

# INTRODUCCION

A LAS

ECUACIONES

DIFERENCIALES

**William E. Boyce**

y

**Richard C. DiPrima**

Instituto Politécnico Rensselaer



LIMUSA

NORIEGA EDITORES

MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

Versión autorizada en español  
de la obra publicada en inglés por  
John Wiley & Sons, Inc., bajo el título  
**INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS**  
© by John Wiley & Sons, Inc., New York

Versión en español  
**ANDRÉS BAL FLORES LÓPEZ**  
Físico de la Universidad Nacional Autónoma de México  
Profesor de Termodinámica y Fisicoquímica  
de la Facultad de Ciencias de la Universidad  
Veracruzana, Jalapa.

Revisión:  
**HELGA FETTER DE ABREU**  
M. en Ciencias, en Matemáticas  
y Profesora en Matemáticas en la  
Facultad de Ciencias de la Universidad  
Nacional Autónoma de México

*La presentación y disposición en conjunto de  
**INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES**  
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra  
puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema  
o método, electrónico o mecánico, (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO  
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento  
de información), sin consentimiento por escrito del editor.*

Derechos reservados:

© 1994, EDITORIAL LIMUSA, S.A. de C.V.  
GRUPO NORIEGA EDITORES  
Balderas 95, C.P. 06040, México, D.F.  
Teléfono 521-21-05  
Fax 512-29-03

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria  
Editorial Mexicana. Registro número 121

Primera edición: 1972  
Primera reimpresión: 1974  
Segunda reimpresión: 1977  
Tercera reimpresión: 1979  
Cuarta reimpresión: 1981  
Quinta reimpresión: 1984  
Sexta reimpresión: 1986  
Séptima reimpresión: 1994  
Impreso en México  
(12761)

QA372

B69

Fc-65591

FACULTAD DE CIENCIAS



- BIBLIOTECA -

Fc-65591

ESTA OBRA SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA  
6 DE ENERO DE 1994, EN LOS TALLERES DE  
GRUPO IMPRESA, S.A.  
LAGO CHALCO 230, COL. ANÁHUAC  
MÉXICO, D. F.

LA EDICIÓN CONSTA DE 500 EJEMPLARES  
Y SOBANTES PARA REPOSICIÓN

*A mi madre, Ethel DiPrima  
y a la grata memoria  
de mi padre, Clyde DiPrima*

**RICHARD C. DiPRIMA**

*A mi madre, Marie S. Boyce  
y a mi padre, Edward G. Boyce*

**WILLIAM E. BOYCE**

**Fc- 65591**

## PREAMBULO

Además del presente libro, hemos publicado, en colaboración con la misma casa editorial, otros dos libros que tratan, en forma más amplia, de las ecuaciones diferenciales. Uno de éstos, *Elementary Differential Equations*, contiene un análisis algo más detallado de los temas presentados en esta obra y capítulos adicionales sobre las transformadas de Laplace, ecuaciones diferenciales no lineales y estabilidad. El otro libro *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*,\* expone todos los temas anteriores y, también, abarca material adicional sobre ecuaciones diferenciales parciales, separación de variables, series de Fourier y problemas con valores en la frontera de Sturm-Liouville.

W. E. B.  
R. C. D.

\* Versión española, intitulada ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA, Editorial Limusa.

## PROLOGO

Este libro se escribió para utilizarlo como texto en un curso introductorio de ecuaciones diferenciales ordinarias. El material es suficiente para impartir un curso de un semestre o, con mayor flexibilidad en la elección de los tópicos, puede servir para un curso trimestral. El libro también puede usarse como texto complementario en el curso de cálculo, en el cual se dedica una parte a las ecuaciones diferenciales. La mayor parte de este libro sólo requiere conocimientos del cálculo de funciones de una variable; sin embargo, en algunas partes del libro se necesita estar familiarizado con la derivación parcial y, por supuesto, en el capítulo que trata de soluciones en serie, se supone que se tiene un conocimiento previo de las series infinitas.

El curso de ecuaciones diferenciales elementales es un excelente medio para que el estudiante aprecie la relación que existe entre las matemáticas puras, por una parte, y las ciencias físicas o la ingeniería, por la otra. Antes de que el ingeniero pueda aplicar con confianza, en su trabajo, las ecuaciones diferenciales, debe tener, al menos, un conocimiento rudimentario de la teoría básica, incluyendo ciertos conceptos acerca de la existencia y unicidad de las soluciones. Por otra parte, el estudiante de matemáticas puras generalmente se beneficia mucho, si conoce algunas de las formas desarrolladas, cuando la necesidad de resolver problemas específicos requirió realizar trabajo de naturaleza más abstracta.

