Capítulo 1

Introducción

Muchos problemas importantes y significativos en ingeniería, en las ciencias físicas y en las ciencias sociales, cuando están formulados en términos matemáticos, requieren la determinación de una función que satisfaga a una ecuación que contiene derivadas de la función desconocida. Tales ecuaciones son llamadas *ecuaciones diferenciales*. Quizá el ejemplo más familiar sea la ecuación de Newton

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left[t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right] \tag{1}$$

para la posición $u(t)$ de una partícula sobre la que actúa una fuerza F, la cual puede ser función del tiempo t, la posición $u(t)$, y la velocidad $du(t)/dt$. Para determinar el movimiento de una partícula sobre la que actúa una fuerza dada F es necesario encontrar una función u que satisfaga la Ec. (1). Si la fuerza es debida a la gravedad, entonces

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -mg. \tag{2}$$

Integrando la Ec. (2) tenemos

$$\frac{du(t)}{dt} = -gt + c_1,$$

$$u(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2, \tag{3}$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Para determinar $u(t)$ completamente es necesario especificar dos condiciones adicionales, tales como la posición y la velocidad de la partícula en algún instante de tiempo. Esas condiciones pueden ser usadas para determinar las constantes c_1 y c_2.

Para desarrollar la teoría de las ecuaciones diferenciales de una manera sistemática es útil clasificar los diferentes tipos de ecuaciones. Una de las clasificaciones más obvias está basada en si la función desconocida depende de una variable independiente o de varias variables independientes. En el primer caso aparecen solamente derivadas ordinarias en la ecuación diferencial y se dice que es una *ecuación diferencial ordinaria.* En el segundo caso, las derivadas son derivadas parciales y la ecuación es llamada una *ecuación diferencial parcial.*

Dos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son, además de la Ec. (1)

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t), \tag{4}$$

para la carga $Q(t)$ de un condensador en un circuito con capacitancia C, resistencia R, inductancia L, y el voltaje $E(t)$; y la ecuación que gobierna el decaimiento en el tiempo de una cantidad $R(t)$ de una substancia radiactiva, como el radio,

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t), \tag{5}$$

donde k es una constante conocida. Ejemplos típicos de ecuaciones diferenciales parciales son: la ecuación de Laplace (1749-1827) o ecuación para el potencial

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \tag{6}$$

la ecuación para la difusión del calor o ecuación térmica

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \tag{7}$$

y la ecuación de onda

$$a^2\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Aquí la α^2 y la a^2 son ciertas constantes. La ecuación potencial, la ecuación de difusión y la ecuación de onda aparecen en una variedad de problemas en los campos de la electricidad y el magnetismo, la elasticidad, y la mecánica de fluidos. Cada una es típica de diferentes fenómenos físicos (observe los nombres), y cada una es representante de una gran clase de ecuaciones diferenciales parciales. En este libro solamente nos interesaremos en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

El *orden* de una ecuación diferencial ordinaria es el orden de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación. Por lo tanto, las Ecs. (1) y (4) de la sección anterior, son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, y la Ec. (5) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Más generalmente, la ecuación

$$F[x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)] = 0 \tag{1}$$

es una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden. La Ec. (1) representa una relación entre la variable independiente x, los valores de la función u y sus primeras n derivadas u', u'', $\ldots$, $u^{(n)}$. Es conveniente escribir, siguiendo la notación usual en la teoría de las ecuaciones diferenciales, y por $u(x)$, con y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ que significan, respectivamente, $u'(x)$, $u''(x)$, $\ldots$, $u^{(n)}(x)$. Así, la Ec. (1) se escribe como

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2}$$

Ocasionalmente, se usarán otras letras en lugar de y; el significado quedará claro dentro del contexto.

