Traducido del ruso por V. Fernández

Impreso en la URSS

На испанском языке

Indice

Pág.

Prefacio 13

CAPÍTULO PRIMERO

Cálculo diferencial de las funciones de una variable

§ 1. Conjuntos y funciones. Símbolos lógicos 15

1.1. Conjuntos. Operaciones sobre conjuntos 15
1.2.* Funciones 17
1.3.* Conjuntos finitos y números naturales. Sucesiones 21
1.4. Símbolos lógicos 22

§ 2. Números reales. Conjuntos numéricos 24

2.1. Propiedades de los números reales 24
2.2.* Propiedades de la adición y de la multiplicación 27
2.3.* Propiedad de ordenamiento 33
2.4.* Propiedad de continuidad de los números reales 36
2.5.* Cortaduras en el conjunto de los números reales 36
2.6.* Potencias racionales de los números reales 40

§ 3. Conjuntos numéricos 42

3.1. Recta numérica extendida 42
3.2. Intervalos de números reales. Entornos 43
3.3. Conjuntos acotados y no acotados 45
3.4. Cotas superior e inferior de los conjuntos de números 47
3.5. Principio de Arquímedes 51
3.6. Principio de los segmentos encajados 52

§ 4. Límite de una sucesión 56

4.1. Definición de límite de una sucesión 56
4.2. Límites infinitos 60
4.3. Propiedades más sencillas del límite de una sucesión 62
4.4. Acotación de las sucesiones convergentes 65
4.5. Sucesiones monótonas 66
4.6. Teorema de Bolzano — Weierstrass 69
4.7. Criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones 71
4.8. Sucesiones infinitesimales 72
4.9. Propiedades de los límites relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las sucesiones 74
4.10. Representación de los números reales por fracciones decimales infinitas 82
4.11.* Numerabilidad de los números racionales. Innumerabilidad de los números reales 88
4.12.* Límites superior e inferior de las sucesiones 92

			Pág.
§ 5.	Límite y continuidad de las funciones		94
	5.1.	Funciones reales	94
	5.2.	Formas de representar funciones	96
	5.3.	Funciones elementales y su clasificación	100
	5.4.	Primera definición de límite de una función	101
	5.5	Funciones continuas	108
	5.6.	Condiciones de la existencia del límite de una función	111
	5.7.	Segunda definición de límite de una función	112
	5.8.	Límite de una función por la unión de conjuntos	116
	5.9.	Límites unilaterales y continuidad unilateral	117
	5.10.	Propiedades de los límites de las funciones	120
	5.11.	Funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes	124
	5.12.	Diferentes formas de escritura de la continuidad de una función en un punto	126
	5.13.	Clasificación de los puntos de discontinuidad de una función	128
	5.14.	Límites de las funciones monótonas	130
	5.15.	Criterio de Cauchy de existencia del límite de una función	135
	5.16.	Límite y continuidad de la composición de funciones	136
§ 6.	Propiedades de las funciones continuas sobre los intervalos		139
	6.1.	Acotación de las funciones continuas. Valores extremales	139
	6.2.	Valores intermedios de las funciones continuas	141
	6.3.	Funciones inversas	143
§ 7.	Continuidad de las funciones elementales		149
	7.1.	Polinomios y funciones racionales fraccionales	149
	7.2.	Funciones exponenciales, logarítmicas y potenciales	150
	7.3.	Funciones trigonométricas y trigonométricas inversas	157
	7.4.	Continuidad de funciones elementales	158
§ 8.	Comparación de funciones. Cálculo de los límites		159
	8.1.	Algunos límites notables	159
	8.2.	Comparación de funciones	163
	8.3.	Funciones equivalentes	171
	8.4.	Método de extracción de la parte principal de la función y su aplicación en el cálculo de límites	174
§ 9.	Derivada y diferencial		177
	9.1.	Definición de derivada	177
	9.2.	Diferencial de una función	179
	9.3.	Sentido geométrico de la derivada y la diferencial	184
	9.4.	Sentido físico de la derivada y de la diferencial	187
	9.5.	Reglas del cálculo de las derivadas, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las funciones	190
	9.6.	Derivada de la función inversa	193
	9.7.	Derivada y diferencial de una función compuesta	196
	9.8.	Funciones hiperbólicas y sus derivadas	202

			Pág.
§ 10.	Derivadas y diferenciales de órdenes superiores		204
	10.1.	Derivadas de órdenes superiores	204
	10.2.	Derivadas de órdenes superiores de la suma y del producto de funciones	206
	10.3.	Derivadas de órdenes superiores de las funciones compuestas, de las funciones inversas y de las funciones dadas en forma paramétrica	207
	10.4.	Diferenciales de órdenes superiores	210
§ 11.	Teoremas sobre el valor medio para las funciones diferenciables		212
	11.1	Teorema de Fermat	212
	11.2.	Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy sobre los valores medios	213
§ 12.	Resolución de las indeterminaciones por la regla de L'Hospital		221
	12.1.	Indeterminaciones de la forma 0/0	221
	12.2.	Indeterminaciones de la forma ∞/∞	224
§ 13.	Fórmula de Taylor		231
	13.1.	Deducción de la fórmula de Taylor	231
	13.2.	El polinomio de Taylor como el polinomio de mejor aproximación de una función en un entorno del punto dado	234
	13.3.	Ejemplos de desarrollo según la fórmula de Taylor	236
	13.4.	Cálculo de límites con ayuda de la fórmula de Taylor (método de selección de la parte principal)	240
§ 14.	Investigación del comportamiento de las funciones		242
	14.1.	Criterio de monotonía de las funciones	242
	14.2.	Determinación de los valores máximos y mínimos de la función	243
	14.3.	Convexidad y puntos de inflexión	251
	14.4.	Asíntotas	258
	14.5.	Construcción de gráficas de funciones	260
§ 15.	Función vectorial		270
	15.1.	Concepto de límite y continuidad para una función vectorial	270
	15.2.	Derivada y diferencial de una función vectorial	272
§ 16.	Longitud de curva		276
	16.1.	Concepto de curva	276
	16.2.*	Curvas dadas paramétricamente	279
	16.3.	Orientación de una curva. Arco de curva. Suma de curvas. Representación implícita de curvas	283
	16.4.	Tangente a la curva. Sentido geométrico de la derivada de una función vectorial	284
	16.5.	Longitud del arco de una curva	287
	16.6.	Curvas planas	293
	16.7.	Sentido físico de la derivada de una función vectorial	295

Pág

§ 17. Curvatura de una curva 296

17.1. Dos lemas. Componentes radial y transversal de la velocidad 296
17.2. Definición de curvatura de una curva y su cálculo 299
17.3. Normal principal. Plano osculador 301
17.4. Centro de curvatura y evoluta de la curva 304
17.5. Fórmulas para la curvatura y la evoluta de una curva plana 304

CAPÍTULO SEGUNDO

Cálculo diferencial de funciones de varias variables

§ 18. Conjuntos en el plano y en el espacio 309

18.1. Entornos de los puntos. Límites de las sucesiones de puntos 309
18.2. Distintos tipos de conjuntos 319
18.3. Compactos 329
18.4. Espacios vectoriales de varias dimensiones 334

§ 19. Límite y continuidad de funciones de varias variables 339

19.1. Funciones de varias variables 339
19.2. Límite de una función y su continuidad 340
19.3. Funciones continuas 346
19.4. Propiedades de los límites de las funciones de varias variables. Propiedades de las funciones continuas 347
19.5. Límite y continuidad de la composición de funciones 348
19.6. Teoremas acerca de las funciones continuas sobre los conjuntos 351
19.7. Continuidad uniforme de las funciones. Módulo de continuidad 353

§ 20. Derivadas parciales. Diferenciabilidad de las funciones de varias variables 359

20.1. Derivadas parciales y diferenciales parciales 359
20.2. Diferenciación de funciones en un punto 362
20.3. Diferenciación de la función compuesta 369
20.4. Invariancia de la forma de la primera diferencial con respecto a la elección de las variables. Regla de cálculo de las diferenciales 371
20.5. Sentido geométrico de las derivadas parciales y de la diferencial total 377
20.6. Gradiente de la función 379
20.7. Derivada respecto a una dirección 380
20.8. Ejemplo de la investigación de funciones de dos variables 385

§ 21. Derivadas parciales y diferenciales de órdenes superiores 387

21.1. Derivadas parciales de órdenes superiores 387
21.2. Diferenciales de órdenes superiores 387

Pág.

CAPÍTULO TERCERO

Cálculo integral de las funciones de una variable

§ 22. Definición y propiedades de la integral indefinida 396

22.1. Primitiva e integral indefinida 396
22.2. Integrales de tabla 400
22.3. Integración por sustitución (cambio de variable) 402
22.4. Integración por partes 405

§ 23. Algunos conocimientos sobre números complejos y polinomios 407

23.1. Números complejos 407
23.2* Teoría formal de los números complejos 412
23.3. Algunos conceptos del análisis en la región de los números complejos 413
23.4. Descomposición de polinomios en factores 416
23.5* Máximo común divisor de polinomios 419
23.6. Descomposición de las fracciones racionales propias en fracciones elementales 423

§ 24. Integración de fracciones racionales 429

24.1. Integración de fracciones racionales elementales 429
24.2. Caso general 431
24.3* Método de Ostrogradski 433

§ 25. Integración de algunas irracionalidades 438

25.1. Observaciones previas 438
25.2. Integrales del tipo $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx$ 439
25.3. Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Sustituciones de Euler 441
25.4. Integrales del binomio diferencial 443
25.5 Integrales del tipo $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$ 445

§ 26. Integración de algunas funciones trascendentes 447

26.1. Integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ 447
26.2. Integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ 449
26.3. Integrales del tipo $\int \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x\, dx$ 450
26.4. Integrales de funciones trascendentes calculables integrando por partes 451
26.5. Integrales del tipo $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$ 453
26.6. Observaciones sobre las integrales no expresables a través de funciones elementales 453

§ 27. Integral definida 455

27.1. Definición de la integral según Riemann 455

		Pág
27.2.	Acotación de una función integrable	459
27.3.	Sumas superiores e inferiores de Darboux. Integrales superior e inferior de Darboux	461
27.4.	Condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad	464
27.5.	Integrabilidad de las funciones continuas y monótonas	465
§ 28.	Propiedades de las funciones integrables	467
28.1.	Propiedades de la integral definida	467
28.2.	Primer teorema sobre el valor medio para la integral definida	479
28.3.	Integrabilidad de las funciones continuas a trozos	483
28.4.*	Desigualdades integrales de Hölder y Minkowski	485
§ 29.	Integral definida con límite superior variable	487
29.1.	Continuidad de la integral respecto al límite superior	487
29.2.	Diferenciabilidad de la integral respecto al límite superior. Existencia de la primitiva de una función continua	488
29.3.	Fórmula de Newton — Leibniz	491
§ 30.	Fórmula del cambio de variable en la integral e integración por partes	495
30.1.	Cambio de variable	495
30.2.	Integración por partes	498
30.3.*	Segundo teorema sobre el valor medio para la integral definida	501
30.4.	Integral de una función vectorial	503
§ 31.	Medida de los conjuntos abiertos planos	505
31.1.	Definición de medida (área) de conjuntos abiertos	505
31.2.	Propiedades de la medida de los conjuntos abiertos	508
§ 32.	Algunas aplicaciones geométricas y físicas de la integral definida	512
32.1.	Cálculo de las áreas	512
32.2.	Volumen de un cuerpo de revolución	519
32.3.	Cálculo de la longitud de curva	521
32.4.	Area de una superficie de revolución	526
32.5	Trabajo de una fuerza	529
32.6.	Cálculo de los momentos estáticos y de las coordenadas del centro de gravedad de una curva	530
§ 33.	Integrales impropias	533
33.1.	Definición de integrales impropias	533
33.2.	Fórmulas de cálculo integral para las integrales impropias	540
33.3.	Integrales impropias de funciones no negativas	545
33.4.	Criterio de Cauchy de la convergencia de integrales impropias	552
33.5.	Integrales absolutamente convergentes	553
33.6.	Análisis de la convergencia de las integrales	557
§ 34.*	Comportamiento asintótico de las integrales con límites de integración variables	562