Escribimos esta obra, teniendo en cuenta el punto de vista usual de quien se dedica a las matemáticas aplicadas y se interesa en las ecuaciones diferenciales, tanto en el aspecto muy teórico como en el sumamente práctico. Hemos, por lo tanto, intentado combinar una exposición precisa (pero no particularmente abstracta) de la teoría elemental de ecuaciones diferenciales, con una introducción a algunos de los métodos de solución que han sido útiles en las aplicaciones. Hemos dado atención principal a aquellos métodos que tienen mayores aplicaciones y que pueden utilizarse en problemas que exceden el alcance de este libro. Insistimos que estos

métodos tienen una estructura ordenada y sistemática, y que no son meramente una colección miscelánea de trucos matemáticos, sin relación alguna. Sin embargo, en algún punto de este libro, el estudiante deberá darse cuenta de que muchos problemas no se pueden resolver satisfactoriamente con las técnicas analíticas más o menos elementales. Por lo tanto, también hemos presentado varias formas de aproximar soluciones numéricamente.

Tan pronto como uno se encuentra con un problema de valores iniciales cuya solución, simplemente, no se puede encontrar, surgen preguntas acerca de la existencia y/o la unicidad de las soluciones. Respondemos estas preguntas, estableciendo los teoremas pertinentes, aunque no se use, necesariamente, su forma más general, y analizamos su significado. En particular, se examinan las diferencias entre las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

Aunque consideramos que, a este nivel, la mayoría de los estudiantes ya empieza a entender la importancia y las aplicaciones de los diferentes teoremas, en muchos casos, las demostraciones requieren conceptos que les son desconocidos, tales como el de convergencia uniforme. Cuando éste es el caso, hemos omitido las pruebas sin dar explicaciones al respecto. Por ejemplo, analizamos algunos de los problemas necesarios para probar los teoremas fundamentales de existencia y unicidad, para un problema de valores iniciales de primer orden, por el método de aproximaciones sucesivas; sin embargo, nuestro enfoque es más bien intuitivo, y se han evitado los detalles analíticos más difíciles.

Con frecuencia los estudiantes tienen la sensación de que los cursos y libros sobre ecuaciones diferenciales tienden a convertirse en "libros de recetas"; hemos hecho un esfuerzo especial para combatir esta tendencia. Cuando se sugiere el método de abordar un tipo nuevo de problema, siempre que sea posible, se trata de aprovechar los conocimientos previos del estudiante. En un libro elemental, no creemos que lo sucinto sea la virtud principal y, en general, hemos puesto más énfasis en la claridad que en lo conciso. Esperamos que lo que se haya perdido en elegancia se haya ganado en facilidad de lectura.

Mientras que el alcance del libro se puede juzgar mejor con el Contenido vale la pena mencionar aquí algunas de sus características principales. El capítulo 1 es una breve introducción a una parte de la terminología usada en las ecuaciones diferenciales. El capítulo 2 trata de las ecuaciones de primer orden. En las primeras tres secciones se destacan las diferencias entre las ecuaciones lineales y no lineales. A esta parte le sigue la presentación de los métodos de integración básicos y usuales, así como un estudio de sus diversas aplicaciones. El capítulo termina con una revisión de la teoría de series de potencias, tanto desde un punto de vista clásico como del moderno.

Los capítulos 3 a 6 están dedicados a las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. En el capítulo 3 tratamos las ecuaciones lineales de segundo orden. Se hace énfasis en los conceptos de conjuntos fundamentales de soluciones, independencia lineal y superposición, así como los métodos de solución. Se toman ejemplos de los campos de vibraciones mecánicas y redes eléctricas. Las ideas de este capítulo se aplican a ecuaciones lineales de orden superior, en el capítulo 5. En el capítulo 4, sobre soluciones en serie de potencias, mostramos por qué la clasificación de punto en puntos ordinarios, regulares singulares, o irregulares singulares es necesaria y natural y no arbitraria. Usamos la ecuación de Euler como un modelo para manejar ecuaciones más generales que tienen un punto regular singular. Los casos, en los que las raíces de la ecuación indicial son iguales, o difieren por un entero, se analizan y se ilustran con formas apropiadas de la ecuación de Bessel. El capítulo 6 trata de sistemas de ecuaciones lineales de primer orden. La primera de las dos secciones ofrece una breve introducción a sistemas y su solución mediante los métodos de eliminación, y se puede estudiar sin tener ningún conocimiento de matrices. A continuación se presenta una sección de repaso sobre vectores y matrices, y, de ahí en adelante, hasta el final del capítulo, se usa la notación de matriz-vector. Esto hace resaltar claramente la estrecha relación que hay entre la teoría de ecuaciones aisladas y la de sistemas de ecuaciones.