Se supondrá que siempre es posible despejar la derivada de más alto orden en una ecuación diferencial ordinaria dada, obteniendo

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{3}$$

Solamente se estudiarán ecuaciones de la forma (3). Esto es principalmente para evitar la ambigüedad que puede surgir debido a que una ecuación simple de la forma (2) puede corresponder a varias ecuaciones de la forma (3). Por ejemplo, la ecuación

$$y'^2 + xy' + 4y = 0$$

conduce a las dos ecuaciones

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 16y^2}}{2} \quad \text{o} \quad y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 - 16y^2}}{2}.$$

El hecho de que hayamos escrito la Ec. (3) no significa necesariamente que haya una función $y = \phi(x)$ que la satisfaga. Realmente ésta es una de las cuestiones que deseamos investigar. Por una *solución* de la ecuación diferencial (3) sobre el intervalo $\alpha < x < \beta$ entendemos una función ϕ tal que existan ϕ', ϕ'', $\ldots$, $\phi^{(n)}$ y satisfaga

$$\phi^{(n)}(x) = f[x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n-1)}(x)] \tag{4}$$

para cualquier x en $\alpha < x < \beta$. A menos que se especifique de otro modo, supondremos que la función f de la Ec. (3) es una función de valores reales, y estamos interesados en obtener las soluciones $y = \phi(x)$ de valores reales.

Se puede verificar fácilmente que la ecuación de primer orden

$$\frac{dR}{dt} = -kR \tag{5}$$

tiene la solución

$$R = \phi(t) = ce^{-kt}, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{6}$$

donde c es una constante arbitraria. Similarmente, las funciones $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ son soluciones de

$$y'' + y = 0 \tag{7}$$

para toda x.

Una pregunta que puede venir a la mente es si hay otras soluciones de la Ec. (5) además de las dadas por la Ec. (6), y si habrá otras soluciones de la Ec. (7) además de $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$. Otra pregunta que puede ocurrirse aún antes es la siguiente: ¿Dada una ecuación de la forma (3), cómo sabemos si tiene una solución? Esta es la pregunta acerca de la *existencia* de una solución. No todas las ecuaciones diferenciales tienen solución; ni es la pregunta puramente matemática. Si un problema físico que tiene sentido está formulado matemáticamente en forma correcta como una ecuación diferencial, entonces el problema matemático deberá tener una solución. En este sentido un científico o ingeniero tiene una guía para comprobar la validez de su formulación matemática.

En segundo lugar, suponiendo que una ecuación dada tiene una solución, ¿tendrá otras soluciones? En tal caso ¿qué tipo de condiciones adicionales deben ser especificadas para encontrar una solución particular? Esta es la pregunta acerca de la *unicidad*. Nótese que hay una infinidad de soluciones para la ecuación de primer orden (5) correspondientes a una infinidad de modos de escoger la constante c en la Ec. (6). Si R se especifica para algún tiempo t, esa condición determinará un valor para c; aún así, no obstante, no sabemos si hay otras soluciones para la Ec. (5) que también tengan prescrito el valor R al tiempo t predeterminado. Las cuestiones de existencia y unicidad son cuestiones difíciles; éstas y otras cuestiones relacionadas con éstas, se discutirán cuando sigamos adelante.

Una tercera pregunta, más práctica es: ¿Dada una ecuación diferencial de la forma (3), cómo determinamos realmente una solución? Podemos notar que si encontramos una solución de la ecuación dada, tenemos contestada al mismo tiempo la cuestión de la existencia de una solución. En cambio, sin conocer la teoría de la existencia, podemos, por ejemplo, usar una gran máquina computadora para encontrar una aproximación a una "solución" que no existe. Aunque sepamos que una solución existe, puede ser que la solución no sea expresable en términos de las funciones elementales usuales: funciones polinomiales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, e hiperbólicas. Por desgracia ésta es la situación para la mayoría de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, antes de considerar problemas difíciles, primero es necesario dominar algo de la teoría elemental de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ecuaciones Lineales y No Lineales. Una segunda clasificación importante de las ecuaciones diferenciales ordinarias tiene que ver con que si las ecuaciones son lineales o no lineales. La ecuación diferencial

