Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales de primer orden

2.1 ECUACIONES LINEALES

Este capítulo trata de las ecuaciones diferenciales de primer orden, esto es, ecuaciones de la forma

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

donde f es una función dada de dos variables. Cualquier función $y = \phi(x)$, la cual con su derivada y' satisfacen idénticamente a la Ec. (1), es llamada una solución. Nuestro objeto es determinar cuándo tales funciones existen, y de ser así, cómo encontrarlas. Para obtener alguna familiaridad con las ecuaciones diferenciales y sus soluciones, consideraremos primero la ecuación lineal de primer orden

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{2}$$

donde p y g son funciones continuas dadas sobre algún intervalo $\alpha < x < \beta$. En esta sección trataremos con métodos para resolver la Ec. (2). Los aspectos más teóricos que involucran la existencia y unicidad de las soluciones en general serán discutidos en la sección 2.2.

Principiaremos con la ecuación

$$y' + ay = 0, \tag{3}$$

donde a es una constante real. Esta ecuación puede ser resuelta por inspección. ¿Qué función tiene una derivada que es múltiplo de la función original? Claramente $y = e^{-ax}$ satisface la Ec. (3); es más

$$y = ce^{-ax}, \tag{4}$$

donde c es una constante arbitraria, también lo es. Ya que c es arbitraria, la Ec. (4) representa un número infinito de soluciones de la ecuación diferencial (3). Es natural preguntarnos si la Ec. (3) tiene soluciones diferentes a las dadas

por la Ec. (4). Mostraremos en la sección siguiente que no hay otras soluciones, pero por el momento esta pregunta permanece abierta.

Geométricamente, la Ec. (4) representa una familia de curvas de un parámetro, llamadas *curvas integrales* de la Ec. (3). Para $a = 1$ varios miembros de esta familia están bosquejados en la figura 2.1. Cada curva integral es la representación geométrica de la solución correspondiente de la ecuación diferencial.

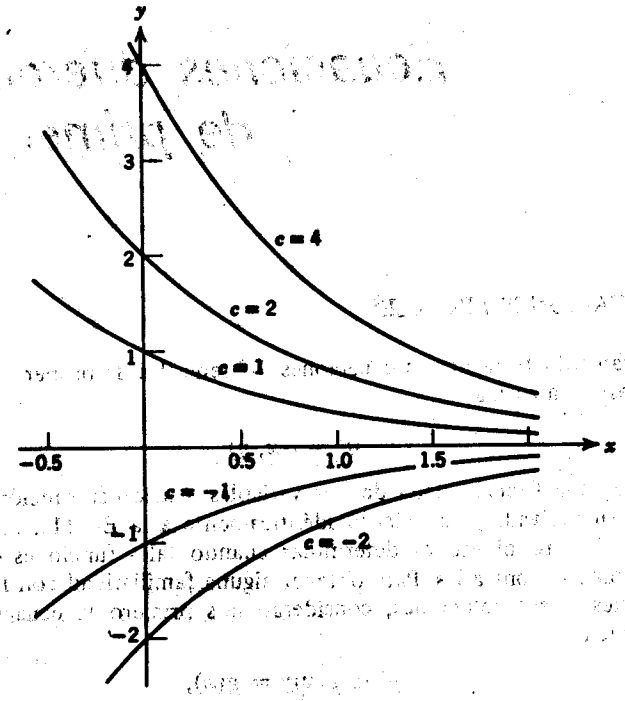

FIGURA 2.1

Especificar una solución particular es equivalente a extraer una curva integral particular de la familia que se ha bosquejado. Usualmente es conveniente hacer esto prescribiendo un punto (x_0, y_0) a través del cual debe pasar la curva integral; esto es, buscar una solución $y = \phi(x)$ tal que

$$\phi(x_0) = y_0.$$

Tal condición es llamada una *condición inicial*. Ya que y es igual a $\phi(x)$ podemos escribir también

$$y = y_0 \quad \text{en} \quad x = x_0.$$

Sin embargo, es una práctica común expresar la condición inicial en la forma

$$y(x_0) = y_0, \tag{5}$$

y ésta es la notación que se seguirá usualmente en este libro. Una ecuación diferencial de primer orden junto con una condición inicial forman un *problema de valores iniciales.**

Por ejemplo, la ecuación diferencial (3),

$$y' + ay = 0,$$

y la condición inicial

$$y(0) = 2, \tag{6}$$

forman un problema de valores iniciales. Como se hizo notar antes, todas las soluciones de la ecuación diferencial (3) están dadas por la Ec. (4). La solución particular que satisface la condición inicial (6) se encuentra substituyendo $x = 0$ y $y = 2$ en la Ec. (4). Entonces $c = 2$ y la solución deseada es la función

$$y = \phi(x) = 2e^{-ax}. \tag{7}$$

Esta es la solución única del problema dado de valores iniciales. Más generalmente, es posible mostrar que el problema de valores iniciales compuesto de la ecuación diferencial (2) y la condición inicial (5) tiene una solución única siempre que p y g, los coeficientes, sean funciones continuas. Esto se discute en la sección siguiente.

Para desarrollar un método sistemático para resolver ecuaciones lineales de primer orden es conveniente retroceder un poco. Por lo tanto reescribamos la solución (4) de la ecuación diferencial (3) en la forma

$$ye^{ax} = c. \tag{8}$$

Diferenciando el miembro izquierdo de la Ec. (8) tenemos

$$(ye^{ax})' = y'e^{ax} + aye^{ax} = e^{ax}(y' + ay), \tag{9}$$

y de aquí la Ec. (8) implica que

$$e^{ax}(y' + ay) = 0. \tag{10}$$

La cancelación del factor positivo e^{ax} nos conduce a la ecuación diferencial (3). Es importante notar que la solución de la Ec. (3) puede construirse invirtiendo el proceso anterior, esto es, multiplicando la Ec. (3) por e^{ax}, obteniendo entonces la Ec. (10) de la cual se sigue la Ec. (8) usando la Ec. (9). Finalmente, resolviendo la Ec. (8) para y se obtiene la Ec. (4).

El mismo procedimiento puede usarse para resolver la ecuación más general

$$y' + ay = g(x). \tag{11}$$

Multiplicando por e^{ax} nos da

$$e^{ax}(y' + ay) = e^{ax}g(x),$$

o, usando la Ec. (9),

$$(ye^{ax})' = e^{ax}g(x).$$

* Se sugiere esta terminología por el hecho de que la variable independiente denota a menudo al tiempo, la condición inicial define la situación en algún instante fijo, y la solución del problema de valores iniciales describe lo que sucede después.

Por lo tanto

$$ye^{ax} = \int^x e^{at}g(t)\,dt + c,$$

donde c es una constante arbitraria. Por lo tanto una solución de la Ec. (11) es la función

$$y = \phi(x) = e^{-ax}\int^x e^{at}g(t)\,dt + ce^{-ax}. \tag{12}$$

En la Ec. (12) y en todo este libro usaremos la notación $\int^x f(t)\,dt$ para denotar una antiderivada de la función f, esto es, $F(x) = \int^x f(t)\,dt$ designa algún representante particular de la clase de funciones cuyas derivadas son iguales a f. Todos los miembros de esta clase están incluidos en la expresión $F(x) + c$, donde c es arbitraria.

Por lo tanto, para una función dada g, el problema de determinar una solución de la Ec. (11) se reduce a evaluar la antiderivada en la Ec. (12). La dificultad involucrada en esto depende de g; sin embargo la Ec. (12) da una fórmula explícita para la solución $y = \phi(x)$. La constante c puede determinarse si una condición inicial es prescrita.

Tratemos ahora la ecuación lineal general de primer orden (2),

$$y' + p(x)y = g(x).$$

Por analogía con el proceso anterior, deberíamos de escoger una función μ tal que si la Ec. (2) es multiplicada por $\mu(x)$, el miembro izquierdo de la Ec. (2) se transforma en la derivada* $\mu(x)y$. Esto es, queremos elegir μ, si es posible, tal que

$$\begin{aligned}\mu(x)[y' + p(x)y] &= [\mu(x)y]' \\ &= \mu(x)y' + \mu'(x)y.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(x)$ debe satisfacer

$$p(x)y\mu(x) = y\mu'(x).$$

Suponiendo por el momento que $\mu(x) > 0$, y dividiendo entre $y\mu(x)$, obtenemos†

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = [\ln \mu(x)]' = p(x). \tag{13}$$

Por lo tanto

$$\ln \mu(x) = \int^x p(t)\,dt,$$

* Una función μ que tenga esta propiedad se llama un factor integrante. Los factores integrantes se describen más completamente en la sección 2.6.

† Recuérdese que $\int^x \frac{dt}{t} = \ln|x|$.

Por lo tanto

$$ye^{ax} = \int^x e^{at}g(t)\,dt + c,$$

donde c es una constante arbitraria. Por lo tanto una solución de la Ec. (11) es la función

$$y = \phi(x) = e^{-ax}\int^x e^{at}g(t)\,dt + ce^{-ax}. \tag{12}$$

En la Ec. (12) y en todo este libro usaremos la notación $\int^x f(t)\,dt$ para denotar una antiderivada de la función f, esto es, $F(x) = \int^x f(t)\,dt$ designa algún representante particular de la clase de funciones cuyas derivadas son iguales a f. Todos los miembros de esta clase están incluidos en la expresión $F(x) + c$, donde c es arbitraria.

Por lo tanto, para una función dada g, el problema de determinar una solución de la Ec. (11) se reduce a evaluar la antiderivada en la Ec. (12). La dificultad involucrada en esto depende de g; sin embargo la Ec. (12) da una fórmula explícita para la solución $y = \phi(x)$. La constante c puede determinarse si una condición inicial es prescrita.

Tratemos ahora la ecuación lineal general de primer orden (2),

$$y' + p(x)y = g(x).$$

Por analogía con el proceso anterior, deberíamos de escoger una función μ tal que si la Ec. (2) es multiplicada por $\mu(x)$, el miembro izquierdo de la Ec. (2) se transforma en la derivada* $\mu(x)y$. Esto es, queremos elegir μ, si es posible, tal que

$$\begin{aligned}\mu(x)[y' + p(x)y] &= [\mu(x)y]' \\ &= \mu(x)y' + \mu'(x)y.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(x)$ debe satisfacer

$$p(x)y\mu(x) = y\mu'(x).$$

Suponiendo por el momento que $\mu(x) > 0$, y dividiendo entre $y\mu(x)$, obtenemos†

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = [\ln \mu(x)]' = p(x). \tag{13}$$

Por lo tanto

$$\ln \mu(x) = \int^x p(t)\,dt,$$

* Una función μ que tenga esta propiedad se llama un factor integrante. Los factores integrantes se describen más completamente en la sección 2.6.

† Recuérdese que $\int^x \frac{dt}{t} = \ln|x|$.

y finalmente

$$\mu(x) = \exp\left[\int^x p(t)\,dt\right]. \tag{14}$$

Nótese que $\mu(x)$, cuando se define por la Ec. (14), es realmente positiva. Además, ya que la $\int^x p(t)\,dt$ puede denotar cualquiera de las antiderivadas de p, $\mu(x)$ está determinada excepto por una constante multiplicativa arbitraria, la cual no tiene importancia ya que puede ser cancelada en ambos miembros de la ecuación siguiente.

Volviendo a la Ec. (2) y multiplicando por $\mu(x)$ se obtiene

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x).$$

Por lo tanto

$$\mu(x)y = \int^x \mu(s)g(s)\,ds + c,$$

ó

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(s)g(s)\,ds + c\right], \tag{15}$$

donde $\mu(x)$ está dada por la Ec. (14). La Ec. (15) da una fórmula explícita para la solución de la ecuación lineal general de primer orden (2), donde p y g son funciones continuas dadas. Se requieren dos integraciones, una para obtener $\mu(x)$ de la Ec. (14), y la otra para determinar y de la Ec. (15). La constante arbitraria c puede usarse para satisfacer una condición inicial.

Ejemplo 1. Encontrar la solución al problema de valores iniciales

$$y' - 2xy = x, \qquad y(0) = 1. \tag{16}$$

Para esta ecuación la función μ está dada por

$$\mu(x) = \exp\left(-\int^x 2t\,dt\right) = e^{-x^2}.$$

Por lo tanto

$$e^{-x^2}(y' - 2xy) = xe^{-x^2},$$

de manera que

$$(ye^{-x^2})' = xe^{-x^2}.$$

de donde

$$ye^{-x^2} = \int^x te^{-t^2}\,dt + c = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c,$$

y finalmente

$$y = -\tfrac{1}{2} + ce^{x^2}.$$

y finalmente

$$\mu(x) = \exp\left[\int^x p(t)\,dt\right]. \tag{14}$$

Nótese que $\mu(x)$, cuando se define por la Ec. (14), es realmente positiva. Además, ya que la $\int^x p(t)\,dt$ puede denotar cualquiera de las antiderivadas de p, $\mu(x)$ está determinada excepto por una constante multiplicativa arbitraria, la cual no tiene importancia ya que puede ser cancelada en ambos miembros de la ecuación siguiente.

Volviendo a la Ec. (2) y multiplicando por $\mu(x)$ se obtiene

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x).$$

Por lo tanto

$$\mu(x)y = \int^x \mu(s)g(s)\,ds + c,$$

ó

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(s)g(s)\,ds + c\right], \tag{15}$$

donde $\mu(x)$ está dada por la Ec. (14). La Ec. (15) da una fórmula explícita para la solución de la ecuación lineal general de primer orden (2), donde p y g son funciones continuas dadas. Se requieren dos integraciones, una para obtener $\mu(x)$ de la Ec. (14), y la otra para determinar y de la Ec. (15). La constante arbitraria c puede usarse para satisfacer una condición inicial.

Ejemplo 1. Encontrar la solución al problema de valores iniciales

$$y' - 2xy = x, \qquad y(0) = 1. \tag{16}$$

Para esta ecuación la función μ está dada por

$$\mu(x) = \exp\left(-\int^x 2t\,dt\right) = e^{-x^2}.$$

Por lo tanto

$$e^{-x^2}(y' - 2xy) = xe^{-x^2},$$

de manera que

$$(ye^{-x^2})' = xe^{-x^2}.$$

de donde

$$ye^{-x^2} = \int^x te^{-t^2}\,dt + c = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c,$$

y finalmente

$$y = -\tfrac{1}{2} + ce^{x^2}.$$

Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 1$ debemos elegir $c = 3/2$. De aquí que

$$y = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}e^{x^2} \tag{17}$$

es la solución del problema de valores iniciales dado.

Ejemplo 2. Encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$y' - 2xy = 1, \qquad y(0) = 1. \tag{18}$$

Como en el ejemplo anterior $\mu(x)$ es e^{-x^2}, y obtenemos

$$ye^{-x^2} = \int^x e^{-t^2}\,dt + c. \tag{19}$$

Para evaluar c es conveniente tomar el límite de integración inferior* como el punto inicial $x = 0$. Entonces, multiplicando la Ec. (19) por e^{x^2} obtenemos

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + ce^{x^2}.$$

La condición inicial $y(0) = 1$ requiere que $c = 1$ y por lo tanto

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2} \tag{20}$$

es la solución del problema dado.

Nótese que en la solución del ejemplo 2, la integral de e^{-t^2} no se puede expresar como una función elemental. Esto ilustra el hecho de que puede ser necesario dejar la solución, aún de un problema muy simple, en forma integral. Sin embargo, la función

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt, \tag{21}$$

conocida como *función error*, ha sido ampliamente tabulada y puede considerarse como una función conocida. Desde un punto de vista computacional, por lo tanto, la Ec. (20) es una expresión perfectamente satisfactoria como la solución del problema de valores iniciales (18). Es tan satisfactoria, de hecho, como la solución $y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{x^2}$ del problema de valores iniciales (16). Para calcular e^{x^2} para un valor dado de x, ordinariamente consultamos una tabla, y esto no es más difícil que encontrar erf (x) en una tabla diferente.

* La elección del límite inferior de integración es realmente irrelevante, ya que la diferencia entre $\int_a^x e^{-t^2}\,dt$ y $\int_b^x e^{-t^2}\,dt$ es simplemente una constante, que puede sumarse a c.

Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 1$ debemos elegir $c = 3/2$. De aquí que

$$y = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}e^{x^2} \tag{17}$$

es la solución del problema de valores iniciales dado.

Ejemplo 2. Encontrar la solución del problema de valores iniciales

$$y' - 2xy = 1, \qquad y(0) = 1. \tag{18}$$

Como en el ejemplo anterior $\mu(x)$ es e^{-x^2}, y obtenemos

$$ye^{-x^2} = \int^x e^{-t^2}\,dt + c. \tag{19}$$

Para evaluar c es conveniente tomar el límite de integración inferior* como el punto inicial $x = 0$. Entonces, multiplicando la Ec. (19) por e^{x^2} obtenemos

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + ce^{x^2}.$$

La condición inicial $y(0) = 1$ requiere que $c = 1$ y por lo tanto

$$y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2} \tag{20}$$

es la solución del problema dado.

Nótese que en la solución del ejemplo 2, la integral de e^{-t^2} no se puede expresar como una función elemental. Esto ilustra el hecho de que puede ser necesario dejar la solución, aún de un problema muy simple, en forma integral. Sin embargo, la función

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt, \tag{21}$$

conocida como *función error*, ha sido ampliamente tabulada y puede considerarse como una función conocida. Desde un punto de vista computacional, por lo tanto, la Ec. (20) es una expresión perfectamente satisfactoria como la solución del problema de valores iniciales (18). Es tan satisfactoria, de hecho, como la solución $y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{x^2}$ del problema de valores iniciales (16). Para calcular e^{x^2} para un valor dado de x, ordinariamente consultamos una tabla, y esto no es más difícil que encontrar erf (x) en una tabla diferente.

* La elección del límite inferior de integración es realmente irrelevante, ya que la diferencia entre $\int_a^x e^{-t^2}\,dt$ y $\int_b^x e^{-t^2}\,dt$ es simplemente una constante, que puede sumarse a c.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas, del 1 al 4, resuélvase la ecuación diferencial.

1. $y' + 3y = x + e^{-2x}$
2. $y' - 2y = x^2e^{2x}$
3. $y' + y = xe^{-x} + 1$
4. $y' + (1/x)y = 3\cos 2x, \quad x > 0$

En cada uno de los problemas, del 5 al 8, encuéntrese la solución del problema dado de valores iniciales.

5. $y' - y = 2xe^{2x}, \quad y(0) = 1$
6. $y' + 2y = xe^{-2x}, \quad y(1) = 0$
7. $y' + y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y(0) = 0$
8. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad x > 0$
9. Encontrar la solución de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}.$$

Sugerencia: Considérese a x como variable dependiente en lugar de y.

10. *a*) Mostrar que $\phi(x) = e^{2x}$ es una solución de

$$y' - 2y = 0,$$

y que $y = c\phi(x)$ es también una solución de esta ecuación para cualquier valor de la constante c.

b) Mostrar que $\phi(x) = 1/x$ es una solución de

$$y' + y^2 = 0,$$

para $x > 0$, pero que $y = c\phi(x)$ no es una solución de esta ecuación para un valor arbitrario de c. Nótese que la ecuación de la parte *b*) es no lineal mientras que la de la parte *a*) es lineal.

11. Mostrar que si $y = \phi(x)$ es una solución de

$$y' + p(x)y = 0,$$

entonces $y = c\phi(x)$ es también una solución para cualquier valor de la constante c.

12. Si $y = y_1(x)$ es una solución de

$$y' + p(x)y = 0, \tag{i}$$

y $y = \psi(x)$ es una solución de

$$y' + p(x)y = g(x). \tag{ii}$$

Mostrar que $y = cy_1(x) + \psi(x)$ es también una solución de la Ec. (ii) para cualquier valor de la constante c.

*13. Considérese el método siguiente de resolver la ecuación lineal general de primer orden:

$$y' + p(x)y = g(x). \tag{i}$$

a) Si $g(x)$ es idénticamente cero, mostrar que la solución es

$$y = A \exp\left[-\int^x p(t)\,dt\right], \tag{ii}$$

donde A es una constante.

b) Si $g(x)$ no es idénticamente cero, suponer que la solución es de la forma

$$y = A(x) \exp\left[-\int^x p(t)\,dt\right]. \tag{iii}$$

Substituyendo esta expresión para y en la ecuación diferencial dada, mostrar que $A(x)$ debe satisfacer la condición

$$A'(x) = g(x) \exp\left[\int^x p(t)\,dt\right]. \tag{iv}$$

c) Encontrar $A(x)$ a partir de la ecuación (iv). Substituir entonces $A(x)$ en la Ec. (iii) y determinar y; verificar que la solución obtenida de esta forma coincide con la obtenida en la Ec. (15) del texto. Esta técnica se conoce como el método de *variación de parámetros*; se discute en detalle en la sección 3.6.2 en conexión con las ecuaciones lineales de segundo orden.

*14. Use el método del problema 13 para resolver cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y' - 2y = x^2e^{2x}$ *b*) $y' + (1/x)y = 3\cos 2x, \quad x > 0$

2.2 EXPOSICION GENERAL DE ECUACIONES LINEALES

En la sección 2.1 se mostró cómo construir soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Vamos a estudiar ahora ciertas cuestiones más teóricas. Estableceremos primero un Teorema fundamental que establece condiciones bajo las cuales un problema de valores iniciales, para una ecuación lineal de primer orden, tiene siempre una solución y sólo una. El resto de la sección la dedicaremos a la consideración de algunas de las implicaciones de este Teorema.