CAPÍTULO CUARTO

Series

		Pág.
§ 35.	Series numéricas	569
35.1.	Definición de serie y su convergencia	569
35.2.	Propiedades de las series convergentes	572
35.3.	Criterio de Cauchy de la convergencia de la serie	574
35.4.	Series con términos no negativos	575
35.5.	Criterio de comparación para las series con términos no negativos. Método de selección de la parte principal del término de la serie	578
35.6.	Criterios de D'Alembert y de Cauchy para series con términos no negativos	582
35.7.	Criterio integral de convergencia de las series con términos no negativos	585
35.8.*	Desigualdades de Hölder y de Minkowski para las sumas finitas e infinitas	587
35.9.	Series de términos de signo variable	589
35.10.	Series absolutamente convergentes. Aplicación de las series absolutamente convergentes a la investigación de la convergencia de las series arbitrarias	592
35.11.	Criterios de D'Alembert y Cauchy para series numéricas arbitrarias	599
35.12.	Series convergentes que no convergen absolutamente. Teorema de Riemann	600
35.13.	Transformación de Abel. Criterios de convergencia de Dirichlet y de Abel	604
35.14.*	Comportamiento asintótico de los restos de las series convergentes y de las sumas parciales de algunas series divergentes	608
35.15.	Sobre la sumabilidad de series por el método de las medias aritméticas	612
§ 36.	Sucesiones funcionales y series de funciones	614
36.1.	Convergencia de sucesiones funcionales y series de funciones	614
36.2.	Convergencia uniforme de las sucesiones funcionales	617
36.3.	Series de funciones uniformemente convergentes	624
36.4.	Propiedades de las series y sucesiones uniformemente convergentes	634
§ 37.	Series de potencias	642
37.1.	Radio de convergencia y círculo de convergencia de una serie de potencias	642
37.2.*	Fórmula de Cauchy — Hadamard para el radio de convergencia de una serie de potencias	649
37.3.	Funciones analíticas	651
37.4.	Funciones analíticas reales	653
37.5.	Desarrollo de funciones en series de potencias. Diferentes formas de escritura del término residual de la fórmula de Taylor	656

		Pág.
37.6.	Desarrollo de las funciones elementales en series de Taylor	661
37.7.	Métodos de desarrollo de las funciones en series de potencia	663
37.8.	Fórmula de Stirling	674
37.9*	Fórmula y serie de Taylor para las funciones vectoriales	677
37.10*	Series de potencias asintóticas	679
37.11*	Propiedades de las series asintóticas de potencias	684
§ 38*	Series múltiples	689
38.1.	Series numéricas múltiples	689
38.2.	Series de funciones múltiples	696
	Indice alfabético de autores	700
	Indice alfabético de materias	701

Prefacio

En el presente Curso de análisis matemático se exponen tanto los métodos clásicos tradicionales, como los modernos que han surgido en el transcurso de las últimas décadas. Los números reales se introducen axiomáticamente. Este camino permite exponer la información sobre los números, imprescindible para el análisis, en una forma más completa y compacta. Al mismo tiempo, dicho camino parece ser más perfecto desde el punto de vista lógico, pues, al recurrir a otros métodos de construcción de la teoría de números reales que se llaman corrientemente "constructivos" (cuando por base se toman fracciones decimales infinitas o secciones en el dominio de números racionales, o bien las clases de sucesiones fundamentales equivalentes de números racionales), de todas formas resulta necesario introducir el axioma de existencia (no contradicción) de un conjunto de números reales, en ausencia de los cuales las construcciones que se realizan están privadas de una terminación lógica. Por eso es más fácil, partiendo de la definición axiomática de los números reales, pasar en seguida al estudio del análisis matemático en el sentido propio de la palabra.

La exposición del material en el Curso se efectúa, en lo fundamental, sobre la base del método deductivo: todos los conceptos introducidos se estudian al principio, cuando sea posible, en las situaciones más simples y sólo después de haberse realizado su consideración detallada, sigue la generalización ulterior. Así, por ejemplo, el concepto de límite se estudia primeramente para las sucesiones numéricas y después, para las funciones de una sola variable, a continuación se introduce el concepto de límite según un conjunto en el espacio euclídeo, el de límite de las sumas integrales y, por fin, todo termina con la consideración de la noción general de límite según un filtro en un espacio topológico.

Los teoremas a demostrar no siempre se enuncian con la generalización máxima; a veces, con el fin de aclarar mejor la esencia de un problema que se considera, como también la idea de la demostración, la consideración se realiza sólo para las funciones suficientemente suaves. Tal punto de vista se justifica también por lo que, debido a la densidad de las funciones suaves en los espacios funcionales correspondientes, varios teoremas demostrados para estas funciones pueden extenderse, mediante un procedimiento único, consistente en el paso límite, a clases más amplias de funciones. Lamentablemente, esta idea no puede ser realizada hasta el fin sin que aumente considerablemente el volumen del libro, a consecuencia de lo cual la cuestión acerca de la densidad de las funciones "buenas" en diversos espacios funcionales se ha considerado en el Curso sólo para los casos más sencillos.

Una gran atención se presta en el libro a la resolución de problemas con ayuda de procedimientos basados en la teoría que se expone. Además, se recomiendan al lector, a título de trabajo individual, toda una serie de ejercicios y problemas. La resolución de problemas es muy útil para la asimilación activa del análisis matemático. No obstante, el surtido de los mismos, en lo que se refiere a su volumen, no puede sustituir ni mucho menos una recopilación de problemas. Algunos de los problemas ofrecidos son bastante difíciles. La resolución de éstos no es necesaria para dominar el material, exigiendo, sin embargo, mucho tiempo. Están asociados, por regla general, con hechos matemáticos interesantes y suficientemente profundos, para cuya exposición detallada faltaría lugar en el libro. La numeración de los ejercicios en el libro viene por separado en cada párrafo; la de los problemas, lo mismo que la de las figuras, es continua.

La exposición del análisis matemático se lleva a cabo a un nivel accesible para un amplio círculo de estudiantes. Las cuestiones que no integran los programas de matemáticas superiores para las especialidades de ingeniería y están dedicadas a un estudio más profundo de aquellos apartados del análisis que son indispensables para los estudiantes de las especialidades físico-matemáticas, se marcan con un asterisco. Gracias a esto, el manual puede utilizarse en los centros de enseñanza superior de distinto nivel de educación matemática. Una parte considerable del material reflejado en el libro se viene leyendo por el autor durante varios años en el Instituto físico-técnico de Moscú como un curso de conferencias del análisis matemático.

Especialmente para esta edición del manual en lengua española, el autor escribió de nuevo algunos de sus apartados. Esto se refiere, ante todo, a la exposición de la teoría de números reales, la de límite de las funciones y la teoría de integración de las funciones de una sola variable. La introducción de unas concepciones más generales en la teoría del límite e integración de las funciones hizo posible poner al lector al tanto de los problemas en consideración sin perjudicar la claridad, evidencia y sencillez de la exposición.

Autor

CAPÍTULO PRIMERO

CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

§ 1. CONJUNTOS Y FUNCIONES. SÍMBOLOS LÓGICOS

1.1. CONJUNTOS. OPERACIONES SOBRE CONJUNTOS

En la matemática, los conceptos de conjunto, elemento y pertenencia de un elemento a un conjunto son conceptos primarios. Los conjuntos serán simbolizados con letras mayúsculas del alfabeto latino o de cualquier otro alfabeto: A, B, ..., X, Y, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., y los elementos de los conjuntos con letras minúsculas: a, b, ..., x, y, ..., α, β, ... Si a es un elemento del conjunto A, entonces se escribe que $a \in A$ (se lee "a pertenece al conjunto A") o, lo que significa lo mismo $A \ni a$. Si a no pertenece al conjunto A, entonces se escribe $a \notin A$ ó $A \not\ni a$.

Los conjuntos A y B se llaman *iguales*, si están formados por los mismos elementos. De esta manera, la igualdad $A = B$ significa, con respecto a los conjuntos, que un mismo conjunto está simbolizado con letras diferentes A y B.

La notación $A = \{a, b, c, \dots\}$ significa que A está formado por los elementos a, b, c y posiblemente por algunos dados de uno u otro modo.

Si el conjunto A está formado por los elementos a_α, donde α recorre algún conjunto de índices $\mathfrak{A}$, entonces escribimos $A = \{a_\alpha\}$ o más detalladamente $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ o, si esto no conlleva a errores, simplemente $A = \{a\}$. Si el conjunto A está compuesto por elementos que poseen determinada propiedad, entonces escribiremos $A = \{a: \dots\}$, donde en las llaves después de los dos puntos está escrita la propiedad señalada de los elementos del conjunto A. Por ejemplo, si a y b son dos números reales tales que $a \leqslant b$ y por $[a, b]$ se simboliza el conjunto de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la definición de este conjunto (segmento) con ayuda de los símbolos introducidos podemos escribirla de la siguiente manera:

$$[a, b] = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Para mayor comodidad se introduce el concepto de conjunto vacío, el cual se representa por el símbolo $\varnothing$. Por definición el conjunto vacío no contiene elementos.

Si cada elemento del conjunto A es elemento del conjunto B entonces se dice que el conjunto A es parte del conjunto B, o que A es *subconjunto* del conjunto B, y se escribe $A \subset B$ (se lee: el conjunto A se contiene en el conjunto B) o lo que es lo mismo, $B \supset A$ (se lee: el conjunto B contiene el conjunto A).

por regla general, con hechos matemáticos interesantes y suficientemente profundos, para cuya exposición detallada faltaría lugar en el libro. La numeración de los ejercicios en el libro viene por separado en cada párrafo; la de los problemas, lo mismo que la de las figuras, es continua.

La exposición del análisis matemático se lleva a cabo a un nivel accesible para un amplio círculo de estudiantes. Las cuestiones que no integran los programas de matemáticas superiores para las especialidades de ingeniería y están dedicadas a un estudio más profundo de aquellos apartados del análisis que son indispensables para los estudiantes de las especialidades físico-matemáticas, se marcan con un asterisco. Gracias a esto, el manual puede utilizarse en los centros de enseñanza superior de distinto nivel de educación matemática. Una parte considerable del material reflejado en el libro se viene leyendo por el autor durante varios años en el Instituto físico-técnico de Moscú como un curso de conferencias del análisis matemático.

Especialmente para esta edición del manual en lengua española, el autor escribió de nuevo algunos de sus apartados. Esto se refiere, ante todo, a la exposición de la teoría de números reales, la de límite de las funciones y la teoría de integración de las funciones de una sola variable. La introducción de unas concepciones más generales en la teoría del límite e integración de las funciones hizo posible poner al lector al tanto de los problemas en consideración sin perjudicar la claridad, evidencia y sencillez de la exposición.

