (**Apéndice 3**), luego: $dy = \frac{dy}{dx}dx \Rightarrow dy = -\frac{X(x)}{Y(y)}dx \Rightarrow Y(y)dy = -X(x)dx \Rightarrow$

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0 \qquad \#$$

pero podemos representarlas como

$$d\left[\int_{x_0}^{x} X(x)dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)dy\right] = 0 \qquad \#$$

ya que las integrales con límite superior variable (cualquiera que sea $(x_0,y_0) \in \overline{D}$) son funciónes de su límite superior variable, entonces la diferencial de cada una de dichas integrales será de nuevo será la derivada de la integral por la diferencial de la variable: $dy = \frac{dy}{dx}dx$, pero en cada caso la derivada de la integral con límite superior variable, por el Teorema Fundamental del Cálculo, es el integrando evaluado en dicho límite superior variable, luego la diferencial de cada integral será su integrando por la diferencial de la variable correspondiente, pero esa es la expresión anterior, con lo cual hemos mostrado la equivalencia de las 2 últimas expresiones.

Pero la última expresión nos dice que si la diferencial de una función de 2 variables es igual a 0, entonces dicha función será igual a una constante

$$\int_{x_0}^{x} X(x)dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)dy = C \qquad \#$$

esta expresión representaría la integral general de la ecuación original.

La solución al Problema de Cauchy

$$\begin{cases} X(x)dx + Y(y)dy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \#$$

donde al menos una de las funciones X o Y en x_0 se supone diferente de 0, esto es:

$$X^2(x_0) + Y^2(y_0) \neq 0 \qquad \#$$

(para fijar ideas se supone que $Y(x_0,y_0) \neq 0$)) puede obtenerse en forma implícita mediante la fórmula de la integral general, sustituyendole $x = x_0$, $y = y_0$, o sea determinando el valor de C, que en forma inmediata puede establecerse como $C = 0$, es decir la solución al Problema de Cauchy queda dada por

$$\int_{x_0}^{x} X(x)dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)dy = 0 \qquad \#$$

Esta fórmula define a la solución buscada del problema de Cauchy, pero en forma implícita. Sin embargo a partir de élla se puede determinar en forma explícita la solución $y = y(x)$, con $y(x_0) = y_0$.

En efecto, denotando la suma de las integrales del 1er. término de la última igualdad por F, tendremos

$$F(x,y) \overset{def}{=} \int_{x_0}^{x} X(x)dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)dy \qquad \#$$

y nuestra ecuación se transforma en

$$F(x,y) = 0 \qquad \#$$

Comprobemos, bajo las hipótesis de continuidad de X y Y, que la función F satisface las condiciones del *Teorema de Existencia de la Función Implícita* y por ende se garantice la existencia de la función $y = y(x)$ definida por la anterior igualdad.

En efecto, recordemos que son 3 condiciones a las que obliga tal Teorema

i) Existe otra región (en nuestro caso otro rectángulo cerrado) $\widehat{D} \subset \overline{D}$, con

$$\widehat{D}=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0|\leq A \leq a, |y-y_0| \leq B \leq b\} \qquad \#$$

en donde tanto F como $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ son *continuas* en $\widehat{D}$.

Para que esto se cumpla, en nuestro caso, basta garantizar que A y B sean suficientemente pequeños como para que respectivamente sean menores que a y b, los cuales a su vez definen a la región original $\overline{D}$, y también sean tales que $X, Y \in C_{\widehat{D}}$ lo que se logra en forma inmediata, luego de lo cual F, por como está definida, será también continua en $\widehat{D}$ y finalmente $\frac{\partial F}{\partial x} = X$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = Y$ que tambien por la hipótesis original serán continuas en $\widehat{D}$.

ii) $F(x_0,y_0) = 0$ (que se cumple tal cual, por como está definida la función F)

iii) $\frac{\partial F}{\partial x}$ ó $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ en (x_0,y_0) (arriba para fijar ideas se supuso a $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = Y(y_0)$ $\neq 0$)

Entonces, por haberse verificado las condiciones del *Teorema de Existencia de la Función Implícita*, concluimos por este mismo teorema que existirá una función $y = y(x)$ definida y continuamente diferenciable en una cierta vecindad $V_h(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0| \leq h, \quad h < A\}$, tal que satisface a $F(x,y) = 0$, esto es

$$F(x,y(x)) \equiv 0, \quad \forall x \in V_h(x_0) \qquad \#$$

además la condición inicial por hipótesis se cumple $y(x_0) = y_0$.

El que la función $y = y(x)$ sea solución de la ecuación implícita: $F(x,y) = 0$ implica, como ya se dijo, que: $F(x,y(x)) \equiv 0$ y que su parcial respecto a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy(x)}{dx} \equiv 0$$
$$X(x) + Y(y)\frac{dy(x)}{dx} \equiv 0$$
$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv -\frac{X(x)}{Y(y)}$$

y esto significa que la función $y = y(x)$ satisface también la ecuación original.

•Las ecuaciones de **variables separables** son de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{X(x)Y(y)}{X_1(x)Y_1(y)} \\ X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0 \end{cases} \qquad \#$$

y como puede inmediatamente notarse pueden ser reducidas a las de *variables separadas*.

En efecto, multiplicando por el factor

$$\mu(x,y) = \frac{1}{Y(y)X_1(x)} \qquad \#$$

nos la reduce a

$$\frac{1}{Y(y)X_1(x)}X(x)Y(y)dx + \frac{1}{Y(y)X_1(x)}X_1(x)Y_1(y)dy = 0$$
$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy = 0 \qquad \#$$

que en efecto es el caso analizado de ecuación con *variables separadas*.

ED homogénea

1. A la ED de la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \qquad \#$$

con M y N funciones *homogéneas* del mismo grado $m \in \mathbb{R}$ de homogeneidad y M, $N \in C_D$, con D cualquier región de $\mathbb{R}^2$. Recuérdese que una función, digamos M se dice que es homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$, si cualquiera que sea el factor t por el que se multiplique sus variables x y y se cumple que dicho factor t sale fuera de la función a la potencia m. En símbolos:

(M función homogénea de grado $m \in \mathbb{R}$)$\Leftrightarrow$ $(\forall t \in \mathbb{R})M(tx,ty) = t^m M(x,y)$

Por ejemplo, $M(x,y) = x^2 + y^2$ es una función homogénea de grado 2, ya que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $M(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 M(x,y)$.

2. La ED Homogénea tradicionalmente se trata como

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \#$$

con M y $N \in C_D$, y M , N funciones homogéneas del mismo grado m de homogeneidad.

a. *Reducción de la ED*. Primero observemos que para cada $x \neq 0$ fija podemos tomar una t fija $t = \frac{1}{x}$ y para cualquier función homogénea f de grado m tendremos que

$$f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^m f(x,y) \Rightarrow f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} f(x,y)$$

luego

$$f(x,y) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}\right) \qquad \#$$

que aplicada a la ED obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{x^m M(1, \frac{y}{x})}{x^m N(1, \frac{y}{x})} = -\frac{M(1, \frac{y}{x})}{N(1, \frac{y}{x})} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

De hecho hemos concluido con lo anterior la demostración de un Teorema que diría que toda ED Homogénea es reducible a una de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \#$$

b. *Solución general.* Esta última ED es reducible a una de *variables separables*, Apéndice 10, ya que en forma natural nos queda indicado el cambio de variable a realizarse, a saber:

$$\frac{y}{x} = z \qquad \#$$

donde z es la nueva función incógnita, es decir, $y(x) = xz(x) \Rightarrow y'(x) = xz'(x) + z(x)$, que al ser sustituida en la ED a la que se redujo el problema (ref: 115)

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow xz'(x) + z(x) = \varphi(z) \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\varphi(z) - z}{x} \Rightarrow dz = \frac{dz}{dx}dx \Rightarrow dz = \frac{\varphi(z) - z}{x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \int \frac{dx}{x}$$

de donde

$$\ln|x| = \Psi(z) + \ln C_1 \qquad \#$$

con

$$\Psi(z) \stackrel{def}{=} \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} \qquad \#$$

luego

$$|x| = e^{\Psi(z) + \ln C_1} \Rightarrow x = \pm C_1 e^{\Psi(z)} \Rightarrow x = Ce^{\Psi(z)}$$

o bien la *solución general* toma la forma

$$x = Ce^{\Psi(\frac{y}{x})} \qquad \#$$

con Ψ dada por (ref: 118)

c. *Solución singular.* Las soluciones singulares aparecen dentro de las posibles soluciones perdidas al separar las variables, a saber: i) los semiejes verticales dados por $x = 0$ ($y \neq 0$). ii) de las posibles soluciones $z = k$ (const.) (es decir $\frac{y}{x} = k$, o sea las semirectas de pendiente k: $y = kx$) que satisfagan: $\varphi(z) - z = 0$.

3. Algunas ED no homogéneas pueden ser reducidas a ED homogéneas, mediante cambios de variable “adecuados”. La más simple de dichas ED es

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \qquad \#$$

donde c y c_1 simultáneamente no pueden ser 0, ya que en caso contrario $c = 0 = c_1$ será

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{a_1 + b_1\frac{y}{x}}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

que ya es homogénea.

a. Entonces se supondrá que $c^2 + c_1^2 \neq 0$ y $\det\begin{pmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \neq 0$.

Esto último significa que las rectas $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$ admiten solución no trivial. Si se supone que $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ es dicha solución no trivial. Fig?c?, entonces una translación paralela para ubicar el nuevo origen de coordenadas en el punto de intersección (α, β) de ambas rectas, mediante:

$$\begin{cases} \xi = x - \alpha \\ \eta = y - \beta \end{cases} \qquad \#$$

de manera que en $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ se tiene el nuevo origen O' de coordenadas $\begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = 0 \end{cases}$.

Si ahora se sustituyen las variables x, y por las nuevas variables ξ, η, es decir, sustituyendo (ref: 121) $\begin{cases} x = \xi + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{cases}$ en la ED (ref: 120), donde ξ y η son las nuevas variables y α y β constantes fijas, de manera que $\begin{cases} dx = d\xi \\ dy = d\eta \end{cases}$ y por ende

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a(\xi+\alpha)+b(\eta+\beta)+c}{a_1(\xi+\alpha)+b_1(\eta+\beta)+c_1} \right)$$
$$= f\left(\frac{a\xi+b\eta+(a\alpha+b\beta+c)}{a_1\xi+b_1\eta+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)} \right)$$

pero (α,β) el punto de intersección de ambas rectas, luego
$\begin{cases} a\alpha+b\beta+c \equiv 0 \\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1 \equiv 0 \end{cases}$ y por consiguiente:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta} \right) = f\left(\frac{a+b\frac{\eta}{\xi}}{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}} \right) = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi} \right)$$

la ED original (ref: 120) ha sido reducida a una ED homogénea, la cual es integrable, haciendo el nuevo cambio $z = \frac{\eta}{\xi}$.

b. Finalmente, si $c^2+c_1^2 \neq 0$, pero $\det\begin{pmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} = 0$, entonces de esta última condición: $ab_1 - a_1b = 0$, o sea sus pendientes $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k$ (const). Esto significa que geométricamente las rectas son paralelas, ya que sus pendientes coinciden. Fig?c?, esto es
$\begin{cases} a = ka_1 \\ b = kb_1 \end{cases}$, que sustituida en la ED original (ref: fa119) se tiene

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ka_1x+kb_1y+c}{a_1x+b_1y+c_1} \right) = f\left(\frac{k(a_1x+b_1y)+c}{(a_1x+b_1y)+c_1} \right) = \varphi(a_1x+b_1y)$$

y así queda reducida a una ED ya tratada en el Problema 3N, 5b, donde mediante el cambio

$$z = a_1x+b_1y \qquad \#$$

por lo que

$$z' = a_1+b_1y' \Rightarrow y' = \frac{z'-a_1}{b_1} \qquad \#$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(a_1x+b_1y) \Rightarrow \frac{z'-a_1}{b_1} = \varphi(z)$$

luego

$$z' = a_1+b_1\varphi(z) \qquad \#$$

que ya es una ED de variables separables.

ED homogénea generalizada

Definiciones previas:

1. Recuerdese que para la ED (ref: 113)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$(M(x,y)dx + N(x,y)dy$ Homogénea$)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet M, N \text{ funciones homogéneas de grado } m \\ \bullet M \text{ Homogénea.} \Leftrightarrow \left(\forall t \in \mathbb{R} \text{ fijo}\right) M(tx, ty) = t^m M(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \text{ ED Homogénea Generalizada}) \Leftrightarrow \\ [\text{Si } (\exists k)\ Mdx + Ndy \text{ es una función homogénea degrado } m, \\ \text{con } x, y, dx, dy \text{ respectivamente de grados } 1, k, 0, k-1] \end{cases}$$

2. Esto es: ($M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ED Homogénea Generalizada) $\Leftrightarrow$ $(\exists k)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} M(tx, t^k y) \equiv t^m M(x,y) \\ N(tx, t^k y) \equiv t^{m-k+1} N(x,y) \end{cases} \qquad \#$$

3. Para cada $x \neq 0$ fija se propone que la constante

$$t = \frac{1}{x} \qquad \#$$

entonces las identidades (ref: 125) quedarán como

$$\begin{cases} M\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x^k}y\right) \equiv \left(\frac{1}{x}\right)^m M(x,y) \\ N\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x^k}y\right) \equiv \left(\frac{1}{x}\right)^{m-k+1} N(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(1, \frac{y}{x^k}\right) \equiv \frac{1}{x^m} M(x,y) \\ N\left(1, \frac{y}{x^k}\right) \equiv \frac{1}{x^{m-k+1}} N(x,y) \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} M(x,y) \equiv x^m M\left(1, \frac{y}{x^k}\right) \\ N(x,y) \equiv x^{m-k+1} N\left(1, \frac{y}{x^k}\right) \end{cases} \qquad \#$$

Observese que para $k = 1$ la ED homogénea generalizada se reduce a una ED de variables separables, ya que ambas funciones resultan ser producto de funciones que dependen sólo de una variable x y $z\left(= \frac{y}{x^k}\right)$

Teorema. Para toda $k \neq 1$ la ED homogénea generalizada se reduce a una ED de variables separables mediante el cambio de función incógnita:

$$z = \frac{y}{x^k} \qquad \#$$

Demostración. Sustituyendo $y = zx^k$ en la ED original (ref: 113)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \Rightarrow M(x, zx^k)dx + N(x, zx^k)d(zx^k) = 0$$

luego

$$M(x,zx^k)dx + N(x,zx^k)(x^k dz + kzx^{k-1}dx) = 0 \qquad \#$$

pero tomando en cuenta las identidades (ref: 127), con el cambio (ref: 128)

$$\begin{cases} M(x,zx^k) \equiv x^m M(1,z) \\ N(x,zx^k) \equiv x^{m-k+1}N(1,z) \end{cases}$$

se tendrá sustituyéndolas en (ref: 129)

$$x^m M(1,z)dx + x^{m-k+1}N(1,z)(x^k dz + kzx^{k-1}dx) = 0 \Rightarrow$$

$$[x^m M(1,z) + kzx^{k-1}x^{m-k+1}N(1,z)]dx + x^{m-k+1}N(1,z)x^k dz = 0$$

donde podemos eliminar $x^m \neq 0$?

$$[M(1,z) + kzx^{k-1}x^{-k+1}N(1,z)]dx + x^{-k+1}N(1,z)x^k dz = 0 \Rightarrow$$

$$[M(1,z) + kzN(1,z)]dx + xN(1,z)dz = 0$$

y esta última ya es una ED de variables separables, luego

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,z)}{M(1,z) + kzN(1,z)}dz \overset{x=0?}{=} 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} \overset{M+kzN=0?}{=} -\int \frac{N(1,z)}{M(1,z) + kzN(1,z)}dz$$

$$\Rightarrow \ln|x| = -\int \frac{N(1,z)}{M(1,z) + kzN(1,z)}dz + \ln C_1$$

Si se denota por

$$\Psi(z) = \int \frac{N(1,z)}{M(1,z) + kzN(1,z)}dz \qquad \#$$

entonces

$$\ln|x| = -\Psi(z) + \ln C_1 \Rightarrow |x| = e^{-\Psi(z)+\ln C_1} \Rightarrow x = \pm C_1 e^{-\Psi(z)}$$

luego

$$x = Ce^{-\Psi\left(\frac{y}{x^k}\right)} \qquad \#$$

4. *Soluciones singulares*. Las posibles soluciones singulares pueden estar sólo entre: i) $x = 0$ y ii) $M(1,z) + kzN(1,z) = 0$, o sea que si $z = a$ es una raíz de dicha ecuación, entonces la posible solución singular será $a = \frac{y}{x^k}$, ess decir : $y = ax^k$ $(x \neq 0)$.

ED lineal

1. *Definición*. Se llama ED lineal a la ED que resulte ser lineal (elevadas a la primera potencia) respecto a la función incógnita y y a su derivada y', esto es, si la ED es de la forma canónica

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad \#$$

observese que si se expresa como explícita respecto a la derivada será

$$y' = -p(x)y + q(x)$$

donde el segundo término de la ED es una función lineal en y con coeficientes p y q funciones en x, que pueden ser incluso no lineales pero en x, e inclusive constantes. Respecto de los coeficientes p y q se considera que son funciones continuas en el intervalo (a,b) con $-\infty \leq a < b \leq \infty$ (p, q $\in$ $\mathbf{C}_{(a,b)}$).

Si la función q es 0 en todo (a,b), entonces a la ED resultante

$$y' + p(x)y = 0 \qquad \#$$

se le conoce como la ecuación homogénea correspondiente a la lineal (ref: 132). El nombre proviene de que el primer término de la ecuación es una función lineal homogénea en y y y'. A la ED (ref: 132) se le conoce también como la ED lineal no homogénea.

A la ED

$$p_0(x)y' + p_1(x)y = q_0(x) \qquad \#$$

con el coeficiente p_0 de y' diferente de 1 también se le llama lineal. Si p_0, p_1, q_0 son funciones continuas en (a,b) y p_0 no se reduce en (a,b) a 0, entonces dividiendo por p_0 ambos lados de la ED (ref: 134) se reduce con $p = \frac{p_1}{p_0}$ y $p = \frac{q_0}{p_0}$ a la forma canónica de la ED lineal (ref: 132).

2. *Existencia y Unicidad de las Soluciones del Problema de Cauchy para la ED Lineal*.

a. Del Teorema de Picard que nos da condiciones suficientes de existencia y unicidad de las soluciones de una ED, véase el Apéndice 6, es apicable a las ED lineales. Las condiciones impuestas (hipótesis) a la ED lineal (ref: 132) sobre sus coeficientes p y q, a saber $p,q \in \mathbf{C}_{(a,b)}$ son hipótesis suficientes para que exista y sea única la solución del Problema de Cauchy en la franja $(a,b) \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0,\ \forall x_0 \in (a,b),\ \forall y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \#$$

En efecto, para la ED explícita respecto a la derivada

$$y' = -p(x)y + q(x) \overset{not}{=} f(x,y) \qquad \#$$

es claro que puede construirse un rectángulo con centro en la condición inicial (x_0, y_0)

$$\overline{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x - x_0| \leq a_1,\ |y - y_0| \leq b_1\}$$

inmerso en

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}$$

y a su vez perteneciente a la franja $(a,b) \times \mathbb{R}$, es decir $D_1 \subset D \subset (a,b) \times \mathbb{R}$ ($a_1 > a$, $b_1 < b$), de manera que en D_1 se satisfacen las condiciones del Teorema de Picard, ya que en D_1 se cumplen :

$$\begin{cases} i) f \in \mathbf{C}_{[a_1,b_1]} \ \therefore \ |f| \leq M \\ ii) \exists \frac{\partial f}{\partial y} = -p(x) \in \mathbf{C}_{(a,b)} (\therefore \in \mathbf{C}_{[a_1,b_1]} \ \therefore \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq K) \end{cases}$$

por consiguiente la ED (ref: 136) con $y(x_0) = y_0$, o su equivalente (ref: 135) admite una única solución que pasa por (x_0, y_0) en una cierta vecindad de este punto, pero finalmente queda definida en todo el intervalo (a,b), dado que toda solución de la ED lineal es una solución particular, ya que en toda la región donde está definida la ED, esto es en toda la franja $(a,b) \times \mathbb{R}$ se cumple el Teorema de existencia y unicidad por ser f un polinomio en y. Fig?mg18? . Por todo esto la ED lineal no puede admitir soluciones singulares.

Y por ello la franja se encuentra totalmente cubierta por curvas integrales (por gráficas de las soluciones particulares) que no se intersectan. Por todo esto es que tambien cada curva integral está definida en todo (a,b) y está representada por la gráfica de una solución particular. Y por el mismo Teorema de Picard cada solución es continuamente diferenciable en dicha franja.

b. Las gráficas de las soluciones de la ED homogénea (ref: 133) no pueden intersectar al eje x, ya que $y(x) \equiv 0$ satisface trivialmente a dicha ED homogénea (ref: 133) y por tanto también es solución, de manera que si pudiera intersectar al eje x, entonces se infringiría la unicidad de la solución (por el punto de intersección pasarían dos soluciones), cosa que contradice el que en la franja $(a,b) \times \mathbb{R}$ se mostró que se cumple el Teorema de existencia y unicidad. En otras palabras si una solución se reduce a 0 en algún punto de (a,b) entonces dicha solución será la idénticamente igual a 0 ($y(x) \equiv 0$) y si dicha solución es al menos en un punto diferente de 0, entonces tal solución no se hace 0 en ningún punto de (a,b). Antes de pasar a los métodos de integración de la ED lineal, se verán 2 propiedades generales de la misma.

3. *Propiedades Generales de la ED lineal no homogénea*.

a. La ED lineal no homogénea (ref: 132) permanece lineal, bajo cualquier *transformación de su variable* : $x = \varphi(t)$ siempre y cuando tal transformación sea continuamente diferenciable y diferente de cero (en símbolos, si: $\varphi \in \mathbf{C}^1_{(t_0,t_1)}$, $\begin{cases} a = \varphi(t_0) \\ b = \varphi(t_1) \end{cases}$ y $(\forall t \in (t_0, t_1))$ $\dot{\varphi}\ (t) \neq 0$).

En efecto, sustituyendo en (ref: 132)

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x) \Rightarrow$$
$$\frac{dy(\varphi(t))}{dt}\frac{dt}{dx} + p(\varphi(t))y(\varphi(t)) = q(\varphi(t)) \Rightarrow$$
$$\frac{dy(t)}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} + p(t)y(t) = q(t) \Rightarrow$$
$$\dot{y}\,\frac{1}{\dot{\varphi}} + p(t)y = q(t) \Rightarrow$$
$$\dot{y} + \dot{\varphi}\; p(t)y = \dot{\varphi}\; q(t) \Rightarrow$$
$$\dot{y} + p_1(t)y = q_1(t)$$

y esta última ecuación transformada es de nuevo una ED lineal.

b. La ED lineal no homogénea (ref: 132) permanece lineal, bajo cualquier *transformación lineal de su función continua*: $y = \alpha(x)z + \beta(x)$, donde z es la nueva función incógnita y $(\forall x \in (a,b))\ \alpha, \beta \in \mathbf{C}^1_{(a,b)}$, $\alpha(x) \neq 0$.

En efecto, sustituyendo la transformación en la ED lineal no homogénea (ref: 132)

$$\frac{d(\alpha(x)z + \beta(x))}{dx} + p(x)(\alpha(x)z + \beta(x)) = q(x) \Rightarrow$$
$$\alpha' z + \alpha z' + \beta' + p(x)[\alpha(x)z + \beta(x)] = q(x) \Rightarrow$$
$$\alpha z' + [\alpha' + p(x)\alpha(x)]z = q(x) - \beta' - p(x)\beta(x)$$

de donde se tendrá

$$z' + p_1(x)z = q_1(x)$$

con $p_1(x) = \frac{[\alpha' + p(x)\alpha(x)]}{\alpha} \in \mathbf{C}_{(a,b)}$, y $q_1(x) = \frac{q(x) - \beta' - p(x)\beta(x)}{\alpha} \in \mathbf{C}_{(a,b)}$, y la última ecuación obtenida así transformada es de nuevo una ED lineal no homogénea.

4. *Construcción de la solución general de la ED lineal homogénea*.

Se resolverá la ED lineal homogénea (ref: 133)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

con $p(x) \in \mathbf{C}_{(a,b)}$ y como puede observarse al reescribirla como: $\frac{dy}{dx} = -p(x)y$ es de variables separables, luego

$$dy = \frac{dy}{dx}dx \Rightarrow dy = -p(x)y\,dx \overset{y=0?}{\Rightarrow}$$
$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

o sea

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C_1 \Rightarrow |y| = e^{-\int p(x)dx + \ln C_1} \Rightarrow$$
$$|y| = e^{\ln C_1 - \int p(x)dx} \Rightarrow$$
$$|y| = e^{\ln C_1} e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow y = (\pm C_1) e^{-\int p(x)dx}$$

esto es, la *solución general de la ED lineal homogénea* (ref: 133) es

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad \#$$

donde C es un real arbitrario. Observese que todas las soluciones están contenidas en (ref: 137) incluso la posible solución perdida y posible solución singular $y = 0$, ya que realmente es solución de la ED (ref: 136) puesto que la satisface, pero es una solución particular, dado que puede obtenerse de la solución general (ref: 137) con el valor de $C = 0$, esto es habrá una condición inicial para la cual $C = 0$. Toda solución particular está definida y es continuamente diferenciable en todo (a,b).