Teorema 2.1. Si las funciones p y g son continuas dentro de un intervalo abierto $\alpha < x < \beta$ que contiene al punto $x = x_0$, entonces existe una función única $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{1}$$

para $\alpha < x < \beta$, y que también satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

donde y_0 es un valor inicial arbitrariamente prescrito.

La prueba de este Teorema está contenida esencialmente en la discusión que en la última sección nos condujo a la fórmula

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^{x} \mu(s)g(s)\,ds + c\right], \tag{3}$$

donde

$$\mu(x) = \exp\int^{x} p(t)\,dt. \tag{4}$$

Suponiendo que la Ec. (1) tiene una solución, la deducción de la sección 2.1 muestra que debe ser de la forma (3). Nótese que ya que p es continua dentro del intervalo $\alpha < x < \beta$, se sigue que μ está definida en este intervalo, y es una función diferenciable diferente de cero. Esto justifica la conversión de la Ec. (1) a la forma

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x). \tag{5}$$

La función μg tiene una antiderivada ya que μ y g son continuas, y la Ec. (3) se sigue de la Ec. (5). La suposición inicial —de que hay al menos una solución de la Ec. (1)— puede verificarse ahora substituyendo la expresión para y en (3) en la ecuación diferencial. Finalmente, la condición inicial (2) determina la constante c unívocamente, completando por lo tanto la prueba. Ya que la Ec. (3) contiene *todas* las soluciones de la Ec. (1), se acostumbra llamar a la Ec. (3) la *solución general* de la Ec. (1).

Hay varios aspectos sobresalientes del Teorema anterior que deben hacerse notar. En primer lugar, que el problema dado de valores iniciales *tiene* una solución, y también que el problema tiene una solución *única*. En otras palabras, el Teorema asegura tanto la *existencia* como la *unicidad* de la solución de los problemas de valores iniciales (1) y (2). Además, la solución $y = \phi(x)$ es una función derivable y, en efecto, ya que $y' = -p(x)y + g(x)$, la derivada $y' = \phi'(x)$ es continua. Finalmente, la solución satisface la ecuación diferencial (1) en todo el intervalo $\alpha < x < \beta$ en el cual son continuos los coeficientes p y g. Esto significa que la solución no estará definida a lo más en puntos en los cuales ya sea p o g es discontinua. Por lo tanto, se obtiene una cierta cantidad de información cualitativa acerca de la solución simplemente identificando puntos de discontinuidad de p y g.

Como un ejemplo considérese el problema de valores iniciales

$$xy' + 2y = 4x^2, \tag{6}$$

$$y(1) = 2. \tag{7}$$

Procediendo como en la sección 2.1, reescribimos la Ec. (6) como

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x, \tag{8}$$

y buscamos una solución en un intervalo que contenga a $x = 1$. Ya que los coeficientes en la Ec. (8) son continuos excepto en $x = 0$, se sigue del Teorema 2.1 que la solución del problema dado de valores iniciales es válida al menos en el intervalo $0 < x < \infty$. Para encontrar esta solución calculamos primero $\mu(x)$:

La prueba de este Teorema está contenida esencialmente en la discusión que en la última sección nos condujo a la fórmula

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^{x} \mu(s)g(s)\,ds + c\right], \tag{3}$$

donde

$$\mu(x) = \exp\int^{x} p(t)\,dt. \tag{4}$$

Suponiendo que la Ec. (1) tiene una solución, la deducción de la sección 2.1 muestra que debe ser de la forma (3). Nótese que ya que p es continua dentro del intervalo $\alpha < x < \beta$, se sigue que μ está definida en este intervalo, y es una función diferenciable diferente de cero. Esto justifica la conversión de la Ec. (1) a la forma

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x). \tag{5}$$

La función μg tiene una antiderivada ya que μ y g son continuas, y la Ec. (3) se sigue de la Ec. (5). La suposición inicial —de que hay al menos una solución de la Ec. (1)— puede verificarse ahora substituyendo la expresión para y en (3) en la ecuación diferencial. Finalmente, la condición inicial (2) determina la constante c unívocamente, completando por lo tanto la prueba. Ya que la Ec. (3) contiene *todas* las soluciones de la Ec. (1), se acostumbra llamar a la Ec. (3) la *solución general* de la Ec. (1).

Hay varios aspectos sobresalientes del Teorema anterior que deben hacerse notar. En primer lugar, que el problema dado de valores iniciales *tiene* una solución, y también que el problema tiene una solución *única*. En otras palabras, el Teorema asegura tanto la *existencia* como la *unicidad* de la solución de los problemas de valores iniciales (1) y (2). Además, la solución $y = \phi(x)$ es una función derivable y, en efecto, ya que $y' = -p(x)y + g(x)$, la derivada $y' = \phi'(x)$ es continua. Finalmente, la solución satisface la ecuación diferencial (1) en todo el intervalo $\alpha < x < \beta$ en el cual son continuos los coeficientes p y g. Esto significa que la solución no estará definida a lo más en puntos en los cuales ya sea p o g es discontinua. Por lo tanto, se obtiene una cierta cantidad de información cualitativa acerca de la solución simplemente identificando puntos de discontinuidad de p y g.

Como un ejemplo considérese el problema de valores iniciales

$$xy' + 2y = 4x^2, \tag{6}$$

$$y(1) = 2. \tag{7}$$

Procediendo como en la sección 2.1, reescribimos la Ec. (6) como

$$y' + \frac{2}{x}y = 4x, \tag{8}$$

y buscamos una solución en un intervalo que contenga a $x = 1$. Ya que los coeficientes en la Ec. (8) son continuos excepto en $x = 0$, se sigue del Teorema 2.1 que la solución del problema dado de valores iniciales es válida al menos en el intervalo $0 < x < \infty$. Para encontrar esta solución calculamos primero $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \exp\left(\int^x \frac{2}{t}\,dt\right) = e^{2\ln x}$$
$$= x^2. \tag{9}$$

Multiplicando la Ec. (8) por $\mu(x)$ se obtiene

$$x^2y' + 2xy = 4x^3,$$

ó

$$(x^2y)' = 4x^3.$$

Por lo tanto

$$y = x^2 + \frac{c}{x^2}, \tag{10}$$

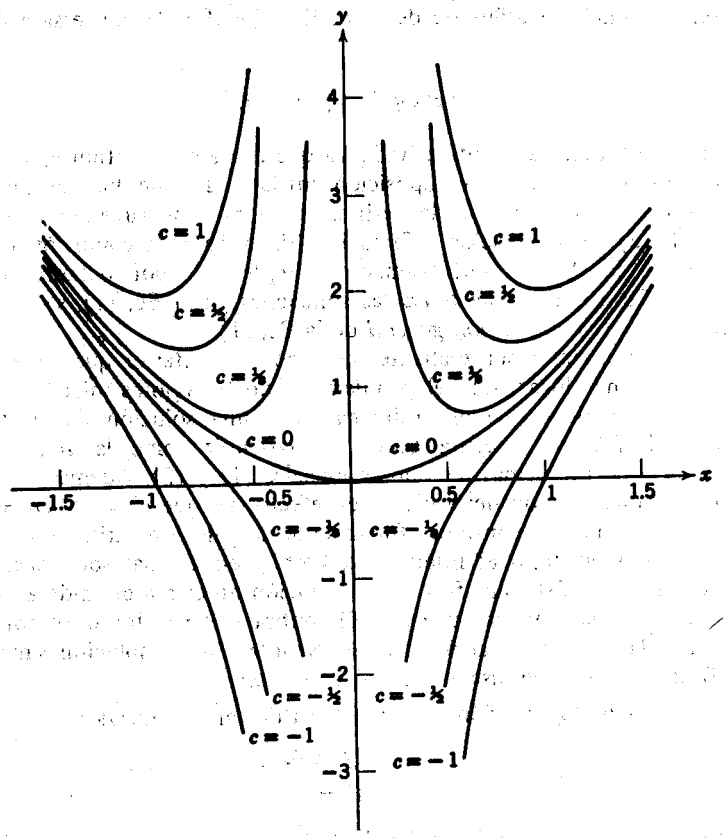

FIGURA 2.2

donde c es arbitrario, es la solución general de la Ec. (6). Las curvas integrales de la Ec. (6) para varios valores de c están bosquejadas en la figura 2.2. Para satisfacer la condición inicial (7) es necesario que $c = 1$; de aquí que

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2} \tag{11}$$

es la solución del problema de valores iniciales (6), (7).

Nótese que la solución (11) se hace no acotada cuando $x \to 0$. Esto no es de sorprender ya que $x = 0$ es un punto de discontinuidad del coeficiente de y en la ecuación diferencial (8). Sin embargo, si la condición inicial (7) se cambia a

$$y(1) = 1, \tag{12}$$

se sigue entonces de la Ec. (10) que $c = 0$. Por lo tanto la solución del problema de valores iniciales (6), (12) es

$$y = x^2, \tag{13}$$

lo cual es perfectamente decente cuando $x \to 0$. Esto ilustra que el Teorema 2.1 no asegura que la solución de un problema de valores iniciales deba hacerse singular siempre que las funciones p y g se hagan discontinuas; más bien, establece que la solución no puede hacerse singular en otros puntos.

El comportamiento posible de soluciones de problemas de valores iniciales para ecuaciones lineales de primer orden, en la vecindad de puntos donde p y g son discontinuos, es más variada que lo que sugiere la discusión previa. Se exploran las posibilidades con alguna extensión en los problemas 9 a 12; y aparece en el capítulo 4 un tratamiento más detallado de este problema en conexión con las ecuaciones lineales de segundo orden.

Algunas veces, ecuaciones que no son lineales pueden resolverse haciendo primero una substitución que convierta a la ecuación dada en una lineal. Un tipo de ecuación para la cual esto es posible es la conocida con el nombre de ecuación de Bernoulli; ver problemas 15 y 16.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas del 1 al 4, encuéntrese la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $y' + (1/x)y = \operatorname{sen} x, \quad x > 0$
2. $x^2y' + 3xy = (\operatorname{sen} x)/x, \quad x < 0$
3. $y' + (\tan x)y = x \operatorname{sen} 2x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
4. $xy' + 2y = e^x, \quad x > 0$

En cada uno de los problemas del 5 al 8, encontrar la solución del problema de valores iniciales dado. Indicar el intervalo en el cual la solución es válida.

5. $xy' + 2y = x^2 - x + 1, \quad y(1) = 1/2$
6. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 1$
7. $y' + (\cot x)y = 2 \csc x, \quad y(\pi/2) = 1$
8. $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 1/\pi$

Cada una de las ecuaciones de los problemas del 9 al 12, tiene al menos un coeficiente discontinuo en $x = 0$. Resolver cada ecuación para $x > 0$ y describir el comportamiento de la solución cuando $x \to 0$ para varios valores de

la constante de integración. Bosquejar algunos miembros de la familia de curvas integrales.

9. $y' + (2/x)y = 1/x^2$ 10. $y' - (1/x)y = x$

11. $y' - (1/x)y = x^{1/2}$ 12. $y' + (1/x)y = (\cos x)/x$

13. Resolver el problema de valores iniciales

$$y' + 2y = g(x), \qquad y(0) = 0$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Sugerencia: Resolver la ecuación diferencial separadamente para $0 < x < 1$ y para $x > 1$. Entonces igualar las soluciones a fin de que y sea continua en $x = 1$. Nótese que es imposible hacer ambas, y y y' continuas en $x = 1$.

14. Considérese la ecuación

$$y' + ay = be^{-\lambda x}$$

donde a y λ son constantes positivas, y b es cualquier número real. Determine el comportamiento de y cuando $x \to \infty$.

*15. Considérese la ecuación

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

donde n es una constante pero no necesariamente entera y p y q son funciones dadas; esta ecuación es conocida como la ecuación de Bernoulli, en honor a Jacobo Bernoulli* (1654-1705).

a) Resolver la ecuación de Bernoulli cuando $n = 0, 1$.

b) Mostrar que, si $n \neq 0, 1$, la substitución $v = y^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal. Este método de solución fue encontrado por Leibniz (1646-1716) en 1696.

*16. Encontrar la solución general de

$$x^2y' + 2xy - y^3 = 0.$$

Sugerencia: Ver el problema 15.

2.3 ECUACIONES NO LINEALES

Nos dirigiremos ahora a estudiar ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

sujetas a la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

*Jakob Bernoulli (1654-1705) su hermano Johann (1667-1748) y el hijo de Johann, Daniel (1700-1782) fueron solamente tres de los miembros de esta familia de prominentes matemáticos y científicos. Parece que Jakob Bernoulli fue el primero en usar la palabra integral.

La ecuación diferencial (1) y la condición inicial (2) juntas constituyen un problema de valores iniciales. Las cuestiones básicas a considerarse son: si existe una solución para este problema de valores iniciales, si tal solución es única, sobre qué intervalo la solución está definida, y cómo construir una fórmula útil para la solución. Todas estas preguntas fueron contestadas con relativa facilidad en las secciones 2.1 y 2.2 para el caso en el cual la Ec. (1) es lineal. Pero si f no es una función lineal de la variable dependiente y, entonces el tratamiento anterior ya no se aplica. En esta sección discutiremos de una manera general algunos lineamientos para los problemas de valores iniciales no lineales. En particular, notaremos diversas diferencias importantes entre el problema no lineal (1), (2) y el problema lineal consistente de la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{3}$$

y la condición inicial (2).

La razón por la que las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son relativamente simples, es que hay una fórmula que da las soluciones de tales ecuaciones en todos los casos. En contraste, no hay un método general correspondiente para resolver ecuaciones de primer orden no lineales. De hecho, la determinación analítica de la solución $y = \phi(x)$ de una ecuación no lineal es generalmente muy difícil, y a menudo es imposible.

La falta de una fórmula general para la solución de ecuaciones no lineales tiene al menos dos consecuencias importantes. En primer lugar, los métodos que dan soluciones aproximadas, quizá numéricas, tienen mucha mayor importancia para las ecuaciones no lineales que para las lineales. El capítulo 7 contiene una introducción a los métodos numéricos. En segundo término, los problemas que tratan con la existencia y unicidad de las soluciones deberán tratarse con métodos indirectos, toda vez que la construcción directa de la solución, en general no puede hacerse.

Existencia y Unicidad. El Teorema fundamental de existencia y unicidad, es análogo al Teorema 2.1 para ecuaciones lineales. Sin embargo, su demostración es bastante más difícil, y se pospone por lo tanto hasta la sección 2.11.

Teorema 2.2. Sean las funciones f y $\partial f/\partial y$ continuas en algún rectángulo $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ que contenga al punto (x_0, y_0). Entonces, en algún intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ contenido en $\alpha < x < \beta$, hay una solución única $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial (1)

$$y' = f(x, y)$$

que también satisface la condición inicial (2)

$$y(x_0) = y_0.$$

Las condiciones establecidas en el Teorema 2.2 son suficientes para garantizar la existencia y la unicidad del problema de valores iniciales (1), (2). No obstante, aún si f no satisface las hipótesis del Teorema, es aún posible que pueda existir una solución única. Realmente, la conclusión del Teorema sigue siendo válida si se reemplaza la hipótesis acerca de la continuidad de

$\partial f/\partial y$ por ciertas condiciones más débiles. Además, la existencia de una solución (pero no su unicidad), puede establecerse sobre las bases de solamente la continuidad de f sin ninguna hipótesis adicional. La forma presente del Teorema, sin embargo, es satisfactoria para muchos propósitos.

Puede mostrarse por medio de ejemplos, que algunas condiciones impuestas sobre f son esenciales para obtener el resultado establecido por el Teorema. Por ejemplo, el ejemplo siguiente muestra que el problema de valores iniciales (1), (2), puede tener más de una solución si se violan las hipótesis del Teorema 2.2.

Ejemplo 1. Encontrar la solución de

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0 \tag{4}$$

para $x \geq 0$.

Este problema se resuelve fácilmente por el método de la sección 2.4, y puede verificarse que la función

$$y = \phi(x) = (\tfrac{2}{3}x)^{3/2}, \qquad x \geq 0$$

satisface las condiciones de la expresión (4). Por otra parte, la función

$$y = \psi(x) = 0$$

es también una solución del problema de valores iniciales dado. Por lo tanto este problema no tiene una solución única. Este hecho no contradice al Teorema de existencia y unicidad ya que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^{1/3}) = \tfrac{1}{3}y^{-2/3},$$

y esta función no es continua, ni siquiera está definida, en cualquier punto donde $y = 0$. Entonces, el Teorema no se aplica a ninguna región que contiene cualquier parte del eje x. Si (x_0, y_0) es cualquier punto que no está sobre el eje x, entonces hay una solución única de la Ec. (4) que pasa a través de (x_0, y_0).

Intervalo de Definición. Para el problema lineal (2), (3), la solución existe a todo lo largo de cualquier intervalo alrededor de $x = x_0$ en el cual sean continuas las funciones p y g. Por otra parte, para el problema de valores iniciales no lineal (1), (2), el intervalo en el que la solución existe puede ser difícil de determinar. La solución $y = \phi(x)$ existe en tanto que el punto $[x, \phi(x)]$ permanezca dentro de la región en la que se satisface las hipótesis del Teorema; sin embargo, ya que generalmente no se conoce $\phi(x)$, puede ser imposible localizar el punto $[x, \phi(x)]$ con respecto a esa región. En cualquier caso, el intervalo en el cual existe una solución puede no estar relacionado simplemente a la función f en la Ec. (1). Esto se ilustra con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2. Considérese el problema de valores iniciales

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1. \tag{5}$$

Puede verificarse rápidamente por substitución directa que

$$y = \frac{1}{1 - x} \tag{6}$$

es la solución de este problema de valores iniciales. Claramente, la solución se hace no acotada cuando $x \to 1$, y por lo tanto es válida solamente para $-\infty < x < 1$. No obstante, no hay indicación de la ecuación diferencial en sí misma, de que el punto $x = 1$ sea de alguna manera importante. Más aún, si se reemplaza la condición inicial por

$$y(0) = 2, \tag{7}$$

se puede verificar fácilmente, otra vez, que la solución de la ecuación diferencial (5), que satisface la condición inicial (7) es

$$y = \frac{2}{1 - 2x}, \tag{8}$$

y que ahora la solución es no acotada cuando $x \to \frac{1}{2}$. Esto ilustra otra característica perturbadora de los problemas de valores iniciales para ecuaciones no lineales, a saber, que las singularidades de la solución pueden desplazarse dependiendo de la condición inicial que se emplee.

Solución General. Otra forma en la que las ecuaciones lineales y no lineales difieren es en conexión con el concepto de una solución general. Para una ecuación lineal de primer orden, es posible obtener una solución que contenga una constante arbitraria, de la cual todas las soluciones posibles pueden obtenerse, especificando valores para esa constante. Este no necesariamente es el caso para las ecuaciones no lineales; aun cuando se pueda encontrar una solución que contenga una constante arbitraria, puede haber otras soluciones que no puedan ser obtenidas dando valores a esta constante. En el problema 6 se da un ejemplo específico de esta situación. Por lo tanto, usaremos el término "solución general" sólo cuando discutamos ecuaciones lineales.

Soluciones Implícitas. Mencionaremos de nuevo que para una ecuación lineal de primer orden hay una fórmula explícita [Ec. (15) de la sección 2.1] para la solución $y = \phi(x)$. En tanto que las antiderivadas necesarias pueden determinarse, el valor de la solución en un punto puede encontrarse simplemente substituyendo el valor apropiado de x en la fórmula. Para una ecuación no lineal es bastante raro encontrar una solución explícita. A menudo lo mejor que uno puede hacer es eliminar la derivada que aparece en la Ec. (1) con lo cual se obtiene, en lugar de la ecuación diferencial, una ecuación sin derivadas de la forma

$$\psi[x, \phi(x)] = 0 \tag{9}$$

que se satisface con alguna, quizá con todas, las soluciones $y = \phi(x)$ de la Ec. (1). Incluso esto no puede ser llevado a cabo en muchas ocasiones con las ecuaciones no lineales. Sin embargo, si se puede encontrar una relación como la Ec. (9), se acostumbra decir que tenemos una *fórmula implícita* para las soluciones de la Ec. (1). Una ecuación de la forma (9) se llama también una *integral* (o primera integral) de la Ec. (1).