Autor

CAPÍTULO PRIMERO

CÁLCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

§ 1. CONJUNTOS Y FUNCIONES. SÍMBOLOS LÓGICOS

1.1. CONJUNTOS. OPERACIONES SOBRE CONJUNTOS

En la matemática, los conceptos de conjunto, elemento y pertenencia de un elemento a un conjunto son conceptos primarios. Los conjuntos serán simbolizados con letras mayúsculas del alfabeto latino o de cualquier otro alfabeto: A, B, ..., X, Y, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., y los elementos de los conjuntos con letras minúsculas: a, b, ..., x, y, ..., α, β, ... Si a es un elemento del conjunto A, entonces se escribe que $a \in A$ (se lee "a pertenece al conjunto A") o, lo que significa lo mismo $A \ni a$. Si a no pertenece al conjunto A, entonces se escribe $a \notin A$ ó $A \not\ni a$.

Los conjuntos A y B se llaman *iguales*, si están formados por los mismos elementos. De esta manera, la igualdad $A = B$ significa, con respecto a los conjuntos, que un mismo conjunto está simbolizado con letras diferentes A y B.

La notación $A = \{a, b, c, \ldots\}$ significa que A está formado por los elementos a, b, c y posiblemente por algunos dados de uno u otro modo.

Si el conjunto A está formado por los elementos a_α, donde α recorre algún conjunto de índices $\mathfrak{A}$, entonces escribimos $A = \{a_\alpha\}$ o más detalladamente $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ o, si esto no conlleva a errores, simplemente $A = \{a\}$. Si el conjunto A está compuesto por elementos que poseen determinada propiedad, entonces escribiremos $A = \{a: \ldots\}$, donde en las llaves después de los dos puntos está escrita la propiedad señalada de los elementos del conjunto A. Por ejemplo, si a y b son dos números reales tales que $a \leqslant b$ y por $[a, b]$ se simboliza el conjunto de todos los números reales x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la definición de este conjunto (segmento) con ayuda de los símbolos introducidos podemos escribirla de la siguiente manera:

$$[a, b] = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Para mayor comodidad se introduce el concepto de conjunto vacío, el cual se representa por el símbolo $\varnothing$. Por definición el conjunto vacío no contiene elementos.

Si cada elemento del conjunto A es elemento del conjunto B entonces se dice que el conjunto A es parte del conjunto B, o que A es *subconjunto* del conjunto B, y se escribe $A \subset B$ (se lee: el conjunto A se contiene en el conjunto B) o lo que es lo mismo, $B \supset A$ (se lee: el conjunto B contiene el conjunto A).

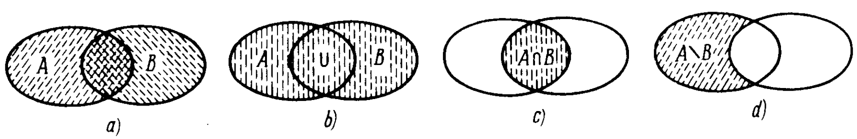


FIG. 1

Ejercicio. Demuéstrese que las inclusiones $A \subset B$ y $B \subset A$ se cumplen simultáneamente si y sólo si $A = B$.

De la definición del subconjunto se deduce que $A \subset A$ cualquiera que sea el conjunto A; se acostumbra considerar también por definición, que el conjunto vacío es subconjunto de cada conjunto: $\varnothing \subset A$. Si A es cualquier conjunto, entonces $\varnothing$ y A se llamarán *subconjuntos impropios*; si $A \subset B$ y existe un elemento $x \in B$ tal que $x \notin A$, entonces el conjunto A se llama *subconjunto propio* del conjunto B.

Si están dados dos conjuntos A y B (fig. 1, *a*), entonces por $A \cup B$ se simboliza el conjunto que se llama su *unión* o *suma* y cada elemento del cual pertenece al menos a uno de los conjuntos A y B (fig. 1, *b*). De esta forma, si algún elemento pertenece al conjunto $A \cup B$, entonces pertenece o bien sólo al conjunto A, o bien sólo al conjunto B, o bien pertenece a ambos conjuntos.

Por $A \cap B$ se simboliza el conjunto llamado intersección de los conjuntos A y B, la cual está formada por los elementos pertenecientes simultáneamente tanto al conjunto A como al conjunto B (fig. 1, *c*).

Por $A \setminus B$ se simboliza el conjunto llamado *diferencia* de los conjuntos A y B y compuesto por los elementos que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B (fig. 1, *d*). Se dice también que $A \setminus B$ se obtiene del conjunto A restando del mismo el conjunto B.

Si $B \subset A$, entonces la diferencia $A \setminus B$ se llama *complemento* del conjunto B hasta el conjunto A o complemento de B respecto a A.

Si está dado un sistema de conjuntos A_α (los términos: conjunto, sistema, colección, familia, clase serán utilizados como sinónimos), donde los valores de α forman una colección de índices de $\mathfrak{A}$, entonces se llama *unión* $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ *de los conjuntos* A_α el conjunto donde cada elemento pertenece al menos a uno de los conjuntos dados A_α, es decir, la condición $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ es equivalente a la siguiente: existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ tal que $x \in A_\alpha$.

Se llama *intersección de los conjuntos* A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ el conjunto denotado por

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha,$$

tal que cada uno de sus elementos pertenece a todos los conjuntos A_α, es decir, la condición $x \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ significa: para todos los $\alpha \in \mathfrak{A}$ tiene lugar $x \in A_\alpha$.

Si $A_\alpha \subset E$ *para todos los* $\alpha \in \mathfrak{A}$, *entonces*

$$E \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha), \tag{1.1}$$

$$E \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha) \tag{1.2}$$

Demostremos, por ejemplo, la igualdad (1.1). Si $x \in E \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, entonces, por la definición de diferencia de conjuntos, $x \in E$ y $x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$. A su vez esto, por la definición de unión de conjuntos, es equivalente a que $x \in E$ y para todos los $\alpha \in A_\alpha$ tiene lugar la relación $x \notin A_\alpha$. Esto, de nuevo por la definición de diferencia de conjuntos, es equivalente a la afirmación de que para todos los $\alpha \in \mathfrak{A}$ tenemos $x \in E \setminus A_\alpha$. Finalmente, la última afirmación por la definición de intersección de conjuntos, significa que $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha)$. Así pues, las condiciones $x \in E \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ y $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} (E \setminus A_\alpha)$ son equivalentes, como consecuencia de lo cual se cumple la igualdad (1.1). La igualdad (1.2) se demuestra análogamente.

Con razonamientos similares se demuestra la validez de las siguientes igualdades para conjuntos A, B y C cualesquiera:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

En el siguiente punto 1.2* se analiza el concepto de función, y el punto 1.3* será dedicado a los conceptos de conjuntos finitos y sucesión. Se puede prescindir de los puntos y párrafos del curso señalados con asteriscos en una primera lectura y regresar a ellos sólo en caso de necesidad. En particular, para la comprensión del material posterior es suficiente tener una noción sobre la función — que se da en el curso de matemática elemental — en tanta correspondencia determinada entre los elementos de dos conjuntos. En este caso, el concepto de correspondencia se puede entender como un concepto primario.

1.2.* FUNCIONES

Diremos que *el número de elementos del conjunto A es igual a la unidad* 1, si en él se tiene un elemento $a \in A$ y no hay otros (dicho de otro modo, si del conjunto A se resta el conjunto formado por el elemento a, entonces se obtiene el conjunto vacío).

El conjunto A se llama *conjunto de 2 (dos) elementos*, si al restar de A el conjunto compuesto sólo por un elemento $a \in A$, es decir, el conjunto, cuyo número de elementos es igual a 1, resulta un conjunto cuyo número de elementos será también igual a la unidad. No es difícil demostrar, que esta definición no depende de la elección del elemento señalado $a \in A$, es decir, si $a \in A$ y $b \in A$, y además, $A \setminus \{a\}$ está formado por un elemento, entonces el conjunto $A \setminus \{b\}$ también está compuesto por un elemento (precisamente por el elemento a).

Sean dados los conjuntos $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$. El conjunto formado por dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$, se llama *par* $\{x, y\}$ de los elementos x, y.

El par de la forma $\{x, \{x, y\}\}$, donde $x \in X$, $y \in Y$ y $\{x, y\}$ es un par de elementos x e y se llama *par ordenado* de los elementos x e y. El elemento x se llama primer elemento del par ordenado $\{x, \{x, y\}\}$, y el elemento y, segundo. El par ordenado $\{x,$

$\{x, y\}\}$ se denota por (x, y). En el futuro por par se entenderá habitualmente par ordenado.

El conjunto de todos los pares ordenados (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, se llama *producto de los conjuntos* X e Y y se denota por $X \times Y$. En ese caso no se supone que necesariamente el conjunto X sea diferente del conjunto Y, es decir, es posible el caso cuando $X = Y$.

Definición 1. *Cualquier conjunto* $f = \{(x, y)\}$ *de pares ordenados* (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, *tal que, para pares cualesquiera* $(x', y') \in f$ *y* $(x'', y'') \in f$ *de la condición* $y' \neq y''$ *se deduce que* $x' \neq x''$, *se llama función, o lo que es lo mismo, aplicación.*

Junto con los términos de "función' y "aplicación", en determinadas situaciones se utilizan los términos similares *transformación*, *morfismo* y *correspondencia.*

Las funciones se donotarán por diferentes letras: $f, g, \ldots, F, G, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$.

El conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados (x, y) de cierta función f se llama *dominio* (o *conjunto de definición*) de esta función y se denota por X_f, y el conjunto de todos los segundos elementos se llama *conjunto de sus valores* y se denota por Y_f. El mismo conjunto de pares ordenados $f = \{(x, y)\}$ analizado como subconjunto del producto $X \times Y$, se llama *gráfica de la función* f.

El elemento $x \in X_f$ se llama *argumento de la función* f o variable independiente, el elemento $y \in Y$, *variable dependiente.*

Si $f = \{(x, y)\}$ es una función (aplicación), se escribe $f : X_f \to Y$ y se dice, que f aplica el conjunto X_f en el conjunto Y. En caso de que $X = X_f$, se escribe simplemente $f : X \to Y$.

Si $f : X \to Y$ es una función, es decir, un conjunto de pares ordenados $f = \{(x, y)\}$, $x \in X$, $y \in Y$, que satisfacen las condiciones de la definición 1, y $(x, y) \in f$, entonces se escribe $y = f(x)$ (algunas veces simplemente $y = fx$) o $f : x \to y$, y se dice que la función f pone en correspondencia al elemento x el elemento y (la aplicación f aplica el elemento x en el elemento y) o lo que es lo mismo, el elemento y corresponde al elemento x. En este caso también se dice que el elemento y es el valor de la función f en el punto x, o la imagen del elemento x en la aplicación f.

Junto con el símbolo $f(x_0)$, para representar el valor de la función f en el punto x_0, se utiliza también la notación $f(x)|_{x=x_0}$.

Dado $y \in Y$, el conjunto de todos los elementos $x \in X$, tales que $f(x) = y$, se llama *preimagen del* elemento y y se denota por $f^{-1}(y)$. De esta forma

$$f^{-1}(y) = \{x : x \in X, f(x) = y\}.$$

Es evidente que si $y \in Y \setminus Y_f$, entonces $f^{-1}(y) = \varnothing$.

A veces la misma función f se denota por el símbolo $f(x)$. La notación de la función $f : X \to Y$ y de su valor en el punto $x \in X$ por un mismo símbolo $f(x)$ no lleva a confusiones, porque en cada caso concreto siempre está claro de qué se habla.

Comúnmente la notación $f(x)$ es más cómoda que la notación $f : x \mapsto y$ en los cálculos. Por ejemplo, la notación $f(x) = x^2$ es significativamente más cómoda y sencilla de utilizar en las transformaciones analíticas que la notación $f : x \mapsto x^2$.

Sea dada una aplicación $f : X \to Y$, es decir, una aplicación del conjunto X en el conjunto Y. Dicho de otro modo, a cada elemento $x \in X$ se ha puesto en correspondencia un elemento $y \in Y$ y además único, y cada elemento $y \in Y_f \subset Y$ está puesto en correspondencia por lo menos a un elemento $x \in X$.