Es más, se puede mostrar que la solución (ref: 137) es realmente la solución general de (ref: 136) en la franja $(a,b) \times \mathbb{R}$, es decir en el dominio de la ED (ref: 136). En efecto, se cumple: i) C es despejable: $C = y(x)e^{\int p(x)dx}$ $(\forall (x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R})$ ii) Por construcción: $y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$ es solución $(\forall x \in (a,b)$, $\forall C \in \mathbb{R}$, dadas por la fórmula despejada) de la ED lineal homogénea (ref: 136).

5. *Propiedades Generales de la ED lineal homogénea*.

a. Si y_p es una solución particular de la ED lineal homogénea (ref: 136), es decir

$$\frac{dy_p}{dx} + p(x)y_p \equiv 0, \; (\forall x \in (a,b)) \qquad \#$$

entonces $y(x) = Cy_p(x)$, con $C \in \mathbb{R}$, es también solución de la ED lineal homogénea (ref: 136).

En efecto, sustituyendo la $y(x) = Cy_p(x)$ en la ED lineal homogénea (ref: 136) y tomando en cuenta a (ref: 138)

$$\frac{d(Cy_p)}{dx} + p(x)(Cy_p) = C\frac{dy_p}{dx} + Cp(x)y_p = C\left(\frac{dy_p}{dx} + p(x)y_p\right) \equiv 0$$

b. Si y_p es una solución particular no trivial (no cero) de la ED lineal homogénea (ref: 136), y C un real arbitrario, entonces $y(x) = Cy_p(x)$, representa la *solución general de la ED lineal homogénea* (ref: 136). En efecto, i) La C es despejable $C = \frac{y(x)}{y_p(x)}$, $(\forall (x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R}\backslash\{0\})$ y de la propiedad a) ii) $y(x) = Cy_p(x)$, con $C \in \mathbb{R}$, es solución de la ED lineal homogénea (ref: 136), $\forall x \in (a,b)$, $\forall C \in \mathbb{R}$, dadas por la fórmula despejada.

Corolarios. i) Para construir la solución general de la ED lineal homogénea (ref: 136), basta con conocer una solución particular no trivial cualquiera de la misma.

ii) Dos soluciones particulares no triviales y_1, y_2 de la ED lineal homogénea (ref: 136), quedan ligadas como : $y_2(x) = Cy_1(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

6. *Estructura de la Solución General de la ED Lineal No Homogénea*.

a. *Estructura General.* Para la ED lineal no homogénea (ref: 132)

$$y' + p(x)y = q(x)$$

se supondrá que se conoce, no importa con qué método, una solución particular y_{pnh} de la ED lineal no homogénea (ref: 132), esto es $y'_{pnh} + p(x)y_{pnh} \equiv q(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

Si se introduce una nueva función incógnita z en forma aditiva con la y_{pnh}:

$$y = z + y_{pnh} \qquad \#$$

al ser sustituida en la ED lineal no homogénea (ref: 132) se tendrá

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \Rightarrow \\ (z + y_{pnh})' + p(x)(z + y_{pnh}) &= q(x) \Rightarrow \\ z' + y'_{pnh} + p(x)z + p(x)y_{pnh} &= q(x) \Rightarrow \\ z' + p(x)z + (y'_{pnh} + p(x)y_{pnh}) &= q(x) \end{aligned}$$

pero de (ref: 139) $(y'_{pnh} + p(x)y_{pnh}) \equiv q(x)$, luego $z' + p(x)z + q(x) = q(x)$, de donde

$$z' + p(x)z \equiv 0 \qquad \#$$

y esta última ED significa que bajo la transformación lineal (ref: 139) la nueva función incógnita z satisface la correspondiente ED homogénea. Pero la solución general de la ED homogénea (ref: 140) será (ref: 137):

$$z(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad \#$$

luego la estructura de la solución general de la ED Lineal No Homogénea de (ref: 139) será

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + y_{pnh} \qquad \#$$

De hecho la anterior deducción constituye la demostración del siguiente

Teorema. Si y_{pnh} es una solución particular de la ED lineal no homogénea (ref: 132), entonces la solución general $y(x)$ de la ED lineal no homogénea (ref: 132) está dada por (ref: 139) $y = z + y_{pnh}$: la suma de la solución general de la homogénea correspondiente más una solución particular de la ED no homogenea.

b. *Solución general de la ED lineal no homogénea conociendo una solución particular de la homogénea* y_{ph} *y una particular de la no homogénea* y_{pnh}.

$$y(x) = Cy_{ph} + y_{pnh} \qquad \#$$

En efecto, de la demostrada estructura de la solución general se tiene que si y_{ph} es una solución particular de la homogénea, entonces Cy_{ph} es la solución general de la homogénea y como y_{pnh} es una solución particular de la no homogénea. Esto demuestra lo afirmado.

c. *Solución general de la ED lineal no homogénea conociendo dos soluciones particulares de la no homogénea* y_1, y_2.

$$y(x) = y_1 + C(y_2 - y_1) \qquad \#$$

En efecto, de la estructura de la solución general de la ED lineal no homogenea : $y = z + y_{pnh} \Rightarrow z = y - y_{pnh}$, si aquí sustituimos en lugar de la solución general de la no homogénea y una solución particular y_2 de la no homogénea, y además sustituimos a la solución particular de la no homogénea y_{pnh} por la otra solución particular y_1 de la no homogénea conocida, entonces obtenemos que $y_2 - y_1 (= z)$ representa una solución particular de la correspondiente ED homogénea, luego la solución general de la ED homogénea por la propiedad 5b será: $C(y_2 - y_1)$ y por el Teorema anterior : $y(x) = y_1 + C(y_2 - y_1)$ será la solución general de la ED lineal no homogenea.

7. *Métodos de Integración de la ED lineal no homogénea*.

Recuérdese que la hipótesis básica de la que se parte para buscar la Solución General de la ED Lineal No Homogénea es la consideración de que se conoce una solución particular de la ED no homogénea, por ello los métodos de integración de la ED lineal se centra en la busqueda de tal solución.

a. *Método de variación de parámetros (de Lagrange)*.

El método parte de la estructura de la Solución General de la ED Lineal No Homogénea (ref: 132) como la suma de la solución general de la homogénea $z(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$ más una solución particular de la no homogenea y_{pnh}:

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + y_{pnh}(x) \qquad \#$$

El método consiste en buscar implícitamente la solución particular de la no homogénea y_1 proponiéndola exáctament de la misma forma que la solución general de homogénea correspondiente sólo que en lugar del parámetro C se hace "variar" éste considerandolo función de la variable: $C = C(x)$, siendo ésta una función continuamente diferenciable de x, la cual hay que determinar de la condición de que la forma en que se busca

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad \#$$

sea solución de la no homogénea. Esto resume todo este método, pero su realización consiste en sustituir (ref: 146) en la ED no homogénea

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x) \Rightarrow$$

$$\frac{d\left[C(x)e^{-\int p(x)dx}\right]}{dx} + p(x)\left[C(x)e^{-\int p(x)dx}\right] = q(x) \Rightarrow$$

$$\left[C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx}\right]$$

$$+ p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

de la que

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \qquad \#$$

de la cual determinamos el "parámetro variado" $C(x)$, dado que es una ED de la forma $y'(x) = f(x)$, luego

$$dC = C'(x)dx \Rightarrow$$

$$dC = q(x)e^{\int p(x)dx}dx \Rightarrow$$

$$\int dC = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

de donde

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1 \qquad \#$$

que sustituida en (ref: 146) $y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, se tiene

$$y(x) = \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]e^{-\int p(x)dx} \qquad \#$$

donde se debe reconocer que con abuso de notación de nuevo se denotó a C como la constante arbitraria de integración y donde de nuevo aparece la estructura de la solución general de la no homogénea:

$$y(x) = \underbrace{e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx}_{\text{sol. part. de la no hom.(para C=0)}} + \underbrace{Ce^{-\int p(x)dx}}_{\text{sol.gral. hom.}} \qquad \#$$

además la estructura de la solución general de la no homogénea es lineal respecto de C con coeficientes funciones de la variable x:

$$y(x) = A(x) + B(x)C \qquad \#$$

Finalmente la solución general en la forma de Cauchy con y_0 arbitraria es si en todo el proceso se integra en forma definida entre x_0 y x:

$$y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} q(t) e^{\int_{x_0}^{t} p(t)dt} dt + y_0 \right] e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \qquad \#$$

si la y_0 no es arbitrario sino un número específico correspondiente a la condición inicial concreta $y(x_0) = y_0$, entonces (ref: 135) representa la solución particular del problema de Cauchy correspondiente.

b. *Método del factor de integración (de Euler)*.

El método consiste en transformar el primer miembro de la forma canónica de la ED lineal no homogénea (ref: 132)

$$y' + p(x)y = q(x)$$

mediante la multiplicación por una función $\mu = \mu(x)$, llamado factor de integración, formando así la derivada de un producto de funciones, de donde se obtiene dicho factor. Se procede así:

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow \underbrace{\left[\mu y' + \underbrace{\mu p(x)}_{\therefore \mu'} y \right]}_{(\mu y)'} = \mu q(x)$$

para que proceda en la parte izquierda de la ED expresarla como la derivada del producto se necesita como arriba se indica que

$$\mu' = p(x)\mu \qquad \#$$

pero esta nueva ED es de variables separables, véase el Apéndice 10, luego

$$d\mu = \mu' dx \Rightarrow d\mu = p(x)\mu dx \overset{\mu=0?}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = p(x)dx \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int p(x)dx \Rightarrow$$

$$\ln|\mu| = \int p(x)dx + \ln C_1 \Rightarrow |\mu| = e^{\int p(x)dx + \ln C_1}$$

$$\Rightarrow |\mu| = e^{\ln C_1} e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \mu = (\pm C_1) e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = C e^{\int p(x)dx}$$

pero dado que basta con una sola función se escoge aquella para la cual $C = 1$, esto es

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \qquad \#$$

y con esta μ se regresa a la ED original multiplicada por μ

$$\mu y' + \mu' y = \mu q(x) \Rightarrow$$

$$e^{\int p(x)dx} y' + p(x) e^{\int p(x)dx} y = e^{\int p(x)dx} q(x) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx} y \right) = q(x) e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$d\left(e^{\int p(x)dx} y \right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx} y \right) dx \Rightarrow$$

$$d\left(e^{\int p(x)dx} y \right) = q(x) e^{\int p(x)dx} dx \Rightarrow$$

$$\int d\left(e^{\int p(x)dx} y \right) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \Rightarrow$$

$$e^{\int p(x)dx} y = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C$$

de donde se obtiene el mismo resultado (ref: 151)

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$$

c. *Método de una por dos funciones incógnita*.

Este método consiste en buscar la función incógnita y como un producto de 2 nuevas funciones incógnitas u, v (y por ende artificialmente agregando un grado de libertad, por lo que se tendría derecho en lo sucesivo a imponer una restricción):

$$y(x) = u(x)v(x) \qquad \#$$

de manera que sustituida en (ref: 132)

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow$$

$$[u(x)v(x)]' + p(x)[u(x)v(x)] = q(x) \Rightarrow$$

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

de donde

$$[u' + p(x)u]v + uv' = q(x) \qquad \#$$

y en esta última ED se impone la restricción de que el primer corchete sea 0, esto es

$$u' + p(x)u = 0 \qquad \#$$

lo que significa

$$u' = -p(x)u \Rightarrow du = u'dx \Rightarrow$$
$$du = -p(x)udx \Rightarrow \frac{du}{u} \overset{u=0?}{=} -p(x)dx \Rightarrow$$
$$\int \frac{du}{u} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|u| = -\int p(x)dx + \ln C_1 \Rightarrow$$
$$|u| = e^{-\int p(x)dx + \ln C_1} \Rightarrow |u| = e^{\ln C_1} e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow$$
$$u = \pm C_1 e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow u = Ce^{-\int p(x)dx}$$

luego como basta con una sola función u, se toma $C = 1$ (la $u = 0$ es una solución particular obtenible de la solución general para $C = 0$)

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx} \qquad \#$$

y por consiguiente sustituida junto con (ref: 156) en (ref: 155) se tendrá

$$uv' = q(x) \Rightarrow e^{-\int p(x)dx} v' = q(x) \Rightarrow$$
$$v' = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow dv = v'dx \Rightarrow$$
$$dv = q(x)e^{\int p(x)dx}dx \Rightarrow \int dv = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

por lo que

$$v(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \qquad \#$$

se ha obtenido así u y v en (ref: 157) y (ref: 158), por lo cual se tendrá de (ref: 154) el mismo resultado que con los otros métodos, a saber:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right] \qquad \#$$

8. *Propiedad Geométrica que Caracteriza a las Gráficas de la ED Lineal No Homogénea*. Si se cuenta con 2 soluciones particulares y_1, y_2 cualesquiera de la ED lineal no homogénea, esto es

$$y_k' + p(x)y_k \equiv q(x), \ (k = 1,2)$$

y de 6) c) de este mismo Apéndice, cuando se conocen 2 soluciones particulares de la ED lineal no homogénea, entonces su solución general es (ref: fa1314)

$$y(x) = y_1 + C(y_2 - y_1)$$

por lo cual, si y_3 es otra solución particular diferente de y_1, y_2 obtenida de esta solución general para algun valor de C_0:

$$y_3(x) = y_1 + C_0(y_2 - y_1) \qquad \#$$

de la cual, se obtiene

$$\begin{cases} y_3 - y_1 = C_0(y_2 - y_1) \\ y_2 - y_3 = (y_2 - y_1)(1 + C_0) \end{cases}$$

y dividiendo la 2a. entre la 1a.

$$\frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1} = \frac{(y_2 - y_1)(1 + C_0)}{C_0(y_2 - y_1)} \Rightarrow \frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1} = \frac{1 + C_0}{C_0}$$

se tendrá

$$\frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1} = C_1 \qquad \#$$

Esta será la propiedad buscada, a saber: *Toda gráfica de la solución de una ED lineal no homogénea, divide en una razón doble constante, al segmento de las ordenadas de otras 2 gráficas de soluciones cualesquiera.*

Geométricamente esta propiedad puede ser útil en la construcción de las gráficas de las soluciones de las ED lineales. En particular de tal propiedad se concluye otra propiedad característica, pero de las rectas tangentes a las gráficas de las soluciones de las ED lineales, ya que de la igualdad de segmentos

$$\frac{\overline{M_3M_2}}{\overline{M_1M_3}} = \frac{\overline{N_3N_2}}{\overline{N_1N_3}} = \cdots = C_1 \qquad \#$$

se concluye que las rectas rectas secantes

$$\overline{N_1M_1},\ \overline{N_3M_3},\ \overline{N_2M_2}, \ldots \qquad \#$$

deben intersectarse en un punto o ser paralelas. Y si

$$\overline{N_1N_2} \to \overline{M_1M_2} \qquad \#$$

entonces estas rectas secantes tienden a ser rectas tangentes en M_1, M_3, M_2, $\ldots$

Es así que *las rectas tangentes a las gráficas de soluciones de una ED lineal no homogénea, en su intersección con rectas paralelas al eje* y*, o se intersectan en un punto o son paralelas*. Véase la Fig?c?

Falta Fig?c?

ED Bernoulli

1. **Definición, existencia y unicidad**. La ED de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},\ (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}) \qquad \#$$

se le llama ED de Bernoulli, donde α es cualquier número real, excepto 0 (para no ser lineal) y 1 (para no ser lineal homogénea) y respecto de las funciones p,q se consideran continuas en cierto intervalo $[p,q \in \mathbf{C}_{(a,b)}]$, ya que con esto basta para que se cumpla el Teorema de Picard en cualquier $(x_0,y_0) \in \overline{D} = \{(x,y) : |x - x_0| \leq A,\ |y - y_0| \leq B\}$, dado que entonces

$$y' = -p(x)y + q(x)y^{\alpha} = f(x,y) \qquad \#$$

es tal que

$$\begin{cases} f \in \mathbf{C}_{\overline{D}} \\ \frac{\partial}{\partial y} f \in \mathbf{C}_{\overline{D}} \end{cases}$$

incluso por se continuas en cerredos: $|f| \leq M$ y $\left|\frac{\partial}{\partial y} f\right| \leq K$.

Observese finalmente que el teorema de Picard depende sustancialmente de cómo se escogen los valores de y_0 y de α.

En efecto, si $y_0 \neq 0$ y la función y^α está definida para $y = y_0$, entonces en una vecindad suficientemente pequña de (x_0, y_0), con x_0 cualquiera de (a, b), se cumplen las condiciones del Teorema de Picard y por ende la gráfica de una sola solución pasa por cada $(x_0, y_0) \in \overline{D}$.

Si $y_0 = 0$ y el exponente $\alpha > 1$, también se cumple el Teorema de Picard. En este caso la única solución del Problema de Cauchy es evidentemente el intervalo (a, b) del eje x ($y(x) \equiv 0,\ a < x < b$)

Pero si $y_0 = 0$ y el exponente $\alpha < 1$, entonces la unicidad del problema de Cauchy no se puede garantizar, ya que $\frac{\partial}{\partial y} f = \infty$ en (x_0, y_0). De esto se puede concluir que en este caso $y(x) \equiv 0,\ a < x < b$ puede resultar ser una *solución singular*.

2. **Método de Integración**. La idea básica que subyace que subyace para resolver estas ED consiste en reducirlas a ED lineales. Esto se logra con el siguiente procedimiento: dividiendo la ED original por y^α

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \overset{y=0?}{\Rightarrow} y^{-\alpha}y' + p(x)y^{-\alpha+1} = q(x)$$

e introduciendo el cambio de función incógnita, haciendo lineal el coeficiente en p

$$z = y^{1-\alpha},\ [\therefore\ z' = (1-\alpha)y^{-\alpha+1}y'] \qquad \#$$

por lo que multiplicando la última ED

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)p(x)y^{-\alpha+1} = (1-\alpha)q(x)$$

de la cual

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x) \qquad \#$$

que ya es una ED lineal en z, luego integrándola como lineal vía el factor integrante y regresando a las variables originales su solución general queda como

$$\mu(x) = e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}$$

$$\mu(x)z' + (1-\alpha)\mu(x)p(x)z = (1-\alpha)\mu(x)q(x) \Rightarrow$$

$$e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}z' + (1-\alpha)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}p(x)z = (1-\alpha)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}q(x) \Rightarrow$$

$$\left(e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}z\right)' = (1-\alpha)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}q(x) \Rightarrow$$

$$d\left(e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}z\right) = \left(e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}z\right)'dx \Rightarrow$$

$$d\left(e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}z\right) = \left((1-\alpha)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}q(x)\right)dx$$

de donde integrando

$$\int d\left(e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}z\right) = (1-\alpha)\int e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}q(x)dx \Rightarrow$$

$$e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}z = (1-\alpha)\int e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}q(x)dx \Rightarrow$$

$$z(x) = e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx}(1-\alpha)\int e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}q(x)dx + C \Rightarrow$$

$$y^{1-\alpha} = e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx}(1-\alpha)\int e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}q(x)dx + C$$

por lo que la solución general de la ED de Bernoulli será

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[(1-\alpha)\int e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}q(x)dx + C\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \#$$

3. Solución singular.

a. Al haber dividido por y^{α} se pudo haber perdido la solución $y(x) \equiv 0$, sólo para $\alpha > 0$, ya que para $\alpha \leq 0$ la función y^{α} no es solución de la ED de Bernoulli (ref: 164).

b. Por otro lado si $\alpha > 1$, entonces la solución $y = 0$ está contenida en la solución general de la ED de Bernoulli (ref: 164), precisamente para $C = +\infty$ y por ende es una *solución particular*.

c. Es así que para $0 < \alpha < 1$, la solución $y = 0$ no está contenida en la solución general de la ED de Bernoulli (ref: 164) para ningún $C = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y resulta ser una solución singular, ya que como se vió en cada punto de dicha solución se infringe la unicidad del problema de Cauchy. Para mayor abundancia se puede observar que de la solución general (ref: 168) de la ED de Bernoulli (ref: 164) la solución $y = 0$ sólo puede obtenerse contradictoriamente para $C = C(x)$.

ED de Darboux

La ED de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + P(x,y)(xdy - ydx) \qquad \#$$

donde M y N son funciones homogéneas de grado m de homogeneidad, mientras que

P es una función homogénea de grado $l \neq m-1$ (ya que para $l = m-1$ la ED de Darboux degenera en la ED homogénea : $(M - yP)dx + (N + xP)dy = 0$, con las nuevas funciones de grado m de homogeneidad); a su vez $l \neq m-2$, (ya que en caso contrario la ED resulta ser lineal)

Si se observa que la ED de Darboux contiene el término : $(xdy - ydx) = x^2 \frac{xdy-ydx}{x^2} = x^2 d(\frac{y}{x})$ parece natural de nuevo pensar que el cambio de variable

$$z = \frac{y}{x} \qquad \#$$

puede llevar la ED original en una más sencilla. En efecto,

$$M(x,y)dx + N(x,y)d(zx) + P(x,y)[xd(zx) - ydx] = 0 \Rightarrow$$
$$M(x,y)dx + N(x,y)(xdz + zdx) + P(x,y)[x(xdz + zdx) - zxdx] = 0 \Rightarrow$$
$$M(x,y)dx + N(x,y)(xdz + zdx) + P(x,y)x^2dz = 0$$

con $N(x,y) \neq 0$, en caso contrario la ED sería de variables separables, y tomando en cuenta los grados de homogeneidad de las diferentes funciones se tendrá

$$x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right)(xdz + zdx) + x^l P\left(1, \frac{y}{x}\right)x^2dz = 0 \Rightarrow$$
$$x^m M(1,z)dx + x^m N(1,z)(xdz + zdx) + x^{l+2}P(1,z)dz = 0$$

donde dividiendo por $x^m \neq 0$ (¿$x^m = 0$?) y reagrupando se llega a

$$[M(1,z) + N(1,z)z]dx + [N(1,z)x + x^{l+2-m}P(1,z)]dz = 0$$

donde a su vez se puede a manera de separar variables dividir formalmente por $[M(1,z) + N(1,z)z]dz$ arribando así a : $\frac{dx}{dz} + \frac{N(1,z)x + x^{l+2-m}P(1,z)}{M(1,z)+N(1,z)z} = 0$, esto es a

$$\frac{dx}{dz} + \frac{N(1,z)}{M(1,z) + N(1,z)z}x = -\frac{P(1,z)}{M(1,z) + N(1,z)z}x^{l+2-m} \qquad \#$$

que ya es una ED de tipo Bernoulli y por ende es integrable en cuadraturas, donde adicionalmente se pudo haber perdido soluciones de $M(1,z) + N(1,z)z = 0$.

ED de Ricatti

1. **Definición**. La ED de la forma

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad \#$$

donde la parte derecha de la ED es una función cuadrática de la función incógnita con coeficientes variables P, Q, $R \in \mathbf{C}_{(a,b)}$ ($a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$), se le llama ED de *Ricatti*. Las restricciones naturales de estas ED son: P, R no idénticamente igual a 0 en el intervalo (a,b), ya que en caso contrario degeneraría en una ED lineal o en una Bernoulli.

2. *Existencia y unicidad*. Bajo las hipótesis impuestas de que

$\begin{cases} P,Q,R \in \mathbf{C}_{(a,b)} \\ P,R \neq 0, \forall x \in (a,b) \end{cases}$ la ED de *Ricatti* (ref: 172) admite una única solución

$$y = y(x)$$

que satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \qquad \#$$

con $x_0 \in (a,b)$ y $\forall x \in \mathbb{R}$, esto es por cualquier (x_0,y_0) de la franja $D = (a,b) \times \mathbb{R}$, pasa la gráfica de una única solución de la ED de *Ricatti*.

En efecto, siempre es posible construir un rectángulo con centro en (x_0,y_0)

$$\overline{D_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a_1,\ |y - y_0| \leq b_1\} \qquad \#$$

totalmente contenido en la franja $D = (a,b) \times \mathbb{R}$, ($\overline{D_1} \subset D$, dado que siempre puede escogerse $a_1 > a$ y $b_1 < b$) y en este rectángulo la parte derecha de la ED de Ricatti $f(x,y) = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ satisface las 2 condiciones suficientes del Teorema de Picard (¿por qué?), pues nada más porque

$$\begin{cases} f(x,y) = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \in \mathbf{C}_{[a_1,b_1]} \ (\Rightarrow |f| \leq M) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2P(x)y + Q(x) \in \mathbf{C}_{[a_1,b_1]} \left(\Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq K\right) \end{cases}$$

y esto asegura que la ED de *Ricatti* (ref: 172) admite una única solución $y = y(x)$, que satisface la condición inicial (ref: 173) $y(x_0) = y_0$. Además esta solución queda definida, en general, tan sólo en una cierta vecindad de x_0 ($V_h(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq h,\ h = \min\left(a_1, \frac{b_1}{M}\right), |f| \leq M\right\}$). Dado el caracter local del Teorema la existencia de la solución en todo el intervalo (a,b) de continuidad de P, Q y R no queda garantizada. Esto redondea la idea final de que por consiguiente la ED de *Ricatti* no admite soluciones singulares. Antes de pasar al problema de la integración de la ED de Ricatti en cuadraturas vale detenerse en las propiedades de la ED de *Ricatti.*

3. *Propiedades generales de la ED de Ricatti*. (Similares a las analizadas para la ED lineal)

a. La ED de *Ricatti* (ref: 172) permanece *Ricatti*, bajo cualquier *transformación de su variable* :

$$x = \varphi(t) \qquad \#$$

siempre y cuando tal transformación sea continuamente diferenciable y diferente de cero (en símbolos, si: $\varphi \in \mathbf{C}^1_{(t_0,t_1)}$, $\begin{cases} a = \varphi(t_0) \\ b = \varphi(t_1) \end{cases}$ y $(\forall t \in (t_0,t_1))\ \dot{\varphi}\ (t) \neq 0$).