Por ejemplo, considérese la ecuación no lineal simple

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{10}$$

Usando los métodos de la sección siguiente no es difícil mostrar que todas las soluciones de la Ec. (10) satisfacen también la ecuación algebraica

$$x^2 + y^2 = c^2, \tag{11}$$

donde c es una constante arbitraria. Para verificar esta afirmación podemos derivar la Ec. (11) con respecto a x, obteniendo entonces $2x + 2yy' = 0$ ó $y' = -x/y$, que es la Ec. (10). La Ec. (11) por lo tanto, es una fórmula implícita para las soluciones de la Ec. (10). Suponiendo que $c > 0$, hay muchas funciones $y = \phi(x)$ que satisfacen la Ec. (11) para $-c < x < c$. Algunas de éstas son

$$y = \phi_1(x) = \sqrt{c^2 - x^2}, \qquad -c \leq x \leq c \tag{12}$$

$$y = \phi_2(x) = -\sqrt{c^2 - x^2}, \qquad -c \leq x \leq c \tag{13}$$

$$y = \phi_3(x) = \begin{cases} \sqrt{c^2 - x^2}, & -c \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{c^2 - x^2}, & 0 < x \leq c \end{cases} \tag{14}$$

$$y = \phi_4(x) = \begin{cases} -\sqrt{c^2 - x^2}, & -c \leq x \leq -c/2 \\ \sqrt{c^2 - x^2}, & -c/2 < x < c/2 \\ -\sqrt{c^2 - x^2}, & c/2 \leq x \leq c. \end{cases} \tag{15}$$

Ver la figura 2.3 para las gráficas de las funciones dadas por las Ecs. de la (12) a la (15). Sin embargo, sólo dos de estas funciones satisfacen la ecuación diferencial (10) sobre el intervalo completo $-c < x < c$, éstas son las dadas por las Ecs. (12) y (13). Si también está dada una condición inicial, debemos entonces seleccionar entre las funciones ϕ_1 y ϕ_2 la que satisface la condición especificada y también seleccionar el valor apropiado de c. Por ejemplo, si la condición inicial es

$$y(0) = 3, \tag{16}$$

debemos descartar ϕ_2, y conservar ϕ_1, eligiendo c de tal forma que valga 3. De aquí que

$$y = \sqrt{9 - x^2}, \qquad -3 < x < 3 \tag{17}$$

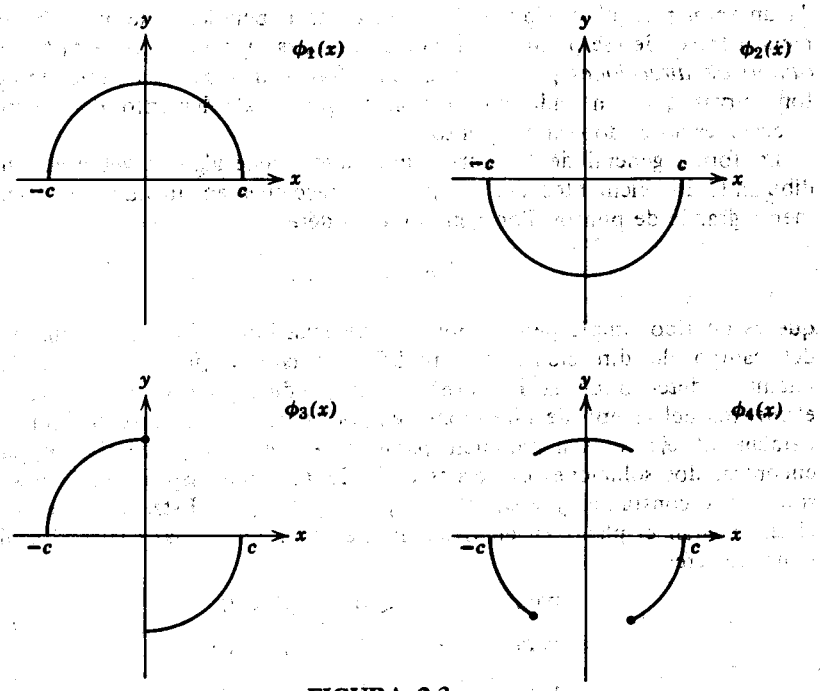

FIGURA 2.3

es una solución del problema de valores iniciales (10) y (16). De acuerdo con el Teorema 2.2, no hay otra solución de este problema en el intervalo $-3 < x < 3$.

En el ejemplo anterior se obtuvieron fácilmente las soluciones explícitas dadas por las Ecs. (12) y (13) porque la relación implícita (11) fue cuadrática en y. Sin embargo, aun con muy poca imaginación se puede ver que una relación implícita (9), suponiendo que pueda encontrarse, será generalmente mucho más complicada que la Ec. (11). Si tal cosa sucede, probablemente sería imposible resolverla (analíticamente) para y; puede significar una dificultad insuperable aún la determinación de los intervalos en los que existe la solución. Además, debe considerarse que puede haber soluciones de la relación implícita (9) que no satisfagan la ecuación diferencial; también, en algunos casos, la ecuación diferencial puede tener otras soluciones que no satisfagan la relación implícita.

Construcción Gráfica de Curvas Integrales. Ya que no hay forma, en general, de obtener soluciones analíticas exactas de las ecuaciones diferenciales no lineales, los métodos que conducen a soluciones aproximadas o a otra información cualitativa acerca de las soluciones, pueden ser de gran importancia. Uno de tales métodos involucra la aproximación gráfica de curvas integrales. En cada punto en el plano xy donde está definida $f(x, y)$ la ecuación diferencial (1)

$$y' = f(x, y)$$

da un valor para y', que puede pensarse como la pendiente de un segmento de recta a través de ese punto. La totalidad de tales segmentos de recta forman el *campo de direcciones* para la ecuación diferencial dada. Las curvas integrales son curvas que, en cada punto, son tangentes al elemento del campo de direcciones asociado con ese punto.

La forma general de las curvas integrales puede algunas veces visualizarse dibujando los elementos del campo de direcciones en un número suficientemente grande de puntos. Por ejemplo, considérese

$$y' = 4y(1 - y), \tag{18}$$

que es un tipo simple pero importante de ecuación no lineal. La construcción del campo de direcciones se simplifica mucho si hacemos notar que el miembro derecho de la Ec. (18) es independiente de x. Por lo tanto, los elementos del campo de direcciones en todos los puntos sobre cualquier línea paralela al eje x, son también paralelos entre ellos. Además, se pueden encontrar dos soluciones especiales de la Ec. (18) por inspección, éstas son las soluciones constantes $y = \phi_1(x) = 0$ y $y = \phi_2(x) = 1$. Estas soluciones especiales separan el plano xy en tres zonas, en cada una de las cuales y' es de un signo. En efecto,

$$\begin{array}{lll} \text{para} & y < 0, & y' < 0; \\ \text{para} & 0 < y < 1, & y' > 0; \\ \text{para} & y > 1, & y' < 0. \end{array}$$

Usando esta información es relativamente simple construir la figura 2.4, que representa el campo de direcciones para la Ec. (18).

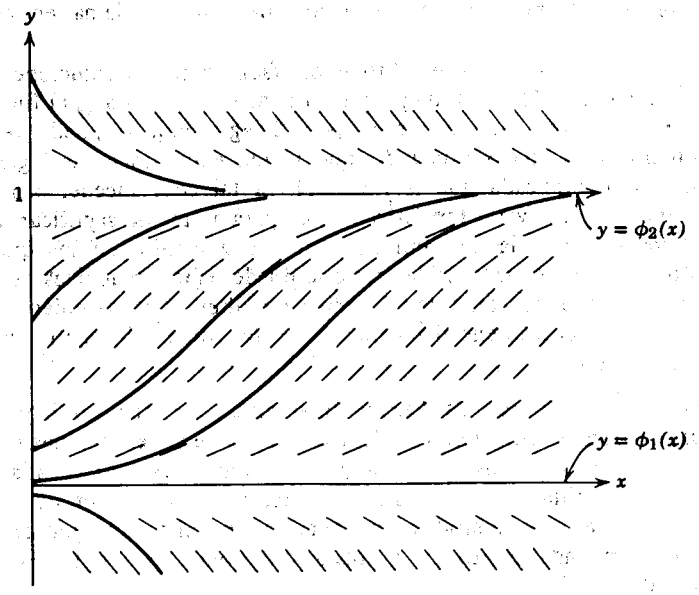

FIGURA 2.4

De este bosquejo se pueden deducir ciertas propiedades cualitativas de las soluciones. En primer lugar, considérese la solución correspondiente a la solución inicial $y(x_0) = y_0$ con $0 < y_0 < 1$. Tal solución tiende a crecer ya que $y' > 0$ en la vecindad del punto inicial. Sin embargo, esta solución no puede crecer más allá de $y = 1$ porque, si alcanza $y = 1$, su pendiente debería volverse (y permanecer) cero. De hecho, la solución dada no puede alcanzar $y = 1$ para ningún valor finito de x; si lo hiciera, entonces de ese punto como punto inicial emanaran dos soluciones, [la solución en cuestión y la solución $y = \phi_2(x)$] en contradicción al Teorema 2.2. Por lo tanto, una solución que principia en el intervalo $0 < y < 1$ se acerca a $y = 1$ cuando $y \to x$. Similarmente, una solución que principie por arriba de $y = 1$ debe decrecer y tender a $y = 1$ desde arriba cuando $x \to \infty$. Finalmente, una solución que originalmente es negativa tiende a decrecer más.

Sucede que la Ec. (18) puede resolverse por el método de la sección 2.4 y se han graficado unas cuantas soluciones en la figura 2.4. Sin embargo, debe enfatizarse que el comportamiento cualitativo de las soluciones de la Ec. (18) se determinó sin resolver la ecuación.

PROBLEMAS

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, establézcase la región del plano xy donde se puede garantizar la existencia de una solución única, a través de cualquier punto especificado. Esta garantía debe estar determinada por el Teorema de existencia y unicidad.

a) $y' = \dfrac{x - y}{2x + 5y}$ *b*) $y' = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$

c) $y' = \dfrac{2xy}{1 + y^2}$ *d*) $y' = 3(x + y)^{-2}$

e) $y' = \dfrac{\ln|xy|}{1 - x^2 + y^2}$ *f*) $y' = (x^2 + y^2)^{3/2}$

2. Mostrar que $y = \phi(x) = (1 - x^2)^{-1}$ es una solución del problema de valores iniciales

$$y' = 2xy^2, \qquad y(0) = 1.$$

¿En cuál intervalo es válida esta solución?

3. Mostrar que $y = \phi(x) = [2(x + c)]^{-1/2}$, donde c es una constante arbitraria, satisface la ecuación diferencial

$$y' + y^3 = 0.$$

Encuéntrese la solución que satisface la condición inicial $y(1) = 2$. ¿Dónde es válida esta solución?

4. Verificar que

$$y = \phi(x) = [1 + \tfrac{2}{3}\ln(1 + x^3)]^{1/2}$$

es una solución del problema de valores iniciales

$$y' = \frac{x^2}{y(1 + x^3)}, \qquad y(0) = 1.$$

¿Para qué intervalo es válida esta solución?

5. Verificar que

$$y = (c^2 - 4x^2)^{1/2}, \qquad y = -(c^2 - 4x^2)^{1/2}$$

son soluciones de la ecuación diferencial

$$y' = -4x/y.$$

¿Para qué partes del plano xy son válidas estas soluciones? Encuentre la solución particular que pasa por el punto (0, 4); a través del punto (1, −1).

6. *a*) Verificar que tanto $y_1(x) = 1 - x$ como $y_2(x) = -x^2/4$ son soluciones del problema de valores iniciales

$$y' = \frac{-x + (x^2 + 4y)^{1/2}}{2}, \qquad y(2) = -1.$$

¿Dónde son válidas estas soluciones?

b) Explicar porqué la existencia de dos soluciones del problema dado no contradice la unicidad del Teorema 2.2.

c) Mostrar que $y = cx + c^2$, donde c es una constante arbitraria, satisface la ecuación diferencial de la parte *a*). Si $c = -1$ se satisface también la condición inicial y se obtiene la solución $y = y_1(x)$. Mostrar que no se puede elegir ninguna c tal que de la segunda solución $y = y_2(x)$.

7. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, construir el campo de direcciones suficientemente bien como para que se pueda visualizar el comportamiento general de la familia de curvas integrales

a) $y' = x^2 + y^2$ *b*) $y' = x^2 - xy + y^2 - 1$

c) $y' = \dfrac{xy}{1 + x^2}$ *d*) $y' = \dfrac{2x - 3y}{x + y}$

En cada uno de los problemas del 8 al 11:

a) Bosqueja el campo de direcciones.

b) Bosqueja varios miembros de la familia de curvas integrales sin resolver la ecuación diferencial.

c) Resuelve el problema de valores iniciales dado.

d) Bosqueja la solución obtenida en *c*) y compárala con la obtenida en *b*).

8. $y' = -1, \quad y(4) = 2$ 9. $y' = x + 1, \quad y(0) = 1$

10. $y' + xy = 1, \quad y(1) = 0$ 11. $y' - y = 1 - e^x, \quad y(0) = 0$

12. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, determina la trayectoria general de las curvas integrales tomando en consideración el campo de direcciones. Dada $y = \phi(x; y_0)$ la solución correspondiente a la condición inicial $y(0) = y_0$. ¿Para qué valores de y_0 existe el $\lim_{x\to\infty} \phi(x; y_0)$? Calcular el límite en los casos en que exista.

a) $y' = (1 - y)(2 - y)$

b) $y' = y(1 - y^2)$

c) $y' = -y(1 + y^2)$

d) $y' = \epsilon y - \sigma y^2$; $\sigma > 0$ y $\epsilon > 0$

2.4 ECUACIONES SEPARABLES

Es a menudo conveniente escribir la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

en la forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

Es siempre posible hacer esto poniendo $M(x, y)$ igual a $-f(x, y)$ y $N(x, y)$ igual a 1, sin embargo no es ésta la única forma de hacerlo. En el caso de que M sea una función sólo de x y N una función sólo de y, la Ec. (2) toma la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2}$$

puede escribirse como

$$-x^2 + (1 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Una ecuación diferencial que puede ponerse en la forma (3) se dice que es *separable*; la razón para este nombre es clara, si la Ec. (3) se escribe en la forma diferencial

$$M(x)\,dx = -N(y)\,dy. \tag{4}$$

Supóngase ahora que H_1 y H_2 son funciones cualesquiera tales que

$$H_1'(x) = M(x), \qquad H_2'(y) = N(y); \tag{5}$$

la Ec. (3) se transforma entonces en

$$H_1'(x) + H_2'(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{6}$$

Si $y = \phi(x)$ es una función derivable de x, entonces, de acuerdo con la regla de la cadena

$$H_2'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}H_2[\phi(x)]. \tag{7}$$

Consecuentemente, si $y = \phi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial (3), entonces la Ec. (6) se transforma en

$$H_1'(x) + \frac{d}{dx}H_2[\phi(x)] = 0,$$

ó

$$\frac{d}{dx}\{H_1(x) + H_2[\phi(x)]\} = 0. \tag{8}$$

Integrando la Ec. (8) se obtiene

$$H_1(x) + H_2[\phi(x)] = c, \tag{9}$$

ó

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \tag{10}$$

donde c es una constante arbitraria. Se ve que la solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial (3) se ha obtenido en forma implícita. Las funciones H_1 y H_2 son cualesquiera funciones que satisfagan la Ec. (5), esto es, cualesquiera antiderivadas de M y N respectivamente. En la práctica, la solución (10) se obtiene generalmente de la Ec. (4), integrando el miembro izquierdo con respecto a x y el derecho con respecto a y; la justificación de este argumento es la que se acaba de dar.

Si, además de la ecuación diferencial, se tiene una condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{11}$$

la solución particular de la Ec. (3) que satisface esta condición, se obtiene poniendo $x = x_0$, y $y = y_0$ en la Ec. (10). Esto da

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0). \tag{12}$$

Substituyendo este valor para c en la Ec. (10), y notando que

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^{x} M(t)\,dt, \qquad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^{y} N(t)\,dt,$$

obtenemos

$$\int_{x_0}^{x} M(t)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(t)\,dt = 0. \tag{13}$$

La ecuación (13) es una representación implícita de la solución de la ecuación diferencial (3) que también satisface la condición inicial (11). El lector deberá conservar en mente, que la determinación de la solución en forma explícita, o aun la determinación del intervalo preciso en el que existe la solución, generalmente requiere que la Ec. (13) se resuelva para y como una función de x. Esto puede tener dificultades formidables.

Ejemplo. Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \qquad y(0) = -1. \tag{14}$$

La ecuación diferencial puede escribirse como

$$2(y-1)\,dy = (3x^2 + 4x + 2)\,dx.$$

Integrando el miembro izquierdo con respecto a y y el miembro derecho con respecto a x, obtenemos

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c, \tag{15}$$

donde c es una constante arbitraria. Para determinar la solución particular que satisfaga la condición prescrita inicial substituimos $x = 0$ y $y = -1$ en la Ec. (15), obteniendo $c = 3$. De aquí que la solución particular deseada está dada implícitamente por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \tag{16}$$

Para obtener la solución explícita, debemos resolver la Ec. (16) para y en términos de x. Esta es una cosa simple en este caso, ya que la Ec. (16) es cuadrática en y y obtenemos

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \tag{17}$$

Por lo tanto la Ec. (17) nos da dos soluciones para la ecuación diferencial, sin embargo, solamente una de ellas satisface la condición inicial dada. Esta es la solución correspondiente al signo menos en la Ec. (17), así que finalmente obtenemos

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \tag{18}$$

como la solución del problema de valores iniciales (14). Nótese que si el signo más es escogido por equivocación en la Ec. (17), entonces obtendríamos la solución de la misma ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(0) = 3$. Finalmente, con el objeto de determinar el intervalo para el cual la solución (18) es válida, debemos encontrar el intervalo para el cual la cantidad que se encuentra bajo el radical es no negativa. Graficando esta expresión como una función de x, el lector puede mostrar que el intervalo deseado es $x > -2$.

En este ejemplo no hubo dificultad para resolverlo explícitamente para y como una función de x y determinar el intervalo exacto para el cual la solución existe. Sin embargo, esta situación es excepcional y frecuentemente será necesario dejar la solución en forma implícita. Por lo tanto, en los problemas siguientes y en los de las secciones 2.5 a 2.8, la terminología "resolver la siguiente ecuación diferencial" indica encontrar la solución explícita si es conveniente hacerlo así, de lo contrario encontrar una relación implícita para la solución.

PROBLEMAS

Resolver cada una de las ecuaciones de los problemas 1 al 8. Dar las regiones del plano xy para las cuales las condiciones del Teorema fundamental de existencia y unicidad son satisfechos.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y(1 + x^3)}$

3. $\dfrac{dy}{dx} + y^2 \operatorname{sen} x = 0$

4. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$

5. $\dfrac{dy}{dx} = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$

6. $x\dfrac{dy}{dx} = (1 - y^2)^{1/2}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$

Para cada uno de los problemas del 9 al 14 encontrar la solución del problema de valores iniciales dado en forma explícita, y determinar (al menos en forma aproximada) el intervalo para el cual está definida.

9. $\operatorname{sen} 2x\, dx + \cos 3y\, dy = 0, \qquad y(\pi/2) = \pi/3$

10. $x\, dx + ye^{-x}\, dy = 0, \qquad y(0) = 1$

11. $\dfrac{dr}{d\theta} = r, \qquad r(0) = 2$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y + x^2 y}, \qquad y(0) = -2$

13. $\dfrac{dy}{dx} = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, \qquad y(0) = 1$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{1 + 2y}, \qquad y(2) = 0$

15. Resolver la ecuación

$$y^2(1 - x^2)^{1/2}\, dy = \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$$

en el intervalo $-1 < x < 1$.

16. Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + b}{cx + d},$$

donde a, b, c y d son constantes.

17. Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

donde a, b, c y d son constantes.

*18. Demostrar que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y}$$

no es separable, pero si la variable y es reemplazada por una nueva variable v definida por $v = x/y$, entonces la ecuación es separable en x y v. Encontrar la solución de la ecuación dada usando esta técnica.

*19. *a*) Resolver el problema de valores iniciales $y' = \epsilon y$, $y(0) = y_0$, donde ϵ es una constante positiva. Mostrar que la solución $y = \phi(x)$ tiene el siguiente comportamiento al límite cuando $x \to \infty$:

$$\text{si } y_0 > 0, \quad \lim_{x\to\infty} \phi(x) = \infty;$$
$$\text{si } y_0 = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0;$$
$$\text{si } y_0 < 0, \quad \lim_{x\to\infty} \phi(x) = -\infty.$$

b) Supóngase ahora que la ecuación diferencial es cambiada, por la adición del término $-\sigma y^2$ donde σ es un número positivo (pequeño). Resolver el problema de valores iniciales

$$y' = \epsilon y - \sigma y^2, \qquad y(0) = y_0.$$

Mostrar que $y = \phi(x)$ ahora tiene el siguiente comportamiento cuando $x \to \infty$:

$$\text{si } y_0 > 0, \quad \lim_{x\to\infty} \phi(x) = \frac{\epsilon}{\sigma};$$
$$\text{si } y_0 = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0.$$

Mostrar que si $y_0 < 0$ entonces $\phi(x)$ se hace no acotado cuando x se aproxima a cierto valor finito dependiente de y_0. La ecuación no lineal de la parte *b*) es importante en muchas aplicaciones; ver la sección 2.9 para algunos ejemplos. Ver también el problema 12 *d*) de la sección 2.3.

2.5 ECUACIONES EXACTAS

Considérese primero la ecuación

$$\psi(x, y) = c \tag{1}$$

donde c es una constante. Suponiendo que la Ec. (1) define a y implícitamente como una función derivable de x, podemos derivar a la Ec. (1) con respecto a x y obtener*

$$\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)y' = 0. \tag{2}$$

La Ec. (2) es la ecuación diferencial cuya solución está definida por la Ec. (1).

Inversamente, supóngase que la ecuación diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \tag{3}$$

está dada. Si existe una función ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y), \tag{4}$$

y tal que $\psi(x, y) = c$ defina implícitamente a $y = \phi(x)$ como una función derivable de x, entonces

$$\begin{aligned} M(x, y) + N(x, y)y' &= \psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)y' \\ &= \frac{d}{dx}\{\psi[x, \phi(x)]\}. \end{aligned} \tag{5}$$

* Los subíndices denotan derivadas parciales con respecto a la variable indicada por el subíndice.