Si $Y = X$, entonces se dice que la aplicación f aplica el conjunto X en sí mismo.

Si $Y = Y_f$, es decir, el conjunto Y coincide con el conjunto de los valores de la función f, entonces se dice que f aplica el conjunto X sobre el conjunto Y, o que la aplicación f es una aplicación sobreyectiva, más brevemente una *sobreyección*. De esta forma, la aplicación $f : X \to Y$ es una sobreyección, si para cualesquier elemento $y \in Y$ existe al menos un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Es evidente que si $f : X \to Y$ y Y_f es el conjunto de valores de la función f, entonces $f : X \to Y_f$ es una aplicación sobreyectiva.

Si en la aplicación $f : X \to Y$ a diferentes $x \in X$ les corresponden $y \in Y$ diferentes, es decir, para $x' \neq x''$ tiene lugar $f(x') \neq f(x'')$, entonces la aplicación f se denomina aplicación biunívoca (correspondencia biunívoca) de X en Y o también aplicación de una hoja o *inyección*. De esta forma, la aplicación $f : X \to Y$ es de una hoja (inyectiva) si y sólo si la preimagen de cada elemento y perteneciente al conjunto de valores de la función $f : y \in Y_f$ está compuesta exactamente por un elemento.

Si la aplicación $f : X \to Y$ es al mismo tiempo biunívoca en el conjunto Y, es decir, es al mismo tiempo inyección y sobreyección, entonces naturalmente se llama *aplicación biunívoca* del conjunto X sobre el conjunto Y, o también, aplicación *biyectiva* (biyección) en Y.

De esta forma, la aplicación $f : X \to Y$ es una aplicación biunívoca del conjunto X sobre el conjunto Y si y sólo si para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$, $x' \neq x''$, es válida la desigualdad $f(x') \neq f(x'')$, y cualquiera que sea $y \in Y$ existe el elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

La aplicación biunívoca del conjunto X sobre el conjunto Y, a menudo se denomina correspondencia biunívoca de los elementos de estos conjuntos.

Si $f : X \to Y$ y $A \subset X$, entonces el conjunto

$$B = \{y : y \in Y, y = f(x), x \in A\},$$

es decir, el conjunto de todos aquellos y, en cada uno de los cuales durante la aplicación f se aplica al menos un elemento del subconjunto A del conjunto X, se llama *imagen del subconjunto* A y se escribe $B = f(A)$.

En particular, siempre tenemos $Y_f = f(X)$.

Para las imágenes de los conjuntos $A \subset X$ y $B \subset X$ son válidas las siguientes relaciones fácilmente comprobables

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B),$$

y si $A \subset B$, entonces $$f(A) \subset f(B).$$

Si $f : X \to Y$ y $B \subset Y$, entonces el conjunto

$$A = \{x : x \in X, f(x) \in B\},$$

se llama *preimagen del conjunto* B y se escribe $A = f^{-1}(B)$. De esta forma, la preimagen del conjunto B está compuesta por todos aquellos elementos $x \in X$, que por medio de la aplicación f se aplican en elementos de B, o lo que es lo mismo, que está compuesta por todas las preimágenes de los puntos $y \in B$:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Para las preimágenes de los conjuntos $A \subset Y$ y $B \subset Y$ son válidas las siguientes relaciones fácilmente demostrables

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

Y si $A \subset B$, entonces $\quad f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Si $A \subset X$, entonces la función $f : X \to Y$ de forma natural engendra una función definida sobre el conjunto A, que pone en correspondencia a cada elemento $x \in A$ el elemento $f(x)$. Esta función se llama *restricción de la función f* sobre el conjunto A y a veces se denota por $f|_A$ o sencillamente f_A.

De esta forma, $f_A : A \to Y$ y para cualquier $x \in A$ tiene lugar $f_A : x \mapsto f(x)$. Si el conjunto A no coincide con el conjunto X, entonces la restricción f_A de la función f sobre el conjunto A tiene otro dominio que la función f y por lo tanto, es una función diferente de f. Con frecuencia la restricción de la función sobre un conjunto se denota por el mismo símbolo que la función inicial.

Si dos funciones f y g se analizan sobre el mismo conjunto X, más exacto, si se analizan las restricciones de las funciones f y g sobre el mismo conjunto X, entonces la notación $f = g$ sobre X significa que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in X$. En este caso, se dice que la función f es idénticamente igual a la función g sobre el conjunto X.

Señalemos que las funciones en las cuales a todos los elementos de un conjunto les corresponde un mismo elemento, es decir, funciones en las cuales al variar los valores del argumento los valores de la función no varían, se llaman *constantes* (sobre el conjunto dado).

Así pues, si al variar una variable (el argumento de la función) la otra variable, que es función de la primera, no cambia (es decir, "no depende" de la primera variable), entonces éste es un caso particular y en determinado sentido el caso más sencillo de dependencia funcional.

Si $f : X \to Y$ y cada elemento $y \in Y_f$ representa un conjunto de elementos cualesquiera $y = \{z\}$, además entre estos conjuntos se tiene al menos uno que no es vacío, que tiene más de un elemento, entonces, esa función f se llama *función multiforme*. En este caso los elementos del conjunto $f(x) = \{z\}$ a menudo se nombran también valores de la función f en el punto x.

Si cada conjunto $f(x)$ está compuesto sólo por un elemento, entonces la función f se llama también *función unívoca*.

Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, entonces la función $F : x \to Z$ definida para cada $x \in X$ por la igualdad $F(x) = g(f(x))$ se llama *composición* (a veces *superposición*) de las funciones f y g, o *función compuesta* y se denota por $g \circ f$.

De esta forma, por la definición de cada $x \in X$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Sea dada la función $f : X \to Y$ y Y_f es el conjunto de sus valores. El conjunto de todos los posibles pares ordenados del tipo $(y, f^{-1}(y))$, $y \in Y_f$, forma la función que se denomina *función inversa* a la función f y se denota por f^{-1}. La función inversa f^{-1} pone en correspondencia a cada elemento $y \in Y_f$ su preimagen $f^{-1}(y)$, es decir, un conjunto de elementos. Por esto mismo, la función inversa es, en general, una función multiforme.

Si la aplicación $f : X \to Y$ es de una hoja (inyectiva), entonces la aplicación inversa, definida como siempre sobre Y_f, es una función unívoca y transforma Y_f sobre X, es decir, $f^{-1} : Y_f \to X$. En realidad, en este caso, las preimágenes de todos los puntos $y \in Y_f$ están compuestas exactamente por un punto $x \in X$.

1.3.* CONJUNTOS FINITOS Y NÚMEROS NATURALES. SUCESIONES

Una clase importante de conjuntos que se encuentra a menudo, es la clase de los así llamados conjuntos finitos. Para enunciar la definición de un conjunto finito, daremos primero la definición del concepto de número natural.

Definición 2. *El conjunto $N = \{n\}$ se llama conjunto de los números naturales si*

a) *uno de sus elementos se denota por el símbolo* 1;

b) *a cada elemento $n \in N$ se le pone en correspondencia exactamente un elemento de este conjunto denotado por n^* y denominado elemento posterior al elemento n;*

c) *para cualquier $n \in N$ tiene lugar $n^* \neq 1$;*

d) *de $n^* = m^*$, $n \in N$, $m \in N$, se deduce, que $n = m$;*

e) (*axioma de inducción*) *supongamos que el conjunto $M = \{m\} \subset N$ posee las propiedades*

1°) $1 \in M$;

2°) *si $m \in M$, entonces $m^* \in M$;*

entonces el conjunto M contiene todos los números naturales: $M = N$.

La definición axiomática dada del conjunto de los números naturales pertenece a Peano*), por eso las propiedades a) — e) se llaman *axiomas de Peano*.

Los elementos del conjunto N se denotan por 1, 2, 3, 4, ... (aquí después de cada número natural está escrito el que le sigue).

Definición 3. *El conjunto X se llama conjunto compuesto por n elementos, $n \in N$, si existe una aplicación biunívoca del conjunto X sobre el conjunto* $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

Si para un conjunto existe un número natural n, tal que el número de sus elementos es igual a n, entonces ese conjunto se llama finito.

Cualquier conjunto que no sea finito se llama *infinito*. Ejemplo de conjunto infinito es el conjunto de todos los números naturales.

El conjunto vacío se considera, por definición, finito, y su número de elementos igual a cero.

Si el conjunto que contiene m elementos, puede ser obtenido de un conjunto que contiene n elementos, restando de éste un conjunto finito, entonces el número natu-

*) I. G. Peano (1858 — 1932), matemático italiano.

ral m se llama menor que el número natural n o lo que es lo mismo, el número n se llama mayor que el número m; en este caso se escribe $m < n$, ó $n > m$.

Definición 4. *Sea X un conjunto cualquiera y N el conjunto de los números naturales. Cualquier aplicación $f: N \to X$* (véase el p. 1.2*) *se llama sucesión de elementos del conjunto X. El elemento $f(n)$ se denota por x_n y se llama elemento n-ésimo de la sucesión $f: N \to X$ y la sucesión como tal se denota por $\{x_n\}$ ó x_n, $n = 1, 2, \dots$.*

Cada elemento x_n de la sucesión $\{x_n\}$ es un par ordenado, compuesto por el número $n \in N$ y el elemento x del conjunto X correspondiente a este número en la aplicación $f: N \to X$, es decir, $x_n = (n, x)$. El segundo elemento de este par se llama valor del elemento x_n de la sucesión $\{x_n\}$ y el primero, su número.

El conjunto de los elementos de una sucesión siempre es infinito. Dos elementos distintos de la sucesión pueden tener el mismo valor, pero a ciencia cierta se diferencian por sus números, los cuales son un conjunto infinito.

El conjunto de los valores de los elementos de la sucesión (a menudo se dice brevemente: conjunto de los valores de la sucesión) puede ser finito. Por ejemplo, si a todos los $n \in N$ los ponemos en correspondencia el mismo elemento $a \in X$, es decir, para todos los $n \in N$ tiene lugar $f(n) = a$, entonces, el conjunto de los valores de la sucesión $x_n = a, n = 1, 2, \dots$, está compuesto por un elemento $a \in X$. Estas sucesiones se llaman *estacionarias*.

Si $n_1 < n_2$, $n_1 \in N$, $n_2 \in N$, entonces el término x_{n_1} de la sucesión $\{x_n\}$ se denomina término anterior al término x_{n_2} y el término x_{n_2}, término posterior al término x_{n_1}. En este sentido, los términos de la sucesión siempre están ordenados.

1.4. SÍMBOLOS LÓGICOS

En los razonamientos matemáticos con frecuencia se encuentran las expresiones "existe un elemento" que tiene algunas propiedades, y "cualquier elemento" entre los elementos que tienen alguna propiedad. En lugar de la palabra "existe" o de la expresión equivalente a ella "se encuentra" en ocasiones se escribe el símbolo $\exists$, es decir, la letra latina **E** al revés (de la palabra inglesa existence, existencia), y en lugar de las palabras "cualqueira", "cada", "todo", el símbolo $\forall$, es decir, una **A** latina invertida (de la palabra inglesa any, cualquiera). El símbolo $\exists$ se llama *símbolo de existencia* y el símbolo $\forall$, *símbolo de universalidad.*

Ejemplos. 1. La definición de la unión $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ de los conjuntos A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, escribe con ayuda del símbolo lógico de existencia de la forma siguiente:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \{x : \exists_\alpha \in \mathfrak{A}, x \in A_\alpha\}$$

y la definición de la intersección $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$, escrita con ayuda del símbolo de generalidad tiene la forma

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha = \{x : \forall_\alpha \in \mathfrak{A}, x \in A_\alpha\}.$$

2. Sea $\boldsymbol{R}$ el conjunto de los números reales y sea dada la función $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, es decir, la función definida sobre el conjunto de los números reales y que toma valores reales.