En efecto, sustituyendo en (ref: 172)

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \Rightarrow$$
$$\frac{dy(\varphi(t))}{dt}\frac{dt}{dx} = P(\varphi(t))y^2 + Q(\varphi(t))y + R(\varphi(t)) \Rightarrow$$
$$\frac{dy(t)}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = P(\varphi(t))y^2 + Q(\varphi(t))y + R(\varphi(t)) \Rightarrow$$
$$\dot{y}\ \frac{1}{\dot{\varphi}} = P(\varphi(t))y^2 + Q(\varphi(t))y + R(\varphi(t)) \Rightarrow$$
$$\dot{y} = \dot{\varphi}\ P(\varphi(t))y^2 + \dot{\varphi}\ Q(\varphi(t))y + \dot{\varphi}\ R(\varphi(t)) \Rightarrow$$
$$\dot{y} = P_1(t)y^2 + Q_1(t)y + R_1(t)$$

que a su vez esta última ecuación transformada es de nuevo una ED de *Ricatti*.

b. La ED de *Ricatti* (ref: 172) permanece de *Ricatti*, no sólo bajo cualquier *transformación lineal de su función incógnita*: $y = \alpha(x)z + \beta(x)$, sino también ante cualquier *transformación racional lineal de su función incógnita*:

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)} \qquad \#$$

donde z es la nueva función incógnita y $(\forall x \in (a,b))\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,$ $\delta \in \mathbf{C}^1_{(a,b)}$, con la única evidente restricción de que $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} =$ $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$,

En efecto, sustituyendo ésta transformación (ref: 176) en la ED de *Ricatti* (ref: 172)

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \Rightarrow$$
$$\frac{d\left(\frac{\alpha(x)z+\beta(x)}{\gamma(x)z+\delta(x)}\right)}{dx} = P(x)\left(\frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)}\right)^2 +$$
$$+ Q(x)\left(\frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)}\right) + R(x)$$

donde desarrollando

$$\frac{[\gamma z + \delta][\alpha'(x)z + \alpha z' + \beta'(x)] - [\alpha z + \beta][\gamma'(x)z + \gamma z' + \delta'(x)]}{[\gamma(x)z + \delta(x)]^2} =$$
$$= P(x)\frac{\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2}{[\gamma(x)z + \delta(x)]^2} + Q(x)\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + R(x)[\gamma z + \delta]^2$$

$$
\begin{aligned}
&[\gamma z+\delta][\alpha' z+\alpha z'+\beta']-[\alpha z+\beta][\gamma'(x)z+\gamma z'+\delta'(x)]\\
&=P(x)[\alpha^2z^2+2\alpha\beta z+\beta^2]+Q(x)[\alpha z+\beta][\gamma z+\delta]\\
&\quad +R(x)[\gamma z+\delta]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha'\gamma z^2+\alpha z'\gamma z+\beta'\gamma z+\alpha'\delta z+\alpha\delta z'+\beta'\delta\\
&-\gamma'\alpha z^2-\alpha z\gamma z'-\alpha z\delta'-\beta\gamma' z-\beta\gamma z'-\beta\delta'\\
&=P\alpha^2z^2+2\alpha\beta Pz+\beta^2P+Q\beta\gamma z+Q\beta\delta+Q\alpha\gamma z^2\\
&\quad +Q\alpha\delta z+R\gamma^2z^2+R2\gamma\delta z+R\delta^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha\gamma z+\alpha\delta-\alpha z\gamma-\beta\gamma)z' &= -(\alpha'\gamma-\gamma'\alpha-P\alpha^2-Q\alpha\gamma-R\gamma^2)z^2+\\
&+(-\beta'\gamma-\alpha'\delta+\alpha\delta'+\beta\gamma'+2\alpha\beta P+Q\beta\gamma+Q\alpha\gamma)z\\
&-\beta'\delta+\beta\delta'+\beta^2P+Q\beta\delta+R\delta^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z' &= \frac{-\alpha'\gamma+\gamma'\alpha+P\alpha^2+Q\alpha\gamma+R\gamma^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}z^2+\\
&+\frac{-\beta'\gamma-\alpha'\delta+\alpha\delta'+\beta\gamma'+2\alpha\beta P+Q\beta\gamma+Q\alpha\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}z+\\
&+\frac{-\beta'\delta+\beta\delta'+\beta^2P+Q\beta\delta+R\delta^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}
\end{aligned}
$$

de donde se tendrá

$$z'+P_1(x)z^2+Q_1(x)z+R_1(x) \qquad \#$$

con $P_1(x)=\frac{-\alpha'\gamma+\gamma'\alpha+P\alpha^2+Q\alpha\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}$, $Q_1(x)=\frac{-\beta'\gamma-\alpha'\delta+\alpha\delta'+\beta\gamma'+2\alpha\beta P+Q\beta\gamma+Q\alpha\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}$, $R_1(x)=\frac{-\beta'\delta+\beta\delta'+\beta^2P+Q\beta\delta+R\delta^2}{\alpha\delta-\beta\gamma}\in \mathbf{C}_{(a,b)}$,

y por tanto la última ecuación así transformada es de nuevo una ED *Ricatti*, como se quería demostrar. Cualquiera de estas 2 transformaciones pueden servir para simplificar la forma de la ED de Ricatti, y de esa forma hacer más simple su estudio lo cual es ejemplificable con la llamada

4. *Forma Canónica de la ED de Ricatti*. Mediante transformaciones lineales de la función incógnita se puede reducir la ED de *Ricatti* (ref: fa161) a su forma canónica, consistente en que en cierto intervalo de las x el coeficiente de la nueva función incógnita al cuadrado sea $+1$ ó -1 y el coeficiente de la nueva función incógnita sea 0, siempre y cuando existan P'', Q' y sean continuas.

•En efecto, si se empieza con una transformación homogénea de la función incógnita

$$y = \alpha(x)z \qquad \#$$

donde por ahora la $\alpha(x)$ es una función indeterminada, pero susceptible de determinarse y z la nueva función incógnita.

Sustituyendo (ref: 178) en la ED de *Ricatti* (ref: 172)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \Rightarrow \\ [\alpha(x)z]' &= P(x)\alpha^2(x)z^2 + Q(x)\alpha(x)z + R(x) \Rightarrow \\ z\alpha'(x) + \alpha(x)z' &= P(x)\alpha^2(x)z^2 + Q(x)\alpha(x)z + R(x) \Rightarrow \\ z' &= P(x)\alpha(x)z^2 + Q(x)z + \frac{R(x)}{\alpha(x)} - \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}z\end{aligned}$$

El coeficiente $\alpha(x)$ se determina obligando a que el coeficiente bajo z^2 sea el más simple no trivial: 1

$$P(x)\alpha(x) = 1$$

entonces $\alpha(x) = \frac{1}{P(x)}$ y por ende

$$y = \frac{1}{P(x)}z \qquad \#$$

y por consiguiente se puede restringir todo el razonamiento al intervalo (a,b), donde $P(x) \neq 0$, luego la ED se reduce a

$$z' = z^2 + Q(x)z + \frac{R(x)}{\frac{1}{P(x)}} - \frac{\left(\frac{1}{P}\right)'(x)}{\frac{1}{P(x)}}z$$

de la cual

$$z' = z^2 + \left(Q(x) - \frac{P'(x)}{P(x)}\right)z + P(x)R(x) \qquad \#$$

y en esta ED transformada se puede intentar un nuevo cambio de función incógnita

$$z = \beta(x) + u \qquad \#$$

con $\beta(x)$ por ser determinado, obligando al coeficiente de la parte lineal transformada a ser 0 y u la nueva función incógnita, que al sustituir (ref: 181) en (ref: 180)

$$
\begin{aligned}
&(\beta(x)+u)' \\
&= (\beta(x)+u)^2 + \left(Q(x) - \frac{P'(x)}{P(x)}\right)(\beta(x)+u) + P(x)R(x) \Rightarrow \\
&\beta'(x) + u' \\
&= \beta^2(x) + 2\beta(x)u + u^2 + \left(Q(x) - \frac{P'(x)}{P(x)}\right)(\beta(x)+u) + P(x)R(x) \Rightarrow \\
u' &= u^2 + Q_1(x)u + R_1(x)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{cases}
Q_1(x) = 2\beta(x) + Q(x) - \frac{P'(x)}{P(x)} \\
R_1(x) = Q(x)\beta(x) - \frac{P'(x)}{P(x)}\beta(x) + P(x)R(x) + \beta^2(x) - \beta'(x)
\end{cases}
$$

Y la $\beta(x)$ se determina de obligar al coeficiente $Q_1(x)$ a reducirse a 0, esto es

$$2\beta(x) + Q(x) - \frac{P'(x)}{P(x)} = 0$$

o sea $\beta(x) = -\frac{1}{2}\left[Q(x) - \frac{P'(x)}{P(x)}\right]$ y por ende

$$z = -\frac{1}{2}\left[Q(x) - \frac{P'(x)}{P(x)}\right] + u \qquad \#$$

esto es

$$
\begin{aligned}
u' &= u^2 + R_1(x) \Rightarrow \\
&\Rightarrow u' = u^2 + Q(x)\beta(x) - \frac{P'(x)}{P(x)}\beta(x) \\
&\quad + P(x)R(x) + \beta^2(x) - \beta'(x) \\
&\Rightarrow u' = u^2 + Q\left[-\frac{1}{2}\left(Q - \frac{P'}{P}\right)\right] \\
&\quad - \frac{P'}{P}\left[-\frac{1}{2}\left(Q - \frac{P'}{P}\right)\right] + PR \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(Q - \frac{P'}{P}\right)^2 - \left[-\frac{1}{2}\left(Q - \frac{P'}{P}\right)\right]' \\
&\Rightarrow u' = u^2 - \left[\frac{1}{2}\left(Q - \frac{P'}{P}\right)\right]\left(Q - \frac{P'}{P}\right) \\
&\quad + PR + \frac{1}{4}\left(Q - \frac{P'}{P}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(Q' - \frac{PP'' - P'^2}{P^2}\right) \\
&\Rightarrow u' = u^2 - \frac{1}{2}\left(Q - \frac{P'}{P}\right)^2 + PR \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(Q - \frac{P'}{P}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(Q' - \frac{P''}{P} + \frac{P'^2}{P^2}\right) \\
&\Rightarrow u' = u^2 - \frac{1}{4}\left(Q - \frac{P'}{P}\right)^2 \\
&\quad + PR + \frac{1}{2}\left(Q' - \frac{P''}{P} + \frac{P'^2}{P^2}\right)
\end{aligned}
$$

de donde

$$u' = u^2 + R_2(x) \qquad \#$$

con $R_2(x) = -\frac{1}{4}\left(Q - \frac{P'}{P}\right)^2 + RP + \frac{1}{2}\left(Q' - \frac{P''}{P} + \frac{P'^2}{P^2}\right)$.

Resumiendo: de hecho se ha demostrado el Teorema que afirma que uniendo los 2 cambios de variable (ref: 178) y (ref: 181), esto es con el cambio

$$y = \frac{1}{P(x)}\left[u - \frac{1}{2}\left(Q(x) - \frac{P'(x)}{P(x)}\right)\right] \qquad \#$$

la ED de *Ricatti* (ref: 172) se reduce a su forma canónica (ref: 183). Habría que agregar tan sólo que esto tiene lugar en cada intervalo, donde $P(x) \neq 0$ y $P \in C^2_{\{x:P(x)\neq 0\}}$, $Q \in C^1_{\{x:P(x)\neq 0\}}$.

5. *Casos Particulares de integración en cuadraturas de la ED de Ricatti*. La ED de *Ricatti* (ref: 172) a diferencia de las ED vistas se integra en cuadraturas sólo en casos excepcionales:

a. La ED de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = py^2 + qy + r \qquad \#$$

con p, q, $r \in \mathbb{R}$ $(pr \neq 0)$, en este caso la ED de *Ricatti* es simultáneamente de variables separables. Por ello su integral general puede obtenerse en cuadratura, que incluso se expresa a través de funciones elementales

$$dy = \frac{dy}{dx}dx \Rightarrow dy = (py^2 + qy + r)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{py^2 + qy + r} = \int dx$$

luego

$$\frac{1}{p}\int \frac{dy}{y^2 + \frac{q}{p}y + \frac{r}{p}} = x + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p}\int \frac{dy}{\left[y^2 + 2\frac{q}{2p}y + \left(\frac{q}{2p}\right)^2\right] + \frac{r}{p} - \left(\frac{q}{2p}\right)^2} = x + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p}\int \frac{dy}{\left(y + \frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{r}{p} - \frac{q^2}{4p^2}} \underset{a^2 = \frac{r}{p} - \frac{q^2}{4p^2}}{\overset{t = y + \frac{q}{2p}}{=}} x + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p}\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = x + C_1$$

por lo cual

$$\frac{1}{pa}\arctan\frac{t}{a} = x + C_1 \Rightarrow \arctan\frac{t}{a} = pax + paC_1 \Rightarrow$$

$$\arctan\frac{y + \frac{q}{2p}}{a} = pax + C \Rightarrow$$

$$\arctan\frac{y + \frac{q}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p} - \frac{q^2}{4p^2}}} = p\sqrt{\frac{r}{p} - \frac{q^2}{4p^2}}\,x + C \Rightarrow$$

$$\frac{y + \frac{q}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p} - \frac{q^2}{4p^2}}} = \tan\left(\sqrt{pr - \frac{q^2}{4}}\,x + C\right)$$

por lo que la solución general será

$$y(x) = \sqrt{\frac{r}{p} - \frac{q^2}{4p^2}}\,\tan\left(\sqrt{pr - \frac{q^2}{4}}\,x + C\right) - \frac{q}{2p} \qquad \#$$

b. La ED de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)(py^2 + qy + r) \qquad \#$$

con p, q, $r \in \mathbb{R}$ ($pr \neq 0$), también además de Ricatti resulta ser de variables separables, por lo que separando las variables

$$dy = \frac{dy}{dx}dx \Rightarrow dy = \varphi(x)(py^2 + qy + r)dx \Rightarrow \frac{dy}{py^2 + qy + r} = \varphi(x)dx$$

de la que

$$\int \frac{dy}{py^2 + qy + r} = \int \varphi(x)dx$$

pero la integral de la izquierda ya fue calculada en a)

$$\int \frac{dy}{py^2+qy+r} = \frac{1}{p}\int \frac{dy}{y^2+\frac{q}{p}y+\frac{r}{p}} \underset{a^2=\frac{r}{p}-\frac{q^2}{4p^2}}{\overset{t=y+\frac{q}{2p}}{=}}$$

$$= \frac{1}{p}\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{pa}\arctan\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{\frac{r}{p}-\frac{q^2}{4p^2}}}\arctan\frac{y+\frac{q}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p}-\frac{q^2}{4p^2}}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{pr-\frac{q^2}{4}}}\arctan\frac{y+\frac{q}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p}-\frac{q^2}{4p^2}}} + C$$

de donde

$$\int \frac{dy}{py^2+qy+r} = \int \varphi(x)dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{pr-\frac{q^2}{4}}}\arctan\frac{y+\frac{q}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p}-\frac{q^2}{4p^2}}} = \int \varphi(x)dx + C_1 \Rightarrow$$

$$\arctan\frac{y+\frac{q}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p}-\frac{q^2}{4p^2}}} = \sqrt{pr-\frac{q^2}{4}}\left[\int \varphi(x)dx + C_1\right] \Rightarrow$$

$$\frac{y+\frac{q}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p}-\frac{q^2}{4p^2}}} = \tan\left[\sqrt{pr-\frac{q^2}{4}}\int \varphi(x)dx + C\right] \Rightarrow$$

de donde la solución general será

$$y(x) = \sqrt{\frac{r}{p}-\frac{q^2}{4p^2}}\tan\left[\sqrt{pr-\frac{q^2}{4}}\int \varphi(x)dx + C\right] - \frac{q}{2p} \qquad \#$$

c. La ED de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = p\frac{y^2}{x^2} + q\frac{y}{x} + r \qquad \#$$

con $p, q, r \in \mathbb{R}$ ($pr \neq 0$), además de Ricatti resulta ser una ED homogénea, véase el Apéndice 11, por lo que también es integrable a través de funciones elementales, con el cambio natural $z = \frac{y}{x}$:

$$x\frac{dz}{dx} + z = pz^2 + qz + r$$

por lo que ahora es factible separar las nuevas variables

$$dz = \frac{dz}{dx}dx \Rightarrow dz = \frac{pz^2 + (q-1)z + r}{x}dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dz}{pz^2 + (q-1)z + r} = \frac{1}{x}dx$$

por lo cual

$$\int \frac{dz}{pz^2 + (q-1)z + r} = \int \frac{1}{x}dx$$

pero, la integral de la izquierda han sido el centro de las ED tratadas en a) y en b), de donde

$$\frac{1}{\sqrt{pr - \frac{(q-1)^2}{4}}} \arctan \frac{z + \frac{(q-1)}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p} - \frac{(q-1)^2}{4p^2}}} = \ln|x| + C_1 \Rightarrow$$

$$\arctan \frac{z + \frac{(q-1)}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p} - \frac{(q-1)^2}{4p^2}}} = \sqrt{pr - \frac{(q-1)^2}{4}}\,(\ln|x| + C_1) \Rightarrow$$

$$\frac{z + \frac{(q-1)}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p} - \frac{(q-1)^2}{4p^2}}} = \tan\left[\sqrt{pr - \frac{(q-1)^2}{4}}\ \ln|x| + C\right]$$

por lo que la solución general será

$$z(x) = \sqrt{\frac{r}{p} - \frac{(q-1)^2}{4p^2}}\ \tan\left[\sqrt{pr - \frac{(q-1)^2}{4}}\ \ln|x| + C\right] - \frac{(q-1)}{2p}$$

o regresando a las variables originales, dado que $z = \frac{y}{x}$

$$y(x) = x\sqrt{\frac{r}{p} - \frac{(q-1)^2}{4p^2}}\ \tan\left[\sqrt{pr - \frac{(q-1)^2}{4}}\ \ln|x| + C\right] - \frac{(q-1)}{2p}x \qquad \#$$

d. La ED de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = p\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + r \qquad \#$$

con $p, r \in \mathbb{R}$ $(pr \neq 0)$, resulta ser una ED susceptible de reducirla a una ED de las ya estudiadas si se le aplica alguna transformación admisible, por ejemplo la más simple una transformación homogénea del tipo

$$y = \alpha(x)z \qquad \#$$

con $\alpha(x)$ a determinar y z la nueva función incógnita, de manera que sustituyendo (ref: 192) en la ED original (ref: 191)

$$\alpha' z + \alpha z' = p\frac{[\alpha(x)z]^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{(\alpha(x)z)}{x} + r \Rightarrow$$

de donde

$$z' = p\alpha\frac{z^2}{x} + \left(\frac{1}{2x} - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)z + \frac{r}{\alpha} \Rightarrow \qquad \#$$

se intentaría determinar α de la condición de que los coeficientes, todos ellos dependen de α, sean proporcionales a una misma función que sólo dependa de la variable x, esto es proporcionales a una misma función $\varphi(x)$ o sea reducirla al caso de la ED b). Para esta ED, esto resulta equivalente a obligar a que el coeficiente en z sea 0:

$$\frac{1}{2x} - \frac{\alpha'}{\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1}{2x} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\ln\alpha = \frac{1}{2x} \Rightarrow d\ln\alpha = \frac{d\ln\alpha}{dx}dx \Rightarrow$$

$$d\ln\alpha = \frac{1}{2x}dx \Rightarrow \int d\ln\alpha = \int\frac{1}{2x}dx \Rightarrow$$

$$\ln\alpha = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C \Rightarrow \ln\frac{\alpha}{\sqrt{|x|}} = \ln C \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{|x|}} = C \Rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{x}} = C \Rightarrow \boxed{\alpha(x) = C\sqrt{x}}$$

pero como basta con una sóla función α, entonces se puede tomar $C = 1$ y por ende

$$\boxed{\alpha(x) = \sqrt{x}} \qquad \#$$

que sustituida en (ref: fa1622)

$$z' = p\sqrt{x}\,\frac{z^2}{x} + \left(\frac{1}{2x} - \frac{\sqrt{x}'}{\sqrt{x}}\right)z + \frac{r}{\sqrt{x}}$$

$$= p\frac{z^2}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}\right)z + \frac{r}{\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$= p\frac{z^2}{\sqrt{x}} + \frac{r}{\sqrt{x}}$$

luego

$$z' = \frac{1}{\sqrt{x}}(pz^2 + r) \qquad \#$$

que es una ED del tipo b) y por tanto de variables separables, luego es integrable al menos a través de cuadraturas

$$dz = z' dx \Rightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{x}}(pz^2 + r)dx$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{pz^2 + r} = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{pz^2 + r} = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p} \int \frac{dz}{z^2 + \left(\sqrt{\frac{r}{p}}\right)^2} = 2\sqrt{x} + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{p}}} \arctan \frac{z}{\sqrt{\frac{r}{p}}} = 2\sqrt{x} + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{pr}} \arctan \sqrt{\frac{p}{r}}\, z = 2\sqrt{x} + C_1 \Rightarrow$$

$$\arctan \sqrt{\frac{p}{r}}\, z = 2\sqrt{pr}\sqrt{x} + \sqrt{pr}\, C_1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{p}{r}}\, z = \tan\left(2\sqrt{pr}\sqrt{x} + C\right)$$

por lo cual

$$z = \sqrt{\frac{r}{p}} \tan\left(2\sqrt{pr}\sqrt{x} + C\right)$$

pero $y = \alpha(x)z \Rightarrow z = \frac{y}{\sqrt{x}}$, luego

$$y(x) = \sqrt{\frac{r}{p}}\sqrt{x} \tan\left(2\sqrt{pr}\sqrt{x} + C\right) \qquad \#$$

e. La ED de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = py^2 + \frac{q}{x}y + \frac{r}{x^2} \qquad \#$$

con $p, q, r \in \mathbb{R}$ ($pr \neq 0$), puede ser tratada como una ED del tipo homogénea generalizada:

$$\left(py^2 + \frac{q}{x}y + \frac{r}{x^2}\right)dx - dy = 0 \qquad \#$$

y será una ED del tipo homogénea generalizada, si existe una k que haga a la ED (ref: 197) homogénea de grado m de homogeneidad, con x, y, dx, dy de grados 1, k, 0, y $k - 1$ respectivamente, dado que

$$z = \frac{y}{x^k} \qquad \#$$

entonces, dicha k será la solución de las ecuaciones, generadas con los grados de homogeneidad de cada término de (ref: 198):

$$2k, \quad (k-1), \quad -2, \quad (k-1).$$

de donde

$$2k = k - 1 = -2$$

cuya solución

$$k = -1$$

por lo que el cambio será

$$z = yx$$

que sustituida ($y = \frac{z}{x}$) en la ED original (ref: 197)

$$\frac{dy}{dx} = py^2 + \frac{q}{x}y + \frac{r}{x^2} \Rightarrow \frac{xz' - z}{x^2} = \frac{z^2}{x^2} + \frac{q}{x}\frac{z}{x} + \frac{r}{x^2} \Rightarrow$$

$$z' = \frac{1}{x}[z^2 + (q+1)z + r]$$

que ya es de variables separables, por lo que

$$dz = z'dx \Rightarrow$$

$$dz = \frac{1}{x}[z^2 + (q+1)z + r]dx \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{z^2 + (q+1)z + r} = \frac{1}{x}dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + (q+1)z + r} = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow$$

pero, la integral de la izquierda ya fue tratada en c), de donde de nuevo

$$\frac{1}{\sqrt{pr - \frac{(q-1)^2}{4}}} \arctan \frac{z + \frac{(q-1)}{2p}}{\sqrt{\frac{r}{p} - \frac{(q-1)^2}{4p^2}}} = \ln|x| + C_1 \Rightarrow$$

por lo que la solución general será

$$z(x) = \sqrt{\frac{r}{p} - \frac{(q-1)^2}{4p^2}} \tan\left[\sqrt{pr - \frac{(q-1)^2}{4}} \ln|x| + C\right]$$

$$- \frac{(q-1)}{2p}$$

o regresando a las variables originales, dado que $z = yx$

$$y(x) = \sqrt{\frac{r}{p} - \frac{(q-1)^2}{4p^2}} \frac{\tan\left[\sqrt{pr - \frac{(q-1)^2}{4}} \ln|x| + C\right]}{x} - \frac{(q-1)}{2p}\frac{1}{x} \qquad \#$$

6. Solución general, conocida una solución particular. La ED de *Ricatti* se caracteriza, a diferencia de otras ED no lineales, en que se puede construir su solución general a partir del conocimiento de una de sus soluciones particulares. En efecto, se cuenta con el siguiente

Theorem *Conocida una solución particular de la ED de Ricatti, ésta puede siempre reducirse a una ED de Bernoulli y por consiguiente a una ED lineal.*

Proof *Sea $y_p(x)$ la solución particular conocida de la*

ED de Ricatti, esto es

$$\frac{dy_p}{dx} \equiv P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x) \qquad \#$$

Se busca la solución general de la ED de Ricatti, por analogía con la ED lineal vista en el Apéndice 13, como

$$y_g = y_p(x) + z \qquad \#$$

*donde y_g representa a la solución general por determinarse de la ED de Ricatti, donde a su vez se introduce la nueva función incógnita z y por tanto se tiene libertad para que ésta tenga alguna restricción (en las lineales la z resultaba ser la solución general de la ED homogénea correspondiente) para ver cuál es esa restricción se sustituye (*ref: 202*) en la ED original (*ref: 197*)*

$$\frac{dy_g}{dx} \equiv P(x)y_g^2 + Q(x)y_g + R(x) \Rightarrow$$

$$\frac{d(y_p(x)+z)}{dx} \equiv P(x)(y_p(x)+z)^2 + Q(x)(y_p(x)+z) + R(x) \Rightarrow$$

$$y_p'(x) + z' \equiv P(x)(y_p(x)+z)^2 + Q(x)(y_p(x)+z) + R(x) \Rightarrow$$

$$z' \equiv \underbrace{[-y_p'(x) + P(x)y_p^2(x) + Q(x)y_p(x) + R(x)]}_{\equiv 0} +$$

$$[2y_p'(x)P(x) + Q(x)]z + P(x)z^2$$

*de donde, por (*ref: 201*)*

$$z' - [2y_p'(x)P(x) + Q(x)]z \equiv P(x)z^2 \qquad \#$$

que es una ED de Bernoulli y como se sabe se puede reducir a una lineal:

$$z^{-2}z' - [2y_p'(x)P(x) + Q(x)]zz^{-2} \equiv P(x) \Rightarrow$$

$$z^{-2}z' - [2y_p'(x)P(x) + Q(x)]z^{-1} \equiv P(x) \overset{u=z^{-1}}{\Rightarrow}$$

$$-u' - [2y_p'(x)P(x) + Q(x)]u \equiv P(x)$$

que en efecto es la ED lineal al menos integrable en cuadraturas

$$u' + [2y_p'(x)P(x) + Q(x)]u \equiv -P(x) \qquad \#$$

lo cual significa que la ED de Ricatti puede llevarse directamente a una lineal mediante el cambio de función incógnita

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{u(x)} \qquad \#$$

Finalmente vale de nuevo observar que debido al cambio de función incógnita (ref: 205), a diferencia de la ED lineal la ED de Ricatti, puede tender a infinito para una x finita, es decir $y(x) \to \infty$, si hay algún x^* para el que $u(x^*) = 0$ y $x \to x^*$, esto significa que la gráfica de la solución puede tener asíntotas vérticales, precisamente en $x = x^*$, incluso cuando P, Q y R estén definidas y sean continuas en todo R. Esto ya había sido detectado en ED de la forma $y' = f(y)$ que a su vez son de Ricatti, como en la ED $y' = y^2$, y la ED $y' = y^2 - 2y + 1$.

a. *Observaciones*. De la simple observación en (ref: 201)

$$\frac{dy_p}{dx} \equiv P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x)$$

se puede deducir una solución particular de la ED de *Ricatti*

i) Si $R(x) = -[P(x)b^2 + Q(x)b] \Rightarrow \boxed{y_p(x) = b}$ es solución

ii) Si $R(x) = -P(x)x^2 \Rightarrow \boxed{y_p(x) = x}$ (en tal caso $1 \equiv Q(x)x \Rightarrow$ $\boxed{Q(x) \equiv \frac{1}{x}}$)

7. *Estructura de la solución general de la ED de Ricatti*.