Como resultado la Ec. (3) se transforma en

$$\frac{d}{dx}\{\psi[x, \phi(x)]\} = 0. \tag{6}$$

En este caso, se dice que la Ec. (3) es una *ecuación diferencial exacta*. La solución de la Ec. (3) o la equivalente Ec. (6), está dada implícitamente por la Ec. (1),

$$\psi(x, y) = c,$$

donde c es una constante arbitraria. En la práctica la ecuación diferencial (3) es frecuentemente escrita en la forma diferencial simétrica

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{7}$$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación diferencial

$$2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0.$$

Por inspección puede verse que el miembro izquierdo es la derivada de x^2y^3.

Por lo tanto la ecuación dada puede reescribirse como

$$\frac{d}{dx}(x^2y^3) = 0$$

y la solución está dada implícitamente por

$$x^2y^3 = c.$$

En este ejemplo simple fue fácil ver que la ecuación diferencial era exacta y, de hecho, se pudo fácilmente encontrar su solución reconociendo que el miembro izquierdo, era la derivada de x^2y^3. Para ecuaciones más complicadas puede no ser posible hacer esto. Un procedimiento sistemático para determinar si una ecuación diferencial dada es exacta está proporcionado por el siguiente Teorema.

Teorema 2.3. Sean las funciones M, N, M_y y N_x continuas en la región rectangular R: $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Entonces la Ec.* (3),

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

es una ecuación diferencial exacta en R si y sólo si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{8}$$

en cada punto de R. Esto es, existe una función ψ que satisface las Ecs. (4),

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y),$$

si y sólo si M y N satisfacen la Ec. (8).

* No es esencial que la región R sea rectangular, sino sólo que sea simplemente conexa. Hablando en términos generales, una región simplemente conexa es aquella que no tiene agujeros; esto es, que está limitada por una curva cerrada simple.

La demostración de este Teorema es en dos partes. Primero mostraremos que si hay una función ψ tal que la Ec. (4) es cierta, entonces se concluye que se satisface la Ec. (8). Calculando M_x y N_y de la Ec. (4) se obtiene

$$M_y(x, y) = \psi_{xy}(x, y), \qquad N_x(x, y) = \psi_{yx}(x, y). \tag{9}$$

La continuidad de ψ_{xy} y ψ_{yx} garantiza su igualdad,* y entonces se sigue la Ec. (8).

Mostraremos ahora que si M y N satisface la Ec. (8), entonces la Ec. (3) es exacta. La demostración involucra la construcción de una función ψ que satisfaga las Ecs. (4).

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y).$$

Integrando la primera de las Ecs. (4) con respecto a x, manteniendo a y constante, se obtiene

$$\psi(x, y) = \int^x M(t, y)\, dt + h(y). \tag{10}$$

La función h es una función arbitraria de y, que juega el papel de la constante arbitraria. Debemos ahora mostrar que siempre es posible elegir $h(y)$ tal que $\psi_y = N$. De la Ec. (10)

$$\begin{aligned} \psi_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int^x M(t, y)\, dt + h'(y) \\ &= \int^x M_y(t, y)\, dt + h'(y). \end{aligned}$$

Poniendo $\psi_y = N$ y resolviendo para $h'(y)$ resulta

$$h'(y) = N(x, y) - \int^x M_y(t, y)\, dt. \tag{11}$$

Para determinar $h(y)$ de la Ec. (11) es esencial que, independientemente de su apariencia, el miembro derecho de la Ec. (11) sea sólo función de y. Para establecer este hecho podemos diferenciar la cantidad en cuestión con respecto a x, obteniendo

$$N_x(x, y) - M_y(x, y),$$

que, de acuerdo con la Ec. (8), se anula. Entonces, a pesar de su forma aparente, el miembro derecho de la Ec. (11) no depende realmente de x, y una sola integración da entonces $h(y)$. Substituyendo $h(y)$ en la Ec. (10), obtenemos como la solución de las Ecs. (4)

* Se requiere la hipótesis de continuidad, ya que de otra manera ψ_{xy} y ψ_{yx} no serían iguales siempre. Las excepciones son funciones bastante peculiares sin embargo, y llegan a encontrarse rara vez.

$$\psi(x, y) = \int^x M(t, y)\, dt + \int^y \left[N(x_0, s) - \int^x M_y(t, s)\, dt \right] ds. \tag{12}$$

Debería notarse que esta prueba contiene un método para el cálculo de $\psi(x, y)$ que sirve para resolver la ecuación diferencial original (3). Sin embargo, generalmente es mejor hacer todo este proceso cada vez que se necesita, más bien que tratar de recordar el resultado dado en la Ec. (12). Nótese también que la solución se obtiene en forma implícita. Como en la sección previa, puede, o puede no, ser posible encontrar la solución explícita.

Ejemplo 2. Resolver

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2e^y + 2)y' = 0. \tag{13}$$

Es claro que

$$M_y(x, y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x, y),$$

y la ecuación dada es exacta. Por lo tanto hay una $\psi(x, y)$ tal que

$$\psi_x(x, y) = y \cos x + 2xe^y,$$
$$\psi_y(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2.$$

Integrando la primera de estas ecuaciones se tiene

$$\psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2e^y + h(y). \tag{14}$$

Poniendo $\psi_y = N$ obtenemos

$$\psi_y(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + h'(y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2.$$

De aquí que

$$h'(y) = 2,$$

y

$$h(y) = 2y.$$

La constante de integración puede omitirse ya que cualquier solución de la ecuación diferencial previa será suficiente; esto es, no requerimos la más general. Substituyendo $h(y)$ en la Ec. (14) se tiene

$$\psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2y;$$

por lo tanto la solución de la ecuación original está dada implícitamente por

$$y \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2y = c. \tag{15}$$

Ejemplo 3. Resolver

$$(3x^2 + 2xy) + (x + y^2)y' = 0. \tag{16}$$

Aquí

$$M_y(x, y) = 2x, \qquad N_x(x, y) = 1;$$

ya que M_y no es igual a N_x la ecuación dada no es exacta. Para ver que no puede resolverse por el procedimiento antes descrito, vamos a suponer que hay una función ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = 3x^2 + 2xy, \qquad \psi_y(x, y) = x + y^2. \tag{17}$$

Integrando la primera de las Ecs. (17) se tiene

$$\psi(x, y) = x^3 + x^2y + h(y), \tag{18}$$

donde h es una función arbitraria que depende solamente de y. Para tratar de satisfacer la segunda de las Ecs. (17) calculamos ψ_y de la Ec. (18) y la ponemos igual a N, obteniendo

$$\psi_y(x, y) = x^2 + h'(y) = x + y^2$$

ó

$$h'(y) = x + y^2 - x^2. \tag{19}$$

Ya que el miembro derecho de la Ec. (19) depende tanto de x como de y, es imposible resolver la Ec. (19) para $h(y)$. De aquí que no haya $\psi(x, y)$ que satisfaga las dos ecuaciones (17).

PROBLEMAS

Determine cuándo, o cuándo no, las ecuaciones de los problemas del 1 al 12 son exactas. Si lo son, encuéntrese la solución.

1. $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$
2. $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$
3. $(9x^2 + y - 1) - (4y - x)y' = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax - by}{bx - cy}$
7. $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)\,dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)\,dy = 0$
8. $(e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y)\,dy = 0$
9. $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)\,dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3)\,dy = 0$
10. $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2)\,dy = 0, \qquad x > 0$
11. $(x \ln y + xy)\,dx + (y \ln x + xy)\,dy = 0; \qquad x > 0, \qquad y > 0$
12. $\dfrac{x\,dx}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + \dfrac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/4}} = 0$

13. Encuentre el valor de b para el cual las siguientes ecuaciones son exactas, y hecho esto resuélvanse para este valor de b.

   a) $(xy^2 + bx^2y)\,dx + (x + y)x^2\,dy = 0$

   b) $(ye^{2xy} + x)\,dx + bxe^{2xy}\,dy = 0$

14. Considérese la ecuación diferencial exacta

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Encuéntrese una fórmula implícita $\psi(x, y) = c$ para la solución análoga a la Ec. (12) integrando primero la ecuación $\psi_y = N$, en lugar de $\psi_x = M$, como en el texto.

15. Muéstrese que cualquier ecuación que es separable, esto es, de la forma

$$M(x) + N(y)y' = 0,$$

es también exacta.

2.6 FACTORES INTEGRANTES

Mostraremos ahora cómo se pueden extender los métodos de la sección 2.5 a una clase más extensa de problemas. Considérese una ecuación de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{1}$$

Si esta ecuación no es ya exacta, trataremos de elegir una función μ que puede depender tanto de x como de y, tal que la ecuación

$$\mu(M\,dx + N\,dy) = 0 \tag{2}$$

sea exacta. La función μ es llamada un *factor integrante.* La Ec. (2) puede resolverse entonces por los métodos de la sección 2.5, y sus soluciones satisfarán la ecuación original (1). Este enfoque es una extensión del método desarrollado en la sección 2.1 para ecuaciones lineales.

Con el objeto de investigar la posibilidad de llevar a cabo este procedimiento, recordamos de la sección 2.5 que la Ec. (2) es exacta si y sólo si

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x. \tag{3}$$

Ya que M y N son funciones dadas, el factor de integración μ debe satisfacer la ecuación diferencial parcial de primer orden

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \tag{4}$$

Si una función μ que satisface la Ec. (4) se puede encontrar, entonces la Ec. (2) será exacta. La solución de la Ec. (2) puede entonces obtenerse por el método de la sección 2.5 y estará dada implícitamente por

$$\psi(x, y) = c.$$

Esta relación define también la solución de la Ec. (1), debido a que el factor integrante μ puede ser cancelado en todos los términos de la Ec. (2).

Una ecuación diferencial parcial de la forma (4) puede tener más de una solución; en este caso, cualquiera de las soluciones puede ser usada como un factor integrante de la Ec. (1). La posible no unicidad del factor integrante está ilustrada en el ejemplo 3.

Por desgracia, la Ec. (4), que determina el factor integrante, es ordinariamente al menos, tan difícil de resolver como la ecuación original (1). Por lo tanto, aun cuando en principio los factores integrantes son una herramienta poderosa para resolver ecuaciones diferenciales, en la práctica pueden encon-

trarse usualmente sólo en casos especiales. Algunos de esos casos son mostrados en los siguientes ejemplos, y en los problemas 10 y 11 al final de la sección.

Ejemplo 1. Verificar que $\mu(x, y) = (xy^2)^{-1}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial

$$(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0, \tag{5}$$

y después encontrar su solución.

Como $M(x, y) = y^2 + xy$, y $N(x, y) = -x^2$, se sigue que $M_y(x, y) = 2y + x$, y $N_x(x, y) = -2x$; por lo tanto la ecuación dada no es exacta. Para mostrar que $\mu(x, y) = (xy^2)^{-1}$ es un factor integrante para esta ecuación, es suficiente multiplicar la Ec. (5) por $\mu(x, y)$, y así obtener

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0;$$

Esta última ecuación es fácil verificar que es exacta. Se encuentra, por el método de la sección 2.5, que su solución está dada implícitamente por

$$\ln|x| + \frac{x}{y} = c; \qquad x \neq 0, \qquad y \neq 0. \tag{6}$$

Nótese que $y = 0$ es también una solución, aunque no está dada por la Ec. (6).

Ejemplo 2. Las dos situaciones más importantes en que pueden encontrarse factores integrantes simples ocurren cuando μ es función de solamente una de las variables x, y, y no de ambas. Vamos a determinar las condiciones necesarias sobre M y N tales que $M\,dx + N\,dy = 0$ tiene un factor integrante μ que depende sólo de x.

Suponiendo que μ solamente es función de x, tenemos

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \qquad (\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx}.$$

Por lo tanto, si $(\mu M)_y$ es igual a $(\mu N)_x$, es necesario que

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{7}$$

Si $(M_y - N_x)/N$ es una función solamente de x, entonces hay un factor integrante μ que también depende sólo de x; además, $\mu(x)$ puede encontrarse resolviendo la ecuación *lineal* de primer orden (7).

Ejemplo 3. Encontrar un factor integrante para la ecuación

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{8}$$

y resolver entonces la ecuación.

Al calcular la cantidad $(M_y - N_x)/N$ encontramos que

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}.$$

$\mu(x,y)$

Por lo tanto, de acuerdo con el ejemplo 2, hay un factor integrante μ que es una función sólo de x, y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}.$$

De aquí que

$$\mu(x) = x. \tag{9}$$

Multiplicando la Ec. (8) por este factor integrante se obtiene

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{10}$$

que es una ecuación exacta. Su solución se encuentra fácilmente por el método de la sección 2.5 dada implícitamente por

$$x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 = c. \tag{11}$$

El lector puede verificar también, como en el ejemplo 1, que el segundo factor integrante de la Ec. (8) está dado por $\mu(x, y) = 1/xy(2x + y)$, y que se obtiene la misma solución, aunque con mucha mayor dificultad, si se usa ese factor integrante (ver problema 12).

PROBLEMAS

Mostrar que las ecuaciones de los problemas 1 a 3 no son exactas, pero que se pueden transformar en exactas multiplicando por el factor integrante dado. Resolver las ecuaciones

1. $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0; \quad \mu(x, y) = 1/xy^3$
2. $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x}\operatorname{sen} x\right) dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right) dy = 0; \quad \mu(x, y) = ye^x$
3. $y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0; \quad \mu(x, y) = y$

En cada uno de los problemas del 4 al 9 encontrar un factor integrante, y resolver entonces la ecuación dada

4. $(3x^2y + 2xy + y^2)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$
5. $y' = e^{2x} + y - 1$
6. $dx + \left(\dfrac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right) dy = 0$
7. $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$

8. $e^x\,dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)\,dy = 0$

9. $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right) dx + \left(\dfrac{x^2}{y} + 3\dfrac{y}{x}\right) dy = 0$

10. Mostrar que si $(N_x - M_y)/M = Q$, donde Q es sólo función de y, entonces la ecuación diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tiene un factor integrante de la forma

$$\mu(y) = \exp\int^y Q(t)\,dt.$$

*11. Mostrar que si $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$, donde R depende solamente de la cantidad xy, entonces la ecuación diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu(xy)$. Encontrar una fórmula general para este factor integrante.

*12. Resolver la ecuación diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0,$$

usando el factor integrante

$$\mu(x, y) = [xy(2x + y)]^{-1}.$$

Verificar que la solución es la misma que la obtenida en el ejemplo 3 con un factor integrante diferente.

2.7 ECUACIONES HOMOGENEAS

Los dos tipos principales de ecuaciones no lineales de primer orden que pueden resolverse por procesos directos de integración, son aquellos en los que las variables se separan, y en los que las ecuaciones son exactas. La sección 2.6 trata del uso de factores integrantes para resolver ciertos tipos de ecuaciones reduciéndolas a ecuaciones exactas. Esta sección introducirá otra técnica, la del cambio de variables, que puede usarse algunas veces para simplificar una ecuación diferencial y, por lo tanto, hacer posible su solución (o más conveniente). Generalmente hablando, la substitución apropiada tendrá que ser sugerida por la aparición repetida de alguna combinación de variables, o alguna otra peculiaridad en la estructura de la ecuación.

La clase más importante de ecuaciones para la que puede establecerse una regla definida es la clase de las ecuaciones diferenciales homogéneas.* Una ecuación de la forma

* La palabra homogénea se usa en más de una forma en el estudio de ecuaciones diferenciales. El lector debe estar alerta para distinguir las diferencias cuando éstas se encuentren.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se dice que es homogénea siempre que la función f no dependa de x y y separadamente, sino solamente de sus razones y/x o x/y. Por lo tanto, las ecuaciones homogéneas son de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Considérense los ejemplos siguientes:

$$a)\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x};$$

$$b)\ \frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x + y}{x - y} = \ln\frac{1}{y/x} + \frac{1 + (y/x)}{1 - (y/x)};$$

$$c)\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 2xy}{x^2}.$$

Por lo tanto *a*) y *b*) son homogéneas, ya que el miembro derecho de cada una de ellas puede ser expresado como una función de y/x; como *c*) no puede escribirse así, no es homogénea. Usualmente es fácil decir si una ecuación dada es homogénea o no; para ecuaciones complicadas el criterio dado en el problema 15 puede ser útil.

La forma de una ecuación homogénea sugiere que puede simplificarse introduciendo una nueva variable,* la cual denotaremos por v, para representar la razón de y a x. Por lo tanto

$$y = xv, \tag{2}$$

y la Ec. (1) se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = F(v). \tag{3}$$

Viendo a v como la nueva variable dependiente (reemplazando a y), debemos considerar a v como una función de x, y reemplazar a dy/dx en la Ec. (3) por una expresión apropiada en términos de v. Derivando la Ec. (2) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v,$$

y de aquí la Ec. (3) se transforma en

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v). \tag{4}$$

El hecho más significativo con respecto a la Ec. (4) es que las variables x y v *siempre* pueden ser separadas, independientemente, de la forma de la función F; en efecto,

* Leibnitz en 1691 fue el primero en usar esta técnica.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}. \tag{5}$$

Resolviendo la Ec. (5) y después reemplazando v por y/x obtenemos la solución de la ecuación original.

De este modo cualquier ecuación homogénea puede transformarse en una cuyas variables son separables usando la substitución (2). Desde un punto de vista práctico, por supuesto, puede ser posible o no la evaluación de la integral requerida para la solución de la Ec. (5) por métodos elementales. Más aún, una ecuación homogénea podría pertenecer también a una clase de ecuaciones ya discutidas; podría ser exacta o lineal, por ejemplo. En tales casos se pueden escoger métodos para encontrar su solución.

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}. \tag{6}$$

Escribiendo esta ecuación como

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

mostramos que es homogénea. Las variables no pueden ser separadas, ni es exacta, ni tiene un factor integrante obvio. Esto nos conduce a la substitución (2), que transforma a la ecuación dada en

$$x\frac{dv}{dx} + v = v^2 + 2v.$$

De aquí que

$$x\frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

o, separando las variables,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(v+1)}.$$

Desarrollando el miembro derecho en fracciones parciales tenemos

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv.$$

Integrando ambos miembros llegamos a

$$\ln|x| + \ln|c| = \ln|v| - \ln|v+1|,$$

donde c es una constante arbitraria. De aquí, combinando los logaritmos y tomando la exponencial en ambos miembros, obtenemos

$$cx = \frac{v}{v+1}.$$

Finalmente, substituyendo v en términos de y tenemos la solución de la Ec. (6) en la forma

$$cx = \frac{y/x}{(y/x) + 1} = \frac{y}{y + x}.$$

Resolviendo para y obtenemos

$$y = \frac{cx^2}{1 - cx}.$$

Algunas veces es útil transformar ambas variables, la dependiente y la independiente. Por ejemplo, en los problemas 9, 10, 11 y 14 un cambio en ambas variables se requiere para hacer a la ecuación homogénea, después de lo cual, un cambio más de la variable dependiente nos conduce a la solución del problema.

PROBLEMAS

Mostrar que las ecuaciones de los problemas del 1 al 8 son homogéneas, y encontrar sus soluciones.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x}$

2. $2y\,dx - x\,dy = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 3x}{2x - y}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x + 3y}{2x + y}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{x - y}$

8. $(x^2 + 3xy + y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$

*9. *a*) Encontrar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{2x - y}.$$

b) Encontrar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y + 4}.$$

Sugerencia: Con el objeto de reducir la ecuación de la parte *b*) a la de la parte *a*), considérese una substitución preliminar de la forma

$$x = X - h, \qquad y = Y - k.$$

Escójanse las constantes h y k de tal manera que la ecuación sea homogénea en las variables X y Y.

*10. Resolver $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x + 3y + 15}{2x + y + 7}$. Ver la Sugerencia del problema 9*b*.

*11. Resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y - 5}{x - y - 1}$. Ver la Sugerencia del problema 9*b*.

12. Encontrar la solución de la ecuación

$$(3xy + y^2)\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0,$$

y compárese con la solución obtenida por otros métodos en el ejemplo 3 y el problema 12 de la sección 2.6.

*13. Mostrar que si

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

es una ecuación homogénea, entonces tiene a

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}$$

como un factor integrante.

*14. *a*) Probar que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + m}{cx + dy + n},$$

donde a, b, c, d, m y n son constantes, siempre podemos reducirla a una ecuación homogénea con una transformación apropiada de la forma

$$x = X - h, \qquad y = Y - k,$$

en tanto que $ad - bc \neq 0$.

b) Encontrar una transformación que reduzca la ecuación dada en otra cuyas variables sean separables cuando $ad - bc = 0$. Encontrar la solución para este caso.