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

se dice que es *lineal* si F es una función lineal en las variables $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Por lo tanto la ecuación diferencial ordinaria lineal general de orden n es

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x). \tag{8}$$

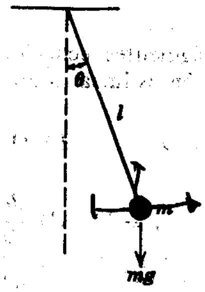

FIGURA 1.1

Las Ecs. (2), (4) y (5) de la sección anterior, son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Una ecuación que no sea de la forma (8) es una ecuación *no lineal.* Por ejemplo, el ángulo θ que forma un péndulo oscilante, de longitud l, respecto a la vertical (ver figura 1.1) satisface la ecuación no lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0. \tag{9}$$

La teoría matemática y las técnicas para resolver ecuaciones lineales están altamente desarrolladas. En contraste, para ecuaciones no lineales la situación no es tan satisfactoria. Las técnicas generales para resolver ecuaciones no lineales son bastante defectuosas, y también la teoría asociada con tales ecuaciones es más difícil que para las ecuaciones lineales. En vista de esto, es muy afortunado que muchos problemas importantes conduzcan a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales o que, al menos, en primera aproximación, a ecuaciones lineales. Por ejemplo, para el problema del péndulo, si el ángulo θ es pequeño, entonces $\operatorname{sen} \theta \cong \theta$ y la Ec. (9) puede reemplazarse por la ecuación lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Por otra parte, hay problemas físicos importantes, tales como el flujo de corriente en un tubo de electrones, en los cuales no es posible aproximar a la ecuación no lineal que gobierna el problema, con una ecuación lineal: la no linearidad es crucial.

En un texto elemental es natural enfatizar la discusión de las ecuaciones lineales. La mayor parte de este libro está dedicada por lo tanto a las ecuaciones lineales y a diferentes métodos para resolverlas. Sin embargo, una gran parte del capítulo 2 trata con ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, y los procedimientos numéricos del capítulo 7 son aplicables a ecuaciones no lineales. A través de todo el texto intentamos mostrar porqué las ecuaciones no lineales son, en general, más difíciles, y porqué muchas de las técnicas que son útiles para resolver ecuaciones lineales no pueden aplicarse para las ecuaciones no lineales.

PROBLEMAS

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales determine su orden y especifique si la ecuación es lineal o no.

a) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \operatorname{sen} x$ b) $(1 + y^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$

c) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 1$ d) $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = 0$

e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x$ f) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + x\dfrac{dy}{dx} + (\cos^2 x)y = x^3$

2. Verifique para cada una de las siguientes ecuaciones, que la función o funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial.

a) $y'' - y = 0;\ y_1(x) = e^x, y_2(x) = \cosh x$

b) $y'' + 2y' - 3y = 0;\ y_1(x) = e^{-3x},\ y_2(x) = e^x$

c) $y'''' + 4y''' + 3y = x;\ y_1(x) = x/3, y_2(x) = e^{-x} + x/3$

d) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, x > 0;\ y_1(x) = x^{1/2}, y_2(x) = x^{-1}$

e) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, x > 0;\ y_1(x) = x^{-2}, y_2(x) = x^{-2}\ln x$

f) $y'' + y = \sec x, 0 < x < \pi/2;\ y = \phi(x) = (\cos x)\ln\cos x + x \operatorname{sen} x$

g) $y' - 2xy = 1;\ y = \phi(x) = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}$

3. Determine para qué valores de r tienen soluciones de la forma $y = e^{rx}$, cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

a) $y' + 2y = 0$ b) $y'' - y = 0$

c) $y'' + y' - 6y = 0$ d) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

4. Determine para qué valores de r tienen soluciones de la forma $y = x^r$ cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0, \quad x > 0$

b) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0, \quad x > 0$