Para hallar tal estructura basta recordar que si se conoce una solución particular de la ED de *Ricatti*, ésta puede reducirse a una ED lineal con el cambio $y_g = y_p(x) + \frac{1}{u}$, pero la estructura de la solución general de una lineal como se sabe es lineal en C, de la forma (ref: 150a)

$$u = A(x) + B(x)C$$

luego al ser sustituida en la forma como se anda buscando como lineal

$$y_g = y_p(x) + \frac{1}{u} \Rightarrow y_g = y_p(x) + \frac{1}{A(x) + B(x)C} \Rightarrow$$

$$y_g = \frac{y_p[A + BC] + 1}{A(x) + B(x)C} \Rightarrow y_g = \frac{[y_pA + 1] + y_pBC}{A(x) + B(x)C}$$

de la que se obtiene que la estructura de la solución general de la ED de *Ricatti* es la de una función racional lineal en C

$$y_g(x) = \frac{A_1(x) + B_1(x)C}{A(x) + B(x)C} \qquad \#$$

donde $A_1(x) = y_p(x)A(x) + 1$ y $B_1(x) = y_p(x)B(x)$.

E inversamente la estructura de la solución general como una función racional lineal en C es exclusiva de la ED de *Ricatti*. Falta pues demostrar que si la función racional lineal en C (ref: 206) con $A_1B - AB_1 \neq 0$, es la solución general de una ED, entonces dicha ED es una ED de *Ricatti*. En efecto, despejando C de (ref: 206)

$$y_g = \frac{A_1 + B_1C}{A + BC} \Rightarrow y_g[A + BC] = A_1 + B_1C \Rightarrow C = \frac{A_1 - y_gA}{y_gB - B_1}$$

y derivándola con respecto a x

$$C' \equiv \left[\frac{A_1(x) - y_g(x)A(x)}{y_g(x)B(x) - B_1(x)} \right]' \Rightarrow$$

$$0 \equiv \frac{(y_gB - B_1)(A_1 - y_gA)' - (A_1 - y_gA)(y_gB - B_1)'}{(y_gB - B_1)^2} \Rightarrow$$

$$0 \equiv (y_gB - B_1)(A_1' - y_g'A - y_gA') - (A_1 - y_gA)(y_g'B + y_gB' - B_1') \Rightarrow$$

$$0 \equiv [-A(y_gB - B_1) - B(A_1 - y_gA)]y_g' - (A'B - B'A)y_g^2 -$$
$$- (-A_1'B + A'B_1 + A_1B' - AB_1')y_g - (B_1A_1' - A_1B_1')$$

de donde

$$0 \equiv [AB_1 - BA_1]y_g' - (A'B - B'A)y_g^2 - (-A_1'B + A'B_1 + A_1B' - AB_1')y_g -$$
$$- (B_1A_1' - A_1B_1')$$

y definitivamente

$$y_g' \equiv P_1(x)y_g^2 + Q_1(x)y_g + R_1(x) \qquad \#$$

donde $P_1(x) = \frac{A'B-B'A}{A(x)B_1(x)-B(x)A_1(x)}$, $Q_1(x) = \frac{A'B_1+A_1B'-A_1'B-AB_1'}{AB_1-BA_1}$, $R_1(x) = \frac{B_1A_1'-A_1B_1'}{AB_1-BA_1}$, que en efecto es de nuevo una ED de *Ricatti*. Y esto es lo que se quería demostrar.

8. Solución general de la ED de Ricatti, conocidas dos soluciones particulares. Sean y_1 , y_2 dos soluciones particulares conocidas de la ED de *Ricatti*, entonces la ED lineal a la que se reduce la ED de *Ricatti*, tendrá una solución particular de la lineal no homogénea

$$u_p(x) = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)} \qquad \#$$

y por tanto para la integración de la lineal basta con una cuadratura, y así obtener la solución general de la ED lineal

$$u = u_p(x) + z = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)} + z = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)} + e^{-\int [2P(x)y_1(x)+Q(x)]dx}$$

donde z representa la solución general de la ED lineal homogénea correspondiente, y donde a su vez se necesita la mencionada cuadratura, para así tener que la solución general de la ED de *Ricatti* será

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u} = y_1(x) + \frac{1}{\frac{1}{y_2(x)-y_1(x)} + e^{-\int [2P(x)y_1(x)+Q(x)]dx}} \qquad \#$$

Con esto se ha obtenido de hecho la demostración del Teorema que diría que *si se conocen 2 soluciones particulares de la ED de Ricatti, entonces la solución general de la misma se obtiene mediante una sola cuadratura.*

9. *Solución general de la ED de Ricatti, conocidas tres soluciones particulares*. Sean y_1 , y_2, y y_3 las tres soluciones particulares conocidas de la ED de *Ricatti*, entonces la ED lineal a la que se reduce la ED de *Ricatti*, podrá expresarse sin necesidad de ninguna cuadratura. En efecto, las funciones u_1 y u_2, dadas por

$$u_1(x) = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)},\ u_2(x) = \frac{1}{y_3(x) - y_1(x)}$$

representan a 2 soluciones particulares de la ED lineal a la que se reduce la ED de *Ricatti*, entonces la solución general de dicha ED lineal será

$$u(x) = \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)} + C\left(\frac{1}{y_3(x) - y_1(x)} - \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}\right) \qquad \#$$

sin necesidad de ninguna cuadratura.

Otra manera de representar en este caso a la solución general es, dado que de $y = y_1 + \frac{1}{u}$, se sigue que $u = \frac{1}{y-y_1}$ $\therefore$ sustituida en (ref: 210)

$$\frac{1}{y-y_1} = \frac{1}{y_2-y_1} + C\left(\frac{1}{y_3-y_1} - \frac{1}{y_2-y_1}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y-y_1} - \frac{1}{y_2-y_1} = C\left(\frac{1}{y_3-y_1} - \frac{1}{y_2-y_1}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{y-y_1} - \frac{1}{y_2-y_1}}{\frac{1}{y_3-y_1} - \frac{1}{y_2-y_1}} = C \Rightarrow \frac{\frac{(y_2-y_1)-(y-y_1)}{(y-y_1)(y_2-y_1)}}{\frac{(y_2-y_1)-(y_3-y_1)}{(y_3-y_1)(y_2-y_1)}} = C \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{y_2-y}{(y-y_1)(y_2-y_1)}}{\frac{y_2-y_3}{(y_3-y_1)(y_2-y_1)}} = C \Rightarrow \frac{\frac{y_2-y}{(y-y_1)}}{\frac{y_2-y_3}{(y_3-y_1)}} = C \Rightarrow$$

$$\frac{-\frac{y-y_2}{(y-y_1)}}{-\frac{y_3-y_2}{(y_3-y_1)}} = C \Rightarrow \frac{\frac{y-y_2}{(y-y_1)}}{\frac{y_3-y_2}{(y_3-y_1)}} = C$$

de donde finalmente surge la representación equivalente buscada de la integral general de la ED de *Ricatti*

$$\frac{y-y_2}{y-y_1} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} = C \qquad \#$$

10. *Propiedad de 4 soluciones particulares cualesquiera de la ED de Ricatti*. Sean y_1 , y_2, y_3, y y_4 las cuatro soluciones particulares conocidas de la ED de *Ricatti*, entonces sustituyéndola ($y = y_4$) en la forma obtenida en el punto 9 anterior, se cumplirá, para cualesquiera cuatro soluciones particulares de la ED de *Ricatti*, la propiedad expresada en la identidad

$$\frac{y_4-y_2}{y_4-y_1} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} \equiv C \qquad \#$$

11. *Ecuación especial de Ricatti*. Por ED especial de *Ricatti* se sobreentiende

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^m,\ (A, B, m \in \mathbb{R}) \qquad \#$$

La solución general de esta ED, bajo ciertas condiciones, se expresa al menos en cuadraturas (e incluso a través de funciones elementales), además puede ser obtenida sin conocer ninguna solución particular de la misma.

La ED especial de *Ricatti* se integra fácilmente en los casos particulares

: $m = 0$ y $m = -2$ (¿Por qué?)

Finalmente la ED especial de *Ricatti* es integrable a través de funciones elementales para todas aquellas m, tales que

$$\frac{m}{2m+4} \in \mathbb{Z} \qquad \#$$

En efecto, se puede demostrar que si se cumple (ref: 214), entonces mediante transformaciones admisibles de la variable y transformaciones admisibles, racional lineales, de la función incógnita, la ED de Ricatti puede reducirse al caso particular $m = 0$, o bien reducirse a la ED: $\frac{dy}{dx} = p\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + r$.

ED Exacta

Todos los tipos de ED estudiados hasta ahora, excepto la ED de *Ricatti* se integran en cuadraturas. Ahora se estudiará un tipo de ED al cual se reducen muchas de las ya estudiadas y otras de nuevo tipo que serán también introducidas y por ello reviste una importancia teórica primordial. Las ED que se estudiarán se representarán con ecuaciones tipo (ref: 113)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

que involucran en su parte izquierda la forma diferencial $Mdx + Ndy$ y con M y N funciones que por hipótesis son funciones continuas respecto de sus variables y por necesidad en regiones D *símplemente conexas* y en ninguno de sus puntos tales funciones se reduce simultáneamente a 0, o sea que no admite puntos singulares y evidentemente tampoco admite soluciones singulares.

1. *Definición 1*. La forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ se dice *exacta*, si existe una función U tal que su diferencial total dU es la forma diferencial $Mdx + Ndy$. En símbolos:

$$Mdx + Ndy \text{ exacta} \Leftrightarrow (\exists U)\ dU = Mdx + Ndy \qquad \#$$

Definición 2. La ED $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se dice *exacta*, si la forma diferencial $Mdx + Ndy$ es exacta. En otras palabras, la ED (ref: 113) es *exacta*, si existe una función U tal que su diferencial total dU es la forma diferencial $Mdx + Ndy$. En símbolos:

$$Mdx + Ndy = 0 \text{ ED exacta} \Leftrightarrow (\exists U)\ dU = Mdx + Ndy \qquad \#$$

De la anterior definición se sigue que las ED exactas pueden escribirse como

$$dU = 0 \qquad \#$$

luego su integral general toma la forma

$$U(x,y) = C \qquad \#$$

siendo C una constante y U una integral de la ED.

Debido a que no resulta fácil, aun sabiendo que la ED es exacta, reagrupar los términos de la ED para asegurar la existencia y obtención de la función U, es que en forma natural surgen las preguntas siguientes:

•¿Cómo saber, a partir de la forma de la ED $Mdx + Ndy = 0$, cuándo es exacta? y una vez sabiendo que ya es exacta ¿Cómo construir la función U? Para ello se introduce el

2. **Criterio de cuando una ED es exacta**. Se intentará deducir el criterio.

a. Se puede partir de que la ED (ref: 113) $Mdx + Ndy = 0$, con M, N, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ funciones continuas en la región D simplemente conexa, es una ED exacta. Por ser exacta, entonces existe U, tal que

$$Mdx + Ndy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \qquad \#$$

donde la primera identidad es debido a la definición de ED exacta y la segunda es la fórmula de la diferencial total de una función de varias variables. Para valores arbitrarios de las diferenciales dx y dy de las identidades extremas de (ref: 219), se obtiene que

$$\begin{cases} M \equiv \frac{\partial U}{\partial x} \\ N \equiv \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases} \qquad \#$$

y si ahora derivamos parcialmente la primera respecto a y y la segunda respecto a x

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \end{cases} \qquad \#$$

Obligando a que las parciales $\frac{\partial N}{\partial x}$ y $\frac{\partial M}{\partial y}$, al igual que M y N sean continuas en D, cosa que ya se había supuesto, se tendrá entonces que sus iguales las segundas parciales mixtas sean también continuas en D, condición bajo la cual se cumple el Teorema de Cálculo Diferencial de funciones de varias variables que asegura que en tal caso dichas derivadas parciales son iguales:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \qquad \#$$

pero entonces sus iguales, parciales de primer orden, de (ref: 222) serán iguales

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \#$$

Es así que de hecho se ha obtenido que la condición (ref: 224) es la *condición necesaria* para que la ED (ref: 113), con M, N, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y} \in \mathbf{C}_D$, sea exacta.

b. E inversamente habría que demostrar que esta misma condición (ref: 224) resulta ser *condición suficiente* para que la ED (ref: 113), sea exacta. Ahora se puede partír de que por hipótesis se cumple la identidad (ref: 224) : $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ y se desea demostrar que existe la función U, que satisface (ref: 219) : $Mdx + Ndy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$ (y entonces por definición $Mdx + Ndy = 0$ es una ED exacta). La demostración se hará directamente construyendo la función U, para ello a su vez se partirá de que para dx y dy arbitrarias se deberá cumplir con (ref: 219) : $Mdx + Ndy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, pero entonces se sigue (ref: 220)

$$\begin{cases} M(x,y) \equiv \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \\ N(x,y) \equiv \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \end{cases}$$

y partiendo, por ejemplo, de la primera identidad es inmediato darse cuenta que la satisface (integrando respecto a x)

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \varphi(y) \qquad \#$$

donde la integral tiene sentido, ya que la región D, en la que está definida M, fue tomada a proposito como simplemente conexa, con $(x_0,y) \in D$ y donde a su vez φ es una función arbitraria que sólo depende de y, que se considera una función diferenciable y se puede determinar de manera que la función U propuesta en (ref: 225) satisfaga la segunda identidad de (ref: 220): $N(x,y) \equiv \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$, de donde se tendrá que derivar con respecto a y la U de (ref: 225) deberá satisfacer:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \equiv \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \varphi(y)\right] \equiv N(x,y)}$$

de donde fijándose en esta última ecuación

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \frac{d}{dy}\varphi(y) \equiv N(x,y)$$

aquí la derivada de la integral se entiende como la derivada respecto del parámetro y de una integral que depende de dicho parámetro y

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y}M(\xi,y)d\xi + \frac{d}{dy}\varphi(y) \equiv N(x,y)$$

la derivación respecto del parámetro y, efectuada dentro de la integral es completamente legal, dado que se cumple con la condición de que el integrando $M(x,y)$ por hipótesis es continua respecto de x y y junto con su $\frac{\partial M}{\partial y}$ en D y la región D es simplemente conexa, luego sustituyendo a $\frac{\partial}{\partial y}M(\xi,y)$ por $\frac{\partial}{\partial \xi}N(\xi,y)$, dado que su identidad es el punto de partida de esta deducción

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial \xi}N(\xi,y)d\xi + \frac{d}{dy}\varphi(y) \equiv N(x,y)$$

de donde finalmente simplificando por Newton Leibniz

$$N(\xi,y)|_{\xi=x_0}^{\xi=x} + \frac{d}{dy}\varphi(y) \equiv N(x,y)$$

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \frac{d}{dy}\varphi(y) \equiv N(x,y)$$

$$-N(x_0,y) + \frac{d}{dy}\varphi(y) \equiv 0$$

de la que se puede determinar φ de

$$\frac{d}{dy}\varphi(y) \equiv N(x_0,y) \Rightarrow d\varphi \equiv \left(\frac{d\varphi(y)}{dy}\right)dy \Rightarrow$$

$$d\varphi \equiv N(x_0,y)dy \Rightarrow \int_{0}^{\varphi} d\Phi \equiv \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta$$

con lo que

$$\varphi(y) \equiv \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta + C \qquad \#$$

con $(x_0,y_0) \in D$, luego sustituyéndola en (ref: 225)

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta + C$$

como basta con una sola función U por lo que se puede tomar $C = 0$ y así

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta \qquad \#$$

Como si se pudo construir la función U que satisface a (ref: 219) : $Mdx + Ndy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, y por consiguiente (ref: 113) $Mdx + Ndy = 0$ es una ED exacta.

De hecho con esto hemos demostrado el siguiente:

Teorema. (Condición necesaria y suficiente para que una ED sea exacta) Si $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in \mathbf{C}_D$, con D región simplemente conexa, la ED $Mdx + Ndy = 0$ es una ED exacta, si y sólo si: $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$. Bajo esta condición su integral general es:

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta = C \qquad \#$$

c. Obsérvese que alternativamente se puede partir en todo el razonamiento de la construcción de la función U no de la 1a. identidad, sino de la 2a. de (ref: 220):

$$N(x,y) \equiv \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$

entonces

$$U(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)d\eta + \psi(x)$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{y_0}^{y} N(x,\eta)d\eta + \psi(x)\right] \equiv M(x,y)$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial x}N(x,\eta)d\eta + \frac{d}{dx}\psi(x) \equiv M(x,y)$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial \eta}M(x,\eta)d\eta + \frac{d}{dx}\psi(x) \equiv M(x,y)$$

$$[M(x,\eta)]_{\eta=y_0}^{\eta=y} + \frac{d}{dx}\psi(x) \equiv M(x,y)$$

$$M(x,y) - M(x,y_0) + \frac{d}{dx}\psi(x) \equiv M(x,y)$$

$$\frac{d}{dx}\psi(x) \equiv M(x,y_0)$$

$$\psi(x) \equiv \int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)d\xi + C_1$$

$$U(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)d\eta + \int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)d\xi$$

obteniéndose así su integral general U equivalente a (ref: 228)

$$\int_{y_0}^{y} N(x,\eta)d\eta + \int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)d\xi = C \qquad \#$$

3. El Problema de Cauchy de la ED exacta.

La solución del Problema de Cauchy de una ED exacta

$$\begin{cases} Mdx + Ndy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \#$$

con $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$, $(x_0,y_0) \in D$ y $M^2(x_0,y_0) + N^2(x_0,y_0) \neq 0$, entonces es suficiente con tomar la solución particular con los límites inferiores de las integrales iguales a la condición inicial x_0,y_0 y por tanto con $C = 0$ en la correspondiente integral general (ref: 228) o (ref: 229)

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta = 0, \text{ o bien} \\ \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)d\eta + \int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)d\xi = 0 \end{cases} \qquad \#$$

cada una de las cuales define una solución única.

En efecto, se puede considerar la 1a. de las soluciones particulares de (ref: 230) y denotar a su parte izquierda como hasta ahora

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta$$

para la cual se cumplen las condiciones del Teorema de la función implícita: i) que existe un rectángulo cerrado $\bar{R}$ en la región simplemente conexa D, donde U y sus parciales son continuas, ii) la función U, por su definición, en (x_0,y_0) se reduce a 0, iii) al menos una de las parciales involucradas es diferente de 0, que en símbolos:

$$\begin{cases} i)(\exists \bar{R} \subset D)U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \in \mathbf{C}_{\bar{R}} \\ ii)U(x_0,y_0) = 0 \\ ii)\left(\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \end{cases}$$

por lo que dicho Teorema de la Función Implícita asegura, con digamos $\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial y} = N(x_0,y_0) \neq 0$, la existencia de la solución particular $y = y(x)$, con $y(x_0) = y_0$, como definida y continuamente diferenciable en una cierta vecindad $V_h(x_0)$ con centro en x_0 y de cierto radio h.

•Recuérdese finalmente que si simultáneamente $M(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) = 0$, entonces se tiene por definición un *punto singular* (ya que $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ y en (x_0,y_0) en este caso la $\frac{dy}{dx}$ queda indeterminada) del problema de Cauchy y las gráficas de las soluciones adyacentes al punto (x_0,y_0) hay que buscarlas de cualquiera de las fórmulas de (ref: 230), sin embargo no puede garantizarse ni la existencia ni la unicidad de la solución de dicho problema de Cauchy.

Factores de Integración

1. **ED exactas y su alternativa los factores de integración**. Dado que las ED exactas siempre pueden integrarse en cuadraturas, entonces surge en forma natural plantearse si las ED no exactas (aquellas que no cumplen con la condición necesaria y suficiente para ser exactas: $\frac{\partial M}{\partial y} \not\equiv \frac{\partial N}{\partial x}$) pueden reducirse a ED exactas.