*15. Mostrar que la ecuación $y' = f(x, y)$, es homogénea si $f(x, y)$ es tal que

$$f(x, tx) = f(1, t),$$

donde t es un parámetro real. Use este hecho para determinar si cada una de las ecuaciones siguientes es homogénea.

a) $y' = \dfrac{x^3 + xy + y^3}{x^2y + xy^2}$ *b*) $y' = \ln x - \ln y + \dfrac{x + y}{x - y}$

c) $y' = \dfrac{(x^2 + 3xy + 4y^2)^{1/2}}{x + 2y}$ *d*) $y' = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2 + y^2}$

2.8 PROBLEMAS DIVERSOS

Esta sección consiste de una lista de 32 problemas que pueden resolverse por los métodos de las secciones anteriores. Están presentados de tal forma que el lector pueda tener alguna práctica en identificar el método o métodos aplicables a la ecuación dada.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - 2y}{x}$ 2. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y}{3 + 3y^2 - x}, \quad y(0) = 0$

4. $(x + e^y)\,dy - dx = 0$

5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + y^2 + 1}{x^2 + 2xy}$

6. $x\dfrac{dy}{dx} + xy = 1 - y, \quad y(1) = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2y + y^3}$ *Indicación:* Sea $u = x^2$.

8. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad y(2) = 1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + 1}{x^2 + 2y}$

10. $(3y^2 + 2xy)\,dx - (2xy + x^2)\,dy = 0$

11. $(x^2 + y)\,dx + (x + e^y)\,dy = 0$

12. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$

13. $x\,dy - y\,dx = (xy)^{1/2}\,dx$

14. $(x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0, \quad y(2) = 3$

15. $(e^x + 1)\dfrac{dy}{dx} = y - ye^x$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + 3y$

18. $(2y + 3x)\,dx = -x\,dy$

19. $x\,dy - y\,dx = 2x^2y^2\,dy, \quad y(1) = -2$

20. $y' = e^{x+y}$

21. $xy' = y + xe^{y/x}$

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$

23. $xy' + y - y^2e^{2x} = 0$

24. $2\operatorname{sen} y \cos x\,dx + \cos y \operatorname{sen} x\,dy = 0$

25. $\left(2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

26. $(2y + 1)\,dx + \left(\dfrac{x^2 - y}{x}\right)dy = 0$

27. $(\cos 2y - \operatorname{sen} x)\,dx - 2\tan x \operatorname{sen} 2y\,dy = 0$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$

29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{1 - 2xy^2}, \quad y(0) = 1$

31. $(x^2y + xy - y)\,dx + (x^2y - 2x^2)\,dy = 0$

32. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}, \quad y(1) = -2$

2.9 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Las ecuaciones diferenciales son de interés a aquellos que no son matemáticos, principalmente por la posibilidad de usarlas para investigar una amplia variedad de procesos en las ciencias físicas, biológicas y sociales. Hay tres pasos identificables en este proceso, que siempre se presentan sin importar el campo específico de aplicación.

En primer lugar, es preciso trasladar la situación física a términos matemáticos. Este se hace generalmente haciendo suposiciones sobre los fenómenos observados, de tal manera que estas suposiciones sean consistentes con el mundo físico real. Por ejemplo, se ha observado que los materiales radiactivos decaen a una velocidad proporcional a la cantidad de materia presente, que el calor pasa de un cuerpo caliente a otro menos caliente a una velocidad proporcional a la diferencia de temperatura, que los objetos se mueven de acuerdo con las leyes de movimiento de Newton, y que las comunidades aisladas de insectos crecen a una velocidad proporcional a la población actual. Cada una de estas afirmaciones involucra un grado de cambio (derivada) y consecuentemente, cuando se expresan matemáticamente, toman la forma de una ecuación diferencial.

Es importante darse cuenta de que las ecuaciones matemáticas son casi siempre sólo una descripción aproximada de los procesos reales, ya que están basadas en observaciones que son, a su vez, aproximaciones a la realidad. Por ejemplo, los cuerpos que se mueven a velocidades comparables a la velocidad de la luz, no están gobernados por las leyes de Newton, las comunidades de insectos no crecen indefinidamente (como podría pensarse al resolver la ecuación diferencial correspondiente), debido a las limitaciones eventuales de alimento, y la transferencia de calor está afectada por otros factores además de la diferencia de temperatura. Más aún, el proceso de formular un problema físico matemáticamente, involucra a menudo el reemplazamiento conceptual de un proceso discreto por uno continuo. Por ejemplo, el número de miembros en una comunidad de insectos cambia por cantidades discretas; sin embargo, si la población es grande, parece razonable considerarla como una variable continua y hasta hablar de su derivada. Alternativamente, se puede adoptar el punto de vista de que las ecuaciones matemáticas describen exactamente la operación de un modelo simplificado, que ha sido construido (o concebido de) tal que represente las características más sobresalientes del proceso real.

En cada caso, una vez que se ha formulado el problema matemáticamente, frecuentemente se encara uno con el problema de resolver una o más ecuaciones diferenciales o, si esto no es posible, de averiguar tanto como sea posible acerca de las propiedades de la solución. Puede suceder que este problema matemático sea bastante difícil y que, si así sucede, más aproximaciones sean indicadas en esta etapa para hacer más tratable el problema matemático. Por ejemplo, una ecuación no lineal puede aproximarse con una lineal, o una función que varía lentamente puede substituirse por su valor promedio. Naturalmente, tales aproximaciones deberán ser examinadas también desde el punto de vista físico, para asegurarse de que el problema matemático simplificado aún refleja las características principales del proceso físico que se está investigando. Al mismo tiempo, un conocimiento íntimo de

la física del problema puede sugerir aproximaciones matemáticas razonables, que hagan más susceptible al análisis el problema matemático. El juego entre el entendimiento del fenómeno físico y el conocimiento de las técnicas matemáticas y sus limitaciones, es característico de las matemáticas aplicadas, y es indispensable para tener éxito en la construcción de modelos matemáticos para procesos físicos complicados.

Finalmente, habiendo obtenido la solución (o al menos alguna información acerca de ella), ésta deberá interpretarse en términos del contexto en que surgió el problema. En particular, uno siempre debe verificar si la solución matemática es físicamente plausible. Esto requiere, como primer requisito, que la solución exista, que sea única, y que dependa continuamente de los datos del problema. Esta última consideración es importante porque los coeficientes en la ecuación diferencial y las condiciones iniciales, se obtienen a menudo como resultado de la medida de alguna cantidad física, y por lo tanto son susceptibles de pequeños errores. Si estos pequeños errores conducen a grandes (o discontinuos) cambios, en la solución del problema matemático correspondiente, que no se observan físicamente, entonces debe reexaminarse la relevancia con que el modelo matemático representa al sistema físico que se trata de describir. Por supuesto, el hecho de que una solución matemática parezca razonable no es suficiente garantía de que sea correcta. Sin embargo, si hay serias inconsistencias con las observaciones cuidadosas que se hagan del sistema físico, esto sugiere que ha habido errores al resolver el problema matemático, o que el modelo matemático en sí, es demasiado burdo.

Los ejemplos que siguen en esta sección y en la siguiente, son típicos de las aplicaciones que se pueden encontrar con respecto a las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ejemplo 1 **(Decaimiento Radiactivo).** Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a la cantidad de material presente. Un bloque de este material tiene originalmente una masa de Q_0 gramos. Al ser observado después de 24 horas, ha experimentado una reducción de masa del 10%. Encuéntrese una expresión para la masa del cuerpo a un tiempo cualquiera. Descúbrase también el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que el bloque decaiga a la mitad de su masa original.

Sea $Q(t)$ la masa del material al tiempo t. Ya que la velocidad de cambio de Q es proporcional a Q misma, tenemos

$$Q'(t) = kQ(t), \tag{1}$$

donde k es un factor de proporcionalidad constante. La ecuación (1) puede resolverse ya sea como una ecuación lineal o por separación de variables, y su solución general es

$$Q(t) = ce^{kt}. \tag{2}$$

Si el origen de la escala del tiempo se elige como el instante en el que la masa del material es Q_0, entonces la condición inicial es $Q(0) = Q_0$. Por lo tanto c es igual a Q_0, y la ecuación (2) se transforma en

$$Q(t) = Q_0e^{kt}. \tag{3}$$

Si se conoce k, entonces la Ec. (3) da una fórmula para la masa Q presente a cualquier tiempo. Si no se conoce k por anticipado, se necesita entonces una segunda observación para determinarla. En el problema dado, $Q(24)$ es igual a $9Q_0/10$. De aquí que

$$\tfrac{9}{10}Q_0 = Q_0 e^{24k},$$

y

$$k = -\tfrac{1}{24}\ln(10/9) \cong -0.00439. \tag{4}$$

Usando este valor de k en la Ec. (3) se obtiene la expresión deseada para $Q(t)$.

El período de tiempo durante el cual se reduce la masa a la mitad de su valor original es conocido como la *vida media* del material. Si t_1 es el tiempo al cual $Q(t)$ es igual a $Q_0/2$, entonces, de la Ec. (3),

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{kt_1},$$

ó

$$t_1 = -\frac{1}{k}\ln 2. \tag{5}$$

La Ec. (5) es la relación entre la vida media del material (cualquiera que éste sea), y el grado o velocidad de decaimiento, para cualquier material que obedezca la ecuación diferencial (1). Usando el valor de k dado por la Ec. (4) encontramos que

$$t_1 = \frac{24\ln 2}{\ln(10/9)} \cong 158 \text{ (horas)}. \tag{6}$$

Ejemplo 2 **(Interés Compuesto).** Supóngase que una cantidad de dinero S_0 se invierte de tal forma que dé un interés de 4 por ciento trimestral. El valor de la inversión $S(t)$ a cualquier tiempo puede calcularse algebraicamente o por referencia a las tablas de interés compuesto. Sin embargo, vamos a aproximarnos a la situación real con un modelo matemático, para el cual vamos a suponer que el interés se acumula continuamente. Aunque esta suposición parece bastante exagerada, nos permite escribir la ley de crecimiento de la inversión como una ecuación diferencial, esto es

$$S'(t) = 0.04S(t). \tag{7}$$

La solución de la ecuación diferencial (7), que satisface también la condición inicial $S(0) = S_0$, es

$$S(t) = S_0 e^{0.04t}. \tag{8}$$

En la tabla 2.1 enlistamos los valores de $S(t)/S_0$ como dados por la Ec. (8) para diferentes valores de t. Los valores exactos de $S(t)/S_0$ para un interés compuesto del 4% trimestral se dan también con el objeto de establecer una comparación.

Para valores relativamente pequeños de t el modelo matemático continuo da resultados bastantes cercanos a los reales. Sin embargo, si el período de tiempo se mide en siglos, el efecto piramidal del interés compuesto continuo, causa eventualmente serias discrepancias. Este ejemplo ilustra el hecho de que se necesita tener cuidado para determinar el rango dentro del cual son válidas las suposiciones simplificadas. Ilustra también, no obstante, que en intervalos limitados se pueden hacer a veces suposiciones drásticas, sin afectar seriamente la exactitud de los resultados.

TABLA 2.1

Años	$S(t)/S_0$ Exacto	$S(t)/S_0$ de la Ec. (8)	Error (Porcentaje)
2	1.0829	1.0833	0.04
5	1.2202	1.2214	0.1
10	1.4889	1.4918	0.2
20	2.2168	2.2255	0.4
40	4.9142	4.9530	0.8
80	24.149	24.533	1.5
200	2866	2981	4.0
400	8,214,000	8,886,000	8.2

Ejemplo 3 **(Mezclado).** Considérese un tanque que contiene, al tiempo $t = 0$, Q_0 libras de sal disueltas en 100 gal. de agua. Supóngase que agua con una dilución de 1/4 de libra por cada galón entra al tanque a una velocidad de tres galones por minuto, y que después de que la solución en el tanque ha sido agitada muy bien, sale del tanque a la misma velocidad. Encontrar una expresión para la cantidad de sal $Q(t)$ en el tanque al tiempo t.

La velocidad de cambio de sal en el tanque al tiempo t, $Q'(t)$, deberá ser igual a la velocidad con la que la sal entra al tanque menos la velocidad a la que sale. La velocidad a la que entra es 1/4 lb/gal multiplicado por 3 gal/minuto. La velocidad a la cual la sal sale es $(Q(t)/100)$ lb/gal multiplicado por 3 gal/minuto. De aquí que

$$Q'(t) = \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{100}Q(t) \tag{9}$$

es la ecuación diferencial que gobierna el proceso. La ecuación (9) es lineal y su solución es

$$Q(t) = 25 + ce^{-0.03t}, \tag{10}$$

donde c es arbitrario. La condición inicial

$$Q(0) = Q_0 \tag{11}$$

requiere que c sea igual a $Q_0 - 25$, y de aquí que

$$Q(t) = 25(1 - e^{-0.03t}) + Q_0e^{-0.03t}. \tag{12}$$

El segundo término del miembro derecho de la Ec. (12) representa la porción original de sal que permanece en el tanque al tiempo t. Este término se hace más y más pequeño con el transcurso del tiempo cuando la solución original es desaguada del tanque. El primer término del miembro derecho de la Ec. (12) da la cantidad de sal en el tanque al tiempo t durante la acción del proceso de flujo. Cuando t se hace grande este término se aproxima al valor constante 25 (libras). Es también claro físicamente que éste deberá ser el valor límite de Q cuando la solución original en el tanque se reemplaza más y más completamente por la entrada de agua con una concentración de 1/4 lb/gal.

Ejemplo 4 **(Epidemias).** Se ha desarrollado una teoría matemática de las epidemias a lo largo de las líneas siguientes. Supóngase que hay una comunidad de n miembros que contiene p individuos infectados y q no infectados pero susceptibles de infectarse, donde $p + q = n$. Alternativamente, sea x la proporción de miembros enfermos y y la de sanos. Entonces $x = p/n$, $y = q/n$ y $x + y = 1$. Si n es grande, es razonable pensar a x y y como variables continuas; entonces la velocidad a la que se esparce la enfermedad es dx/dt. Suponiendo que la enfermedad se esparce por contacto entre los individuos enfermos y sanos de la comunidad, entonces dx/dt es proporcional al número de contactos. Si los miembros de ambos grupos se mueven libremente entre ellos, el número de contactos se vuelve proporcional al producto de x y y. Por lo tanto llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \beta xy$$

ó

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(1 - x), \tag{13}$$

donde β es un factor de proporcionalidad positivo. La condición inicial es

$$x(0) = x_0, \tag{14}$$

donde x_0 es la densidad de los individuos infectados a $t = 0$.

La Ec. (13) es separable, y puede escribirse como

$$\frac{dx}{x(1 - x)} = \beta\, dt,$$

o, usando un desarrollo en fracciones parciales, en la forma

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}\right) dx = \beta\, dt.$$

De aquí que

$$\ln x - \ln(1 - x) = \beta t + C; \tag{15}$$

nótese que x y $1 - x$ son intrínsecamente positivas de tal forma que no se necesitan poner valores absolutos. De la Ec. (15) se sigue que

$\ln \frac{x}{1-x} = \beta t + C \quad \frac{x}{1-x} = e^{\beta t} e^{C}$

El segundo término del miembro derecho de la Ec. (12) representa la porción original de sal que permanece en el tanque al tiempo t. Este término se hace más y más pequeño con el transcurso del tiempo cuando la solución original es desaguada del tanque. El primer término del miembro derecho de la Ec. (12) da la cantidad de sal en el tanque al tiempo t durante la acción del proceso de flujo. Cuando t se hace grande este término se aproxima al valor constante 25 (libras). Es también claro físicamente que éste deberá ser el valor límite de Q cuando la solución original en el tanque se reemplaza más y más completamente por la entrada de agua con una concentración de 1/4 lb/gal.

Ejemplo 4 **(Epidemias).** Se ha desarrollado una teoría matemática de las epidemias a lo largo de las líneas siguientes. Supóngase que hay una comunidad de n miembros que contiene p individuos infectados y q no infectados pero susceptibles de infectarse, donde $p + q = n$. Alternativamente, sea x la proporción de miembros enfermos y y la de sanos. Entonces $x = p/n$, $y = q/n$ y $x + y = 1$. Si n es grande, es razonable pensar a x y y como variables continuas; entonces la velocidad a la que se esparce la enfermedad es dx/dt. Suponiendo que la enfermedad se esparce por contacto entre los individuos enfermos y sanos de la comunidad, entonces dx/dt es proporcional al número de contactos. Si los miembros de ambos grupos se mueven libremente entre ellos, el número de contactos se vuelve proporcional al producto de x y y. Por lo tanto llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \beta xy$$

ó

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(1 - x), \tag{13}$$

donde β es un factor de proporcionalidad positivo. La condición inicial es

$$x(0) = x_0, \tag{14}$$

donde x_0 es la densidad de los individuos infectados a $t = 0$.

La Ec. (13) es separable, y puede escribirse como

$$\frac{dx}{x(1 - x)} = \beta\, dt,$$

o, usando un desarrollo en fracciones parciales, en la forma

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}\right) dx = \beta\, dt.$$

De aquí que

$$\ln x - \ln(1 - x) = \beta t + C; \tag{15}$$

nótese que x y $1 - x$ son intrínsecamente positivas de tal forma que no se necesitan poner valores absolutos. De la Ec. (15) se sigue que

$\ln \frac{x}{1-x} = \beta t + C \quad \frac{x}{1-x} = e^{\beta t} e^{C}$

$$\frac{x}{1-x} = ce^{\beta t}, \tag{16}$$

donde $c = e^C$. La condición inicial requiere que $c = x_0/(1 - x_0)$. Usando este valor de c en la Ec. (16) y resolviendo para x, obtenemos

$$x = \frac{x_0 e^{\beta t}}{1 - x_0 + x_0 e^{\beta t}} = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0)e^{-\beta t}}. \tag{17}$$

Si $x_0 > 0$, entonces $x \to 1$ cuando $t \to \infty$ sin considerar el valor real de x_0. Por lo tanto, no importa cuán pequeño sea el número inicial de individuos contagiados, la epidemia se esparciría finalmente a toda la población.

El modelo matemático que se acaba de describir está claramente fuera de la realidad en algunos aspectos. Por ejemplo, si la epidemia es bastante seria, ocurre inmediatamente una cuarentena parcial ya que todos los individuos enfermos se restringen en sus actividades. Las autoridades sanitarias pueden imponer además otra cuarentena de alcances mayores, para restringir la posibilidad de contagio entre los individuos enfermos y los sanos. Finalmente, muchas enfermedades son contagiosas sólo por un período corto de tiempo, mientras que en el modelo aquí usado se supone que los individuos enfermos permanecen así indefinidamente. Todos estos factores tienden a hacer que la diseminación de la enfermedad sea realmente lenta en comparación con la predicha por el modelo matemático.

Ejemplo 5 **(Trayectorias Ortogonales).** Considérese una familia de parábolas definidas por

$$y = kx^2, \tag{18}$$

donde k es una constante arbitraria. Si $k > 0$, las parábolas se abren hacia arriba, y si $k < 0$ se abren hacia abajo, como los muestran las curvas dibujadas en la figura 2.5. Encuéntrese la familia de curvas que intersecta a la familia dada de parábolas ortogonalmente en cada punto.

El primer paso consiste en obtener una expresión para la pendiente en un punto dado (x, y) de la parábola que pasa a través de ese punto. Derivando la Ec. (18) encontramos que

$$\frac{dy}{dx} = 2kx, \tag{19}$$

una expresión que depende tanto de k como de x y y. Sin embargo, se puede concluir de la Ec. (18) que k es igual a y/x^2, y substituyendo para k en la Ec. (19) se tiene que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{(1)} = \frac{2y}{x}. \tag{20}$$

El superíndice (1) sirve meramente para identificar que ésas son las pendientes de la primera familia de curvas. La familia de curvas ortogonal deseada, se

caracteriza por el hecho de que sus pendientes, denotadas por $(dy/dx)^{(2)}$, son los recíprocos negativos de las dadas por la Ec. (20). Entonces

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} = -\frac{x}{2y}. \tag{21}$$

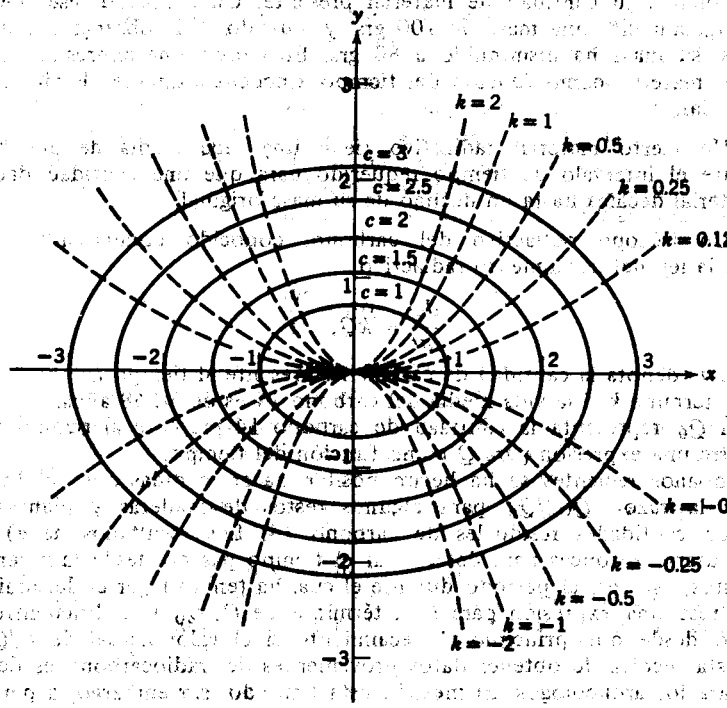

FIGURA 2.5

La Ec. (21) puede resolverse separando las variables, con el resultado de que

$$x^2 + 2y^2 = c, \tag{22}$$

donde c es una constante arbitraria (no negativa). Esta familia de curvas es la familia de elipses indicada por las curvas a trazo continuo de la figura 2.5.