En el capítulo 7, se exponen detalladamente las técnicas numéricas discretas para resolver problemas de valores iniciales. Se analizan y comparan procedimientos que van desde el método de la línea tangente de Euler hasta el método de Runge-Kutta. Se pone gran énfasis en sentar los principios fundamentales que rigen a los procedimientos numéricos y sus casos particulares, señalando los tipos y origen de los errores, así como los medios para evitarlos.

Consideramos que, como libro de texto, esta obra tiene una flexibilidad poco común pues, a partir del capítulo 4, los capítulos son básicamente independientes unos de otros. Además, las ideas principales se exponen en las primeras secciones de estos capítulos, mientras que, en las restantes, se tratan los desarrollos y aplicaciones. Por lo tanto, se deja al instructor libertad completa respecto a la selección y organización del material del curso, así como la profundidad con que desea tratar los diferentes tópicos.

Por lo que se refiere a la presentación de este libro, las secciones se marcaron con números decimales aunque en cada capítulo, los teoremas, figuras, etc., están numeradas en orden consecutivo. Por lo tanto, el teorema 3.7 es el séptimo teorema en el capítulo 3, pero no está, necesariamente, en la sección 3.7. La bibliografía se da al final de cada capítulo. A continuación de la mayor parte de las secciones, hay conjun-

Los capítulos 3 a 6 están dedicados a las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. En el capítulo 3 tratamos las ecuaciones lineales de segundo orden. Se hace énfasis en los conceptos de conjuntos fundamentales de soluciones, independencia lineal y superposición, así como los métodos de solución. Se toman ejemplos de los campos de vibraciones mecánicas y redes eléctricas. Las ideas de este capítulo se aplican a ecuaciones lineales de orden superior, en el capítulo 5. En el capítulo 4, sobre soluciones en serie de potencias, mostramos por qué la clasificación de punto en puntos ordinarios, regulares singulares, o irregulares singulares es necesaria y natural y no arbitraria. Usamos la ecuación de Euler como un modelo para manejar ecuaciones más generales que tienen un punto regular singular. Los casos, en los que las raíces de la ecuación indicial son iguales, o difieren por un entero, se analizan y se ilustran con formas apropiadas de la ecuación de Bessel. El capítulo 6 trata de sistemas de ecuaciones lineales de primer orden. La primera de las dos secciones ofrece una breve introducción a sistemas y su solución mediante los métodos de eliminación, y se puede estudiar sin tener ningún conocimiento de matrices. A continuación se presenta una sección de repaso sobre vectores y matrices, y, de ahí en adelante, hasta el final del capítulo, se usa la notación de matriz-vector. Esto hace resaltar claramente la estrecha relación que hay entre la teoría de ecuaciones aisladas y la de sistemas de ecuaciones.

En el capítulo 7, se exponen detalladamente las técnicas numéricas discretas para resolver problemas de valores iniciales. Se analizan y comparan procedimientos que van desde el método de la línea tangente de Euler hasta el método de Runge-Kutta. Se pone gran énfasis en sentar los principios fundamentales que rigen a los procedimientos numéricos y sus casos particulares, señalando los tipos y origen de los errores, así como los medios para evitarlos.

Consideramos que, como libro de texto, esta obra tiene una flexibilidad poco común pues, a partir del capítulo 4, los capítulos son básicamente independientes unos de otros. Además, las ideas principales se exponen en las primeras secciones de estos capítulos, mientras que, en las restantes, se tratan los desarrollos y aplicaciones. Por lo tanto, se deja al instructor libertad completa respecto a la selección y organización del material del curso, así como la profundidad con que desea tratar los diferentes tópicos.