Resulta que en muchos casos es posible hacer esta reducción. En forma más precisa es posible hallar una función μ ($\mu = \mu(x,y)$ llamada *factor de integración*) tal que al multiplicar la ED no exacta por dicho factor μ sea transformada en una exacta, en símbolos:

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0; \left(\frac{\partial M}{\partial y} \not\equiv \frac{\partial N}{\partial x} \right)} \qquad \#$$

se transforma en

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0 \qquad \#$$

que al suponerla ya exacta se tendrá que existe una función U (llamada integral de la ED) de manera que

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = dU(x,y) = 0$$

de donde

$$U(x,y) = C$$

para ello se presupone que $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in \mathbf{C}_D$, con D una región simplemente conexa y en ningún punto de esta región M y N no se reducen a 0 simultáneamente y del factor de integración μ se le impone la restricción de que no sea 0 y que admita derivadas parciales de primer orden continuas. Ahora si tomando en cuenta la condición necesaria y suficiente para que (ref: 232) sea exacta se tendrá

$$\boxed{\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0, \left(\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \right)} \qquad \#$$

pero la última condición para que la ED sea exacta significa

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} \equiv \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} \equiv \mu \frac{\partial N}{\partial x} - \mu \frac{\partial M}{\partial y}$$

y así se obtiene

$$\boxed{M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} \equiv \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)} \qquad \#$$

la cual por ser una ED en derivadas parciales de primer orden con función incógnita μ, no es más fácil de integrar que la ED original. Pero los problemas original (ref: 231) y transformado (ref: 233) – (ref: 234) son equivalentes, más aún resulta que en ciertos casos particulares de la ED parcial (ref: 234) a la que finalmente se redujo todo el problema original se pueden resolver. Por ello se puede estudiar estos casos particulares:

a. **Factor de integración que sólo dependa de la variable** x. Si en la ED no exacta (ref: 231) por hipótesis $\mu = \mu(x)$, entonces $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ y por ende la ED parcial (ref: 234) al que finalmente se redujo todo el problema queda como

$$-N\frac{\partial \mu}{\partial x} \equiv \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow \frac{\frac{d\mu(x)}{dx}}{\mu} \equiv \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}{-N} \Rightarrow$$

$$\frac{d\ln\mu}{dx} \equiv \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}{-N}$$

pero en esta última expresión la parte izquierda es declaradamente una función de la variable x, lo cual por compatibilidad debe ser también la parte derecha, luego esta es la condición para lograr obtener la μ

$$\frac{d\ln\mu}{dx} \equiv \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} \overset{not}{\equiv} \varphi(x) \;\therefore$$

$$\frac{d\ln\mu}{dx} \equiv \varphi(x) \Rightarrow d\ln\mu = \left(\frac{d\ln\mu}{dx}\right)dx \Rightarrow d\ln\mu \equiv \varphi(x)dx \Rightarrow$$

$$\int d\ln\mu \equiv \int \varphi(x)dx \Rightarrow \ln\mu \equiv \int \varphi(x)dx + C$$

y debido a que basta con una sola μ se puede tomar $C = 0$, con lo que se concluye:

$$\boxed{\mu(x) \equiv e^{\int \varphi(x)dx}} \qquad \#$$

Si aún se tuviera alguna duda de que (ref: 235) es un factor de integración de la ED (ref: 231). En efecto, la identidad (ref: 234) se reduce a una identidad evidente:

$$-N\frac{\partial \mu}{\partial x} \equiv \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$-N\frac{de^{\int \varphi(x)dx}}{dx} \equiv e^{\int \varphi(x)dx}\varphi(x)(-N)$$

$$-Ne^{\int \varphi(x)dx}\varphi(x) \equiv -e^{\int \varphi(x)dx}\varphi(x)N$$

$$-N\varphi(x) \equiv -\varphi(x)N$$

$$1 \equiv 1$$

b. **Factor de integración que sólo dependa de la función incógnita** y. Si en la ED no exacta (ref: 231) por hipótesis $\mu = \mu(y)$, entonces $\frac{\partial \mu(y)}{\partial x} = 0$ y por ende la ED parcial (ref: 234) a la que finalmente se redujo todo el problema queda como

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} \equiv \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow \frac{\frac{d\mu(y)}{dy}}{\mu} \equiv \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M} \Rightarrow$$

$$\frac{d\ln\mu}{dy} \equiv \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

pero en esta última expresión la parte izquierda es declaradamente una función de la función incógnita y, lo cual por compatibilidad debe ser también la parte derecha, luego ésta es la condición para lograr obtener la μ

$$\frac{d(\ln\mu(y))}{dy} \equiv \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \overset{not}{\equiv} \psi(y) \;\therefore$$

$$\frac{d\ln\mu}{dy} \equiv \psi(y) \Rightarrow d\ln\mu = \left(\frac{d\ln\mu}{dx}\right)dx \Rightarrow d\ln\mu \equiv \psi(y)dy \Rightarrow$$

$$\int d\ln\mu \equiv \int\psi(y)dy \Rightarrow \ln\mu \equiv \int\psi(y)dy + C$$

y debido a que basta con una sola μ se puede tomar $C = 0$, con lo que se concluye

$$\boxed{\mu(y) \equiv e^{\int\psi(y)dy}} \qquad \#$$

c. Factor de integración que sólo depende de cierta función $\omega(x,y)$. Si en la ED no exacta (ref: 231) por hipótesis se toma a

$$\mu = (\mu\circ\omega)(x,y) \overset{def}{=} \mu(\omega(x,y)) \qquad \#$$

, entonces la ED parcial (ref: 234) a la que finalmente se redujo todo el problema queda como

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} \equiv \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow$$

$$M\frac{d\mu(\omega)}{d\omega}\frac{d\omega}{dy} - N\frac{\partial\mu(\omega)}{\partial\omega}\frac{d\omega}{dx} \equiv \mu(\omega)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left(M\frac{d\omega}{dy} - N\frac{d\omega}{dx}\right) \equiv \mu(\omega)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{d\mu}{dy}}{\mu(\omega)} \equiv \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{d\omega}{dy} - N\frac{d\omega}{dx}}$$

$$\frac{d(\ln\mu(\omega))}{d\omega} \equiv \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{d\omega}{dy} - N\frac{d\omega}{dx}} \overset{not}{\equiv} \Phi(\omega)$$

pero en esta última expresión la parte izquierda es declaradamente una función de la variable ω, lo cual conlleva que también la parte derecha debería serlo, luego ésta es la condición para lograr obtener la μ

$$\frac{d(\ln\mu(\omega))}{d\omega} \equiv \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{d\omega}{dy} - N\frac{d\omega}{dx}} \overset{not}{\equiv} \Phi(\omega) \;\therefore$$

$$\frac{d(\ln\mu)}{d\omega} \equiv \Phi(\omega) \Rightarrow d\ln\mu = \left(\frac{d(\ln\mu)}{d\omega}\right)d\omega \Rightarrow$$

$$d(\ln\mu) \equiv \Phi(\omega)d\omega \Rightarrow \int d(\ln\mu) \equiv \int\Phi(\omega)d\omega \Rightarrow$$

$$\ln\mu \equiv \int\Phi(\omega)d\omega + C$$

y debido a que basta con una sola μ se puede tomar $C = 0$, con lo que se concluye

$$\boxed{\mu(\omega) \equiv e^{\int\Phi(\omega)d\omega}} \qquad \#$$

d. Otros factores de integración.

i. Si $\omega(x,y) = x$ y si $\omega(x,y) = y$, entonces respectivamente se obtienen las mismas condiciones arriba deducidas:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} \equiv \varphi(x),\; \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \equiv \psi(y)$$

con los factores de integración

$$\mu(x) \equiv e^{\int\varphi(x)dx},\; \mu(y) \equiv e^{\int\psi(y)dy}$$

ii. Si $\boxed{\omega(x,y) = xy}$, entonces la condición: $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{d\omega}{dy} - N\frac{d\omega}{dx}} \equiv \Phi(\omega)$ se reduce a

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny} \equiv \Phi(xy) \qquad \#$$

con el factor de integración

$$\boxed{\mu(xy) \equiv e^{\int\Phi(xy)d(xy)}} \qquad \#$$

iii. Si $\boxed{\omega(x,y) = x + y}$, entonces la condición: $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{d\omega}{dy} - N\frac{d\omega}{dx}} \equiv \Phi(\omega)$ se reduce a

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M - N} \equiv \Phi(x + y) \qquad \#$$

con el factor de integración

$$\boxed{\mu(x+y) \equiv e^{\int\Phi(x+y)d(x+y)}} \qquad \#$$

iv. Si $\boxed{\omega(x,y) = x^2 + y^2}$, entonces la condición:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{d\omega}{dy}-N\frac{d\omega}{dx}} \equiv \Phi(\omega)$$ se reduce a

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{2My - 2Nx} \equiv \Phi(x^2 + y^2) \qquad \#$$

con el factor de integración

$$\boxed{\mu(x^2 + y^2) \equiv e^{\int \Phi(x^2+y^2)d(x^2+y^2)}} \qquad \#$$

2. Soluciones Singulares a través del Factor de Integración. Si se tiene (ref: 231)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \text{ , } \left(\frac{\partial M}{\partial y} \not\equiv \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

y $\mu = \mu(x,y)$ resulta ser su factor integrante, entonces se tendrá (ref: 233)

$$\mu Mdx + \mu Ndy = 0 \left(\frac{\partial \mu M}{\partial y} \equiv \frac{\partial \mu N}{\partial x} \right)$$

lo que significa que la ED transformada ya es exacta, es decir existe U tal que

$$\mu Mdx + \mu Ndy = dU$$

de donde

$$Mdx + Ndy = \frac{1}{\mu}dU \qquad \#$$

por ello la ED original $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ puede escribirse como

$$\frac{1}{\mu}dU = 0 \qquad \#$$

que se reduce a 2 ecuaciones

$$\begin{cases} dU = 0 \\ \frac{1}{\mu} = 0 \end{cases} \qquad \#$$

donde la primera produce la *integral general* $U(x,y) = C$, mientras que la segunda puede generar una una *solución singular*. Esto significa que las soluciones singulares sólo pueden ser aquellas, a lo largo de las cuales el factor de integración se reduzca a ∞, o sea aquella solución que al aproximarse a élla el factor de integración $\mu \to \infty$.

•De esto se puede concluir con un *procedimiento* para determinar las **soluciones singulares** consistente en:

a. Hallar las curvas a lo largo de las cuales el factor de integración se reduce a ∞

b. Se comprueba si las curvas encontradas resultan ser curvas integrales, es decir, si las curvas determinadas en i) son soluciones de la ED.

c. Comprobar si las soluciones encontradas se hallan contenidas en la solución general o no.

d. Aquellas soluciones que no se encuentran contenidas en la solución general serán las soluciones singulares de la ED.

e. Si resulta que μ no se reduce a ∞, o se reduce a ∞ sólo en puntos aislados, entonces la ED no contiene soluciones singulares.

3. Propiedades generales del factor integrante. Arriba ya fue analizado el papel que puede jugar el factor de integración en la busqueda de la integral general y las soluciones singulares de la ED (ref: 231)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Ahora se plantea el estudio de propiedades generales del factor de integración.

Se supondrá que M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x} \in \mathbf{C}_D$, con D una región de $\mathbb{R}^2$ simplemente conexa, además de que para $\forall(x,y) \in D$: $M(x,y) \cdot N(x,y) \neq 0$ y sobre μ se impondrán las mismas restricciones de antes.

Bajo estas hipótesis se sigue que por cada $(x_0,y_0) \in D$ pasa una única solución del Problema de Cauchy y que la integral $U(x,y)$ obtenida con base en el factor de integración admite derivadas parciales hasta de 2o. orden. Esto último se debe a que si μ es el factor de integración y U su correspondiente integral, entonces

$$\mu M dx + \mu N dy = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy$$

y luego de que las diferenciales dx y dy son arbitrarias se obtiene:

$\begin{cases} \mu M = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \mu N = \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$, pero tanto μ como M y N admiten ser continuas, junto con sus derivadas parciales de primer orden, entonces sus partes derechas admitirán las parciales de segundo orden y también serán continuas. Resulta que bajo las hipótesis que aseguran la existencia de la integral general para la ED (ref: 231) ocurre que también se puede garantizar la existencia del factor integrante.

a. *Teorema de existencia del factor integrante*.

Si para la ED (ref: 231) se puede asegura la existencia de la integral general $U(x,y) = C$, donde U es la integral de la ED en cierta región D, donde a su vez se cuenta con que tiene derivadas parciales hasta de 2o. orden que son continuas. Entonces también se garantiza la existencia para la ED de factor integrante. ¿por qué?

Demostración. Puesto que U es integral de la ED (ref: 231)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \Rightarrow (\exists U)dU = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy = 0$$

donde las últimas 2 igualdades se sobreentienden bajo la hipótesis de que ocurre a lo largo de las soluciones de la ED (ref: 231), esto es en la última igualdad para las dy que satisfacen la ED (ref: 231) y dx arbitraria, es decir que respecto a dx y dy se satisface el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy = 0 \\ M dx + N dy = 0 \end{cases} \qquad \#$$

que a su vez puede interpretarse como un sistema de ecuaciones algebraícas respecto de dx y dy, pero este sistema lineal homogéneo admite tener solución no trivial (dado que dx como diferencial de la variable es arbitrario), por ello deberá tenerse

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad \#$$

o sea

$$N\frac{\partial U}{\partial x} - M\frac{\partial U}{\partial y} \equiv 0 \Rightarrow N\frac{\partial U}{\partial x} \equiv M\frac{\partial U}{\partial y}$$

de la que

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M} \equiv \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N} \overset{not}{\equiv} \mu(x,y) \qquad \#$$

luego

$$\begin{cases} \mu M = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \mu N = \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

de donde

$$\mu(Mdx + Ndy) = \mu M dx + \mu N dy = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy = dU$$

Esto significa que la forma diferencial que es la parte izquierda de la ED (ref: 231) se convierte en la diferencial total de una cierta función U, luego de multiplicarla por la función μ, definida por la igualdad (ref: 250) y por consiguiente μ es un factor de integración de la ED. Y eso es L.Q.Q.D.

b. Teorema de no unicidad del factor integrante.

Ya sea de la fórmula general del factor de integración, o bien de la definición misma de factor integrante es inmediato que si μ es un factor integrante de una ED, entonces $k\mu$, con k cualquier real, también es un factor integrante de la misma ED. Pero el conjunto de todos los posibles factores integrantes incluye a factores integrantes diferentes de los de la forma $k\mu$. Esto queda reflejado en el siguiente:

Teorema de no unicidad. *Si μ_0 es un factor integrante de la ED (*ref: 231*)*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

y $U_0(x,y)$ es su correspondiente integral, es decir

$$\mu_0[M(x,y)dx + N(x,y)dy] = dU_0, \qquad \#$$

entonces la función

$$\mu = \mu_0\varphi(U_0), \qquad \#$$

*donde φ es una función cualquiera no idénticamente igual a 0 y continuamente diferenciable, también es un es un factor integrante de la ED (*ref: 231*)*

Demostración. Si se multiplica la forma diferencial de la parte izquierda de la ED *(*ref: 231*)* por la μ propuesta en (ref: 252) $\mu = \mu_0\varphi(U_0)$, se tendrá

$$\mu(Mdx + Ndy) = \mu_0\varphi(U_0)(Mdx + Ndy) = \varphi(U_0)[\mu_0(Mdx + Ndy)]$$
$$= \varphi(U_0)dU_0 = d\left(\int \varphi(U_0)dU_0\right)$$

pero como se indica con las igualdad de los extremos anterior $\mu(Mdx + Ndy)$ es la diferencial total de otra cierta función $\int \varphi(U_0)dU_0$, esto significa que μ resulta también ser factor integrante de la misma ED.

Observese finalmente que este Teorema insinúa que todos los factores de integración son de la forma (ref: 252)

$$\mu = \mu_0\varphi(U_0)$$

¿Será cierto? Al menos se puede decir que en la fórmula $\mu = \mu_0\varphi(U_0)$ están contenidos infinitos factores de integración generados por un solo factor de integración μ_0 y su correspondiente integral U_0. Todo esto debe ser contemplado en una misma región D simplemente conexa y bajo las hipótesis sobre las funciones M y N para existencia de la solución de la ED, así como las condiciones para la existencia del factor de integración. La respuesta a la pregunta planteada queda dada por el siguiente

c. *Teorema sobre la representación general del factor integrante*. Dos factores de integración cualesquiera μ_0 y μ_1 de la ED (ref: 231)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

están relacionados por la misma fórmula anterior

$$\mu_1 = \mu_0\varphi(U_0) \qquad \#$$

Demostración. Supongase que U_0 y U_1 son las integrales correspondientes a los facores de integración μ_0 y μ_1, esto es, se cumple

$$\begin{cases} \mu_0[Mdx+Ndy] = dU_0 \\ \mu_1[Mdx+Ndy] = dU_1 \end{cases}$$

de donde dividiendo la segunda ecuación por la primera

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{dU_1}{dU_0} \qquad \#$$

Pero debido al Teorema sobre la dependencia en una subregión $D_0(\subset D)$ de 2 integrales cualesquiera U_0 y U_1 de una ED de la forma (ref: 231), definida en una cierta región D, mediante la dependencia $U_1 = \Phi(U_0)$, donde Φ es una función continuamente diferenciable, entonces de este resultado y de (ref: 254), se tendrá

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{dU_1}{dU_0} = \frac{d\Phi(U_0)}{dU_0} = \frac{\Phi'(U_0)dU_0}{dU_0} = \Phi'(U_0) \overset{not}{=} \varphi(U_0)$$

de los extremos de estas igualdades se desprende que en efecto se cumple (ref: 253) $\mu_1 = \mu_0\varphi(U_0)$, donde φ es una función con derivada continua, ya que su igual Φ'' existe y es continua, dado que U_0 y U_1 admiten derivadas parciales hasta de segundo orden que son continuas y además son integrales de la ED.

Observaciones:

i. Si μ_0 y μ_1 son 2 factores de integración sustancialmente distintos (tales que su cociente no sea idénticamente igual a constante $\frac{\mu_1}{\mu_0} \not\equiv C$) de la ED (ref: 231), entonces la igualdad

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = C \qquad \#$$

resulta ser la integral general de dicha ED (¿por qué?).

En efecto, debido a la forma general de los factores de integración: $\frac{\mu_1}{\mu_0} = \varphi(U_0)$ y sabiendo que si U_0 es una integral de la ED, o sea que $U_0(x,y) = C$ es la integral general de la ED, luego $\varphi(U_0) = C$ también será integral general de la ED, pero entonces $\frac{\mu_1}{\mu_0} = C$ a su vez también será integral general de la misma ED y eso es lo que se quería mostrar.

ii. Si la ED (ref: 231) es exacta y se le conoce un factor de integración μ_1 no idénticamente igual a constante ($\mu_1 \not\equiv C$), entonces

$$\mu_1(x,y) = C \qquad \#$$

es la integral general de la ED (¿por qué?)

Porque se puede tomar a $\mu_0 = 1$, que trivialmente es factor de integración en este caso de una ED exacta y de i) $\frac{\mu_1}{1} = C$ es la integral general de la ED.

d. *Un Método General para la obtención del factor integrante*.
Supóngase que la ED (ref: 231)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

puede representarse como

$$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0 \qquad \#$$

de manera que para cada reagrupación sea fácil obtener su factor de integración.

Supóngase que sus respectivos factores de integración son μ_1 y μ_2, mientras que las integrales correspondientes son U_1 y U_2.

Entonces en $\mu = \mu_1\varphi(U_1)$ están representados los factores de integración del primer paréntesis de la ED (ref: 257), mientras que en $\mu = \mu_2\psi(U_2)$ estarán representados todos los del segundo paréntesis de (ref: 257). Si resulta posible escoger las funciones arbitrarias φ y ψ de manera que

$$\mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2) \qquad \#$$

teniendose además que una de las 2 funciones puede hacerse igual a la función idéntica, entonces

$$\mu = \mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2) \qquad \#$$

será el factor de integración de toda la ED original (ref: 257), escogiendo si es posible en forma adecuada las funciones φ y ψ.

Factor de integración de variables separadas

Hallar el factor de integración de la ED de *variables separadas*:

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0 \qquad \#$$

Solución. En este caso la ED ya es exacta. En efecto, cumple con la condición necesaria y suficiente para ser exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial X(x)}{\partial y} \equiv 0 \equiv \frac{\partial Y(y)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \#$$

Por consiguiente no se necesita el factor de integración, o sea el factor de integración es el trivial $\mu(x,y) = 1$.

Factor integrante de variables separables

Hallar el factor de integración de la ED de *variables separables*:

$$X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0 \qquad \#$$

Solución. En este caso la ED no es exacta. En efecto, no cumple con la condición necesaria y suficiente para ser exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial[X(x)Y(y)]}{\partial y} \equiv X(x)Y'(y) \not\equiv X_1'(x)Y_1(y) = \frac{\partial[X_1(x)Y_1(y)]}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por consiguiente se necesita el factor de integración $\mu = \mu(x,y)$, para transformar la ED original en una que sea exacta, para ello se puede partir de la condición para que el factor de integración sea de la forma $(\mu \circ \omega)(x,y) = \mu(\omega(x,y))$, a saber:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial \omega}{\partial y} - N\frac{\partial \omega}{\partial x}} \equiv \Phi(\omega) \Rightarrow \frac{\frac{\partial[X_1(x)Y_1(y)]}{\partial x} - \frac{\partial[X(x)Y(y)]}{\partial y}}{M\frac{\partial \omega}{\partial y} - N\frac{\partial \omega}{\partial x}} \equiv \Phi(\omega)$$

y hay que escoger ω de manera que se cumpla ésta última identidad, esto es

$$\frac{X_1'(x)Y_1(y) - X(x)Y'(y)}{X(x)Y(y)\frac{\partial \omega}{\partial y} - X_1(x)Y_1(y)\frac{\partial \omega}{\partial x}} \equiv \Phi(\omega) \qquad \#$$

para ello sólo queda el método de ensayo y error:

1. Si $\omega = X(x)Y_1(y)$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &\equiv \frac{X_1'(x)Y_1(y) - X(x)Y'(y)}{X(x)Y(y)\frac{\partial \omega}{\partial y} - X_1(x)Y_1(y)\frac{\partial \omega}{\partial x}} \\ &= \frac{X_1'(x)Y_1(y) - X(x)Y'(y)}{X(x)Y(y)X(x)Y_1'(y) - X_1(x)Y_1(y)X'(x)Y_1(y)}\end{aligned}$$

luego con artificios evidente, se sigue

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \frac{\frac{X'(x)}{X'(x)}X_1'(x)Y_1(y) - \frac{Y_1'(y)}{Y_1'(y)}X(x)Y'(y)}{X(x)\frac{Y_1(y)}{Y_1(y)}Y(y)X(x)Y_1'(y) - X_1(x)Y_1(y)\frac{X(x)}{X(x)}X'(x)Y_1(y)} \\ &= \frac{\frac{X_1'(x)}{X'(x)}X'(x)Y_1(y) - \frac{Y'(y)}{Y_1'(y)}X(x)Y_1'(y)}{X(x)Y_1(y)\left[\frac{1}{Y_1(y)}Y(y)X(x)Y_1'(y) - X_1(x)\frac{1}{X(x)}X'(x)Y_1(y)\right]} \\ &= -\frac{\left[\frac{X_1'(x)}{X'(x)}X'(x)Y_1(y) - \frac{Y'(y)}{Y_1'(y)}X(x)Y_1'(y)\right]}{X(x)Y_1(y)\left[+\frac{X_1(x)}{X(x)}X'(x)Y_1(y) - \frac{Y(y)}{Y_1(y)}X(x)Y_1'(y)\right]}\end{aligned}$$

igualando coeficientes se tendría

$$X_1'(x) = X_1(x), Y'(x) = Y(x), X'(x) = X(x), Y_1'(x) = Y_1(x)$$

de las cuales

$$X_1(x) = Y(x) = X(x) = Y_1(x) = Ce^x$$

luego dado que los corchetes son iguales en la expresión resultante, se tendrá

$$\Phi(\omega) = -\frac{[X'(x)Y_1(y) - X(x)Y_1'(y)]}{X(x)Y_1(y)[X'(x)Y_1(y) - X(x)Y_1'(y)]} = -\frac{1}{X(x)Y_1(y)} = -\frac{1}{\omega} \qquad \#$$

de donde por (ref: 238)

$$\mu(\omega) \equiv e^{\int -\frac{1}{\omega}d\omega} = \frac{1}{e^{\ln \omega}} = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{X(x)Y_1(y)} \qquad \#$$

por lo que la ED original se puede transformar ahora en

$$X(x)Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0$$
$$\mu X(x)Y(y)dx + \mu X_1(x)Y_1(y)dy = 0$$
$$\frac{X(x)Y(y)}{X(x)Y_1(y)}dx + \frac{X_1(x)Y_1(y)}{X(x)Y_1(y)}dy = 0$$

una ED de variables separadas y por tanto ya es exacta

$$\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dx + \frac{X_1(x)}{X(x)}dy = 0 \qquad \#$$

Finalmente, dado que μ puede hacerse ∞

$$\mu(XY_1) = \frac{1}{X(x)Y_1(y)} = \infty$$

sólo en las posibles raíces de

$$\begin{cases} X(x) = 0 \\ Y_1(y) = 0 \end{cases} \qquad \#$$

por ejemplo

$$\begin{cases} x = a, \text{ ó} \\ y = b \end{cases} \qquad \#$$

entonces éstas pudíeran ser soluciones singulares.

Factor integrante de la lineal

Hallar el factor de integración de la ED *lineal*:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad \#$$

con $p,q \in \mathbf{C}_{\mathbb{R}}$ y en este caso la ED no es exacta. En efecto, escrita en la forma $Mdx + Ndy = 0$

$$[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0 \qquad \#$$

no cumple con la condición necesaria y suficiente para ser exacta, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial[p(x)y - q(x)]}{\partial y} \equiv p(x) \not\equiv 0 = \frac{\partial 1}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por consiguiente para su integración se necesita un factor de integración $\mu = \mu(x,y)$, para transformar la ED original en una que sea exacta, para ello se puede intentar la busqueda del factor de integración a través de los casos particulares más sencillos, a saber:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial \omega}{\partial y} - N\frac{\partial \omega}{\partial x}} \equiv \Phi(\omega) \Rightarrow \frac{\frac{\partial 1}{\partial x} - \frac{\partial[p(x)y-q(x)]}{\partial y}}{[p(x)y - q(x)]\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial x}} \equiv \Phi(\omega)$$

y hay que escoger ω de manera que se cumpla la última identidad, esto es

$$\frac{-p(x)}{[p(x)y - q(x)]\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial x}} \equiv \Phi(\omega)$$

para ello sólo queda el método de ensayo y error: Si se propone

$$\omega(x,y) = x$$

entonces $\frac{-p(x)}{[p(x)y-q(x)]\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial x}{\partial x}} \equiv \Phi(\omega) \Rightarrow \frac{-p(x)}{-1} \equiv \Phi(x)$, esto es

$$\Phi(x) \equiv p(x) \qquad \#$$

luego todo es coherente y procede

$$\mu(\omega) = \mu(x) = e^{\int \Phi(x)dx} = e^{\int p(x)dx} \qquad \#$$

que es el mismo obtenido con el método de Euler para las ED lineales por lo que

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow [p(x)y - q(x)]dx + dy = 0 \Rightarrow$$

$$\mu\{[p(x)y - q(x)]dx + dy\} = 0$$

y esta última ED

$$e^{\int p(x)dx}[p(x)y - q(x)]dx + e^{\int p(x)dx}dy = 0$$

1. ya es exacta, puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\left[e^{\int p(x)dx}(p(x)y - q(x))\right]}{\partial y} \qquad \#$$

$$\equiv p(x)e^{\int p(x)dx} \equiv \frac{\partial e^{\int p(x)dx}}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por definición de ED exacta, existira U, tal que

$$e^{\int p(x)dx}[p(x)y - q(x)]dx + e^{\int p(x)dx}dy \qquad \#$$

$$= dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

de donde identificando para dx y dy arbitrarias

$$\begin{cases} e^{\int p(x)dx}[p(x)y - q(x)] = \frac{\partial U}{\partial x} \\ e^{\int p(x)dx} = \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases} \qquad \#$$

a la 1a. la satisface

$$U(x,y) = \int e^{\int p(x)dx}[p(x)y - q(x)]dx + \varphi(y) \qquad \#$$

donde la función arbitraria φ se determina a partir de que esta función U propuesta deberá satisfacer la 2a. de las ecuaciones de (ref: 274), a saber:

$$e^{\int p(x)dx} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int e^{\int p(x)dx}[p(x)y - q(x)]dx + \varphi(y)\right\} \Rightarrow$$

$$e^{\int p(x)dx} = \int \frac{\partial}{\partial y}\left\{e^{\int p(x)dx}[p(x)y - q(x)]\right\}dx + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) \overset{\text{(ref: 273)}}{\Rightarrow}$$

$$e^{\int p(x)dx} = \int \frac{\partial}{\partial x}e^{\int p(x)dx}dx + \frac{d}{dy}\varphi(y) \Rightarrow e^{\int p(x)dx} = e^{\int p(x)dx} + \frac{d}{dy}\varphi(y) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dy}\varphi(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$

de manera que regresando a (ref: 275)

$$U(x,y) = \int e^{\int p(x)dx}[p(x)y - q(x)]dx + C$$

$$= \int e^{\int p(x)dx}p(x)ydx - \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C$$

pero basta con una sóla función U, por lo que se puede tomar $C = 0$, pero a su vez la integral general de (ref: 274) $dU = 0$, será $U(x,y) = C$ (con abuso de notación), esto es

$$\int e^{\int p(x)dx}p(x)ydx - \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx = C$$

$$\int \frac{\partial}{\partial x}e^{\int p(x)dx}ydx = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C$$

$$e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C$$

de la cual se obtiene la misma solución general que la ya obtenida en (ref: 150)

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

Factor integrante de la homogénea

Hallar el factor de integración de la ED *homogénea*:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \#$$

con M y N funciones homogéneas del mismo grado m de homogeneidad.