Las familias de curvas que son mutuamente ortogonales, se dice que son trayectorias ortogonales unas a otras. Tales familias de trayectorias ortogonales se encuentran en varias ramas de la física. Por ejemplo, en el campo electrostático las líneas de fuerza y las de potencial constante (equipotenciales) son ortogonales unas a otras en todas partes.

PROBLEMAS

1. Supóngase que una suma de dinero está colocada a un interés que se acumula continuamente. Si la cantidad original es S_0, ¿cuándo el capital alcanzará la suma $S = 2S_0$ si el grado de interés anual es 3%? , 4%? , 5%?

2. Un cierto hombre tiene una fortuna que aumenta a una velocidad proporcional al cuadrado de su riqueza presente. Si tenía un millón de pesos hace un año, y ahora tiene dos millones, ¿cuánto tendrá dentro de seis meses? ¿dentro de dos años?

3. Se sabe que un cierto material radiactivo decae a una velocidad proporcional a su cantidad de material presente. Un bloque de ese material tiene originalmente una masa de 100 grs, y, cuando se le observa después de 20 años, su masa ha disminuido a 80 grs. Encuentre una expresión para la masa del material como función del tiempo. Encuentre también la vida media del material.

4. Un cierto material radiactivo tiene una vida media de dos horas. Encuentre el intervalo de tiempo requerido para que una cantidad dada de este material decaiga hasta un décimo de su masa original.

5. Un isótopo radiactivo del carbono, conocido como carbono 14, obedece la ley del decaimiento radiactivo

$$\frac{dQ}{dt} = kQ,$$

donde $Q(t)$ denota la cantidad de carbón 14 presente al tiempo t.

a) Determine k si la vida media del carbono 14 es de 5 568 años.

b) Si Q_0 representa la cantidad de carbono 14 presente al tiempo $t = 0$. Encuentre una expresión para Q como función del tiempo.

c) En años recientes se ha hecho posible hacer medidas que conducen a conocer la razón $Q(t)/Q_0$ para algunos restos de maderas y plantas que contienen cantidades residuales de carbono 14. Los resultados de *a*) y *b*) pueden usarse entonces para determinar el tiempo pasado desde la muerte de esos restos; esto es, el período durante el cual ha tenido lugar el decaimiento. Encuéntrese una expresión para t en términos de Q, Q_0 y k. Encuéntrese el intervalo desde que principió el decaimiento si el valor actual de Q/Q_0 es 0.20. Esta técnica de obtener datos provenientes del radiocarbono es de gran valor para los arqueólogos. El método está limitado, sin embargo, a períodos de 30 000 años o menos, ya que para períodos más largos la cantidad de carbono 14 presente es tan pequeña que no puede determinarse con exactitud.

6. Supóngase que la población de la Tierra cambia a una velocidad proporcional a la población actual. (Una hipótesis más exacta respecto de la ley de crecimiento de la población se considera en el problema 7.) Supóngase además que al tiempo $t = 0$ (1650 d.C.), la población de la Tierra era 250 millones (2.5×10^8); al tiempo $t = 300$ (1950 d.C.) su población fue 2.5 billones (2.5×10^9). Encuéntrese una expresión que dé la población de la Tierra como función del tiempo. Suponiendo que la mayor población que puede soportar la Tierra es de 25 billones (2.5×10^{10}), ¿cuándo se alcanzará ese límite?

7. En una cierta comunidad aislada, $p(t)$ la velocidad de crecimiento de la población dp/dt es una función de la población p; de aquí que

$$\frac{dp}{dt} = f(p).$$

a) La expresión más simple para $f(p)$ es $f(p) = \epsilon p$, donde ϵ es una constante positiva. Encontrar $p(t)$ en este caso si $p(0) = p_0$. ¿Cuál es el $\lim_{t \to \infty} p(t)$?

b) Una suposición mejor en muchas situaciones es que $f(p) = \epsilon p - kp^2$ donde ϵ y k son ambas constantes positivas. El término $-kp^2$ puede necesitarse, por ejemplo, si condiciones multitudinarias para grandes valores de p dan como resultado un aumento en el grado de muertes y una disminución en el ritmo de nacimientos. Si $p(0)$ es igual a p_0, encontrar una expresión para la población como función del tiempo. Encontrar el límite de la población cuando $t \to \infty$. Comparar estos resultados con los de la parte *a*). Nótese que, aún si k es muy pequeña, la naturaleza de la solución cambia radicalmente (para p grande) tan pronto como se introduce el término cuadrático de $f(p)$.

8. Se sabe de observaciones experimentales que, con una exactitud satisfactoria en muchas circunstancias, la temperatura superficial de un objeto cambia a una velocidad proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la de sus alrededores (la temperatura ambiente). Esto se conoce algunas veces como la ley de enfriamiento de Newton. Entonces, si $u(t)$ es la temperatura del objeto al tiempo t, y u_0 es la temperatura ambiente constante, tenemos la relación

$$\frac{du}{dt} = k(u - u_0),$$

donde k es un factor de proporcionalidad constante.

a) Encontrar la solución que satisface la condición inicial $u(0) = u_1$.

b) Suponer que la temperatura de una taza de café es de 200°F cuando se acaba de servir. Un minuto después se ha enfriado a 190°F en un cuarto que está a 70°F. ¿Qué tan grande debe ser el período que debe transcurrir (suponiendo que se aplica la ley de enfriamiento de Newton) antes de que el café alcance una temperatura de 150°F?

9. Suponer que una gota de lluvia esférica se evapora a una velocidad proporcional a su área superficial. Si originalmente el radio es de 3 mm, y una hora después se ha reducido a 2 mm, encontrar una expresión para el radio de la gota como función del tiempo.

10. Considérese un tanque usado en ciertos experimentos de hidrodinámica. Después de un experimento el tanque contiene 200 l de una solución de tintura con una concentración de 1 gr/l. Para preparar el experimento siguiente el tanque se limpia con agua fresca que fluye al tanque a razón de 2 l/min, y la solución bien agitada sale del tanque con la misma razón. Encontrar el tiempo que pasa antes de que la concentración de la tintura en el tanque alcance 1% de su valor original.

11. Un tanque contiene originalmente 100 galones de agua fresca. Se vierte entonces agua que contiene media libra de sal por galón dentro del tanque a una velocidad de 2 galones/minuto, y se permite que salga la mezcla con la misma rapidez. Después de diez minutos se para el proceso y se vierte agua fresca dentro del tanque a la velocidad de 2 gal/min, dejando salir también la mezcla a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal en el tanque al final de los 20 minutos.

12. Un tanque con capacidad de 500 galones contiene originalmente 200 galones de agua con 100 libras de sal en solución. Se introduce dentro del tanque agua que contiene una libra de sal por galón, a la velocidad de 3 gal/min, y se permite que la mezcla fluya hacia afuera del tanque a una velocidad de 2 gal/min. Encuéntrese la cantidad de sal en el tanque para cualquier tiempo (en libras por galón), anterior al instante cuando la solución

principia a exceder la capacidad del tanque. Compárese esta concentración con el límite teórico de la concentración si el tanque tuviese capacidad infinita.

13. Una reacción química de segundo orden involucra la interacción (colisión) de una molécula de una substancia P con otra de una substancia Q para producir una molécula de una nueva substancia X; $P + Q \to X$ es la notación usual. Supóngase que p y q son las concentraciones iniciales de las substancias P y Q, respectivamente, y sea $x(t)$ la concentración de X al tiempo t. Entonces $p - x(t)$ y $q - x(t)$ son las concentraciones de P y Q al tiempo t, y la velocidad a la que ocurre la reacción está descrita por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)(q - x),$$

donde α es una constante positiva.

a) Si $x(0) = 0$, encontrar $x(t)$.

b) Si las substancias P y Q son las mismas, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)^2.$$

Si $x(0) = 0$ encontrar $x(t)$.

14. Supóngase que en una cierta reacción química una substancia P se transforma en una X. Sea p la concentración inicial de P y $x(t)$ la concentración de X al tiempo t. Entonces $p - x(t)$ es la concentración de P a t. Supóngase además que la reacción es autocatalítica, esto es, que la reacción se estimula por la misma substancia que se produce. Por lo tanto dx/dt es proporcional a x y a $p - x$, y

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(p - x),$$

donde α es una constante positiva. Si $x(0) = x_0$, encontrar $x(t)$.

15. Supóngase que un cuarto que contiene originalmente 1 200 pies de aire, está libre, originalmente, de monóxido de carbono. Si se principia a fumar un cigarrillo al tiempo $t = 0$, el humo del cual contiene 4% de monóxido de carbono, y este humo se introduce dentro del cuarto con un gasto de 0.1 pie^3/min, y al mismo tiempo se permite que la mezcla de humo y aire se escape del cuarto a la misma velocidad.

a) Encuéntrese una expresión para la concentración $x(t)$ del monóxido de carbono en el cuarto para cualquier tiempo $t > 0$.

b) Si un ser humano se expone a la acción del monóxido de carbono disuelto en el aire en una proporción de 0.00012, puede resultar seriamente afectado. En el caso que hemos presentado, ¿cuánto tiempo t debe transcurrir para que se alcance esta concentración?

16. Considérese un lago de volumen constante V que contiene al tiempo t una cantidad $Q(t)$ de agente contaminador, homogéneamente distribuido en todo el lago con una concentración $c(t)$ donde $c(t) = Q(t)/V$. Supóngase que agua que contiene una concentración k de contaminante entra al lago a una velocidad r, y que sale agua del lago a la misma velocidad. Supóngase que los contaminantes se agregan directamente al lago a una velocidad constante P. Nótese que las suposiciones hechas desprecian un número de factores que pueden, en algunos casos, ser importantes; por ejemplo, el agua agregada o perdida por precipitación, absorción, y evaporación; el efecto estratificador de

las diferencias de temperatura en un lago profundo; la tendencia de las irregularidades de la orilla del lago a producir bahías protegidas; y el hecho de que los contaminantes no se depositan homogéneamente en todo el lago, sino que (bien generalmente) se depositan en puntos aislados alrededor de su perímetro. Los resultados mostrados de inmediato deberán examinarse tomando en cuenta que se han despreciado factores como éstos.

a) Si al tiempo $t = 0$ la concentración de contaminante es c_0, encontrar una expresión para la concentración $c(t)$ para cualquier tiempo t. ¿A qué concentración límite se tiende cuando $t \to \infty$?

b) Si se termina la introducción de contaminantes en el lago ($k = 0$ y $P = 0$ para $t > 0$), determínese el intervalo de tiempo T que deberá transcurrir antes de que la concentración de contaminantes se reduzca al 50% de su valor original; al 10% de su valor original.

c) La tabla 2.2 contiene datos† para algunos de los Grandes Lagos. Usando estos datos determínese de la parte *b*) el tiempo T necesario para reducir la contaminación de cada uno de estos lagos al 10% de su valor original.

TABLA 2.2

Lago	$V(\text{km}^3 \times 10^{-3})$	$r(\text{km}^3/\text{año})$
Superior	12.2	65.2
Michigan	4.9	158
Erie	0.46	175
Ontario	1.6	209

17. En cada uno de los casos siguientes encuentre la familia de trayectorias ortogonales de la familia dada de curvas. Bosqueje tanto la familia dada como sus trayectorias ortogonales.

a) $xy = c$ *b*) $x^2 + y^2 = cx$

c) $x^2 - xy + y^2 = c^2$ *d*) $2cy + x^2 = c^2, \quad c > 0$

18. Si dos líneas rectas en el plano xy, que tienen pendiente m_1 y m_2 respectivamente, se intersectan en un ángulo θ, mostrar que

$$(\tan \theta)(1 + m_1 m_2) = m_2 - m_1.$$

Usando este hecho, encuéntrese la familia de curvas que intersectan cada una de las familias siguientes en un ángulo de 45°. Dibújense en cada caso ambas familias de curvas.

a) $x - 2y = c$ *b*) $x^2 + y^2 = c^2$

19. Encuéntrense todas las curvas planas tales que la línea tangente en cada punto (x, y) pase a través del punto fijo (a, b).

20. La línea normal a una curva dada en cada punto (x, y) sobre la curva pasa a través del punto (2, 0). Si la curva contiene al punto (2, 3) encuéntrese su ecuación.

† Este problema está basado en el artículo de R.H. Rainey, "Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes," *Science*, 1955 (1967) pp. 1242-1243; la información de la tabla fue tomada de esa fuente.

las diferencias de temperatura en un lago profundo; la tendencia de las irregularidades de la orilla del lago a producir bahías protegidas; y el hecho de que los contaminantes no se depositan homogéneamente en todo el lago, sino que (bien generalmente) se depositan en puntos aislados alrededor de su perímetro. Los resultados mostrados de inmediato deberán examinarse tomando en cuenta que se han despreciado factores como éstos.

a) Si al tiempo $t = 0$ la concentración de contaminante es c_0, encontrar una expresión para la concentración $c(t)$ para cualquier tiempo t. ¿A qué concentración límite se tiende cuando $t \to \infty$?

b) Si se termina la introducción de contaminantes en el lago ($k = 0$ y $P = 0$ para $t > 0$), determínese el intervalo de tiempo T que deberá transcurrir antes de que la concentración de contaminantes se reduzca al 50% de su valor original; al 10% de su valor original.

c) La tabla 2.2 contiene datos† para algunos de los Grandes Lagos. Usando estos datos determínese de la parte *b*) el tiempo T necesario para reducir la contaminación de cada uno de estos lagos al 10% de su valor original.

TABLA 2.2

Lago	$V(\text{km}^3 \times 10^{-3})$	$r(\text{km}^3/\text{año})$
Superior	12.2	65.2
Michigan	4.9	158
Erie	0.46	175
Ontario	1.6	209

17. En cada uno de los casos siguientes encuentre la familia de trayectorias ortogonales de la familia dada de curvas. Bosqueje tanto la familia dada como sus trayectorias ortogonales.

a) $xy = c$ *b*) $x^2 + y^2 = cx$

c) $x^2 - xy + y^2 = c^2$ *d*) $2cy + x^2 = c^2, \quad c > 0$

18. Si dos líneas rectas en el plano xy, que tienen pendiente m_1 y m_2 respectivamente, se intersectan en un ángulo θ, mostrar que

$$(\tan \theta)(1 + m_1 m_2) = m_2 - m_1.$$

Usando este hecho, encuéntrese la familia de curvas que intersectan cada una de las familias siguientes en un ángulo de 45°. Dibújense en cada caso ambas familias de curvas.

a) $x - 2y = c$ *b*) $x^2 + y^2 = c^2$

19. Encuéntrense todas las curvas planas tales que la línea tangente en cada punto (x, y) pase a través del punto fijo (a, b).

20. La línea normal a una curva dada en cada punto (x, y) sobre la curva pasa a través del punto (2, 0). Si la curva contiene al punto (2, 3) encuéntrese su ecuación.

† Este problema está basado en el artículo de R.H. Rainey, "Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes," *Science*, 1955 (1967) pp. 1242-1243; la información de la tabla fue tomada de esa fuente.

21. Encuéntrense todas las curvas planas para las que el eje y biseca la parte de la tangente que está entre el punto de tangencia y el eje x.

2.10 MECANICA ELEMENTAL

Algunas de las más importantes aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden se encuentran en el campo de la mecánica elemental. En esta sección consideraremos algunos problemas que involucran el movimiento de cuerpos rígidos a lo largo de una línea recta. Supondremos que tales cuerpos obedecen las leyes de movimiento de Newton (1642-1727): *el producto de la masa y la aceleración es igual a la fuerza externa*. En símbolos

$$F = ma, \tag{1}$$

donde F es la fuerza externa, m la masa del cuerpo y a es su aceleración en la dirección de F. Si la masa del cuerpo es constante, entonces la Ec. (1) puede escribirse en la forma

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dP}{dt}, \tag{2}$$

donde v representa la velocidad, y $P = mv$ su impulso lineal.

Hay dos sistemas de unidades de uso común.* En el métrico, o sistema cgs, las unidades básicas son los centímetros (longitud), gramos (masa) y segundos (tiempo). La unidad de fuerza, la dina, está definida por la Ec. (1) como la fuerza requerida para producir una aceleración de 1 cm/seg^2 a una masa de 1 g. Por otra parte, en el sistema inglés las unidades básicas son pies (longitud), libras (fuerza), y segundos (tiempo). La unidad de masa, el slug, se define a través de la Ec. (1) como la masa a la cual una fuerza de 1 libra produce una aceleración de 1 pie/seg^2.

Consideremos ahora un cuerpo que cae libremente en el vacío desde un punto lo suficientemente cercano a la superficie de la Tierra, de tal forma que la única fuerza significativa que actúa sobre el cuerpo es la del campo gravitacional de la Tierra. La Ec. (1) toma entonces la forma

$$w = mg, \tag{3}$$

donde w es el peso del cuerpo y g denota la aceleración debida a la gravedad.

Aun pensando que la masa del cuerpo permanece constante, su peso y la aceleración gravitacional cambian con la distancia que haya desde el centro del campo gravitacional de la Tierra. Al nivel del mar el valor de g ha sido determinado experimentalmente como de 32 pies/s (sistema inglés), o 980 cm/s^2 (sistema métrico). Se acostumbra denotar por g la aceleración gravitacional al *nivel del mar*; por lo tanto g es una constante. En esta inteligencia la Ec. (3) es exacta sólo al nivel del mar.

* El sistema inglés es de uso común sólo en los países de habla inglesa e, inclusive en éstos, está siendo desplazado por el sistema métrico que es, incuestionablemente, más racional. (N. del T.)

La expresión general para el peso de un cuerpo de masa m se obtiene de la ley de los inversos cuadrados de Newton, sobre la atracción gravitacional. Si R es el radio de la Tierra, y x es la altura sobre el nivel del mar, entonces

$$w(x) = \frac{K}{(x + R)^2},$$

donde K es una constante. A $x = 0$ (nivel del mar), $w = mg$; por lo tanto $K = mgR^2$, y

$$w(x) = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}. \tag{4}$$

Desarrollando $(x + R)^{-2}$ en una serie de Taylor alrededor de $x = 0$ se obtiene que

$$w(x) = mg\left(1 - 2\frac{x}{R} + \cdots\right). \tag{5}$$

Se sigue entonces que si los términos de orden de magnitud de x/R pueden despreciarse en comparación con la unidad, entonces la Ec. (4) puede reemplazarse por la aproximación más simple, Ec. (3). Entonces, para movimientos en la vecindad de la superficie de la Tierra, o si no se requiere mucha exactitud, es generalmente suficiente usar la Ec. (3). En otros casos, como problemas que involucren vuelos espaciales, podrá ser necesario usar la Ec. (4), o al menos una aproximación mejor que la Ec. (3).

En muchos casos la fuerza externa F incluirá otros efectos además del peso del cuerpo. Por ejemplo, las fuerzas de fricción debidas a la resistencia ofrecida por el aire u otro medio circundante, pueden ser importantes y se necesite tomarlas en cuenta. Similarmente, los efectos de cambios de masa pueden ser importantes, como es el caso de un vehículo espacial que consume su combustible durante el vuelo.

En los problemas que aquí discutiremos, será de utilidad describir el movimiento del cuerpo con respecto a algún sistema de coordenadas conveniente. Elegiremos siempre el eje x como la línea en la dirección de la cual tiene lugar el movimiento; la dirección positiva del eje x podrá elegirse de una manera arbitraria. Una vez que se especifica la dirección positiva x, un valor positivo de x indica un desplazamiento en esa dirección, un valor positivo de $v = dx/dt$ indica que el cuerpo se mueve en la dirección positiva del eje x, un valor positivo de la fuerza F indica que ésta actúa en la dirección x positiva, y así sucesivamente. Los ejemplos siguientes tratan algunos problemas típicos.

Ejemplo 1. Un objeto de masa m es soltado desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a $|v|$, la magnitud de la velocidad instantánea del objeto.* Suponiendo que la fuerza gravitacional es constante, encuéntrese la posición y velocidad del objeto en cualquier tiempo t.

* En general la resistencia es una función de la velocidad, es decir, de su magnitud. La suposición de una relación lineal es razonable solamente para velocidades comparativamente bajas. Cuando se involucran velocidades altas, puede ser necesario suponer que la resistencia es proporcional a alguna potencia más alta de $|v|$, o aun que está dada por alguna función polinomial de $|v|$.

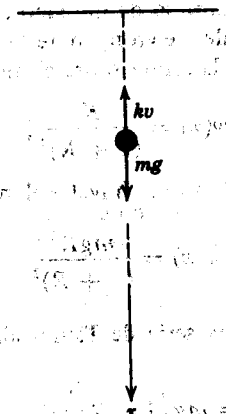

FIGURA 2.6 $v > 0$.