La función f se llama *función par*, si para cada $x \in \boldsymbol{R}$ se cumple la igualdad $f(-x) = f(x)$. Utilizando los símbolos lógicos esta condición se puede escribir más brevemente $\forall x \in \boldsymbol{R}: f(-x) = f(x)$.

3. La función $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ se llama *periódica* si existe tal número $T > 0$, que cualquiera que sea $x \in \boldsymbol{R}$ es válida la igualdad $f(x + T) = f(x)$. Utilizando los símbolos lógicos, esto se puede escribir de la siguiente forma:

$$(\exists T > 0)(\forall x \in \boldsymbol{R}) : f(x + T) = f(x).$$

A menudo, para la comodidad de la lectura de las afirmaciones escritas con ayuda de algunos símbolos lógicos, todo lo que se relaciona con cada uno de ellos por separado se encierra entre paréntesis, como se ha hecho en la última fórmula. Los dos puntos en las fórmulas de este tipo significan "tiene lugar".

4. La función $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ no es par, si la condición $f(-x) = f(x)$ no se cumple para todos los $x \in \boldsymbol{R}$. Sin embargo, semejantes enunciados negativos no son muy cómodos para su utilización, ya que es muy difícil hacer conclusiones de algo que no hay. Es mucho más cómodo trabajar con las llamadas afirmaciones positivas que no contienen negación. En nuestro caso, la afirmación de que la igualdad $f(-x) = f(x)$ no se cumple para todos los $x \in \boldsymbol{R}$, es equivalente a la afirmación de que existe tal $x \in \boldsymbol{R}$ que $f(-x) \neq f(x)$ o en la escritura con símbolos,

$$\exists x \in \boldsymbol{R} : f(-x) \neq f(x).$$

5. La función $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ no es periódica, si cualquier número $T > 0$ no es su período, es decir, para cualquier $T > 0$ la igualdad $f(x + T) = f(x)$ no debe cumplirse para todos los $x \in \boldsymbol{R}$ o de forma positiva: para cualquier $T > 0$ se encuentra un $x \in \boldsymbol{R}$, para el cual $f(x + T) \neq f(x)$. Con ayuda de los símbolos lógicos esto se escribe de la siguiente forma:

$$(\forall T > 0)(\exists x \in \boldsymbol{R}) : f(x + T) \neq f(x).$$

Comparando las escrituras hechas con ayuda de símbolos lógicos de las afirmaciones en los ejemplos 2 y 3 con sus negaciones en los ejemplos 4 y 5, vemos que en la construcción de la negación, los símbolos de existencia y universalidad se sustituyen el uno por el otro. Para que en un conjunto dado no exista un elemento, con cierta propiedad, es necesario que todos los elementos no tengan esta propiedad, es decir, en este caso, en la negación, el símbolo de existencia $\exists$ se convierte en el símbolo de universalidad $\forall$. Si no todos los elementos del conjunto examinado poseen cierta propiedad, entonces esto significa que en él existe un elemento, que no tiene dicha propiedad: el símbolo de universalidad se cambió por el símbolo de existencia.

Para no complicar al lector que no está acostumbrado al simbolismo lógico, la exposición posterior del material se hace de manera clásica, sin la utilización de los símbolos lógicos, los que sólo en elgunas ocasiones, se aplican paralelamente al texto fundamental. Por una parte, para acostumbrar al lector a su aplicación (lo que es muy útil al tomar notas de libros y conferencias), y por otra, por cuanto ellos no permiten más brevemente y a veces de forma más expresiva, aclarar la idea necesaria, ayudando con esto al lector a comprender el contenido de la cuestión expuesta.

Con el símbolo □ en el texto del libro se señala el final de la demostración dada. El símbolo $\Rightarrow$ significa "sigue" (una proposición se deduce de otra), el símbolo $\Leftrightarrow$ significa equivalencia de las afirmaciones que se encuentran a ambos lados del mismo. La abreviatura def significa, que la afirmación formulada es válida por definición (de la palabra inglesa definition, definición). Por ejemplo,

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A \Rightarrow x \in B),$$
$$(g \circ f)(x) \overset{\text{def}}{=} g(f(x)).$$

§ 2. NÚMEROS REALES. CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

En la matemática elemental se estudian los números reales. Al principio, en el proceso de cálculo surge la llamada *serie natural* de números $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. En aritmética se introducen las operaciones de adición y multiplicación sobre los números naturales. En lo que respecta a la resta y la división, no siempre resultan posibles en el conjunto de los números naturales. Para que las cuatro operaciones aritméticas sean posibles para cualquier par de números (menos la operación de división entre cero, que carece de sentido), es necesario ampliar la clase de los números analizados. La necesidad de medir algunas magnitudes físicas y geométicas exige la ampliación de la reserva de números. Por eso, se introduce el cero y los números *negativos* enteros (del tipo $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$) y después, los *racionales* (del tipo p/q, donde p, q son enteros $q \neq 0$).

La misma necesidad de medición de magnitudes y realización de operaciones tales como el extraer una raíz, el cálculo de logaritmos, resolución de ecuaciones algebraicas, conlleva a la ampliación posterior de la reserva de números analizados: aparecen los números irracionales y finalmente los *números complejos*. Todos los números racionales e irracionales forman el conjunto de los números reales.

Al conjunto de todos los números reales, como es de costumbre, vamos a denotarlo por $\boldsymbol{R}$ (de la palabra latina realus, real). Este conjunto forma una colección en la que están definidas las operaciones, relacionadas entre sí, de adición, multiplicación y comparación de los números por su magnitud y que tiene continuidad de determinado tipo. Recordemos brevemente las propiedades de los números reales, conocidas de la matemática elemental, y las completemos con la descripción de algunas propiedades que habitualmente no se analizan de forma suficientemente amplia.

I. OPERACIÓN DE ADICIÓN. Para cualquier par ordenado de números reales a y b está definido y además de forma única, el número denominado su *suma* y denotado por $a + b$, de forma tal, que tienen lugar las siguientes propiedades.

I_1. *Para cualquier par de números a* y *b*

$$a + b = b + a.$$

Esta propiedad se llama *ley conmutativa de la adición*.

I_2. *Para cualquier terna de números a, b* y *c*

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Esta propiedad se llama *ley asociativa de la adición*.

I_3. *Existe el número denotado por* 0 y denominado nulo, *tal que para cualquier número a* $\quad a + 0 = a.$

I_4. *Para cualquier número a existe el número denotado por — a y llamado opuesto al número dado, tal que*

$$a + (-a) = 0.$$

II. OPERACIÓN DE MULTIPLICACIÓN. Para cualquier par de números a y b está definido y además de forma única el número denominado su *producto* y denotado por ab de forma tal que tiene lugar las siguientes propiedades.

II_1. *Para cualquier par de números a* y *b*

$$ab = ba.$$

Esta propiedad se denomina *ley conmutativa de la multiplicación*.

II_2. *Para cualquier terna de números a, b, c*

$$a(bc) = (ab)c.$$

Esta propiedad se denomina *ley asociativa de la multiplicación*.

II_3. *Existe un número denotado por* 1 *que se llama unidad, tal que para cualqueir número a* $\quad a \cdot 1 = a.$

II_4. *Para cualquier número* $a \neq 0$ *existe un número denotado* $1/a$ *ó* $\frac{1}{a}$ *que se llama elemento inverso, tal que*

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

III. RELACIÓN DE LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN. *Para cualquier terna de números a, b, c*

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Esta propiedad se denomina *ley distributiva de la multiplicación* con relación a la suma.

IV. ORDENAMIENTO. *Para cada número a está definida una de las relaciones* $a > 0$ *(a es mayor que cero),* $a = 0$ *(a es igual a cero) ó* $0 > a$ *(cero es mayor que a) y si* $a > 0$ *y* $b > 0$, *entonces*

IV_1. $a + b > 0$;

IV_2. $ab > 0$.

La propiedad IV da la posibilidad de introducir el concepto de comparación, o como a veces se dice, comparación por magnitud para dos números cualesquiera.

El número a se llama mayor que el número b y se escribe $a > b$ *o lo que es lo mismo, el número b se llama menor que a y se escribe* $b < a$, $\quad a - b > 0$.

La existencia de la comparación "mayor" o "menor" para cualquier par de números reales se llama *propiedad de ordenamiento del conjunto de todos los números reales.*

V. PROPIEDAD DE CONTINUIDAD. *Cualesquiera que sean los conjuntos no vacíos* $A \subset \boldsymbol{R}$ y $B \subset \boldsymbol{R}$, *en los cuales para dos elementos cualesquiera* $a \in A$ y $b \in B$ *se*

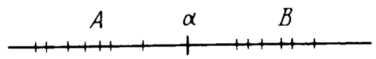


FIG. 2

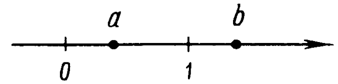


FIG. 3

cumple la desigualdad $a \leqslant b$, *existe un número* α *tal que para todos los* $a \in A$ *y* $b \in B$ *tiene lugar la relación* $a \leqslant \alpha \leqslant b$
(fig. 2).

La propiedad de continuidad de los números reales está relacionada con la más sencilla de las aplicaciones de la matemática en la práctica, con la medición de magnitudes. En la medición de cualquier magnitud física (o de otra naturaleza) con frecuencia se obtienen valores aproximados con mayor o menor exactitud. Si en el resultado de la medición experimental de la magnitud dada se obtiene una serie de números que dan el valor de la magnitud buscada con defecto (ellos juegan el papel de conjunto A en el enunciado dado anteriormente de la propiedad de continuidad) o con exceso (conjunto B), entonces, la propiedad de continuidad de los números reales expresa la seguridad objetiva de que la magnitud medida tiene determinado valor, situado entre sus valores aproximados, calculados con defecto o exceso.

De las propiedades de los números reales enumeradas I — V se deducen otras muchas propiedades de los mismos, por eso, se pueden decir que los números reales son el conjunto de elementos que poseen las propiedades I — V.

Para el lector meditabundo señalamos que la cita al principio del párrafo de que los números reales y sus propiedades son conocidos del curso de matemática elemental, no es imprescindible. Las propiedades enunciadas anteriormente de los números reales, se pueden tomar como definición inicial. Se debe sólo excluir el caso trivial. Es fácil comprobar que para el conjunto formado sólo por el cero se cumplen todas las propiedades I — V (en ese conjunto $1 = 0$). El conjunto, en el cual se tiene al menos un elemento diferente de cero se donomina no *trivial*.

Ahora, parafraseando el resultado de nuestros análisis obtenemos la siguiente definición.

Definición 2. *El conjunto no trivial de elementos que poseen las propiedades* I — V *se llama conjunto de los números reales. Cada elemento de este conjunto se llama número real.*

Recordemos que el conjunto de los números reales se denota con la letra $\boldsymbol{R}$.

La construcción de la teoría de los números reales que se basa en esta definición se llama *axiomática* y las propiedades I — V, *axiomas de los números reales.*

Geométricamente, el conjunto de los números reales se representa con una recta orientada y los números sueltos, con los puntos de esta recta. Por eso, el conjunto de los números reales con frecuencia se llama recta numérica, o eje numérico, y los números sueltos, sus puntos (fig. 3). Teniendo en cuenta esta representación de los números reales, a veces, en lugar de a menor que b (respectivamente a mayor que b) se dice que el punto a está más a la izquierda que el punto b (respectivamente, a está más a la derecha que b).