Recuerdese que en forma más bien natural se obtenía que el cambio $z = \frac{y}{x}$ con $z = z(x)$ como la nueva función incógnita que reduce la ED homogénea a su forma canónica, puede servir de pauta para encontrar el factor integrante de la ED homogénea

$$
\begin{aligned}
M(x,y)dx + N(x,y)dy &= 0 \Rightarrow \\
M(x,zx)dx + N(x,zx)d(zx) &= 0 \Rightarrow \\
M(x,zx)dx + N(x,zx)(zdx + xdz) &= 0 \Rightarrow \\
x^m M(1,z)dx + x^m N(1,z)(zdx + xdz) &= 0 \Rightarrow \\
x^m[M(1,z) + zN(1,z)]dx + x^{m+1}N(1,z)dz &= 0
\end{aligned}
$$

obteniendo así una ED de variables separables y como ya fue deducido su factor de integración, y este queda dado por (ref: 265), de la última ecuación este será de la forma

$$\mu(x,z) = \frac{1}{[M(1,z) + zN(1,z)]x^{m+1}}$$

luego esta función sirve como un factor de integración para la ED homogénea, el cual al regresar a las variables originales genera la forma definitiva del factor de integración

$$
\begin{aligned}
\mu(x,y) &= \frac{1}{[M(1,\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}N(1,\frac{y}{x})]x^{m+1}} \\
&= \frac{1}{[x^{m+1}M(1,\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}x^{m+1}N(1,\frac{y}{x})]} \\
&= \frac{1}{[xx^m M(1,\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}xx^m N(1,\frac{y}{x})]} \\
&= \frac{1}{[xM(x,y) + yN(x,y)]}
\end{aligned}
$$

de donde el factor de integración para la ED homogénea, si $xM + yN \not\equiv 0$, es

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}, \quad (xM + yN \not\equiv 0) \qquad \#$$

Pero si $xM + yN \equiv 0$, entonces de la últina ED de variables separables obtenida

$$
\begin{aligned}
x^m[M(1,z) + zN(1,z)]dx + x^{m+1}N(1,z)dz &= 0 \overset{z=\frac{y}{x}}{\Rightarrow} \\
\left[x^m M\left(1,\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}x^m N\left(1,\frac{y}{x}\right)\right]dx + xx^m N\left(1,\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right) &= 0 \Rightarrow \\
\left[M(x,y) + \frac{y}{x}N(x,y)\right]dx + xN(x,y)\left(\frac{xdy - ydx}{x^2}\right) &= 0 \Rightarrow \\
\left[\frac{xM(x,y) + yN(x,y)}{x}\right]dx + N(x,y)\left(\frac{xdy - ydx}{x}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

pero como por hipótesis: $xM + yN \equiv 0$, se tendrá

$$0dx + N(x,y)\left(\frac{xdy - ydx}{x}\right) = 0 \Rightarrow N(x,y)(xdy - ydx) = 0$$

obteniendo finalmente

$$xdy - ydx = 0 \qquad \#$$

que de nuevo la ED hómogénea se reduce a una ED de variables separables, luego

$$xdy = ydx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow$$
$$|y| = C_1|x| \Rightarrow y = \pm C_1 x$$

con lo que se concluye que las soluciones es el haz de semirectas, que salen del origen de coordenadas y que habían aparecido en el análisis de la ED homogénea:

$$y(x) = Cx \ (x \neq 0). \qquad \#$$

Factores integrantes de ED.

1. **Problema 1**. Integrar la ED

$$\frac{dy}{dx} = \frac{py - qx}{px + qy} \qquad \#$$

es decir, integrar la ED homogénea del tipo $Mdx + Ndy = 0$

$$(py - qx)dx - (px + qy)dy = 0 \qquad \#$$

con $M = py - qx$ y $N = -(px + qy)$ funciones homogéneas de grado 1 de homogeneidad, por ende su factor de integración, véase el factor de integración de la ED homogénea, está dado por

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xM + yN} = \frac{1}{x(py - qx) - y(px + qy)} = \frac{1}{xpy - qx^2 - ypx - qy^2}$$

luego

$$\mu(x,y) = -\frac{1}{q(x^2 + y^2)} \qquad \#$$

y dado que el denominador: $xM + yN = q(x^2 + y^2) \not\equiv 0$, ya que sólo es 0 en puntos aislados como el $(0,0)$, entonces *no existen soluciones singulares*.

Se puede integrar entonces la ED original

$$(py - qx)dx - (px + qy)dy = 0 \Rightarrow$$
$$-\frac{py - qx}{q(x^2 + y^2)}dx + \frac{px + qy}{q(x^2 + y^2)}dy = 0 \Rightarrow$$
$$-\frac{py - qx}{q(x^2 + y^2)}dx + \frac{px + qy}{q(x^2 + y^2)}dy = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{qxdx + qydy - pydx + pxdy}{q(x^2 + y^2)} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{qxdx + qydy - pydx + pxdy}{q(x^2 + y^2)} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{q(xdx + ydy)}{q(x^2 + y^2)} + \frac{p(xdy - ydx)}{q(x^2 + y^2)} = 0$$

luego

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{p}{q}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow$$
$$d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right] + d\left[\frac{p}{q}\arctan\frac{y}{x}\right] = 0 \Rightarrow$$
$$\int d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right] + \int d\left[\frac{p}{q}\arctan\frac{y}{x}\right] = 0 \Rightarrow$$
$$\ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{p}{q}\arctan\frac{y}{x} = \ln C \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = e^{-\frac{p}{q}\arctan\frac{y}{x} + \ln C}$$

de la que pasando a coordenadas polares: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, se tendrá

$$\boxed{r = Ce^{-\frac{p}{q}\varphi}} \qquad \#$$

2. **Problema 2**. Hallar la integral general de la ED

$$xdy - ydx = 0 \qquad \#$$

vía factores de integración.

Solution *Por ser una ED de variables separables admite el factor de integración*

$$\mu_0 = \frac{1}{xy} \qquad \#$$

dado que la reduce trivialmente a una de variables separadas. Y también admite el factor integrante

$$\mu_1 = \frac{1}{x^2} \qquad \#$$

dado que la reduce a una exacta trivial, luego debido a la propiedad del cociente de 2 factores integrantes, véase el Apéndice 18 3)c)

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = C \Rightarrow \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{xy}} = C \Rightarrow \frac{xy}{x^2} = C \Rightarrow \frac{y}{x} = C$$

3. **Problema 3.** Hallar la integral general de la ED

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0 \qquad \#$$

Solution *Por ser una ED homogénea, ya que se puede reducir a $y' = -\frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = \varphi(\frac{y}{x})$ y vía el cambio $z = \frac{y}{x}$ a su forma canónica. También es una ED exacta, ya que $\frac{\partial}{\partial y}(x + y) \equiv 1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}(x - y)$. Se tendrá por ser homogénea que admite el factor de integración $\mu_1 = \frac{1}{xM+yN}$ y por ser exacta admite el factor trivial de integración $\mu_0 = 1$. Luego, por el Apéndice 18 3)c)ii), su integral general será: $\frac{\mu_1}{\mu_0} = C_1$, esto es, si $C = \frac{1}{C_1}$*

$$xM + yN = C \qquad \#$$

evidentemente bajo la hipótesis de que: $xM + yN \not\equiv$const., que en nuestro caso es $x(x + y) + y(x - y) = C$, o sea que la integral general es

$$x^2 + 2xy - y^2 = C \qquad \#$$

4. **Problema 4.** Integrar via factores de integración la ED

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0 \qquad \#$$

Solution *Se puede representar reagrupada la ED en la forma*

$$\left(\frac{y}{x}dx + dy\right) + \left(3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy\right) = 0 \qquad \#$$

*Se determina para cada paréntesis de (*ref: 290*) su factor de integración y su respectiva integral*

$$\begin{cases} \mu_1 = x \\ U_1 = xy \end{cases}, \begin{cases} \mu_2 = y \\ U_2 = x^3y \end{cases} \qquad \#$$

*ya que ambos factores integrantes reducen los correspondientes paréntesis a exactas (que también resultan homogéneas y de variables separables) y la condición, de (*ref: fa1829*):* $\mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2)$ *toma la forma*

$$x\varphi(xy) = y\psi(x^3y)$$

y escogiendo a $\varphi(U) = U^2$ *y a* $\psi(U) = U$*, entonces*

$$\mu(x,y) = x(xy)^2 = yx^3y = x^3y^2 \qquad \#$$

usando este factor integrante en la ED original

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0 \Rightarrow$$

$$x^3y^2\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + x^3y^2\left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2y^3 + 3x^5y^2)dx + (x^3y^2 + x^6y)dy = 0$$

que ya debería ser exacta. En efecto, $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv 3x^2y^2 + 6x^5y \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$*, por ende de (*ref: 228*)*

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta = C \overset{x_0=0=y_0}{\Rightarrow}$$

$$\int_0^x (x^2y^3 + 3x^5y^2)dx + \int_0^y (0^3y^2 + 0^6y)dy = C \Rightarrow$$

$$\int_0^x (x^2y^3 + 3x^5y^2)dx + \int_0^y (0^3y^2 + 0^6y)dy = C \Rightarrow$$

$$\left[\frac{x^3}{3}y^3 + 3\frac{x^6}{6}y^2\right]_0^x + 0 = C \Rightarrow$$

$$\frac{(xy)^3}{3} + \frac{(x^3y)^2}{2} = C$$

Gráfica de $\frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^6y^2}{2} - 10$

APÉNDICES

Magnitudes de variación porcentualmente constantes

1. Si la función

$$\begin{cases} N : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ N = N(n) \end{cases} \qquad \#$$

cumple con

$$\frac{N(n+1) - N(n)}{N(n)} = q(const) \qquad \#$$

entonces se le llama magnitud de *variación porcentualmente constante*.

2. Para ver la forma que toma una magnitud de variación porcentualmente constante. se puede resolver la ecuación (ref: a2) bajo la hipótesis de que es dada la condición inicial: $N(0) = N_0$. De la ecuación (ref: a2) misma

$$N(n+1) - N(n) = qN(n)$$

de donde

$$N(n+1) = (1+q)N(n) \qquad \#$$

Para $n = 0$:: $N(1) = (1+q)N(0)$, de donde $N(1) = (1+q)N_0$.

Para $n = 2$: $N(2) = (1+q)N(1) = (1+q)[(1+q)N_0] = (1+q)^2 N_0$.

Para $n = 2$: $N(3) = (1+q)N(2) = (1+q)^3 N_0$.

Para $n - 1$ (Hipótesis de inducción):

$$N(n-1) = (1+q)^{n-1} N_0 \qquad \#$$

Pero entonces para el siguiente:

$$N(n) = (1+q)N(n-1) = (1+q)\left[(1+q)^{n-1} N_0\right] = (1+q)^n N_0$$

que por tener la misma forma que la hipótesis de inducción, sólo que en lugar de $n-1$ aparece n, se puede concluir, por el Teorema de Inducción, que entonces para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$N(n) = (1+q)^n N_0 \qquad \#$$

3. Se puede ahora brincar directamente a los racionales de la forma $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, para lo cual se toma a $\frac{r}{s}$ como $\frac{r}{s} = r \cdot \frac{1}{s}$, donde la fórmula para $\frac{1}{s}$-ésimo de manera semejante a como se definió en (ref: a2) se toma provisionalmente igual a

$$\frac{N(\frac{1}{s} + 1) - N(\frac{1}{s})}{N(\frac{1}{s})} = q_{\frac{1}{s}} = const. \qquad \#$$

luego con esta notación temporal

$$N\left(\frac{r}{s}\right) = N\left(r \cdot \frac{1}{s}\right) = \left(1 + q_{\frac{1}{s}}\right)^r N_0 \qquad \#$$

pero se puede intentar expresar a $q_{\frac{1}{s}}$, la notación provisional, a través de q, dado que q está definido por (ref: a2), y es fácilmente comprobable de la tabla original de datos. Para lograr tal expresión se evalúa a $N(1)$ de 2 maneras distintas, con ayuda de las fórmulas (ref: a5) y (ref: a7)

$$\left\{ N(1) = \left\{ \begin{array}{l} N(1) = (1+q)^1 N_0 \\ N(\frac{s}{s}) = \left(1+q_{\frac{1}{s}}\right)^s N_0 \end{array} \right. \right. \quad \#$$

luego igualando, se tiene

$$\begin{aligned} (1+q)^1 N_0 &= \left(1+q_{\frac{1}{s}}\right)^s N_0,\ N_0 \neq 0 \\ (1+q) &= \left(1+q_{\frac{1}{s}}\right)^s \\ \left(1+q_{\frac{1}{s}}\right) &= (1+q)^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

de donde

$$q_{\frac{1}{s}} = (1+q)^{\frac{1}{s}} - 1 \quad \#$$

que sustituida en la fórmula (ref: a7):

$$\begin{aligned} N\left(\frac{r}{s}\right) &= \left(1+q_{\frac{1}{s}}\right)^r N_0 \\ N\left(\frac{r}{s}\right) &= \left[1+\left((1+q)^{\frac{1}{s}}-1\right)\right]^r N_0 \\ N\left(\frac{r}{s}\right) &= \left[(1+q)^{\frac{1}{s}}\right]^r N_0 \end{aligned}$$

obteniéndose

$$N\left(\frac{r}{s}\right) = (1+q)^{\frac{r}{s}} N_0 \quad \#$$

que es exactamente de la misma forma que la deducida para los n naturales, pero en lugar del natural n ahora aparece el racional $\frac{r}{s}$ (y por ende, como caso particular, en los enteros para $s = 1, r \in \mathbb{Z}$).

4. En esta lógica resta sólo mostrar que la misma fórmula se obtiene también en los irracionales, para ello utilizaremos un resultado de una de las construcciones de los números reales, a saber que todo número irracional lo podemos obtener como el límite de una sucesión de números racionales (al menos como el límite de la sucesión de aproximaciones decimales a dicho número irracional). Evaluemos pues N en un irracional cualquiera que denotaremos por $t \in \mathbb{I}$:

$$N(t) = N\left(\lim_{k\to\infty} r_k\right) = \lim_{k\to\infty} N(r_k) \quad \#$$

donde las r_k representan a los términos de una sucesión de números racionales convergentes al irracional t y donde la última igualdad se cumple si de N se pide que sea una función continua. Pero con base en la última fórmula deducida para los racionales (ref: a10) y por ello se tendrá

$$N(t) = \lim_{k\to\infty} N(r_k) = \lim_{k\to\infty} (1+q)^{r_k} N_0 \stackrel{?}{=} (1+q)^{\lim_{k\to\infty} r_k} N_0$$

esto es

$$N(t) = (1+q)^t N_0 \quad \#$$

donde la penúltima igualdad es también debido a que la función exponencial es continua, obteniendo así que en el irracional t la fórmula sigue siendo la misma que la deducida para los naturales y los racionales, luego para cualquier número real t:

$$N(t) = (1+q)^t N_0 \qquad \#$$

y sustituyendo esta última fórmula (ref: a14) en el resultado fundamental (ref: a12) deducido

$$N(t) = (1+q)^t N_0 = e^{\ln(1+q)^t N_0} = e^{\ln(1+q)^t} e^{\ln N_0} = e^{t\ln(1+q)} e^{\ln N_0} = N_0 e^{t\ln(1+q)}$$

y donde haciendo

$$\ln(1+q) = Q \qquad \#$$

así se obtiene el resultado buscado en forma más elocuente

$$N(t) = N_0 e^{Qt} \qquad \#$$

Esto significa que las *magnitudes de variación porcentualmente constante* son aquellas que satisfacen a (ref: a2): $\boxed{\frac{N(n+1)-N(n)}{N(n)} = q}$ con $n \in \mathbb{N}$, o lo que es lo mismo: $\boxed{N(t) = N_0(1+q)^t}$ con $t \in \mathbb{R}$, o su igual: $\boxed{N(t) = N_0 e^{Qt}}$ y finalmente derivando esta última expresión :

$$\frac{d}{dt}N(t) = N_0 Q e^{Qt} = Q(N_0 e^{Qt}) = QN(t)$$

o sea, que también satisfacen el modelo más básico:

$$\boxed{\frac{d}{dt}N(t) = QN(t)} \qquad \#$$

Todo esto significa la equivalencia siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{N(n+1)-N(n)}{N(n)} = q \\ n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} N(t) = N_0(1+q)^t \\ t \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow \qquad \#$$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{dN}{dt} = QN \\ t \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} N(t) = N_0 e^{Qt} \\ t \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Teorema de existencia de Peano

En muchos problemas de la *Teoria Cualitativa y Analítica de Ecuaciones Diferenciales* (ED) *y Sistemas*, así como en la *Teoría de la Estabilidad a la Lyapunov* de las soluciones de una ED o un sistema de ED los problemas se plantean de manera que no necesariamente se cumpla la condición que asegura la unicidad de la solución. Véase adicionalmente [1].

Para asegurar la sóla existencia de la solución de un problema de Cauchy es suficiente que la parte derecha f de la ED sea *continua* en una vecindad del punto incial, teniéndose entonces que la solución quedará definida y será continuamente diferenciable, en general, sólo en una cierta vecindad de la condición inicial de la variable, a saber: tiene lugar el siguiente Teorema de existencia en su versión más simplificada:

Theorem *1 (de existencia, versión simplificada de Peano) Si la parte derecha f de la ED del Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \#$$

*está definida y es continua en el rectángulo cerrado $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b;\ a,b \in R^+\}$ (y por ende $|f(x,y)| \leq M \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x,y) \in \overline{D}$), entonces el Problema de Cauchy (*ref: 2a1*) tiene al menos una solución $y = \varphi(x)$, definida en $\overline{D}$ y continuamente diferenciable en la vecindad $V_h(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < h\}$, con h determinable, según el método de demostración, por ejemplo via aproximaciones sucesivas queda definida como $h = min(a, \frac{b}{M})$ y tal solución no se sale del rectángulo $\overline{D}$, siempre y cuando la x varíe en $|x - x_0| < h$.*

1. ???GRAFICA con $\overline{D}$ como rectángulo y $V_h(x_0)$ en el plano (x,y).???

Este teorema evidentemente *no* la garantiza la *unicidad* de la solución. A manera de *ejemplo* puede servir la ED $y' = \sqrt{|y|}$ analizada en el Problema 3M????, que en particular admite 2 soluciones que pasan por el origen de coordenadas, a saber: $y = 0$ (el eje x) y $y = \begin{cases} -x^2, & si\ x \leq 0 \\ x^2, & si\ x > 0 \end{cases}$, mientras que la parte derecha de la ED $f = \sqrt{|y|}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y por tanto en cualquier vecindad del origen de coordenadas. Este teorema sólo ofrece una *condición suficiente*, ya que si $f \in C_{\bar{D}}$, entonces con seguridad existe solución (aunque no necesariamente única), pero si dicha condición no se cumple, también puede llegar a existir solución del correspondiente Problema de Cauchy. Ejemplo ???.

Demostración. Para la demostración del Teorema, primero se introducirá y luego se demostrará un *Lema* para finalmente concluir con la demostración propiamente dicha del Teorema de Peano.

Se puede partir de una *poligonal* que se denotará por $y = \psi(x)$, formada por un número finito n de segmentos, cuyas *abscisas* de los vértices de la poligonal se denotarán por $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y sus *pendientes* por $k_1, \ldots, k_n$.

Lemma *Si las pendientes de los segmentos de la poligonal $y = \psi(x)$, están acotadas por los números k^* y k^{**}:*

$$k^* \leq k_i \leq k^{**},\ i = \overline{1,n} \qquad \#$$

entonces la pendiente k de cualquier cuerda de la poligonal $y = \psi(x)$, también está acotada por los mismos números k^* y k^{**}:

$$k^* \leq k \leq k^{**}$$

Proof *La demostración del Teorema de Peano fue realizada en el rectángulo cerrado* $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$*:* $|x - x_0| \leq a$*,* $|y - y_0| \leq b$*;* $a, b \in \mathbb{R}^+\}$*, pero realmente el Teorema sigue siendo cierto para cualquier región cerrada del plano* $\overline{D}(x,y)$*.*

Remark *El Teorema de Peano es generalizable para un sistema de ED, es decir si en el sistema normal de ED* $\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}\left[x, \vec{y}\right]$ *las funciones componentes del vector* $\vec{f}$ *están definidas y son continuas en una región cerrada arbitraria* $\overline{D}\left(x, \vec{y}\right) \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, entonces por cualquier punto interior* $\left(x_0, \vec{y}_0\right) \in D$ *existe al menos una curva integral del sistema que pasa por dicho punto.*

En efecto, si se supone que los extremos de las cuerdas tienen por abscisas a x^* *y* x^{**}*, entonces*

$$k = \frac{\psi(x^{**}) - \psi(x^*)}{x^{**} - x^*} \qquad \#$$

Si ahora se denota a las proyecciones de los segmentos de la poligonal sobre el eje x *por:* $[x_0, x_1]$*,* $[x_1, x_2], \ldots,$ $[x_{n-1}, x_n]$*, de manera que*

$$k_i = \frac{\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},\ i = \overline{1,n} \qquad \#$$

Supongase que entre x^* *y* x^{**} *se encuentran los puntos* x_μ*,* $x_{\mu+1}, \ldots, x_{\mu+l}$*, entonces se tendrá*

$$\left\{\begin{aligned} k_\mu &= \tfrac{\psi(x_\mu) - \psi(x^*)}{x_\mu - x^*} \\ k_{\mu+1} &= \tfrac{\psi(x_{\mu+1}) - \psi(x_\mu)}{x_{\mu+1} - x_\mu} \\ &\vdots \\ k_{\mu+l+1} &= \tfrac{\psi(x^{**}) - \psi(x_{\mu+l})}{x^{**} - x_{\mu+l}} \end{aligned}\right. \qquad \#$$

de donde

$$\left\{\begin{aligned} \psi(x_\mu) - \psi(x^*) &= k_\mu(x_\mu - x^*) \\ \psi(x_{\mu+1}) - \psi(x_\mu) &= k_{\mu+1}(x_{\mu+1} - x_\mu) \\ &\vdots \\ \psi(x^{**}) - \psi(x_{\mu+l}) &= k_{\mu+l+1}(x^{**} - x_{\mu+l}) \end{aligned}\right. \qquad \#$$

y sumando estas igualdades

$$\psi(x^{**}) - \psi(x^*) = k_\mu(x_\mu - x^*) + k_{\mu+1}(x_{\mu+1} - x_\mu) + \cdots + k_{\mu+l+1}(x^{**} - x_{\mu+l}) \qquad \#$$

*pero de (*ref: 2a2*)*

$$k^* \leq x_\mu \leq k^{**},\ k^* \leq x_{\mu+1} \leq k^{**}, \ldots, k^* \leq x_{\mu+l} \leq k^{**}$$

por lo que

$$k^*(x_\mu - x^* + x_{\mu+1} - x_\mu + \cdots + x^{**} - x_{\mu+l})$$
$$\leq \psi(x^{**}) - \psi(x^*) \leq k^{**}(x_\mu - x^* + x_{\mu+1} - x_\mu + \cdots + x^{**} - x_{\mu+l})$$

o bien

$$k^*(x^{**}-x^*) \le \psi(x^{**})-\psi(x^*) \le k^{**}(x^{**}-x^*) \qquad \#$$

luego

$$k^* \le \frac{\psi(x^{**})-\psi(x^*)}{x^{**}-x^*} \le k^{**}$$

*y esto es lo que se quería demostrar en el Lema, esto es (*ref: 2a1*)*
$k^* \le k \le k^{**}$*.*

2. Demostración del Teorema de Peano.

La demostración puede restrigirse a la existencia de la solución en el segmento $[x_0, x_0+h]$. Del método de demostración será evidente que la demostración se extiende a $[x_0-h, x_0]$. Se denotará a la franja derecha cerrada por

$$\overline{D}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x_0 \le x \le x_0+h, |y-y_0| \le b\} \qquad \#$$

???Fig. con la región $\overline{D}_+$???