En este caso es conveniente trazar el eje x positivo dirigido hacia abajo, con el origen en la posición inicial del objeto: ver la figura 2.6. Entonces, el peso mg del objeto actúa hacia abajo (positivamente), pero la resistencia $k|v|$, donde k es una constante positiva, actúa para impedir el movimiento. Cuando $v > 0$, la resistencia se hace en la dirección hacia arriba (negativa), y está dada por lo tanto por $-kv$. Cuando $v < 0$, la resistencia actúa hacia abajo y está aún dada por $-kv$. Por lo tanto, en todos los casos la ley de Newton puede escribirse como

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

ó

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g. \tag{6}$$

La Ec. (6) es una ecuación lineal de primer orden, y tiene el factor integrante $e^{kt/m}$. La solución de la Ec. (6) es

$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-kt/m}. \tag{7}$$

La condición inicial $v(0) = 0$, requiere que $c_1 = -mg/k$; de aquí que

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}). \tag{8}$$

Para obtener la posición x del cuerpo reemplazamos v por dx/dt en la Ec. (8); integrando y usando la segunda condición inicial $x(0) = 0$ obtenemos

$$x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}). \tag{9}$$

La posición y velocidad del cuerpo a cualquier tiempo t están dados por las Ecs. (9) y (8) respectivamente.

Es importante enfatizar que cuando $t \to \infty$ en la Ec. (7), la velocidad tiende al valor límite

$$v_l = \frac{mg}{k}. \tag{10}$$

La velocidad límite v_l no depende de las condiciones iniciales, sino sólo de la masa del objeto y el coeficiente de resistencia del medio. Dados ya sea v_l o k, la Ec. (10) nos da una fórmula para calcular la otra. Cuando k tiende a cero, esto es, cuando la resistencia disminuye, la velocidad límite aumenta sin que haya ninguna cota superior para ella.

Ejemplo 2. Un cuerpo de masa constante m es proyectado hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v_0. Suponiendo que no hay resistencia del aire, pero tomando en consideración las variaciones del campo gravitacional de la Tierra con la altura, encontrar la velocidad inicial más pequeña que necesita tener un cuerpo para no regresar a la Tierra. Esta es la llamada *velocidad de escape.*

Tómese el eje x positivo hacia arriba, con el origen sobre la superficie de la Tierra; ver figura 2.7. La única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su peso (hacia abajo) misma que está dada por la Ec. (4). Por lo tanto la ecuación de movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}, \tag{11}$$

y la condición inicial es

$$v(0) = v_0. \tag{12}$$

Ya que la fuerza que aparece en el miembro derecho de la Ec. (11) es una función solamente de x, es conveniente pensar que x, más bien que t, es la variable independiente. Esto requiere que expresemos dv/dt en términos de dv/dx por la regla de la cadena para la derivación; de aquí que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}, \tag{13}$$

y la Ec. (11) se reemplaza por

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}. \tag{14}$$

Separando las variables e integrando obtenemos

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{x+R} + c. \tag{15}$$

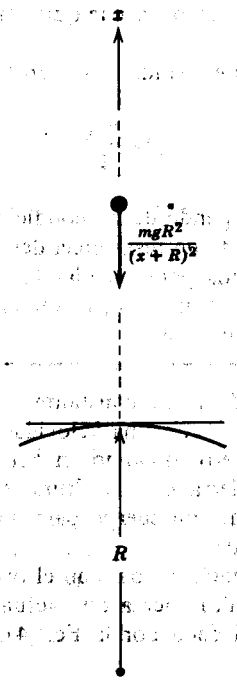

FIGURA 2.7

Ya que $x = 0$ cuando $t = 0$, la condición inicial (12) en $t = 0$ puede reemplazarse por la condición de que $v = v_0$ cuando $x = 0$. Esto requiere que $c = \frac{1}{2}v_0^2 - gR$; por lo tanto

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x + R}. \tag{16}$$

La velocidad de escape se encuentra especificando que la velocidad v, dada por la Ec. (16) permanezca positiva para todos los valores (positivos) de x. Esta condición se cumple si $v_0^2 \geq 2gR$. Entonces la velocidad de escape v_e está dada por

$$v_e = (2gR)^{1/2}; \tag{17}$$

la magnitud de v_e es aproximadamente 6.9 mill/s.

Al calcular la velocidad de escape $v_e = (2gR)^{1/2}$, se ha despreciado la resistencia del aire. La velocidad de escape real, incluyendo el efecto de la resistencia del aire, es un poco mayor. Por otra parte, la velocidad de escape efectiva puede reducirse significativamente, si el cuerpo se transporta a una considerable altura sobre el nivel del mar antes de ser disparado; tanto las fuerzas de gravedad como las de fricción se reducen de esta manera. La resistencia del aire, en particular, disminuye bastante rápidamente cuando se aumenta la altura.

PROBLEMAS

1. Un cuerpo de masa constante m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Suponiendo que la atracción gravitacional de la Tierra es constante, y despreciando todas las otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo, encontrar:
   a) la máxima altura alcanzada por el cuerpo;
   b) el tiempo en el que se alcanza la máxima altura;
   c) el tiempo que tarda el cuerpo en retornar al punto de partida.

2. Un cuerpo es dejado caer verticalmente hacia abajo, con una velocidad inicial v_0 en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuéntrese una relación entre la velocidad v y el tiempo t. Encuéntrese la velocidad límite v_l que se alcanza después de un largo tiempo.

3. Un objeto de masa m se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuéntrese el intervalo de tiempo que transcurre antes de que la velocidad del objeto alcance el 90% de su valor límite.

4. Un hombre y un bote de motor pesan juntos 320 libras. Si el empuje del motor es equivalente a una fuerza constante de 10 libras en la dirección del movimiento, y si la resistencia del agua al movimiento es numéricamente igual a dos veces la velocidad en pies/seg., y si el bote está inicialmente en reposo, encontrar:
   a) la velocidad del bote al tiempo t;
   b) la velocidad límite.

5. Un cuerpo con masa m es lanzado verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial v_0 es un medio que ofrece una resistencia proporcional a la raíz cuadrada de la magnitud de la velocidad. Encuéntrese la relación entre la velocidad v y el tiempo t. Encuéntrese también la velocidad límite.

6. Un cuerpo de masa m cae desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. Encuéntrese la relación entre la velocidad v y el tiempo t. Encuéntrese la velocidad límite.

7. Un cuerpo de masa m cae en un medio que ofrece una resistencia proporcional a $|v|^r$, donde r es una constante positiva. Suponiendo que la atracción gravitacional es constante, encontrar la velocidad límite del cuerpo.

8. Un cuerpo de masa constante m se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un medio que ofrece una resistencia $k|u|$, donde k es una constante. Despreciando cambios en el campo gravitacional, encontrar:
   a) la máxima altura x_m alcanzada por el cuerpo;
   b) el tiempo t_m en que se alcanza esta máxima altura. Mostrar también que t_m y x_m pueden expresarse como

$$t_m = \frac{v_0}{g}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right],$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right],$$

donde ambas series convergen cuando $kv_0/mg < 1$.

9. Un cuerpo que cae en un fluido relativamente denso, aceite por ejemplo, está actuado por tres fuerzas (ver figura 2.8): Una fuerza resistiva R,

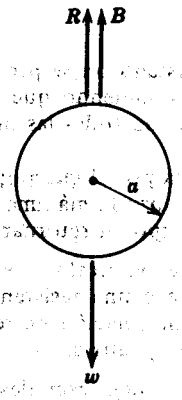

FIGURA 2.8

una fuerza de flotación B, y su peso w debido a la gravedad. La fuerza de flotación es igual al peso del fluido desplazado por el objeto. Para un cuerpo esférico de radio a que se mueve lentamente, la fuerza resistiva está dada por la ley de Stokes (1819-1903) $R = 6\pi\mu a|v|$, donde v es la velocidad del cuerpo, y μ es el coeficiente de viscosidad del fluido circundante. Encuéntrese la velocidad límite de una esfera sólida de radio a y densidad ρ cayendo libremente en un medio de densidad ρ' y coeficiente de viscosidad μ.

10. *a*) ¿Cuál es el peso de un cuerpo 1 000 millas sobre la superficie de la Tierra si el cuerpo pesa 100 libras al nivel del mar?

b) El radio de la Luna es aproximadamente 27/100 el de la Tierra, y su densidad promedio es aproximadamente 5/8 de la densidad promedio de la Tierra. Encuéntrese el peso aparente sobre la Luna de un objeto que pesa 100 libras en la superficie de la Tierra.

11. Un cuerpo de masa constante m se lanza verticalmente hacia arriba desde el nivel del mar con una velocidad inicial v_0 que no excede a la velocidad de escape $v_e = (2gR)^{1/2}$. Despreciando la resistencia del aire, pero considerando el cambio de la atracción gravitacional con la altura, encontrar la altitud máxima alcanzada por el cuerpo. Ver el ejemplo 2.

12. Encontrar la velocidad de escape para un cuerpo proyectado hacia arriba con una velocidad inicial v_0 desde el punto $x_0 = \xi R$ sobre la superficie de la Tierra, donde R es el radio de la Tierra y ξ es una constante. Despreciar la resistencia del aire. Encontrar la altura inicial a la que el cuerpo debe ser lanzado para reducir la velocidad de escape a un 85% de su valor en la superficie de la Tierra.

*2.11 EL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

En esta sección discutiremos la prueba del Teorema 2.2, el Teorema fundamental de existencia y unicidad para problemas de valores a la frontera de primer orden. Este Teorema establece que bajo ciertas condiciones sobre $f(x, y)$, el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \tag{1a}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{1b}$$

tiene una solución única en algún intervalo que contenga el punto x_0.

En algunos casos (por ejemplo, si la ecuación diferencial es lineal), la existencia de una solución del problema de valores iniciales (1) puede establecerse directamente resolviendo realmente el problema y exhibiendo una fórmula para la solución. Sin embargo, este enfoque no es simple en general, porque no hay un método para resolver la Ec. (1a) que se aplique en todos los casos. Por lo tanto, para el caso general es necesario adoptar un ataque indirecto que establezca la existencia de una solución de las Ecs. (1) aunque usualmente no nos dé los métodos para encontrarla. El meollo de este método es la construcción de una secuencia de funciones que converge a una función límite que satisface el problema de valores iniciales, aunque los miembros de la secuencia no lo hagan individualmente. Como regla, es imposible calcular explícitamente más de unos pocos miembros de la secuencia; por lo tanto la función límite puede encontrarse explícitamente sólo en raros casos, y de aquí que este método no nos dé un método útil para realmente resolver problemas de valores iniciales. Sin embargo, bajo las restricciones sobre $f(x, y)$ establecidas en el Teorema 2.2, es posible mostrar que la secuencia en cuestión converge y que la función límite tiene las propiedades deseadas. El argumento es bastante intrincado y depende, en parte, de técnicas y resultados que se encuentran por primera vez en un curso de cálculo avanzado. Consecuentemente, no insistiremos aquí en los detalles de la prueba pero indicaremos, no obstante, cuáles son sus principales características y apuntaremos algunas de las dificultades que involucra.

Primero de todo, notaremos que es suficiente considerar el problema en el que el punto inicial (x_0, y_0) es el origen; esto es, el problema

$$y' = f(x, y), \tag{2a}$$

$$y(0) = 0. \tag{2b}$$

Si se da algún otro punto inicial, entonces siempre podemos hacer un cambio preliminar de variables, correspondiendo a una traslación de los ejes coordenados, que coloque al punto (x_0, y_0) en el origen. Específicamente, introduciremos nuevas variables dependientes e independientes w y s, respectivamente, que están definidas por las ecuaciones

$$w = y - y_0, \qquad s = x - x_0; \tag{3}$$

ver también la figura 2.9. Pensando a w como una función de s, tenemos por la regla de la cadena

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}(y - y_0)\frac{d}{ds}(s + x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Denotando $f(x, y) = f(s + x_0, w + y_0)$ por $F(s, w)$, el problema de valores iniciales (1) se convierte en la forma

$$w'(s) = F[s, w(s)], \tag{4a}$$

$$w(0) = 0. \tag{4b}$$

Excepto por los nombres de las variables, las Ecs. (4) son las mismas que las Ecs. (2). De aquí en adelante, consideraremos el problema ligeramente más simple (2) en lugar del problema original (1).

FACULTAD DE CIENCIAS - BIBLIOTECA -

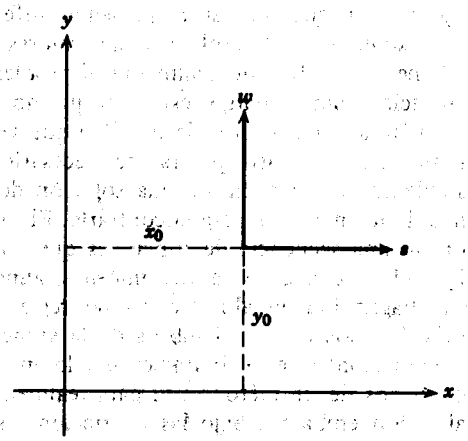

FIGURA 2.9

El Teorema de existencia y unicidad puede ahora establecerse de la forma siguiente.

Teorema 2.4. Si f y $\partial f/\partial y$ son continuas en un rectángulo R: $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, entonces hay algún intervalo $|x| \leq h \leq a$ en el cual existe una solución única $y = \phi(x)$ del problema (2) *de valores iniciales.*

$$y' = f(x, y), \qquad y(0) = 0.$$

Para probar este Teorema es necesario transformar el problema de valores iniciales (2) en una forma más conveniente. Si suponemos temporalmente que hay una función $y = \phi(x)$ que satisface el problema de valores iniciales, entonces $f[x, \phi(x)]$ es una función continua de x solamente. De aquí que podemos integrar la Ec. (2a) desde el punto inicial $x = 0$ hasta un valor arbitrario de x, obteniendo

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt, \tag{5}$$

donde se ha usado la Ec. (2b) para eliminar $\phi(0)$.

Ya que la Ec. (5) contiene una integral de la función desconocida ϕ, se le llama una *ecuación integral*. Esta ecuación integral no es una fórmula para la solución del problema de valores iniciales, pero nos da otra relación que es satisfecha por cualquier solución de las Ecs. (2). Inversamente, supóngase que hay una función continua $y = \phi(x)$ que satisface la ecuación integral (5); entonces esta función satisface también el problema de valores iniciales (2). Para mostrar esto, substituimos primero cero por x en la Ec. (5), obteniendo por lo tanto la Ec. (2b). Además, ya que el integrando en la Ec. (5) es continuo, se sigue del Teorema fundamental del cálculo, que $\phi'(x) = f[x, \phi(x)]$. Por lo tanto, el problema de valores iniciales y la ecuación integral son equivalentes en el sentido de que cualquier solución de uno es también

solución del otro. Es más conveniente mostrar que hay una solución única de la ecuación integral en un cierto intervalo $|x| \leq h$. La misma conclusión vale entonces para el problema de valores iniciales.

Un método de mostrar que la ecuación integral (5) tiene una solución única se conoce con el nombre de *método de aproximaciones sucesivas*, o método de Picard (1856-1941). Para usar este método principiaremos por elegir una función inicial ϕ_0, ya sea arbitraria o aproximada en alguna forma a la solución del problema de valores iniciales. La elección más simple consiste en definir ϕ_0 tal que

$$\phi_0(x) = 0; \tag{6}$$

entonces ϕ_0 satisface al menos la condición inicial (2b) aunque presumiblemente no la ecuación diferencial (2a). La siguiente aproximación ϕ_1 se obtiene substituyendo $\phi_0(t)$ por $\phi(t)$ en el miembro derecho de la Ec. (5), y llamando al resultado de esta operación $\phi_1(x)$. De aquí que

$$\phi_1(x) = \int_0^x f[t, \phi_0(t)]\, dt. \tag{7}$$

Similarmente, ϕ_2 se obtiene de ϕ_1:

$$\phi_2(x) = \int_0^x f[t, \phi_1(t)]\, dt, \tag{8}$$

y en general

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f[t, \phi_n(t)]\, dt. \tag{9}$$

En esta forma generamos la secuencia de funciones $\{\phi_n\} = \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$. Cada miembro de la secuencia satisface la condición inicial (2b), pero en general ninguna satisface la ecuación diferencial. Sin embargo si en algún paso, digamos para $n = k$, encontramos que $\phi_{k+1}(x) = \phi_k(x)$ entonces se sigue que ϕ_k es una solución de la ecuación integral (5). Entonces ϕ_k es también una solución del problema de valores iniciales (2), y la secuencia se termina en ese punto. En general esto no ocurre, y es necesario considerar la secuencia infinita completa.

Para establecer el Teorema 2.4 hay que dar respuesta a cuatro cuestiones principales.

1. ¿Existen todos los miembros de la secuencia $\{\phi_n\}$, o puede romperse el proceso en algún paso?
2. ¿Converge la secuencia?
3. ¿Cuáles son las propiedades de la función límite; en particular, esta función satisface la ecuación integral (5) y por lo tanto el problema de valores iniciales (2)?
4. ¿Es la única solución, ó puede haber otras?

Mostraremos primero cómo se pueden contestar estas preguntas en un ejemplo específico y relativamente simple, hecho esto comentaremos algunas de las dificultades que pueden presentarse en el caso general.

Ejemplo. Considérese el problema de valores iniciales

$$y' = 2x(y + 1), \qquad y(0) = 0. \tag{10}$$

Para resolver este problema por el método de aproximaciones sucesivas notaremos primero que si $y = \phi(x)$, entonces la correspondiente ecuación integral es

$$\phi(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi(t)]\,dt. \tag{11}$$

Si la aproximación inicial es $\phi_0(x) = 0$, se sigue que

$$\phi_1(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_0(t)]\,dt = \int_0^x 2t\,dt = x^2. \tag{12}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}\phi_2(x) &= \int_0^x 2t[1 + \phi_1(t)]\,dt = \int_0^x 2t[1 + t^2]\,dt \\ &= x^2 + \frac{x^4}{2},\end{aligned} \tag{13}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_3(x) &= \int_0^x 2t[1 + \phi_2(t)]\,dt = \int_0^x 2t\left[1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right] dt \\ &= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \cdot 3}.\end{aligned} \tag{14}$$

Las Ecs. (12), (13) y (14) sugieren que

$$\phi_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} \tag{15}$$

para cada $n \geq 1$, y este resultado puede establecerse por inducción matemática. Claramente, la Ec. (15) es verdadera para $n = 1$, y ahora tenemos que mostrar que si es válida para $n = k$ lo es también para $n = k + 1$. Tenemos

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(x) &= \int_0^x 2t[1 + \phi_k(t)]\,dt \\ &= \int_0^x 2t\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \cdots + \frac{t^{2k}}{k!}\right) dt \\ &= x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!},\end{aligned} \tag{16}$$

y de esta manera está completa la prueba inductiva.

Es claro de la Ec. (15) que $\phi_n(x)$ es la enésima suma parcial en la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k!\,; \tag{17}$$

Ejemplo. Considérese el problema de valores iniciales

$$y' = 2x(y + 1), \qquad y(0) = 0. \tag{10}$$

Para resolver este problema por el método de aproximaciones sucesivas notaremos primero que si $y = \phi(x)$, entonces la correspondiente ecuación integral es

$$\phi(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi(t)]\,dt. \tag{11}$$

Si la aproximación inicial es $\phi_0(x) = 0$, se sigue que

$$\phi_1(x) = \int_0^x 2t[1 + \phi_0(t)]\,dt = \int_0^x 2t\,dt = x^2. \tag{12}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}\phi_2(x) &= \int_0^x 2t[1 + \phi_1(t)]\,dt = \int_0^x 2t[1 + t^2]\,dt \\ &= x^2 + \frac{x^4}{2},\end{aligned} \tag{13}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_3(x) &= \int_0^x 2t[1 + \phi_2(t)]\,dt = \int_0^x 2t\left[1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right] dt \\ &= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \cdot 3}.\end{aligned} \tag{14}$$

Las Ecs. (12), (13) y (14) sugieren que

$$\phi_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} \tag{15}$$

para cada $n \geq 1$, y este resultado puede establecerse por inducción matemática. Claramente, la Ec. (15) es verdadera para $n = 1$, y ahora tenemos que mostrar que si es válida para $n = k$ lo es también para $n = k + 1$. Tenemos

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(x) &= \int_0^x 2t[1 + \phi_k(t)]\,dt \\ &= \int_0^x 2t\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \cdots + \frac{t^{2k}}{k!}\right) dt \\ &= x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k+2}}{(k+1)!},\end{aligned} \tag{16}$$

y de esta manera está completa la prueba inductiva.

Es claro de la Ec. (15) que $\phi_n(x)$ es la enésima suma parcial en la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k!\,; \tag{17}$$

de aquí que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ exista si y sólo si la serie (17) converge. Aplicando la prueba de la razón, vemos que para cada x

$$\left|\frac{x^{2k+2}}{(k+1)!}\frac{k!}{x^{2k}}\right| = \frac{x^2}{k+1} \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty; \tag{18}$$

por lo tanto la serie (17) converge para toda x, y su suma $\phi(x)$ es el límite* de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$. Además, ya que la serie (17) es una serie de Taylor, puede diferenciarse o integrarse término a término en tanto que x permanezca dentro del intervalo de convergencia, que en este caso es el eje x completo. Por lo tanto podemos verificar por cálculo directo que $\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k!$ es una solución de la ecuación integral (11). Alternativamente, substituyendo $\phi(x)$ por y en la Ec. (10) podemos verificar que esta función satisface también el problema de valores iniciales.