En los puntos siguientes 2.2* — 2.6* serán analizadas más detalladamente las propiedades I — V de los números reales y deducidas algunas de sus consecuencias. Así como todos los puntos señalados con asteriscos, los puntos citados, en cualquier

caso, pueden ser omitidos en la primera lectura sin grandes perjuicios para la asimilación del curso de análisis matemático. Para la comprensión del material siguiente (en el p. 2.5 y los que le siguen) es completamente suficiente la representación de los números reales que se da en el curso de matemática elemental.

2.2.* PROPIEDADES DE LA ADICIÓN Y DE LA MULTIPLICACIÓN

Consideremos algunas propiedades de la adición y la multiplicación que se derivan de las propiedades I, II y III. Ante todo, señalemos que para la operación de la adición existe la operación inversa, la resta, definámosla.

Para cualquier par ordenado de números $a \in \boldsymbol{R}$ y $b \in \boldsymbol{R}$ el número $a + (-b)$ se llama *diferencia* de los números a y b y se denota por $a - b$, es decir

$$a - b \overset{\text{def}}{=} a + (-b). \tag{2.1}$$

Si

$$a + b = c \tag{2.2}$$

entonces sumando a ambos miembros de esta igualdad el número $-b$ obtendremos $(a + b) + (-b) = c + (-b)$. De aquí, por la ley asociativa I_2 y la definición de diferencia tenemos

$$a + (b + (-b)) = c - b,$$

pero $b + (-b) = 0$, por consiguiente

$$a = c - b. \tag{2.3}$$

De esta forma, después de la adición al número a del número b, el número a se restaura restando de la suma $a + b$ el número b, por lo que la operación de resta se llama *operación inversa a la operación de la suma.*

Pasemos a las propiedades de la suma y la multiplicación de los números reales.

1°. *El número con la propiedad del cero es único.*

En efecto, supongamos que existen dos ceros, 0 y $0'$, entonces debido a I_3 : $0' + 0 = 0'$, $0 + 0' = 0$. Según la ley conmutativa I_2, los primeros miembros de estas igualdades son iguales y por consiguiente son iguales los segundos, es decir, $0 = 0'$. □

2°. *El número opuesto a uno dado es único.*

Supongamos que los números b y c son opuestos a cierto número a, es decir, $a + b = 0$ y $a + c = 0$. Entonces de la primera de estas igualdades tenemos $(a + b) + c = 0 + c$, es decir, $(a + b) + c = c$, de donde $(a + c) + b = c$; pero $a + c = 0$, por consiguiente $b = c$. □

3°. *Para cualquier número a es válida la igualdad*

$$-(-a) = a.$$

De la igualdad $a + (-a) = 0$ que define al elemento opuesto, por la conmutatividad de la suma, obtendremos $-a + a = 0$. Esto significa que $a = -(-a)$. □

4°. *Para cualquier número a es válida la igualdad*

$$a - a = 0.$$

En realidad $a - a = a + (-a) = 0$. □

5°. *Para números a y b cualesquiera tenemos*:

$$-a - b = -(a + b),$$

es decir, el número opuesto a la suma de dos números es igual a la suma de los números opuestos a ellos.

En efecto, $a + b + (-a - b) = (a - a) + (b - b) = 0$. □

6°. *La ecuación $a + x = b$ tiene en $\boldsymbol{R}$ solución que es única*: $x = b - a$.

En realidad, si la solución existe, entonces por (2.3) $x = b - a$. Con esto está demostrada la unicidad de la solución de la ecuación $a + x = b$. Para la existencia de la solución, es suficiente comprobar que el número $x = b - a$ es solución. Esto efectivamente es así:

$$a + (b - a) = a + [b + (-a)] = [a + (-a)] + b = b. \ \square$$

Para la operación de la multiplicación también existe la operación inversa, que se llama división y se define de la forma siguiente.

Para cualquier par de números ordenados a y b $b \neq 0$, el número $a \cdot \frac{1}{b}$ se lla- *cociente de la división de a* por b y se denota por $\frac{a}{b}$ ó a/b ó $a : b$, es decir.

$$\frac{a}{b} \overset{\text{def}}{=} a \cdot \frac{1}{b}, \quad b \neq 0.$$

Las propiedades análogas a las propiedades 1° — 6° para la suma son válidas también para la operación de multiplicación:

7°. *El número que tiene las propiedades de la unidad es único.*

8°. *El número inverso a un número dado diferente de cero es único.*

9°. *Para cualquier número $a \neq 0$ es válida la igualdad*

$$\frac{1}{1/a} = a.$$

10°. *Para cualquier número $a \neq 0$ es válida la igualdad*

$$a/a = 1.$$

11°. *Para cualesquiera números $a \neq 0$ y $b \neq 0$ tenemos la igualdad*

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab},$$

es decir, el número inverso al producto de dos números diferentes de cero es igual al producto de los números inversos a ellos.

12°. *La ecuación $ax = b$, $a \neq 0$ tiene solución en el conjunto de los números reales que es única.*

Las propiedades 7° — 12° se demuestran análogamente a las propiedades 1° — 6°. Todas las propiedades 1° — 12° analizadas tienen relación sólo con las operationes de adición y multiplicación. Estas operaciones permiten definir a los números naturales, enteros y racionales, la operación de elevar a una potencia entera y la operación de extraer una raíz. Hagamos esto.

El número $1 + 1$ se denota por 2, el número $2 + 1$ por 3, etc. Los números 1, 2, 3, ... , se llaman *números naturales*. Su notación y denominación coinciden con los números de los elementos en los conjuntos finitos (véase el p. 1.3*). Esto no es casual, por cuanto para obtener el número natural n en el nuevo sentido, se necesita tomar un conjunto finito de unidades, cuyo número de elementos fue denotado en el p. 1.2* por el mismo símbolo n, y sumarlas. La relación de orden introducida en el conjunto de los números naturales (véase el p. 1.3*) coincide con el orden que se tiene en este conjunto, de acuerdo con el ordenamiento del conjunto de todos los números reales (véase la propiedad IV en el p. 2.1), además, el número natural n^*, posterior a n, es $n + 1$, es decir, $n^* = n + 1$. Como ya se señaló, el conjunto de los números naturales se denota por $\boldsymbol{N}$.

Observemos que aunque la unidad es única, como fue demostrado anteriormente, se pueden analizar varios ejemplares de unidad (como en general, varios ejemplares de cualquier elemento de cierto conjunto) al menos para que sea posible escribir la expresión $1 + 1$.

Los números $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ se llaman *números enteros*. El conjunto de los números enteros usualmente se denota por $\boldsymbol{Z}$.

Más adelante se mostrará (véase la propiedad 8° en el p. 2.3*), que de todas las propiedades de los números reales enumeradas en el p. 2.1 se deriva que $1 > 0$.

Los números del tipo m/n donde m y n son enteros y $n \neq 0$, se llaman *números* racionales. El conjunto de los números racionales se denota usualmente por $\boldsymbol{Q}$. Los números reales que no son racionales se llaman *irracionales*. Su conjunto se denota por $\boldsymbol{I}$.

Supongamos que se da el número real a y el natural n. El número a multiplicado n veces por sí mismo se llama *potencia* n-ésima del número a y se denota por a^n. De esta forma

$$a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ veces}}.$$

El número b tal que $b^n = a$ (si por supuesto existe) se llama *raíz de n-ésimo* grado del número a y se denota por $\sqrt[n]{a}$ ó $a^{1/n}$, es decir,

$$(\sqrt[n]{a})^n \overset{\text{def}}{=} a.$$

Por la definición se supone que $a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$ y para cualquier $n \in \boldsymbol{N}$ $a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$.

Si $a \geqslant 0$, $b = \sqrt[n]{a}$ y $b \geqslant 0$, entonces el número b se llama *valor aritmético de la raíz de n-ésimo* grado del número a. En el futuro por raíz de un número real no negativo entenderemos el valor aritmético de la raíz, si no se acuerda algo diferente.

Señalemos ahora varias propiedades referentes a la relación entre las operaciones de suma y multiplicación.

13°. *Para los números a, b y c cualesquiera tiene lugar la igualdad*

$$a(b - c) = ab - ac.$$

En realidad $a(b - c) = a(b - c) + ac - ac = a(b - c + c) - ac = ab - ac$. □

14°. *Para cualquier número a se cumple la igualdad*

$$a \cdot 0 = 0.$$

En efecto, tomemos cualquier b, entonces $b - b = 0$ (véase la propiedad 4°). Por esto, según la propiedad 13° tendremos:

$$a \cdot (0) = a(b - b) = ab - ab = 0. \square$$

De la propiedad 14°, a propósito, se deriva que la afirmación $1 \neq 0$, cuando existen las otras propiedades analizadas I — III, es equivalente a que existe al menos un número diferente de cero. Evidentemente, es suficiente mostrar, que si existe un número $a \neq 0$, entonces $1 \neq 0$. Demostremos esto: supongamos que existe $a \neq 0$, entonces de la igualdad $a \cdot 1 = a$ se deduce que $1 \neq 0$ ya que en el caso contrario, de acuerdo a la propiedad 14°, tendría lugar la igualdad $a = 0$.

15°. *Si* $ab = 0$, *entonces al menos uno de los factores a y b es igual a cero.*

Sea, por ejemplo, $a \neq 0$, entonces multiplicando la igualdad $ab = 0$ por $1/a$ obtendremos $\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$, de donde $\left(\frac{1}{a} a\right) b = 0$, por consiguiente $b = 0$. $\square$

16°. *Para cualesquiera números a y b tenemos*:

$$(-a)b = -ab, (-a)(-b) = ab,$$

en particular, $(-1)\, a = -a$.

En realidad,

$$(-a)b = (-a)b + ab - ab = (-a + a)b - ab = -ab. \square$$

Utilizando esta igualdad tenemos

$$(-a)(-b) = -a(-b) = (-1)[a(-b)] = (-1)(-ab) = -(-ab) = ab. \square$$

De las propiedades I, II y III de los números reales y de los corolarios citados anteriormente, se pueden obtener las reglas de las operaciones aritméticas con fracciones, es decir, con los números del tipo a/b, $b \neq 0$, $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$.

17°. *La igualdad*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

$b \neq 0$, $d \neq 0$ *es válida si y sólo si* $ad = bc$.

Corolario (propiedad fundamental de una fracción). *Cualquiera que sea la fracción* a/b, $b \neq 0$ *y el número* $c \neq 0$, *tiene lugar la igualdad*

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

En efecto, multiplicando ambos miembros de la igualdad $a/b = c/d$ por bd y utilizando la definición de la division, tendremos la siguiente cadena de igualdades equivalentes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} bd = \frac{c}{d} db \Leftrightarrow a \cdot \frac{1}{b} bd = c\frac{1}{d} db \Leftrightarrow ad = cb. \square$$

18°. *La suma de fracciones se realiza por la regla*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Demostremos la validez de esta igualdad. Utilizando la definición de división, la distributividad de la suma con respecto a la multiplicación y la propiedad fundamental de una fracción obtendremos:

$$\frac{ad + bc}{bd} = (ad + bc)\frac{1}{bd} = ad\frac{1}{bd} + bc\frac{1}{bd} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}. \square$$

19°. *La multiplicación de fracciones se realiza por la regla*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Utilizando la definición de división y la propiedad 11° obtendremos

$$\frac{ac}{bd} = ac \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)\left(c \cdot \frac{1}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}. \square$$

20°. *El elemento inverso a la fracción* a/b, $a \neq 0$, $b \neq 0$ *es la fracción* b/a, *es decir*, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Esto se deduce directamente de la regla de la multiplicación de fracciones.