3. Si se parte de cualquier número entero positivo $n \in \mathbb{Z}^+$ y se construye la poligonal de Euler $y = \varphi_n(x)$, la cual efectivamentte se construye dividiendo el segmento $[x_0, x_0+h]$ en n partes iguales con ayuda de las abscisas véase la Fig. 51

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_0+h \qquad \#$$

???Fig.51 con la poligonal de Euler construida???

y la poligonal misma quedaría dada por (véase la construcción del Teorema de Arzela al final de la demostración de este Teorema de Peano)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} y_0 + f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0),\ si\ x_0 \le x \le x_1 \\ y_1 + f(x_1,y_1)\cdot(x-x_1),\ si\ x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots \\ y_{i-1} + f(x_{i-1},y_{i-1})\cdot(x-x_{i-1}),\ si\ x_{i-1} \le x \le x_i \\ \vdots \\ y_{n-1} + f(x_{n-1},y_{n-1})\cdot(x-x_{n-1}),\ si\ x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases} \qquad \#$$

donde

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1},y_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}),\ i = \overline{1,n-1} \qquad \#$$

y donde la poligonal construida queda contenida completamente en la región $\overline{D}_+$. En efecto por el Lema arriba demostrado se tiene la siguiente estimación:

$$-M \le \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(x_0)}{x-x_0} \le M,\ si\ x_0 \le x \le x_0+h \qquad \#$$

dado que las pendientes de todos los segmentos de la poligonal, están entre $-M$ y M, con base en la condición del Teorema de Peano: $|f(x,y)| \le M \in R^+$, $\forall (x,y) \in \overline{D}$ y $\overline{D} \supset \overline{D}_+$. Y de la estimación (ref: 2a13)

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)| \leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b$$

o sea que

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leq b,\ si\ x_0 \leq x \leq x_0 + h \qquad \#$$

y dándole a n los valores de $1, 2, \ldots$ se obtiene la sucesión de segmentos de la poligonal de Euler.

La correspondiente sucesión de funciones

$$\varphi_1(x), \varphi_n(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \qquad \#$$

satisface las 2 condiciones del Teorema de Arzela (véase al final de esta demostración)

4. En efecto, para todas las $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ y toda n se tendrá la estimación:

$$|\varphi_n(x)| = |(\varphi_n(x) - y_0) + y_0| \leq |\varphi_n(x) - y_0| + |y_0| \leq b + |y_0| \qquad \#$$

de esta forma la sucesión de funciones $\varphi_n(x)$ resultan ser *unifórmemente acotadas* en el segmento $[x_0, x_0 + h]$.

5. Estas mismas funciones resultan ser *equicontinuas* en el segmento $[x_0, x_0 + h]$. En efecto, con base en el Lema se tiene:

$$|\varphi_n(x^{**}) - \varphi_n(x^*)| \leq M|x^{**} - x^*|,\ \forall x^*, x^{**} \in [x_0, x_0 + h] \qquad \#$$

Por lo tanto cualquiera que sea la $\varepsilon > 0$ que se tome y para toda n que se tendrá

$$|\varphi_n(x^{**}) - \varphi_n(x^*)| \leq \varepsilon \qquad \#$$

si

$$|x^{**} - x^*| < \delta \overset{def}{=} \frac{\varepsilon}{M},\ \ con\ \ x_0 \leq x^*\ \ ,\ \ x^{**} \leq x_0 + h \qquad \#$$

Pero esto lo que significa es que las funciones $\varphi_n(x)$ son equicontinuas en $[x_0, x_0 + h]$.

6. Por el Teorema de Arzela de la sucesión (ref: 2a15) $\{\varphi_n(x)\}$ puede escogerse una subsucesión

$$\{\varphi_{n_k}(x)\}_k \qquad \#$$

unifórmemente convergente, digamos a $\varphi(x)$, en $[x_0, x_0 + h]$. Y es evidente que la curva $\varphi(x)$ no se sale de la región $\overline{D}_+$.

7. Ahora se demostrará que $y = \varphi(x)$ es la buscada solución de la ecuación (ref: 2a1). Antes que nada obsérvese que la condición inicial de (ref: 2a1) $y(x_0) = y_0$ se cumple automáticamente dado que todas las poligonales de Euler pasan por el punto inicial (x_0, y_0).

Para darse cuenta que $y = \varphi(x)$ es solución de la ecuación (ref: 2a1), en $[x_0, x_0 + h]$ se puede mostrar que para la función φ siempre existe su derivada en todo $\widetilde{x}$ del segmento $[x_0, x_0 + h]$ y que tal derivada resulta ser precisamente $f(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, con $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$.

Manos pues a la obra: Dada cualquier $\varepsilon > 0$ y dado que f es continua en $(\tilde{x}, \tilde{y})$, entonces existe una región cerrada

$$\bar{D}_1 = \{(x,y) | \ |x - \tilde{x}| \leq \delta, \ |y - \tilde{y}| \leq \delta\} \qquad \#$$

en cada punto (x,y) de la cual se cumple que

$$|f(x,y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \#$$

Si se propone a

$$h_1 = \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2M}\right) \qquad \#$$

Recuerdese que la finalidad es formar la derivada de φ, para lo cual se puede fijar el valor del incremento Δx que satisfaga la desigualdad

$$0 < \Delta x \leq h_1 \qquad \#$$

8. Se puede escoger un N_1, tal que para cada $k > N_1$ se cumpla la desigualdad

$$|\varphi(x) - \varphi_{n_k}(x)| < \frac{\delta}{4}, \ si \ x \in [x_0, x_0 + h] \qquad \#$$

(esto es posible debido a que la subsucesión (ref: 2a20) converge uniformemente en $[x_0, x_0 + h]$, o sea: $\varphi_{n_k}(x) \underset{k \to \infty}{\overset{[x_0, x_0+h]}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$) y tal que la distancia entre las abscisas de los vértices de las poligonales $y = \varphi_{n_k}(x)$ sea menor que $\frac{h_1}{2}$ (para ello es suficiente con tomar $n_k > \frac{2h}{h_1}$, dado que la distancia entre las abscisas de los vértices de la poligonal $y = \varphi_{n_k}(x)$ es igual a $\frac{h}{n_k}$).

9. Estimemos la diferencia

$$\frac{\varphi_{n_k}(\tilde{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\tilde{x})}{\Delta x} - f(\tilde{x}, \tilde{y}) \qquad \#$$

Primero se puede mostrar que para las $k > N_1$ todos los vértices de las poligonales $y = \varphi_{n_k}(x)$, cuyas abscisas pertenecen a $[x_0, x_0 + h]$, se quedan dentro de la región $\bar{D}_1$. En efecto, si $\Delta x > 0$, de acuerdo a como fue escogido Δx en (ref: 2a24) y con base en el Lema demostrado se tendrá:

$$|\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_k}(\tilde{x})| \leq h_1 M, \ si \ x \in [\tilde{x}, \tilde{x} + h] \qquad \#$$

donde, pasando al límite cuando k tiende a ∞ se tiene

$$|\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})| \leq h_1 M \leq \frac{\delta}{2}, \ si \ x \in [\tilde{x}, \tilde{x} + h] \qquad \#$$

y tomando en cuenta (ref: 2a25)

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n_k}(x) - \tilde{y}| &= |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(\tilde{x})| = \\
&= |\varphi_{n_k}(x) \mp \varphi(x) - \varphi(\tilde{x})| \\
&= |\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})| \\
&< \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{3\delta}{4},\ si\ x \in [\tilde{x}, \tilde{x} + h]
\end{aligned}$$

esto es

$$|\varphi_{n_k}(x) - \tilde{y}| < \frac{3\delta}{4},\ si\ x \in [\tilde{x}, \tilde{x} + h] \qquad \#$$

y de esta forma queda demostrado que para las x de (ref: 2a24) $0 < \Delta x \leq h_1$ los vértices de las poligonales permanecen en la región $\bar{D}_1$.

Si ahora $\Delta x < 0$, entonces el intervalo izquierdo de $[\tilde{x} + \Delta x, \tilde{x}]$ queda cubierto por la proyección del segmento $M_{i-1}M_i$, donde $x_{i-1} \leq \tilde{x} + \Delta x < x_i$, pero como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \frac{h_1}{2}$, entonces

$$|\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \varphi_{n_k}(\tilde{x} + \Delta x)| < \frac{h_1}{2}M \leq \frac{\delta}{4M}M = \frac{\delta}{4} \qquad \#$$

y regresando a (ref: 2a29) en x_{i-1} se tendrá

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \tilde{y}| &= |\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \varphi(\tilde{x})| \\
&= |\varphi_{n_k}(x_{i-1}) \mp \varphi_{n_k}(\tilde{x} + \Delta x) \mp \varphi_{n_k}(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{x})| \\
&= |\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \varphi_{n_k}(\tilde{x} + \Delta x)| + |\varphi_{n_k}(\tilde{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\tilde{x})| \\
&\quad + |\varphi_{n_k}(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{x})|
\end{aligned}$$

de donde por (ref: 2a30) el primer módulo será $|\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \varphi_{n_k}(\tilde{x} + \Delta x)| < \frac{\delta}{4}$, de mismo (ref: 2a30) dado que $x_{i-1} \leq \tilde{x} + \Delta x$ el segundo módulo será también $|\varphi_{n_k}(\tilde{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\tilde{x})| < \frac{\delta}{4}$ y finalmente de (ref: 2a28) el tercer módulo será $|\varphi_{n_k}(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{x})| < \frac{\delta}{2}$, de lo que resulta:

$$|\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \tilde{y}| < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

y además

$$\begin{aligned}
|x_{i-1} - \tilde{x}| &= |x_{i-1} \mp x_i - \tilde{x}| = |x_{i-1} - x_i| + |x_i - \tilde{x}| < \\
&< \frac{h_1}{2} + h_1 < \frac{\delta}{4M} + \frac{\delta}{2M} = \frac{3\delta}{4} < \delta
\end{aligned}$$

o sea que se obtuvo:

$$\begin{cases} |\varphi_{n_k}(x_{i-1}) - \tilde{y}| < \delta \\ |x_{i-1} - \tilde{x}| < \delta \end{cases} \qquad \#$$

Es así que para las $k > N_1$ se ha llegado a mostrar que los vértices de las poligonales $y = \varphi_{n_k}(x)$, cuyas abscisas están en $[\tilde{x}, \tilde{x} + \Delta x]$ permanecen en la región $\bar{D}_1$, pero entonces las pendientes de todos los segmentos, en apego a (ref: 2a22), $|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f(\tilde{x},\tilde{y}) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x,y) < f(\tilde{x},\tilde{y}) + \frac{\varepsilon}{2}$, estarán entre $f(\tilde{x},\tilde{y}) - \frac{\varepsilon}{2}$ y $f(\tilde{x},\tilde{y}) + \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto por el Lema:

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varphi_{n_k}(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi_{n_k}(\tilde{x})}{\Delta x} < f(\tilde{x},\tilde{y}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

de lo que se obtiene

$$\left| \frac{\varphi_{n_k}(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi_{n_k}(\tilde{x})}{\Delta x} - f(\tilde{x},\tilde{y}) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \#$$

10. Ya se puede estimar lo que realmente interesa

$$\frac{\varphi(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi(\tilde{x})}{\Delta x} - f(\tilde{x},\tilde{y})$$

Para $k > N_1$ se tendrá usando auxiliarmente (ref: 2a32) que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\varphi(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi(\tilde{x})}{\Delta x} - f(\tilde{x},\tilde{y}) \right| \\
&\leq \left| \frac{\varphi(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi(\tilde{x})}{\Delta x} \mp \frac{\varphi_{n_k}(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi_{n_k}(\tilde{x})}{\Delta x} - f(\tilde{x},\tilde{y}) \right| \\
&\leq \left| \frac{\varphi(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi(\tilde{x})}{\Delta x} - \frac{\varphi_{n_k}(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi_{n_k}(\tilde{x})}{\Delta x} \right| \\
&\quad + \left| \frac{\varphi_{n_k}(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi_{n_k}(\tilde{x})}{\Delta x} - f(\tilde{x},\tilde{y}) \right| \\
&= \left| \frac{\varphi(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi(\tilde{x}) - \varphi_{n_k}(\tilde{x}+\Delta x) + \varphi_{n_k}(\tilde{x})}{\Delta x} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \left| \frac{\varphi(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi_{n_k}(\tilde{x}+\Delta x)}{\Delta x} \right| + \left| \frac{\varphi_{n_k}(\tilde{x}) - \varphi(\tilde{x})}{\Delta x} \right| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

ahora se puede escoger un N_2, tal que $N_2 > N_1$, de manera que para $k > N_2$, se tendrá

$$\left| \frac{\varphi_{n_k}(x) - \varphi(x)}{\Delta x} \right| < \frac{\varepsilon}{4},\ si\ x \in [x_0, x_0 + h]$$

resumiendo, para $k > N_2$ se obtendrá

$$\left| \frac{\varphi(\tilde{x}+\Delta x) - \varphi(\tilde{x})}{\Delta x} - f(\tilde{x},\tilde{y}) \right| < \varepsilon \qquad \#$$

donde Δx es un incremento fijo suficientemente pequeño. La estimación (ref: 2a33) obtenida muestra que la derivada de φ en $x = \tilde{x}$ existe y es igual a $f(\tilde{x},\tilde{y})$ y dado que $\tilde{x}$ es un valor arbitrario en del intervalo de $[x_0, x_0 + h]$, entonces para toda x de $[x_0, x_0 + h]$:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

que es **lo que se quería demostrar**.

11. Un resultado auxiliar que fue usado en la demostración del Teorema de existencia anterior es el llamado Teorema de Arzela, referente a familias de funciones $\{f(x)\}$ *uniformemente acotadas* en $[a,b]$ (si $(\exists M \in \mathbb{R}^+)$ $(\forall f \in \{f(x)\})$ $(\forall x \in [a,b])$ $|f(x)| \leq M$, donde la M es la misma para todas las funciones de $\{f(x)\}$; por ejemplo $\{\sin \alpha x\}$) y *equicontinuas* en cierto intervalo $[a,b]$ (se dice que la familia $\{f(x)\}$ es equicontinua si $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta(\varepsilon, \nwarrow f) > 0)$ $(\forall f \in \{f(x)\})$ $(\forall x^*, x^{**} \in [a,b])$ $|f(x^{**}) - f(x^*)| < \varepsilon$; por ejemplo $\{\sin(\alpha + x)\}$).

Teorema de Arzela

Theorem *De toda familia de funciones $\{f(x)\}$, formada por un conjunto infinito de funciones, definidas en $[a,b]$, uniformemente acotadas y equicontinuas en dicho segmento, puede escogerse una subsucesión infinita uniformemente convergente en $[a,b]$.*

Proof •*Para su demostración observese que como todas las funciones de la familia $\{f(x)\}$ son uniformemente acotadas en $[a,b]$, entonces sus gráficas quedarán dispuestas en el rectángulo de la Fig ?50? de logitudes $b-a$ y $2M$.???Fig ?50? para el caso $\alpha = 1$???*

•*Formese la sucesión infinita de números*

$$\{\varepsilon_k\}_k \stackrel{def}{=} \left\{\frac{M}{2^{\alpha+k}}\right\} \qquad \#$$

con $\alpha \in \mathbb{Z}^+_{\not{}}$ y a cada ε_k se le asocia un $\delta_k = \delta_k(\varepsilon_k)$ que participa en la definición de equicontinuidad de las funciones de $\{f(x)\}$.

1. En el rectángulo hacer la siguiente construcción: el lado vertical dividámoslo en intervalos de longitud ε_1, mientras que el lado horizontal en intervalos de longitud $\leq \delta_1$, y a través de dichos puntos se traza el enrejado de paralelas a los ejes coordenados, de manera que el rectángulo original queda particionado en rectangulitos, cuyas columnas serán denotadas por I, II,...

2. Por otro lado, dado que para cada función de la familia $\{f(x)\}$

$$|f(x^{**}) - f(x^{*})| < \varepsilon_1,\ si\ |x^{**} - x^{*}| < \delta_1 \qquad \#$$

entonces la gráfica de cada función f puede pasar por no más de 2 rectángulos vecinos de cada columna por como se escogió la ε_1 de la sucesión (ref: fa51).

3. Primero se considera la franja I. En esta columna se cuenta con un número finito de pares de rectangulitos vecinos y a lo largo de esta columna deberán pasar todas las gráficas de todas las funciones de la familia $\{f(x)\}$, formada por una infinidad de funciones y por ende al menos se tendrá un par de rectangulitos vecinos por donde pase una infinidad de las mismas. En la Fig ?50? dicho par aparece ashurado. En lo sucesivo se tratará sólo con el conjunto infinito de aquellas funciones, cuyas gráficas en la columna I pasan sólo por el par marcado.

4. En la franja II las gráficas de todas estas funciones pueden pasar por 4 rectangulitos de esta columna, donde la gráfica de cada una de tales funciones puede pasar por dos rectangulitos vecinos de entre ellos. Por consiguiente en la columna II existen por lo menos 2 rectangulitos mezclados por los que pasa un conjunto infinito de gráficas de las funciones de la familia dada $\{f(x)\}$, y tales que en la columna I pasan sólo por los rectangulitos ashurados.

5. Razonando en forma análoga a como se acaba de hacer se logra una franja aculebrada completa sobre todo el segmento $[a,b]$, de ancho $2\varepsilon_1$, a la cual pertenece un conjunto infinito de gráficas de funciones de la familia $\{f(x)\}$. Esta franja aculebrada marcada en la Fig ?50?, se denotará por S_1.

6. Tomese una de estas gráficas, por ejemplo f_1^*, y el resto de las gráficas que pasan por S_1, denotémosla por $\{f_1(x)\}$.Ahora con base en la familia $\{f_1(x)\}$, hagase lo mismo que se hizo con la familia $\{f(x)\}$, con la única diferencia de que en lugar de $\varepsilon_1$se toma ε_2, y en lugar de $\delta_1$ahora se toma δ_2. Entonces se obtendrá una nueva franja S_2 de ancho $2\varepsilon_2$, por la cual pasa un conjunto infinito de gráficas de las funciones de la nueva familia $\{f_1(x)\}$, inmersa en S_1. Y de nuevo se toma una de estas gráficas, digamos f_2^*, y el resto de las gráficas que pasan por S_2, se denota por $\{f_2(x)\}$.

7. Continuando con este mismo procedimiento se obtiene una sucesión infinita de funciones:

$$\{f_1^*(x), f_2^*(x), \ldots, f_k^*(x), \ldots\} \qquad \#$$

cuyas gráficas a partir de $f_k^*(x)$ pertenece a la franja S_k, de ancho $2\varepsilon_k = \frac{M}{2^{\alpha+k-1}}$, por lo que de esto se infiere que esta sucesión converge uniformemente en $[a,b]$, y esto es lo que se quería demostrar.

Teorema de existencia y unicidad (Picard).

Condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución del Problema de Cauchy (*Picard*). El Teorema Fundamental que asegura no sólo la *existencia*, sino también la *unicidad* del Problema de Cauchy es el llamado *Teorema de Picard*. Este problema es llamado un *problema local*, en el sentido de que concierne a la existencia y unicidad de la solución sólo “cerca” del punto inicial (x_0,y_0). Empezaremos por dar un enuciado simplificado, que permite ser utilizado en forma práctica. Véase además, por ejemplo [4]

Theorem *2 de existencia y unicidad (versión simplificada, Picard) Si la parte derecha f de la ED del Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \#$$

está definida en el rectángulo cerrado $\bar{D}$= $\{(x,y) \in R^2 : |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b;$ $a,b \in R^+\}$ con centro en (x_0,y_0) y satisface: i) f continua en $\bar{D}$ y ii) existe y es acotada la $\frac{\partial f}{\partial y}$, es decir en símbolos:

$$\begin{cases} 1.\ f \in C_{\bar{D}}\left(\Rightarrow |f(x,y)| \le M \in \mathbb{R}^+ \nparallel \forall \left(\curvearrowleft\nparallel\curvearrowright\right) \in \overset{\square}{\mathbb{D}}\right) \\ 2.\ \left(\exists \frac{\partial f}{\partial y}\right)\ y\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le K \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \qquad \#$$

Entonces dicho Problema de Cauchy tiene una única solución $y = \varphi(x)$, definida y continuamente diferenciable en la vecindad $V_h(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0| < h\}$, con h

susceptible de ser determinada, según el método de demostración, por ejemplo por aproximaciones sucesivas (método de Picard) queda definida por $h = min(a, \frac{b}{M})$. Además esta solución no se sale del rectángulo $\bar{D}$ con $|x - x_0| \le h$ (esto es, cumple con: $|y(x) - y_0| \le b$, $|x - x_0| \le h$)

Demostración. Será demostrado el siguiente Teorema 3 no simplificado que incluye como caso particular al caso simplificado del Teorema 2.

Theorem *3 de existencia y unicidad (versión no simplificada, Por Aproximaciones Sucesivas, Picard). Si la parte derecha f de la ED del Problema de Cauchy (*ref: 4a1*)*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

está definida en el rectángulo cerrado $\bar{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b; a, b \in \mathbb{R}^+\}$ y satisface las condiciones siguientes: i)f continua y f es Lipschitz, es decir, en símbolos:

$$\begin{cases} 1.\ f \in \mathbf{C}_{\bar{D}}\ \therefore\ |f(x,y)| \le M \in \mathbb{R}^+\ \forall (x,y) \in D \\ 2.\ |f(x,y) - f(x,z)| \le L|y - z|,\ L \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x,y) \in D \end{cases} \qquad \#$$

Entonces dicho Problema de Cauchy tiene una única solución $y = y(x)$, definida y continuamente diferenciable en la vecindad $V_h(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < h\}$, con h susceptible de ser determinada,según el método de demostración, por ejemplo por aproximaciones sucesivas queda definida por $h = min(a, \frac{b}{M})$, y dicha solución no se sale del rectángulo$\bar{D}$ con $|x - x_0| < h$ (esto es, cumple con: $|y(x) - y_0| \le b$, cuando $|x - x_0| < h$).

Demostración del Teorema de Picard.

1. Se trata de establecer una correspondencia biunívoca entre el Problema de Cauchy original (ref: 4a1) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ y una ecuación integral, precisamente aquella que se obtiene si formalmente se integra la ED de (ref: 4a1) entre x_0 y x tomando en cuenta la condición inicial del mismo problema (ref: 4a1), esto es:

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(r, y(r))dr \qquad \#$$

Para establecer tal correspondencia biunívoca entre el Problema de Cauchy original (ref: 4a1) y la ecuación integral (ref: 4a7), primero se puede partir de que se tiene la solución $y = \varphi(x)$ del Problema de Cauchy (ref: 4a1). Sustituyendola en (ref: 4a1) la convierte en una identidad

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)),\ x \in \bar{V}_h\ (x_0) = \{x : |x - x_0| \le h\} \qquad \#$$

de donde $d\varphi = \varphi'(x)dx$ e integrando de x_0 a x

$$\int_{x_0}^{x} d\varphi \equiv \int_{x_0}^{x} \varphi'(r)dr,\ |x - x_0| \leq h$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(r,\varphi(r))dr,\ |x - x_0| \leq h$$

luego

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r,\varphi(r))dr,\ |x - x_0| \leq h \qquad \#$$

obteniendo así que la solución $y = \varphi(x)$ del Problema de Cauchy (ref: fa61) resulta ser también solución de la *ecuación integral* (se llama así porque su función incógnita y entra bajo el signo de integral) (ref: 4a7)

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r,y(r))dr$$

E inversamente una solución de la ecuación integral (ref: 4a7) (*solución de un ecuación integral* es una función φ, que reduce la igualdad de la ecuación a una identidad en cierto intervalo de variación de la variable x). Si ahora se supone que se tiene una solución φ, definida, continua en $|x - x_0| \leq h$ y que no se sale de $\bar{D}$, de la ecuación integral (ref: 4a7), entonces al sustituirla en la misma ecuación integral (ref: 4a7), se tendrá la identida (ref: 4a9)

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r,\varphi(r))dr,\ |x - x_0| \leq h \qquad \#$$

dode en el integrando se tiene la composición en x: $f(x,\varphi(x)) = f(x,y) \circ \varphi(x)$, pero por hipótesis es la composición de 2 funciones continuas f en $\bar{D}$ y φ en $|x - x_0| \leq h$ y por lo tanto el integrando como composición de continuas es una funcion continua y no se sale de $\bar{D}$ cuando $|x - x_0| \leq h$, pero la integral con límite superior variable x de una funcion continua no sólo es una función continua de su límite superior, sino además es una función diferenciable del límite superior x, por ello derivando a (ref: 4a11) se obtiene

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv \frac{d}{dx}y_0 + \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(r,\varphi(r))dr,\ |x - x_0| \leq h$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv 0 + f(r,\varphi(r))|_{r=x}$$

de donde

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x,\varphi(x))$$

pero esto significa que la solución φ de la ecuación integral es también solución de la ED original (ref: 4a1) y sólo faltaría comprobar que satisface la condición inicial, pero esto es trivial si se reconoce de (ref: 4a7), que en $x = x_0$

$$\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x=x_0} f(r,\varphi)dr$$

se desprende que efectivamente se cumple con la condición inicial

$$\varphi(x_0) = y_0$$

Es así que ha sido demostrada la equivalencia entre la solución del Problema de Cauchy y la correspondiente solución de la ecuación integral. Por ello es suficiente con hallar la solución de esta última la ecuación integral con las propiedades señaladas. Se trata de hallar pues la solución de la ecuación integral:

2. Se buscará la *solución* de la ecuación integral (ref: 4a7) por el *método de aproximaciones sucesivas* (método de Picard). Este método consiste en la construcción de una *sucesión infinita recurrente de funciones*, con la característica de ser *convergente* a la solución buscada. La otra característica de esta construcción es que cada una de las funciones de esta sucesión se le llama y constituye una *aproximación* a la solución buscada.