Finalmente, para tratar con el asunto de la unicidad, vamos a suponer que el problema de valores iniciales tiene otra solución ψ diferente de ϕ. Mostraremos que esto lleva a una contradicción. Ya que ϕ y ψ satisfacen ambas la ecuación integral (11), tenemos por resta que

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x 2t[\phi(t) - \psi(t)]\, dt.$$

Tomando valores absolutos en ambos lados tenemos que, si $x > 0$

$$|\phi(x) - \psi(x)| = \left|\int_0^x 2t[\phi(t) - \psi(t)]\, dt\right| \leq \int_0^x 2t\, |\phi(t) - \psi(t)|\, dt.$$

Si restringimos x a estar en el intervalo $0 \leq x \leq A/2$, donde A es arbitrario, entonces $2t \leq A$, y

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq A\int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\, dt. \tag{19}$$

Es conveniente en este punto introducir la función U definida por

$$U(x) = \int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\, dt. \tag{20}$$

Se sigue inmediatamente entonces que

$$U(0) = 0, \tag{21}$$

$$U(x) \geq 0, \quad \text{para} \quad x \geq 0. \tag{22}$$

Además, U es diferenciable, y $U'(x) = |\phi(x) - \psi(x)|$. De aquí que, por la Ec. (19)

$$U'(x) - AU(x) \leq 0. \tag{23}$$

Multiplicando la Ec. (23) por la cantidad positiva e^{-Ax} obtenemos

$$[e^{-Ax}U(x)]' \leq 0. \tag{24}$$

* En este caso es posible identificar ϕ en términos de funciones elementales, $\phi(x) = e^{x^2} - 1$. Sin embargo, esto es irrelevante para la discusión de la existencia y la unicidad.

Entonces, integrando la Ec. (24) de cero a x y usando la Ec. (21), nos queda que

$$e^{-Ax}U(x) \leq 0 \qquad \text{para} \qquad x \geq 0.$$

De aquí que $U(x) \leq 0$ para $x \geq 0$, y en conjunción con la Ec. (22) esto requiere que $U(x) = 0$ para cada $x \geq 0$. Entonces $U'(x) \equiv 0$, y por lo tanto $\psi(x) \equiv \phi(x)$, lo que contradice la hipótesis original. Consecuentemente, no puede haber dos soluciones diferentes del problema de valores iniciales para $x \geq 0$. Una ligera modificación de este argumento conduce a la misma conclusión para $x \leq 0$.

Volviendo ahora al problema general de resolver la ecuación integral (5), consideremos brevemente cada una de las cuestiones antes planteadas.

1. ¿Existen todos los miembros de la secuencia $\{\phi_n\}$? En el ejemplo f y $\partial f/\partial y$ fueron continuas en todo el plano xy, y cada miembro de la secuencia podía calcularse explícitamente. En contraste, en el caso general se supone que f y $\partial f/\partial y$ son continuos solamente en el rectángulo R: $|x| \leq a$, $|y| \leq b$; ver la figura 2.10. Más aún, los miembros de la secuencia no pueden, por regla general, determinarse explícitamente. El peligro está en que en algún paso, digamos para $n = k$, la gráfica de $y = \phi_k(x)$ puede contener puntos que estén fuera del rectángulo R. Entonces en el paso siguiente, en el cálculo de $\phi_{k+1}(x)$ sería necesario calcular $f(x, y)$ en puntos donde no se sabe que sea continuo o aún que exista. Por lo tanto, el cálculo de $\phi_{k+1}(x)$ puede ser imposible.

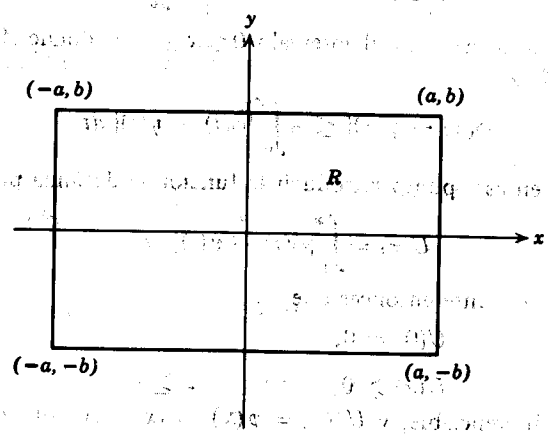

FIGURA 2.10

Para evitar este peligro puede ser necesario restringir x a un pequeño intervalo menor que $|x| \leq a$. Para encontrar ese intervalo es necesario hacer uso del hecho que una función continua sobre una región cerrada está acotada. De aquí, f está acotada sobre R; entonces existe un número positivo M tal que

$$|f(x, y)| \leq M, \qquad (x, y) \text{ en } R. \tag{25}$$

Hemos mencionado antes que

$$\phi_n(0) = 0$$

para cada n. Ya que $f[x, \phi_k(x)] = \phi'_{k+1}(x)$, la pendiente de la gráfica de la ecuación $y = \phi_{k+1}(x)$ no puede exceder a M en valor absoluto. Ya que esta gráfica contiene al punto (0, 0), debe estar en la región sombreada y aguzada que se muestra en la figura 2.11. De aquí que el punto $[x, \phi_{k+1}(x)]$ permanezca en R al menos en tanto que R contenga la región sombreada, que es para $|x| \leq b/M$. De aquí en adelante consideraremos solamente el rectángulo D: $|x| \leq h$, $|y| \leq b$, donde h es igual ya sea a a o a b/M, dependiendo cuál es menor. Con esta restricción todos los miembros de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$ existen. Nótese que si $b/M < a$, entonces puede obtenerse un valor grande de h encontrando una cota mejor para $|f(x, y)|$, siempre y cuando M no sea igual al valor máximo de $|f(x, y)|$.

2. ¿Converge la secuencia $\{\phi_n(x)\}$? Como un ejemplo podemos identificar $\phi_n(x) = \phi_1(x) + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] + \cdots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$ como la enésima suma parcial de la serie

$$\phi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)]. \tag{26}$$

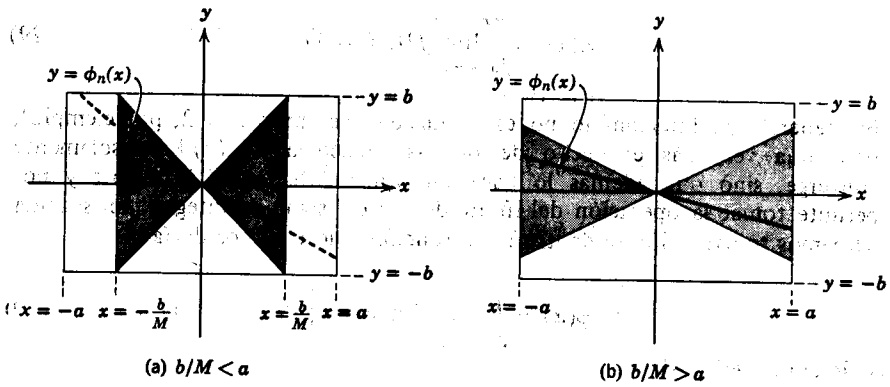

FIGURA 2.11

La convergencia de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$ se establece mostrando que la serie (26) converge. Para hacer esto es necesario estimar la magnitud $|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)|$ del término general. El argumento por medio del cual se hace esto se indica en los problemas 3 a 6 y será omitido aquí. Suponiendo que la secuencia converge, denotaremos la función límite por ϕ, de tal forma que

$$\phi(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(x). \tag{27}$$

3. ¿Cuáles son las propiedades de la función límite ϕ? En primer lugar, deseamos saber si ϕ es continua. Esto no es, sin embargo, una consecuencia

$$|f(x, y)| \leq M, \qquad (x, y) \text{ en } R. \tag{25}$$

Hemos mencionado antes que

$$\phi_n(0) = 0$$

para cada n. Ya que $f[x, \phi_k(x)] = \phi'_{k+1}(x)$, la pendiente de la gráfica de la ecuación $y = \phi_{k+1}(x)$ no puede exceder a M en valor absoluto. Ya que esta gráfica contiene al punto (0, 0), debe estar en la región sombreada y aguzada que se muestra en la figura 2.11. De aquí que el punto $[x, \phi_{k+1}(x)]$ permanezca en R al menos en tanto que R contenga la región sombreada, que es para $|x| \leq b/M$. De aquí en adelante consideraremos solamente el rectángulo D: $|x| \leq h$, $|y| \leq b$, donde h es igual ya sea a a o a b/M, dependiendo cuál es menor. Con esta restricción todos los miembros de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$ existen. Nótese que si $b/M < a$, entonces puede obtenerse un valor grande de h encontrando una cota mejor para $|f(x, y)|$, siempre y cuando M no sea igual al valor máximo de $|f(x, y)|$.

2. ¿Converge la secuencia $\{\phi_n(x)\}$? Como un ejemplo podemos identificar $\phi_n(x) = \phi_1(x) + [\phi_2(x) - \phi_1(x)] + \cdots + [\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)]$ como la enésima suma parcial de la serie

$$\phi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)]. \tag{26}$$

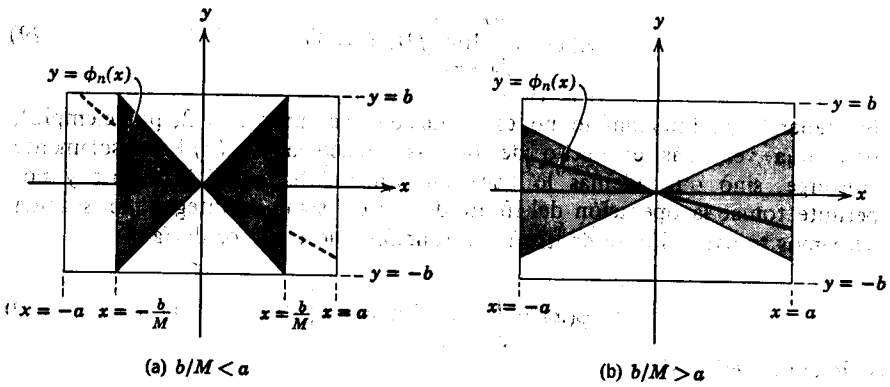

FIGURA 2.11

La convergencia de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$ se establece mostrando que la serie (26) converge. Para hacer esto es necesario estimar la magnitud $|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)|$ del término general. El argumento por medio del cual se hace esto se indica en los problemas 3 a 6 y será omitido aquí. Suponiendo que la secuencia converge, denotaremos la función límite por ϕ, de tal forma que

$$\phi(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(x). \tag{27}$$

3. ¿Cuáles son las propiedades de la función límite ϕ? En primer lugar, deseamos saber si ϕ es continua. Esto no es, sin embargo, una consecuencia

necesaria de la convergencia de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$, aun cuando cada miembro de la secuencia sea él mismo continuo. Hay muchos casos en los cuales una secuencia de funciones continuas converge a un límite discontinuo. Un ejemplo simple de este fenómeno está dado en el problema 1. Una forma de mostrar que ϕ es continua consiste en mostrar no solamente que la secuencia $\{\phi_n\}$ converge, sino que lo hace de cierta manera, conocida como convergencia uniforme. No tocaremos aquí esta cuestión sino que sólo notaremos que el argumento a que se refiere el párrafo (2) es suficiente para establecer la convergencia uniforme de la secuencia $\{\phi_n\}$ y, de aquí la continuidad de la función límite ϕ en el intervalo $|x| \leq h$.

Volvamos ahora a la Ec. (9)

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x f[t, \phi_n(t)]\, dt.$$

Permitiendo que n tienda a ∞ por ambos lados, obtenemos

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^x f[t, \phi_n(t)]\, dt. \tag{28}$$

Nos gustaría intercambiar las operaciones de integración y tomar el límite en el miembro derecho de la Ec. (28), para obtener

$$\phi(x) = \int_0^x \lim_{n\to\infty} f[t, \phi_n(t)]\, dt. \tag{29}$$

En general, tal intercambio no es permisible (ver problema 2, por ejemplo), pero una vez más el hecho de que la secuencia $\{\phi_n(x)\}$ no solamente converge, sino que además lo hace uniformemente, viene al rescate y nos permite tomar la operación del límite dentro del signo de integral. En seguida deseamos tomar el límite dentro de la función f, lo cual nos daría

$$\phi(x) = \int_0^x f\left[t, \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)\right] dt \tag{30}$$

y de aquí que

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{31}$$

La afirmación de que $\lim_{n\to\infty} f[t, \phi_n(t)] = f[t, \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)]$ se sigue de la hipótesis de que f es continua en su segunda variable. Entonces la Ec. (31) es válida y la función ϕ satisface la ecuación integral (5). Por lo tanto, ϕ es también una solución del problema de valores iniciales (2).

4. ¿Puede haber otras soluciones de la ecuación integral (5) además de $y = \phi(x)$? Para mostrar la unicidad de la solución $y = \phi(x)$ podemos proceder casi completamente como en el ejemplo. Primero suponga lo contrario, eso es la existencia de otra solución $y = \psi(x)$. Es entonces posible mostrar (ver problema 7) que la diferencia $\phi(x) - \psi(x)$ satisface la desigualdad

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq A\int_0^x |\phi(t) - \psi(t)|\, dt \tag{32}$$

para $0 \leq x \leq h$ y para un número positivo adecuado A. Desde aquí el argumento es idéntico al dado en el ejemplo y concluimos que no existe otra solución al problema de valores iniciales (2) que la obtenida por el método de aproximaciones sucesivas.

PROBLEMAS

1. Dado $\phi_n(x) = x^n$ para $0 \leq x \leq 1$; mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Este ejemplo muestra que una secuencia de funciones continuas puede converger a una función límite que es discontinua.

2. Considérese la secuencia $\phi_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$ $0 \leq x \leq 1$.

a) Mostrar que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 0$ para cada x en $0 \leq x \leq 1$ y de aquí que

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)\, dx = 0.$$

b) Mostrar que $\int_0^1 2nxe^{-nx^2}\, dx = 1 - e^{-n}$ y de aquí que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 2nxe^{-nx^2}\, dx = 1.$$

Este ejemplo muestra que no es necesariamente cierto que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)\, dx$$

aun cuando el $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ exista y sea continuo

En los problemas 3 a 6 indicamos cómo probar que la secuencia $\{\phi_n(x)\}$, definida por las Ecs. (6) a (9), converge.

3. Si $\partial f/\partial y$ es continua en el rectángulo D, mostrar que hay una constante positiva K tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

donde (x, y_1) y (x, y_2) son dos puntos cualesquiera en D que tienen la misma coordenada x.

Sugerencia: Use el Teorema del valor medio para derivadas parciales, y elija K de tal forma que sea el valor máximo de $|\partial f/\partial y|$ en D.

4. Si $\phi_{n-1}(x)$ y $\phi_n(x)$ son miembros de la secuencia $\{\phi_n(x)\}$, use el resultado del problema 3 para mostrar que

$$|f[x, \phi_n(x)] - f[x, \phi_{n-1}(x)]| \leq K|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)|.$$

*2.12 EL TEOREMA DE EXISTENCIA DESDE UN PUNTO DE VISTA MAS MODERNO

El Teorema de existencia y unicidad y el método de prueba antes discutido se remontan al siglo pasado. Es muy conveniente considerar este Teorema brevemente desde un punto de vista más moderno que ha ido aumentando su valor en los últimos años. Para introducir la idea principal en una forma más simple y familiar, revisaremos primero ciertas propiedades de las funciones continuas.

Lema (Propiedad del Valor Intermedio). Si la función f es continua para $a \leq x \leq b$, y $f(a) \geq 0$, $f(b) \leq 0$, entonces hay al menos un punto ξ en $a \leq x \leq b$ tal que $f(\xi) = 0$.

En otras palabras, una función continua no puede cambiar de signo sin pasar a través de cero al menos una vez; ver la figura 2.12. Puede haber por supuesto más de un punto ξ donde $f(\xi)$ es cero. Puesto en términos geométricos el Lema parece obvio, pero su prueba analítica descansa finalmente sobre una propiedad profunda (la propiedad de completitud) del sistema de números reales, que aquí omitiremos verla. El Corolario siguiente es una consecuencia inmediata de la propiedad del valor intermedio.

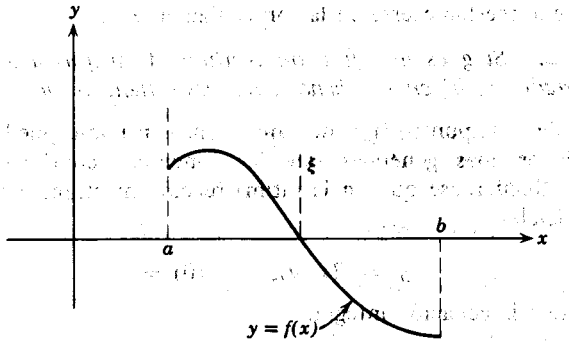

FIGURA 2.12

Corolario 1. Si la función g es continua para $a \leq x \leq b$ y si $a \leq g(x) \leq b$, entonces hay al menos un punto ξ en $a \leq x \leq b$ tal que $g(\xi) = \xi$.

Para establecer el Corolario sea $f(x) = g(x) - x$; entonces f satisface las condiciones del Lema. Hay entonces al menos un punto ξ donde $f(\xi) = 0$, y de aquí que $g(\xi) = \xi$.

Es interesante dar una interpretación geométrica de este Corolario (ver figura 2.13). La gráfica de la ecuación $y = g(x)$ está en la banda $a \leq y \leq b$, y por lo tanto debe pasar de un lado a otro de la línea $y = x$. Las coordenadas del punto de intersección dan el valor de ξ mencionado en el Corolario. Si pensamos a la función g como un mapeo o una transformación del intervalo $[a, b]$ sobre el eje x, en el intervalo $[a, b]$ sobre el eje y, entonces el punto ξ

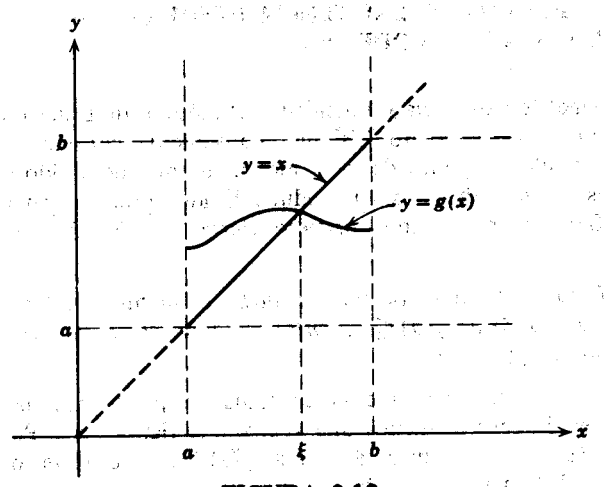

FIGURA 2.13

no se transforma, o se mapea en sí mismo. Consecuentemente, ξ es llamado un *punto fijo* de la transformación definida por g. En estos términos el Corolario puede reestablecerse en la forma siguiente.

Corolario 2. Si g es una función continua (transformación) y mapea el intervalo cerrado $[a, b]$ en sí mismo, entonces g tiene al menos un punto fijo.

La idea de un punto fijo de una transformación puede extenderse a transformaciones más generales que las funciones continuas de una sola variable real. Recuérdese que en la última sección mostramos que el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \qquad y(0) = 0 \tag{1}$$

es equivalente a la ecuación integral

$$\phi(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{2}$$

Ahora el operador indicado por el miembro derecho de la Ec. (2) puede aplicarse a cualquier función continua ϕ, ya sea que esta función sea una solución del problema de valores iniciales (1) o no. Vamos a denotar este operador por T; el resultado de esta operación es una nueva función $T\phi$, cuyo valor en un punto x está dado por

$$(T\phi)(x) = \int_0^x f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{3}$$

Hablamos de T como un operador o transformación que actúa sobre un cierto conjunto de funciones como su dominio y produce otro conjunto de funciones como su rango. Para preservar la analogía geométrica nos referiremos a esos conjuntos de funciones como "espacios" de funciones o

"espacios funcionales", y a las funciones individuales como "puntos" en el "espacio".

La ecuación integral (2), cuando se reestablece en términos del operador T definido por la Ec. (3), toma la forma

$$\phi(x) = (T\phi)(x) \qquad \text{ó} \qquad \phi = T\phi. \tag{4}$$

Por lo tanto el problema de resolver la ecuación integral es exactamente el mismo de encontrar los puntos fijos de T.

El Corolario 2 puede extenderse para tratar con operadores más generales tales como T. Es necesario primero de todo desarrollar el concepto de continuidad con respecto a tales operadores. Entonces debemos identificar un conjunto adecuado de funciones que sirvan como el dominio del operador. Una vez que esto se ha hecho, es posible mostrar que si una transformación continua mapea un conjunto adecuado de funciones en sí mismo, entonces hay al menos una función que permanece invariante y es por lo tanto un punto fijo del operador. Si el operador es el definido por la Ec. (3), entonces este punto fijo constituye una solución del problema de valores iniciales (2). De aquí que pueda considerarse un Teorema de existencia para el problema de valores iniciales como una generalización de gran alcance de la propiedad simple de funciones continuas establecida en el Corolario 1.

REFERENCIAS

Una discusión más completa de la prueba del Teorema fundamental de existencia y unicidad, puede encontrarse en muchos libros más avanzados de ecuaciones diferenciales. Dos que son razonablemente accesibles para lectores con conocimientos elementales son:

Coddington, E.A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

Brauer, F. y Nohel, J., *Ordinary Differential Equations*, Benjamin, Nueva York, 1967.

Un catálogo útil de ecuaciones diferenciales y sus soluciones está contenido en el libro siguiente:

Kamke, E., *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea, Nueva York, 1948.

Aunque este texto está en alemán, se necesita muy poco conocimiento de este idioma para consultar la lista de problemas resueltos.