21°. *La división de fracciones se realiza por la regla*

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0.$$

Utilizando la definición de división, la propiedad anterior y la regla de multiplicación de fracciones tendremos:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}. \square$$

Deduzcamos ahora de las propiedades obtenidas las reglas de las operaciones con potencias.

22°. *Si m y n son números enteros y además en el caso de* $m \leqslant 0$ *ó* $n \leqslant 0$ *tiene lugar* $a \neq 0$, *entonces*

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Si $m = 0$ ó $n = 0$, entonces la validez de las fórmulas es evidente.

En el caso cuando m y n son números naturales, entonces por la definición de potencia.

$$a^m a^n = \underbrace{a \ldots\ldots a}_{m \text{ veces}} \underbrace{a \ldots\ldots a}_{n \text{ veces}} = a^{m+n}.$$

Si $m < 0$, $n > 0$ y $a \neq 0$, entonces, haciendo $k = -m$ y utilizando la propiedad fundamental de una fracción (la posibilidad de la división simultánea del numerador y del denominador de una fracción por un mismo número diferente de cero sin alterar la igualdad), para $k \leqslant n$ tendremos

$$a^m a^n = a^{-k} a^n = \frac{a^n}{a^k} = \frac{\overbrace{a \ldots\ldots a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \ldots\ldots a}_{k \text{ veces}}} = a^{n-k} = a^{m+n}$$

y para $k > n$:
$$a^m a^n = \frac{a^n}{a^k} = \frac{1}{a^{k-n}} = a^{n-k} = a^{m+n}.$$

Si $m < 0, n < 0$ y $a \neq 0$, entonces, haciendo $k = -m, l = -n$ y utilizando la propiedad 11° obtendremos

$$a^m a^n = a^{-k} a^{-l} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^l} = \frac{1}{a^{k+l}} = a^{-(k+l)} = a^{m+n}.$$

De forma semejante se comprueba la segunda fórmula de la propiedad 22°. □

Es fácil mostrar que las propiedades I_1, I_2, II_1, II_2 y III se extienden por inducción a cualquier número finito de términos. En calidad de ejemplo mostremos que para cualesquiera números $a_1, a_2, \ldots, a_n (n \geqslant 2)$ y b

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)b = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_n b. \tag{2.4}$$

En realidad, para $n = 2$ esta fórmula es válida de acuerdo con la propiedad III.

Sea ahora (2.4) válida para $n = k$, mostremos que será válida también para $n = k + 1$. Aplicando primero la propiedad I_2 para $k + 1$ sumandos (considerando que ya está demostrada), después la propiedad III y utilizando la hipótesis de inducción, obtendremos

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1})b = [(a_1 + \ldots + a_k) + a_{k+1}]b =$$
$$= (a_1 + \ldots + a_k)b + a_{k+1}b = a_1 b + \ldots + a_k b + a_{k+1} b.$$

De la fórmula (2.4) en el caso $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ se deduce que

$$nb = \underbrace{b + \ldots + b}_{n \text{ veces}},$$

es decir, que la multiplicación de un número por un número natural n se reduce a la suma de este número n veces.

OBSERVACIÓN. Señalemos que las propiedades I — III del p. 2.1 no describen totalmente a los números reales, en el sentido de que existen otros conjuntos diferentes del conjunto de los números reales, que satisfacen las mismas propiedades I — III si en ellos la palabra "número" en todos los casos se sustituye por la palabra "elemento" del conjunto analizado. Precisamente en este sentido, en el futuro por doquier se entiende la expresión "un conjunto que satisface cualquiera de las propiedades I — V".

Ejemplos de conjuntos que satisfacen las condiciones I, II y III son sólo números racionales o números complejos, conocidos de la matemática elemental, así como el conjunto de las funciones racionales, es decir, las funciones del tipo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Los elementos de todos los conjuntos enumerados se pueden sumar y multiplicar y además estas operaciones se subordinan a las condiciones I, II y III. Los conjuntos que satisfacen estas exigencias y que contienen al menos un elemento diferente de cero se llaman *campos*.

De esta forma, los números racionales, los números reales, los números complejos y las funciones racionales forman campos.

Analicemos ahora las propiedades que distinguen al campo de los números reales entre todos los otros campos. Una de tales propiedades es la propiedad de ordenamiento de sus elementos.

2.3*. PROPIEDAD DE ORDENAMIENTO

Deduzcamos algunas consecuencias de las propiedades de ordenamiento IV y de las propiedades de la suma y la multiplicación I, II y III. Ante todo recordemos el concepto de comparación de la magnitud de dos números; el número a se llama número mayor que el número b : $a > b$, si $a - b > 0$.

Tienen lugar las siguientes propiedades de la comparación de las magnitudes de los números reales.

1°. *Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.*

Esta propiedad se llama *transitividad* de la relación de orden.

Si $a > b$ y $b > c$, entonces por definición, esto significa que $a - b > 0$ y $b - c > 0$. Sumando estas desigualdades, según IV_1 obtenemos: $(a - b) + (b - c) > 0$, es decir, $a - c > 0$. Esto significa que $a > c$. □

2°. *Si $a > b$, entonces para cualquier número c tenemos $a + c > b + c$.*

En realidad, la desigualdad $a > b$ significa que $a - b > 0$. Por cuanto según la propiedad 5° del p. 2.2* $a - b = a + c - c - b = (a + c) - (b + c)$, entonces $(a + c) - (b + c) > 0$ y por consiguiente $a + c > b + c$. □

3°. *Para dos números cualesquiera a y b se tiene exactamente una de las tres relaciones de orden $a > b$, $a = b$ ó $a < b$.*

En efecto, sean dados dos números a y b. Para su diferencia $a - b$ según la propiedad IV tiene lugar exactamente una de las relaciones $a - b > 0$, $a - b = 0$ ó $0 > a - b$.

Si $a - b > 0$, entonces por definición $a > b$. Si $a - b = 0$, entonces sumándole a ambos miembros de la igualdad el númbero b, obtenemos $a = b$. Finalmente si $0 > a - b$, entonces, sumándole sucesivamente a ambos miembros de la desigualdad $0 > a - b$ los números $-a$ y b (véase la propiedad anterior), obtendremos $b - a > 0$. Esto significa que $b > a$ o lo que es lo mismo $a < b$. □

La relación $a < b$ se lee "a es menor que b". La relación $a = b$ se lee "a es igual a b". La relación $a > b$ se lee "a es mayor que b".

La existencia de la relación transitiva de orden "mayor que", "menor que" entre dos números cualesquiera se llama usualmente *propiedad de ordenamiento del conjunto de los números reales o relación de orden.*

La escritura $a \leqslant b$ es equivalente a la escritura $b \geqslant a$ y significa que o bien $a = b$ o bien $a < b$. Por ejemplo, se puede escribir $2 \leqslant 2$, $2 \leqslant 5$. Naturalmente se puede escribir más exacto $2 = 2$, $2 < 5$, no obstante, las desigualdades $2 \leqslant 2$ y $2 \leqslant 5$ también son ciertas ya que denotan que "dos no es mayor que dos" y respectivamente que "dos no es mayor que cinco".

Las relaciones $a < b$, $a \leqslant b$, $a > b$, $a \geqslant b$ se llaman *desigualdades*. Las desigualdades $a < b$ y $a > b$ se llaman *desigualdades estrictas*.

4°. *Si $a < b$, entonces $-a > -b$.*

En particular, si $a > 0$, entonces $-a < 0$ y si $a < 0$, entonces $-a > 0$.

En efecto, de $a < b$ por definición tenemos $b - a > 0$. Por esto $-a = -a + b + (-b) = (b - a) + (-b) > 0 + (-b) = -b$. □

5°. *Si $a < b$ y $c \leqslant d$, entonces $a + c < b + d$, es decir, se puede efectuar la suma término por término de las desigualdades de un signo.*

En realidad, si $a < b$ y $c \leqslant d$, entonces, según la propiedad 2° de este punto $a + c < b + c$ y $c + b \leqslant d + b$, por eso en virtud de la transitividad del ordenamiento tenemos $a + c < b + d$. □

6°. *Si $a < b$ y $c \geqslant d$, entonces $a - c < b - d$, es decir, las desigualdades de signos opuestos se pueden restar en el sentido indicado.*

En efecto, de $c \geqslant d$ tenemos según la propiedad 4° de este punto $-c \leqslant -d$. Sumando las desigualdades $a < b$ y $-c \leqslant -d$ obtendremos $a - c < b - d$. □

7°. *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.*

En realidad, según la propiedad 4° de este punto $-c > 0$, por la propiedad IV_2: $a(-c) < b(-c)$. De aquí, por la propiedad 16° del p. 2.2*, obtendremos $-ac < -bc$ y por consiguiente (véase la propiedad 4° de este punto) $ac > bc$. □

De la propiedad 7° demostrada ahora (para $a = 0$) y de la propiedad IV_2 se deriva la regla de los signos de la multiplicación de números reales: el *producto de dos factores del mismo signo* (o bien positivos simultáneamente o bien negativos simultáneamente) *es positivo y el producto de dos factores de signos desiguales* (uno de ellos es positivo y el otro, negativo) *es negativo.*

8°. *En un campo ordenado siempre es válida la desigualdad $1 > 0$.*

En realidad, ya vimos (véase la observación después de la propiedad 14° en el p. 2.2*), que de la condición de existencia del elemento $a \neq 0$ (esta condición se incluye en la definición de campo, véase el final del p. 2.2*) se deduce que $1 \neq 0$. Mostremos que la desigualdad $1 < 0$ no es posible. Supongamos lo contrario, o sea $1 < 0$. Tomemos cualquier $a > 0$. Por la definición de la unidad tenemos $a \cdot 1 = a$. Por la regla de los signos, el producto del número positivo a y del número negativo 1, según nuestra suposición, es un número negativo, es decir, $a < 0$, lo que es una contradicción.

De nuevo los números reales no son el único objeto que satisface los axiomas I — IV. Los conjuntos para los cuales son válidos estos axiomas se llaman *campos ordenados*. Un ejemplo de campo ordenado diferente del campo de los números reales es el campo de los números racionales. No obstante, ni el campo de los números complejos ni el campo de las fracciones racionales son campos ordenados.

En cualquier campo ordenado se puede introducir el concepto de valor absoluto de sus elementos. En su definición y en el estudio de sus propiedades, para la uniformidad de la exprosición hablaremos siempre de números y no de los elementos de un campo ordenado arbitrario.

Para cualquier número a, el número denotado por $|a|$ y definido por la fórmula

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0, \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

se llama *valor absoluto* del número a o lo que es lo mismo, su *módulo*.

Señalemos una serie de propiedades del valor absoluto.

1°. *Para cualquier número a se cumplen las desigualdades*

$$|a| \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$|a| = |-a|, \tag{2.6}$$

$$a \leqslant |a|, \quad -a \leqslant |a|. \tag{2.7}$$

Demostremos la desigualdad (2.5). Si $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a \geqslant 0$, si $a < 0$, entonces $|a| = -a > 0$ (propiedad 4° del p. 2.3*). □

Demostremos la igualdad (2.6). Si $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a$ y $-a \leqslant 0$ por eso según la definicioń de valor absoluto y la propiedad 3° del p. 2.2* obtendremos $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$ y $-a > 0$; esto significa que $|-a| = -a$. □

Demostremos la desigualdad (2.7). Si $a \geqslant 0$, entonces $a = |a|$ y $-a \leqslant 0 \leqslant$ $\leqslant a = |a|$, es decir, (2.7) se cumple. Si $a < 0$, entonces $a < 0 < -a = |a|$, es decir, (2.7) también se cumple. □

2°. *Para cualesquiera números a y b*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \tag{2.8}$$

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|. \tag{2.9}$$

Demostremos estas desigualdades. Según (2.7) tenemos:

$$a \leqslant |a|, \quad -a \leqslant |a|, \quad b \leqslant |b|, \quad -b \leqslant |b|.$$

De aquí, por la propiedad 5° del p. 2.3* y la propiedad 5° del p. 2.2*

$$a + b \leqslant |a| + |b|, \quad -(a + b) \leqslant |a| + |b|.$$

Uno de los números $a + b$ o $-(a + b)$ es no negativo y por consiguiente coincide con $|a + b|$. La desigualdad (2.8) queda demostrada.