Por lo que se refiere a la presentación de este libro, las secciones se marcaron con números decimales aunque en cada capítulo, los teoremas, figuras, etc., están numeradas en orden consecutivo. Por lo tanto, el teorema 3.7 es el séptimo teorema en el capítulo 3, pero no está, necesariamente, en la sección 3.7. La bibliografía se da al final de cada capítulo. A continuación de la mayor parte de las secciones, hay conjun-



tos de problemas para el estudiante y todas las respuestas están reunidas al final del libro. Se señalaron con asterisco algunos de los problemas más difíciles y, en la misma forma, se marcaron ciertas secciones que contienen material más avanzado; el estudiante principiante las puede omitir en su primera lectura.

Deseamos dar las gracias a muchas personas quienes, indirectamente, nos ayudaron a preparar este manuscrito y, en particular, a los Profs. Paul McGloin, David Moskovitz y Lee Segel.

También expresamos nuestro agradecimiento al Profesor George H. Handelman, por sus numerosas y finas atenciones, al poner a nuestra disposición los recursos del Departamento de Matemáticas de Rensselaer. Finalmente, damos las gracias al personal de los departamentos editorial y de producción de John Wiley and Sons, Inc. por su ayuda y cooperación.

Troy, Nueva York

WILLIAM E. BOYCE  
RICHARD C. DI PRIMA

# CONTENIDO

1. INTRODUCCION, 17
  - 1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias, 18
  
2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN, 23
  - 2.1 Ecuaciones lineales, 23
  - 2.2 Exposición general de ecuaciones lineales, 30
  - 2.3 Ecuaciones no lineales, 34
  - 2.4 Ecuaciones separables, 43
  - 2.5 Ecuaciones exactas, 47
  - 2.6 Factores integrantes, 52
  - 2.7 Ecuaciones homogéneas, 55
  - 2.8 Problemas diversos, 59
  - 2.9 Aplicaciones de las ecuaciones de primer orden, 61
  - 2.10 Mecánica elemental, 72
  - \*2.11 El teorema de existencia y unicidad, 78
  - \*2.12 El teorema de existencia, desde un punto de vista más moderno, 89
  
3. ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN, 93
  - 3.1 Introducción, 93
  - 3.2 Soluciones fundamentales de las ecuaciones homogéneas, 99
  - 3.3 Independencia lineal, 107
  - 3.4 Reducción de orden, 111
  - 3.5 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes, 114

- 3.5.1 Raíces complejas, 118
- 3.6 El problema de la no homogeneidad, 122
- 3.6.1 El método de coeficientes indeterminados, 125
- 3.6.2 El método de variación de parámetros, 132
- 3.7 Vibraciones mecánicas, 137
- 3.7.1 Vibraciones libres, 141
- 3.7.2 Vibraciones forzadas, 147

4. SOLUCIONES EN SERIE DE ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN, 153

- 4.1 Introducción. Repaso de las series de potencias, 153
- 4.2 Soluciones en serie en la vecindad de un punto ordinario, Parte I, 157
- 4.2.1 Soluciones en serie en la vecindad de un punto ordinario, Parte II, 164
- 4.3 Puntos regulares singulares, 172
- 4.4 Ecuaciones de Euler, 177
- 4.5 Soluciones en serie en la vecindad de un punto regular singular, Parte I, 182
- \*4.5.1 Soluciones en serie en la vecindad de un punto regular singular, Parte II, 188
- \*4.6 Ecuación de Bessel, 194

5. ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR, 205

- 5.1 Introducción, 205
- 5.2 Teoría general de las ecuaciones lineales de  $n$ -ésimo orden, 207
- 5.3 La ecuación homogénea con coeficientes constantes, 211
- 5.4 El método de los coeficientes indeterminados, 218
- 5.5 El método de variación de parámetros, 222

6. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN, 227

- 6.1 Introducción, 227
- 6.2 Solución de sistemas lineales por eliminación, 231
- 6.3 Repaso de matrices, 237

6.4	Teoría básica de sistemas de ecuaciones lineales de primer orden,	248
6.5	Sistemas homogéneos lineales con coeficientes constantes,	255
6.6	Eigenvalores complejos y repetidos,	260
7.	<b>METODOS NUMERICOS,</b>	<b>271</b>
7.1	Introducción,	271
7.2	El método de Euler o método de la línea tangente,	274
7.3	El error,	281
7.4	El método de Euler perfeccionado,	289
7.5	El método de la serie de Taylor de tres términos,	294
7.6	El método de Runge-Kutta,	296
7.7	Algunas dificultades con los métodos numéricos,	301
	<b>SOLUCION DE PROBLEMAS,</b>	<b>307</b>
	<b>INDICE,</b>	<b>333</b>