Antes que nada se toma por definición como la 0 *aproximación* a la función $y_0(x)$, tomada como idénticamente igual al valor constante de la condición inicial y_0:

$$y_0(x) \equiv y_0 \qquad \#$$

Esto tiene una interpretación geométrica: en lugar de tomar la solución exacta $y = \varphi(x)$ se está tomando como la 0 aproximación a la recta horizontal (ref: 4a12) paralela al eje horizontal, que pasa por y_0. Véase la Fig ?38?

???Fig.?38????

La manera de ir construyendo la sucesión descrita consiste en sustituir la 0 aproximación en la parte derecha de la ecuación integral (ref: fa630), de manera que en la parte izquierda se obtenga como resultado a la nueva aproximación que llamaremos *Primera Aproximación* y que se denotará por y_1:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r,y_0(r))dr \qquad \#$$

???Fig.38???

Este último razonamiento es la clave de la recurrencia, por ello se repetirá: como siguiente aproximación se toma el resultado de sustituir la $1a$.

aproximación en la parte derecha de la ecuación integral (ref: fa630), de manera que en la parte izquierda se obtenga como resultado a la nueva aproximación que llamaremos *Segunda Aproximación* y que se denotará por y_2:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_1(r))dr \qquad \#$$

La hipótesis de inducción de esta construcción sería que la $(n-1)$ aproximación se construye al sustituir la $(n-2)$ aproximación en la parte derecha de la ecuación integral (ref: 4a10), de manera que en la parte izquierda se obtenga como resultado a la nueva $(n-1)$ *aproximación* y que se denotará por y_{n-1}:

$$y_{n-1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_{n-2}(r))dr \qquad \#$$

La definición por inducción quedará coronada si se logra deducir el mismo tipo de fórmula que (ref: 4a15), pero para el siguiente número natural el n-ésimo, pero en efecto, al sustituir la $(n-1)$ aproximación (ref: 4a15) en la parte derecha de la ecuación integral (ref: 4a10), de manera que en la parte izquierda se obtenga como resultado a la nueva n-ésima *aproximación* y que se denotará por y_n, obteniendo así el mismo tipo de fórmula que la hipótesis de iducción (ref: fa635), luego:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_{n-1}(r))dr \qquad \#$$

y por ende, con base en el Teorema de Inducción, para todas las $n \in \mathbb{N}$ se cumple la definición inductiva (ref: 4a16). Es así que queda construida recurrentemente la sucesión infinita de funciones:

$$\{y_k(x)\}_k \qquad \#$$

Se puede ahora demostrar que todas las funciones de la sucesión (ref: fa537) i) están definidas en $|x - x_0| \leq h$, ii) son continuas en $|x - x_0| \leq h$, iii) no se salen de $\bar{D}$ con $|x - x_0| \leq h$.

Se puede iniciar esta comprobación con y_1. En efecto de su definición y_1 en (ref: 4a33)

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_0(r))dr, \ |x - x_0| \leq a$$

i) está definida en $\bar{V}_h\ (x_0) = \{x : |x - x_0| \leq h \leq a\}$, además ii) es continua en $|x - x_0| \leq a$, ya que para estas x las funciones y_0 y f son continuas y por ende $f(x, y_0(x))$, como composición de continuas es continua, su integral con límite superior variable de una función continua en $|x - x_0| \leq a$ también será una función continua y y_0 como constante es continua en todo en particular en $|x-x_0| \le a$, luego la suma de 2 funciones (y_0 y la integral) continuas en $|x-x_0| \le a$, será continua y esto es precisamente y_1, por lo tanto $y_1(x)$ es continua en $|x-x_0| \le a$. Queda sólo por comprobar que iii) $y_1(x)$ no se sale de $\bar{D}$ con $|x-x_0| \le h$, pero esto en efecto es así ya que de (ref: 4a13)

$$y_1(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(r, y_0(r))dr, \ |x-x_0| \le a$$

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(r, y_0(r))dr \right|, \ |x-x_0| \le a$$

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(r, y_0(r))dr \right| \le \int_{x_0}^{x} |f(r, y_0(r))|dr, \ |x-x_0| \le a$$

$$|y_1(x) - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(r, y_0(r))|dr \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(r, y_0(r))|dr \right|, \ |x-x_0| \le a$$

o sea que

$$|y_1(x) - y_0| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(r, y_0(r))|dr \right|, \ |x-x_0| \le a$$

$$|y_1(x) - y_0| \le \left| M \int_{x_0}^{x} dr \right|, \ |x-x_0| \le a$$

de donde

$$|y_1(x) - y_0| \le M|x-x_0|, \ |x-x_0| \le a \qquad \#$$

y finalmente para que se cumpla:

$$|y_1(x) - y_0| \le b, \ |x-x_0| \le a \qquad \#$$

(lo que significa que $y_1(x)$ permanezca en $\bar{D}$) se deberá cumplir comparando (ref: fa638) y (ref: fa639a) que:

$$M|x-x_0| \le b, \ |x-x_0| \le a$$

de la que

$$|x-x_0| \le \frac{b}{M}, \ |x-x_0| \le a \qquad \#$$

y para que estas 2 condiciones de (ref: fa639b) se cumplan se puede uno restringir a la región

$$|x-x_0| \le h \qquad \#$$

donde

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \qquad \#$$

y entonces ambas desigualdades de (ref: 4a19) se cumplirán. y de esta forma se cumplirá que

$$|y_1(x) - y_0| \leq b, \; |x - x_0| \leq h \qquad \#$$

y esto es justamente que $y_1(x)$ no se sale de $\bar{D}$ pero con $|x - x_0| \leq h$. Véase la Fig?38?

En forma completamente análoga se desarrolla el razonamiento para $y_2(x), y_3(x), \ldots$

Supongase por ello de nuevo por hipótesis de inducción que la aproximación $y_{n-1}(x)$ no se sale de $\bar{D}$ con $|x - x_0| \leq h$. Hay que mostrar entonces que $y_n(x)$ no se sale de $\bar{D}$ con $|x - x_0| \leq h$. En efecto de (ref: 4a16)

$$y_n(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(r, y_{n-1}(r))dr$$

es inmediato establecer que $y_n(x)$ está definida y es continua en $|x - x_0| \leq h$ (por qué) y finalmente

$$|y_n(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(r, y_{n-1}(r))dr\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(r, y_{n-1}(r))|dr\right|$$
$$\leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b, \quad |x - x_0| \leq h$$

es decir que

$$|y_n(x) - y_0| \leq b, \quad |x - x_0| \leq h \qquad \#$$

o sea que la $y_n(x)$ no se sale de $\bar{D}$ con $|x - x_0| \leq h$. Y por el Teorema de inducción la afiemación de que $y_n(x)$ no se sale de $\bar{D}$ con $|x - x_0| \leq h$ es válida para todas las $n \in \mathbb{N}$.

3. Ahora se demostrará que la sucesión (ref: fa637) $\{y_k(x)\}$ construida por aproximaciones sucesivas no sólamente converge, sino que converge uniformemente en $|x - x_0| \leq h$ y consecuentemente la función límite será continua en $|x - x_0| \leq h$.

Recuerdese que la convergencia de una sucesión como (ref: 4a17) puede equivalentemente ser tratada como la convergencia de la serie:

$$y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(y_k - y_{k-1}) \qquad \#$$

dado que la suma parcial n-ésima $S_n = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1}) = y_n$ como se ve coincide con el n-ésimo término de la sucesión, lo que manifiesta la equivalencia referida.

Por lo anterior es suficiente demostrar la convergencia uniforme de la serie (ref: 4a22) para las x en $|x - x_0| \leq h$. Con tal fin puede construirse la serie mayorante de (ref: 4a22) a partir de estimar el módulo de cada una de las diferencias de (ref: 4a22). El *primer término* de la serie en módulo será:

$$|y_0(x)| = |y_0| \qquad \#$$

El valor absoluto del *segundo término* será:

$$\begin{aligned}
|y_1(x) - y_0(x)| &\leq \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_0(r))dr - y_0 \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} f(r, y_0(r))dr \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(r, y_0(r))| dr \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} M dr \right| = M \left| \int_{x_0}^{x} dr \right| = M|x - x_0|
\end{aligned}$$

esto es

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq M|x - x_0| \qquad \#$$

El valor absoluto del *tercer término* será:

$$\begin{aligned}
|y_2(x) - y_1(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_1(r))dr - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(r, y_0(r))dr \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} [f(r, y_1(r))dr - f(r, y_0(r))]dr \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(r, y_1(r))dr - f(r, y_0(r))| dr \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} L|y_1(r) - y_0(r)| dr \right| \\
&= L \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(r) - y_0(r)| dr \right| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} M|r - x_0| dr \right| \\
&= ML \left| \int_{x_0}^{x} |r - x_0| d(r - x_0) \right| = ML \left| \frac{|r - x_0|^2}{2} \Big|_{x_0}^{x} \right| \\
&= ML \frac{|x - x_0|^2}{2}
\end{aligned}$$

o bien

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq ML\frac{|x - x_0|^2}{2!} \qquad \#$$

Para ver con plenitud cuál es la fórmula de inducción se estimará el *cuarto término* de la serie

$$\begin{aligned}
|y_3(x) - y_2(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_2(r))dr - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(r, y_1(r))dr \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(r, y_2(r)) - f(r, y_1(r))| dr \right| \\
&\leq L\left| \int_{x_0}^{x} |y_2(r) - y_1(r)| dr \right| \leq L\left| \int_{x_0}^{x} ML\frac{|r - x_0|^2}{2!} dr \right| \\
&= ML^2 \left| \frac{|r - x_0|^3}{2!3} \Big|_{x_0}^{x} \right|
\end{aligned}$$

luego

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq ML^2\frac{|x - x_0|^3}{3!} \qquad \#$$

Ahora si queda claro que la hipótesis de inducción es

$$|y_{k-1}(x) - y_{k-2}(x)| \leq ML^{k-2}\frac{|x - x_0|^{k-1}}{(k-1)!}$$

y por consecuencia

$$
\begin{aligned}
|y_k(x) - y_{k-1}(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_{k-1}(r))dr - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(r, y_{k-2}(r))dr \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} |f(r, y_{k-1}(r)) - f(r, y_{k-2}(r))| dr \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_{k-1}(r) - y_{k-2}(r)| dr \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} ML^{k-2} \frac{|r - x_0|^{k-1}}{(k-1)!} dr \right| \\
&= \frac{ML^{k-1}}{(k-1)!} \left| \int_{x_0}^{x} |r - x_0|^{k-1} dr \right| \\
&= \frac{ML^{k-1}}{(k-1)!} \frac{|x - x_0|^k}{k} = ML^{k-1} \frac{|x - x_0|^k}{k!}
\end{aligned}
$$

que por ser de la misma forma que la hipótesis de inducción sólo que en lugar de $k-1$ aparece k, se puede concluir por el Teorema de inducción que para toda $k \in N$ se tiene

$$
|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq ML^{k-1} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \qquad \#
$$

pero para los valores de x que interesan $|x - x_0| \leq h$, la estimación quedará como

$$
|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq ML^{k-1} \frac{h^k}{k!}, \quad |x - x_0| \leq h \qquad \#
$$

En resumen se ha logrado que:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_k(x) - y_{k-1}(x)) &\leq |y_0(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \\
&\leq y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{|x - x_0|^k}{k!} \\
&\leq y_0 + M \sum_{k=1}^{\infty} L^{k-1} \frac{h^k}{k!}
\end{aligned}
$$

incluso se puede hallar la suma de esta última serie numérica

$$y_0 + M\sum_{k=1}^{\infty} L^{k-1}\frac{h^k}{k!} = y_0 + \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(Lh)^k}{k!}$$
$$= y_0 - \frac{M}{L} + \frac{M}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Lh)^k}{k!}$$
$$= y_0 - \frac{M}{L} + \frac{M}{L}e^{Lh}$$
$$= y_0 + \frac{M}{L}(e^{Lh} - 1)$$

Aquí cabrían las siguientes observaciones:

i) La serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(Lh)^k}{k!}$ o bien $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Lh)^k}{k!}$ es convergente lo cual puede comprobarse con el criterio de D'Alambert.

ii) En forma directa puede calcularse su suma como arriba fue hecho.

iii) Dado que la serie funcional original queda mayorizada por una serie numérica convergente, entonces por el Teorema de Weierstrass la serie funcional original converge uniformemente en $|x - x_0| \leq h$.

Si se denota la suma de la serie o su equivalente el límite de la sucesión como φ , se tendrá:

$$y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(y_k(x) - y_{k-1}(x)) \overset{|x-x_0|\leq h}{\rightrightarrows} \varphi(x) \overset{|x-x_0|\leq h}{\leftleftarrows} \lim_{n\to\infty} y_n \qquad \#$$

y como los términos de la serie son funciones continuas en $|x - x_0| \leq h$ y además la serie converge uniformemente en $|x - x_0| \leq h$ a su suma φ, entonces con base en el Teorema sobre la continuidad de la suma de una serie, se tendrá que en este caso la suma de la serie φ también será continua en $|x - x_0| \leq h$.

4. La función suma de la serie o lo que es lo mismo la función límite de la sucesión de aproximaciones sucesivas φ no se sale de $\bar{D}$ con $|x - x_0| \leq h$. En efecto, pasando al límite en la desigualdad (ref: 4a22) que mostraba que las aproximaciones sucesivas no se salían de $\bar{D}$ con $|x - x_0| \leq h$:

$$|y_n(x) - y_0| \leq b, \quad |x - x_0| \leq h$$
$$\lim_{n\to\infty}|y_n(x) - y_0| \leq b, \quad |x - x_0| \leq h$$
$$\left|\lim_{n\to\infty} y_n(x) - y_0\right| \leq b, \quad |x - x_0| \leq h$$

luego

$$|\varphi(x) - y_0| \leq b, \quad |x - x_0| \leq h \qquad \#$$

y esto significa que efectivamente la función límite φ no se sale de $\bar{D}$ con $|x - x_0| \leq h$.

5. Ahora se demostrará que la función límite φ obtenida en (ref: 4a29) satisface la ecuación integral (ref: 4a7) y por tanto el problema de Cauchy original (ref: 4a1).

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ en la expresión obtenida para la definición de las aproximaciones sucesivas (ref: 4a16)

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_n(r))dr$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_n(r))dr \right]$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(r, y_n(r))dr$$

de donde

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, \varphi(r))dr, \quad |x - x_0| \leq h \qquad \#$$

y así queda demostrado que φ es solución de la ecuación integral. Esto último fue escrito bajo la hipótesis de algo que requiere demostración:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(r, y_n(r))dr = \int_{x_0}^{x} f(r, \varphi(r))dr \qquad \#$$

pero esto debido a que la sucesión y_n converge uniformemente a la función límite φ, esto es (ref: 4a29): $y_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{|x-x_0|\leq h}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$, es decir

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon)(\forall n > N_\varepsilon)(\forall x \in \{x : |x - x_0| \leq h\})$$
$$|y_n(x) - \varphi(x)| \overset{\forall x:|x-x_0|\leq h}{<} \varepsilon \qquad \#$$

por lo tanto de la definición de límite en (ref: 4a32):

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon)(\forall n > N_\varepsilon)\left| \int_{x_0}^{x} f(r, y_n(r))dr - \int_{x_0}^{x} f(r, \varphi(r))dr \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(r, y_n) - f(r, \varphi)| dr \right| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_n - \varphi| dr \right|$$

$$\underset{(\text{ref: fa553})}{\overset{\forall x:|x-x_0|\leq h}{<}} L \left| \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon}{Lh} dr \right|$$

$$= L\frac{\varepsilon}{Lh}|x - x_0| \leq L\frac{\varepsilon}{Lh}h = \varepsilon$$

es decir el límite (ref: 4a32) se justifica y por ello φ satisface la ecuación integral (ref: 4a31) y por ende solución del problema de Cauchy (ref: 4a1).

6. Falta sólo demostrar que la solución hallada φ es *única*. Se puede usar el método por reducción al absurdo. Para ello se partirá de la negación de la conclusión, o se partirá de la negación de que la solución es única, esto es se supondrá que además de la solución ya construida φ se tiene otra solución adicional ψ del problema de Cauchy (ref: 4a1) definida y continua en $|x - x_0| \leq \widetilde{h}$, con $0 < \widetilde{h} \leq h$ y que no se sale de $\bar{D}$. Esta nueva solución ψ del problema de Cauchy, también lo será solución de la ecuación integral correspondiente (ref: 4a7), esto es la satisface:

$$\psi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, \psi(r))dr, \ \left(|x - x_0| \leq \widetilde{h}\right) \qquad \#$$

Ahora se puede estimar la diferencia entre la n-ésima aproximación a la solución φ(ref: 4a36) y la hipotética segunda solución ψ.

$$\begin{aligned} |y_n(x) - \psi(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(r, y_{n-1}(r))dr - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(r, \psi(r))dr \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^{x} [f(r, y_{n-1}(r)) - f(r, \psi(r))]dr \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(r, y_{n-1}(r)) - f(r, \psi(r))|dr \right| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(r) - \psi(r)|dr \right| \end{aligned}$$

esto es

$$|y_n(x) - \psi(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(r) - \psi(r)|dr \right|, \ \left(|x - x_0| \leq \widetilde{h}\right) \qquad \#$$

Se ha obtenido una desigualdad recurrente, de la cual se puede inferir una estimación de $y_n(x) - \psi(x)$, para lo cual se empieza por estimar la diferencia inicial $y_0(x) - \psi(x)$ de (ref: 4a34)

$$\begin{aligned} |y_0(x) - \psi(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} f(r, \psi(r))dr \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(r, \psi(r))|dr \right| \\ &\leq M \left| \int_{x_0}^{x} dr \right| = M|x - x_0| \end{aligned}$$

a partir de lo obtenido:

$$|y_0(x) - \psi(x)| \leq M|x - x_0| \qquad \#$$

se puede ir obteniendo las diferencias sucesivas, así con $n = 1$ en (ref: fa655):

$$|y_1(x) - \psi(x)| \le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_0(r) - \psi(r)| dr\right| \le ML\left|\int_{x_0}^{x} |r - x_0| dr\right| = LM\frac{|x - x_0|^2}{2}$$

de donde

$$|y_1(x) - \psi(x)| \le ML\frac{|x - x_0|^2}{2!} \qquad \#$$

Para asegurarse cuál es la hipótesis de inducción, de nuevo se hará ahora $n = 2$ en (ref: 4a35):

$$|y_2(x) - \psi(x)| \le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_1(r) - \psi(r)| dr\right|$$

$$\le ML^2\left|\int_{x_0}^{x} \frac{|r - x_0|^2}{2!} dr\right| = ML^2\frac{|x - x_0|^3}{2!3}$$

donde ya se ve cual es la regularidad

$$|y_2(x) - \psi(x)| \le ML^2\frac{|x - x_0|^3}{3!} \qquad \#$$

luego la hipótesis de inducción para $n - 1$, de la continuación de estos razonamientos será

$$|y_{n-1}(x) - \psi(x)| \le ML^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!} \qquad \#$$

lo cual es comprobable para el siguiente natural en (ref: 4a35):

$$|y_n(x) - \psi(x)| \le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(r) - \psi(r)| dr\right|$$

$$\overset{(\text{ref: 4a39})}{\le} LML^{n-1}\left|\int_{x_0}^{x} \frac{|x - x_0|^n}{n!} dr\right|$$

$$= ML^n\frac{|r - x_0|^{n+1}}{n!(n+1)}\Big|_{x_0}^{x} = ML^n\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

esto es

$$|y_n(x) - \psi(x)| \le ML^n\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \ \left(|x - x_0| \le \tilde{h}\right) \qquad \#$$

que tiene la misma forma de la hipótesis de inducción, pero que en lugar de $n - 1$ aparece n. Luego por el Teorema de inducción la diferencia $y_n(x) - \psi(x)$, para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple (ref: 4a40) o tomando en cuenta la propia restricción de (ref: 4a40):

$$|y_n(x) - \psi(x)| \leq ML^n \frac{\widetilde{h}^{n+1}}{(n+1)!}, \; \left(|x - x_0| \leq \widetilde{h}\right) \qquad \#$$

Observese que la parte derecha de esta desigualdad $ML^n \frac{\widetilde{h}^{n+1}}{(n+1)!}$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$. En efecto, este término representa el término general de la serie convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ML^n \frac{\widetilde{h}^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(L\widetilde{h}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(L\widetilde{h}\right)^{k}}{k!} =$$

$$= \frac{M}{L} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(L\widetilde{h}\right)^{k}}{k!} - 1 \right) = \frac{M}{L} \left(e^{L\widetilde{h}} - 1 \right)$$

y por ende es condición suficiente el que su término general tienda a 0. Pero entonces de (ref: 4a41)

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \psi(x), \; \left(|x - x_0| \leq \widetilde{h}\right) \qquad \#$$

Pero recordando que también

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \varphi(x), \; (|x - x_0| \leq h) \qquad \#$$

y como $\widetilde{h} \leq h$, entonces de (ref: 4a42) y (ref: 4a43)

$$\varphi(x) = \psi(x), \; \left(|x - x_0| \leq \widetilde{h}\right) \qquad \#$$

ya que una misma sucesión $y_n(x)$ no puede tener dos límites diferentes. Es decir, la solución es única.

Con esto queda completamente demostrado el Teorema de Picard.

Corolario Numérico.

Cada una de las funciones y_n puede considerarse como aproximación a la solución exacta φ del problema de Cauchy (ref: fa651). Serán expresadas 2 estimaciones relacionadas con el método de Picard (método de aproximaciones sucesivas):

1. Estimación de la solución φ:

Dado que contamos con la estimación (ref: 4a27) de $|y_k(x) - y_{k-1}(x)|$

$$\varphi(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[y_k(x) - y_{k-1}(x)] \Rightarrow |\varphi(x)|$$

$$\leq |y_0| + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k(x) - y_{k-1}(x)|$$

$$|\varphi(x)| \leq |y_0| + \sum_{n=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{|x - x_0|^k}{k!} \Rightarrow |\varphi(x)|$$

$$\leq |y_0| + \frac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(L|x - x_0|)^k}{k!}$$

$$|\varphi(x)| \leq |y_0| + \frac{M}{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(L|x - x_0|)^k}{k!} - 1\right]$$

de donde obtenemos la estimación buscada:

$$\boxed{|\varphi(x)| \leq |y_0| + \tfrac{M}{L}(e^{L|x-x_0|} - 1)} \qquad \#$$

2. Estimación de la desviación entre la n-ésima aproximación y la solución exacta. Para ello se puede usar la estimación (ref: 4a41)

$$|y_n(x) - \psi(x)| \leq ML^n\frac{\widetilde{h}^{n+1}}{(n+1)!}, \ \left(|x - x_0| \leq \widetilde{h}\right)$$

pero para la solución φ y en la vecindad h, lo cual nos lleva a la estimación buscada:

$$\boxed{|y_n(x) - \varphi(x)| \leq ML^n\tfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}, \ (|x - x_0| \leq h)} \qquad \#$$

Soluciones numéricas

xyz....

Notación:

$f' \equiv D_x f \equiv \frac{d}{dx}f \equiv \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) \equiv \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \equiv$"Derivada respecto a x",

$\dot{} \equiv \frac{d}{dt}$"Derivada con respecto al tiempo t",

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ "Derivada parcial de la función f de 2 o más variables respecto a la variable y",

$\propto$ "Símbolo de proporcionalidad",

C "Constante arbitraria de integración (real arbitrario)",

$\mathbf{C}_{(a,b)}$ "Espacio de las funciones continuas en (a,b)",

$\mathbb{C}$ "Campo de los números complejos",

$\forall$ "Cuantificador para todo",

$\exists$ "Existe",

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ "Intervalo",

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ “Segmento”,

$\to$ “tender a...”,

$\Rightarrow$ “implica que…”,

$\pm$ “magnitud con uno u otro signo”,

$\sum_{k=1}^{n}$ “Suma respecto a k de 1 a n”,

$\prod_{k=1}^{\infty}$ “Producto respecto a k de 1 a ∞”,

$\int, \int_a^x, \int_a^b$ “Integral indefinida, con límite superior variable, e integral definida de a a b”,

$\bigcup_{k=1}^{\infty}$ “Unión de conjuntos respecto a k de 1 a ∞”,

$\bigcap_{k=1}^{n}$ “Intersección de conjuntos respecto a k de 1 a n”,

$\emptyset$ “Conjunto vacío”,

$\circ$ “Composición”,

$\star$ “Convolución”,

∇ “Operador nabla”,

$\triangle$ “Operador de Laplace”,

$\|$ “paralelo a...”,

$\perp$ “perpendicular a...”,

$=$ “igual a...”,

$\simeq$ “aproximadamente igual a...”,

$\equiv$ “idéntico a...”,

$\in$ “pertenece a...”,

$\backsim$ “Relación de equivalencia”,

$\therefore$ “por lo tanto”

Referencias.

[1] Elsgoltz

[2] Petrovskii

[3]Pontryaguin

[A] Nemytzkii VV, Metod nyepodvizhnyj tochek v analize, Uspeji Matemat. Nauk, **1**, (1936), 141-174