La desigualdad (2.9) es una consecuencia de la (2.8). En realidad

$$|a| - |b| = |(a - b) + b| - |b| \leqslant |a - b| + |b| - |b| = |a - b|;$$

análogamente $|b| - |a| \leqslant |b - a| = |a - b|$.

Por la propiedad 5° del p. 2.2* $|b| - |a| = -(|a| - |b|)$. Uno de los números $|a| - |b|$ y $-(|a| - |b|)$ coincide con $||a| - |b||$. La desigualdad (2.9) también queda demostrada. □

3°. *Para cualesquiera números a y b se cumple la igualdad $|ab| = |a||b|$.*

Esto se deduce inmediatamente de la definición de valor absoluto, de la propiedad 16° del p. 2.2* y de la regla de los signos en la multiplicación.

Veamos ahora la propiedad de continuidad que distingue el campo de los números reales entre todos los demás campos ordenados.

2.4.* PROPIEDAD DE CONTINUIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

Un campo ordenado que satisface la propiedad V se llama *campo ordenado continuo*. El campo de los números racionales ya no es un campo ordenado continuo: en él se tienen los conjuntos A y B; para cualesquiera elementos $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a < b$ y al mismo tiempo no existe un número racional r tal que para todos los $a \in A$ y $b \in B$ se cumpla la relación $a \leqslant r \leqslant b$. Se puede mostrar, por ejemplo, que poseen esta propiedad el conjunto B compuesto por todos los números positivos r que satisfacen la desigualdad $r^2 > 2$ y el conjunto A al cual pertenecen todos los números racionales restantes.

Resulta que el conjunto de los números reales es en cierto sentido el único campo ordenado continuo, más preciso el único salvo un isomorfismo. Aclaremos qué significa esto.

Dos campos ordenados $\mathscr{P}$ *y* $\mathscr{P}'$ *se llaman isomorfos si existe una relación biunívoca de sus elementos* f: $\mathscr{P} \to \mathscr{P}'$ (véase el p. 1.2*), *tal que para dos elementos cualesquiera* $x \in \mathscr{P}$ *e* $y \in \mathscr{P}$ $x < y$, *se cumplen las condiciones* $f(x) < f(y)$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

Más brevemente, los campos ordenados $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}'$ se llaman *isomorfos* si existe una aplicación biunívoca de uno de ellos sobre el otro (biyección) que conserva el ordenamiento, la adición y la multiplicación de sus elementos.

Se puede mostrar que todos los campos ordenados continuos son isomorfos entre sí. Con esto se explica que en la literatura matemática se encuentran diferentes construcciones del conjunto de los números reales, que parten de diferentes objetos concretos, llevando todas ellas a conjuntos no triviales de elementos, que cumplen las propiedades I — V, es decir, a campos ordenados continuos y por consiguiente a conjuntos isomorfos. De esta forma llegamos a la siguiente definición del conjunto de los números reales.

Definición 2′. *Se llama conjunto de los números reales un campo ordenado continuo.*

El campo de los números racionales, como ya se señaló anteriormente, no posee la propiedad de la continuidad y el campo de los números reales sí. Por esto, a ciencia cierta, existen números reales que no son racionales, es decir, existen los números irracionales. De esta forma, el conjunto de los números reales se puede analizar como una extensión sustancial del conjunto de los números racionales, sustancial en el sentido de que el conjunto de los números racionales es un subconjunto propio del conjunto de los números reales. En esta extensión se conservan la propiedad de ordenamiento y las operaciones de adición y multiplicación. Resulta que los números reales, a diferencia de los racionales ya no se pueden extender hasta un conjunto mayor de forma tal que se conserven las propiedades señaladas (el ordenamiento y las operaciones de adición y multiplicación).

Esta propiedad se llama *propiedad de completitud de los números reales con respecto a su ordenamiento, a la adición y la multiplicación.*

2.5.* CORTADURAS EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

La propiedad de continuidad de los números reales se puede enunciar en diferentes términos. Aquí será analizado el enunciado de esta propiedad en los términos de las así llamadas cortaduras de los números reales. Ante todo definamos este concepto.

Definición 1. *Dos conjuntos* $A \subset \boldsymbol{R}$ *y* $B \subset \boldsymbol{R}$ *se llaman cortadura del conjunto de los números reales* $\boldsymbol{R}$, *si*

1°) *la unión de los conjuntos* A *y* B *comprende todo el conjunto de los números reales* $\boldsymbol{R}$, $A \cup B = \boldsymbol{R}$;

2°) *cada uno de los conjuntos* A *y* B *no es vacío,* $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$;

3°) *cada número del conjunto* A *es menor que cualquier número del conjunto* B: *si* $a \in A$, $b \in B$, *entonces* $a < b$.

La propiedad 1° significa que cada número real pertenece al menos a uno de los conjuntos A y B.

De la propiedad 3° evidentemente se deduce que los conjuntos A y B no se intersecan: $A \cap B = \varnothing$. En efecto, si se encontrara un elemento $x \in A \cap B$, es decir, $x \in A$ y $x \in B$, entonces de la propiedad 3° se deduciría que $x < x$.

La cortadura del conjunto de los números reales formada por los conjuntos A y B se denota por $A|B$. El conjunto A se llama clase *inferior* y el conjunto B clase *superior* de la cortadura dada.

Ejemplos simples de cortaduras se pueden obtener de la siguiente forma. Fijemos cualquier número $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Llevemos inicialmente al conjunto A todos los números $x \leqslant \alpha$ y al conjunto B, todos los números $y > \alpha$

$$A \overset{\text{def}}{=} \{x : x \leqslant \alpha\}, \quad B \overset{\text{def}}{=} \{y : y > \alpha\}. \tag{2.10}$$

Los conjuntos A y B así definidos forman una cortadura, lo cual se establece con una comprobación directa del cumplimiento de las condiciones 1°, 2° y 3° de la definición 1.

Se puede actuar de otra forma: llevar al conjunto A todos los números $x < \alpha$ y al conjunto B todos los números $y \geqslant \alpha$:

$$A \overset{\text{def}}{=} \{x : x < \alpha\}, \quad B \overset{\text{def}}{=} \{y : y \geqslant \alpha\}. \tag{2.11}$$

De nuevo, los conjuntos A y B forman una cortadura. En ambos casos (2.10) y (2.11) se dice que la cortadura la realiza el número α y se escribe $\alpha = A|B$.

Señalemos dos propiedades de las cortaduras realizadas por cierto número.

1°. *En el caso* (2.1) *en la clase* A *hay un número máximo que es el número* α *y en la clase* B *no hay uno mínimo.*

En el caso (2.2) *en la clase* A *no hay máximo y en la clase* B *hay un número mínimo que es el número* α.

Analicemos, por ejemplo, el primer caso (2.10). Entonces de la primera fórmula de (2.10) que define el conjunto A se ve claramente que α es el número máximo en la clase A.

Mostremos que en el conjunto B no hay un número mínimo. Supongamos lo contrario: supongamos que en B hay un número mínimo. Denotémoslo por β. Por cuanto $\beta \in B$, entonces por la segunda fórmula de (2.10) $\alpha < \beta$, por consiguiente $\alpha + \alpha < \alpha + \beta$, es decir, $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2}$, de donde, de nuevo, por la segunda fór-

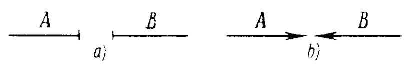


FIG. 4

mula de (2.10) obtenemos que $\frac{\alpha+\beta}{2} \in B$. Análogamente, de $\alpha < \beta$ tenemos $\alpha + \beta < \beta + \beta$, es decir, $\frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ y ya que β es el número mínimo en la clase B, entonces, $\frac{\alpha+\beta}{2} \in A$. La contradicción obtenida demuestra la afirmación.

2°. *El número que realiza la cortadura es único.*

En realidad, supongamos que existe una cortadura que está definida por dos números distintos: $\alpha = A|B$ y $\beta = A|B$. Sea, por ejemplo, $\alpha < \beta$. Entonces, como vimos en la demostración de la propiedad anterior, $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. De la desigualdad $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$ se deduce que tanto en el caso (2.10) como en el (2.11) tiene lugar $\frac{\alpha+\beta}{2} \in B$. Análogamente, de la desigualdad $\frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ se deduce que $\frac{\alpha+\beta}{2} \in A$. Esto contradice que los conjuntos A y B no se intersecan.

La propiedad de continuidad de los números reales consiste en que no existe ninguna cortadura de los números reales fuera de aquellas que se realizan por cierto número real.

Analicemos precisamente la siguiente propiedad.

V°. Para cada cortadura $A|B$ del conjunto de los números reales existe el número α que realiza esta cortadura

$$\alpha = A|B.$$

Este número, de acuerdo con lo dicho anteriormente, es o el mayor en la clase inferior, entonces, en la superior no hay uno mínimo, o el menor en la clase superior, entonces en la inferior no hay uno máximo.

De esta forma, si $A|B$ es una cortadura del conjunto de los números reales, entonces por la propiedad de continuidad enunciada en la forma V* no puede ocurrir que en la clase A haya un número máximo y al mismo tiempo en la clase B haya uno mínimo (fig. 4, *a*). No puede ocurrir tampoco que en la clase A no haya máximo y al mismo tiempo en la clase B no haya un número mínimo (fig. 4, *b*). Dicho correctamente, la continuidad de los números reales significa que en su conjunto no hay ni saltos ni lagunas, más breve, no hay vacíos.

Una cortadura $A|B$ geométricamente significa una partición de la recta numérica en dos rayos que tienen el mismo origen y que van en sentidos opuestos y además uno de ellos contiene su origen común (rayo cerrado) y otro no (rayo abierto).

La propiedad de continuidad de los números reales enunciada en V, de igual forma que la propiedad V* equivalente a ella, se llama *principio de continuidad de los*

números reales según Dedekind[*]. En el futuro nos encontraremos con otros enfoques del concepto de continuidad del conjunto de los números reales (véase el p. 3.6).

Mostremos que la propiedad V* es equivalente a la propiedad V.

Supongamos que inicialmente se cumple la propiedad V y se da cualquier cortadura $A|B$. Por la tercera propiedad de las cortaduras, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a < b$, por lo que la pareja de conjuntos A y B satisface la condición enunciada en la propiedad V*. Por consiguiente, por esta propiedad, existe un número α tal que para todos los $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la relación $a \leqslant \alpha \leqslant b$. El número α por la primera propiedad de las cortaduras pertenece a una de las clases A o B. Si $\alpha \in A$, entonces para todos los $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a \leqslant \alpha < b$, es decir, el número α realiza la cortadura $A|B$ y es el número mayor en la clase inferior. Análogamente, si $\alpha \in B$ entonces el número α también realiza la cortadura $A|B$ y es el menor en la clase superior B.

Supongamos ahora que al contrario se cumple la condición V* y están dados dos conjuntos no vacíos $A \subset \boldsymbol{R}$ y $B \subset \boldsymbol{R}$ tales que para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ se cumple la desigualdad $a \leqslant b$. Denotemos por B^* el conjunto de números tal que cualquiera que sea $b^* \in B^*$ para cualquier $a \in A$ se cumple la desigualdad $a \leqslant b^*$ (el número b^* que posee esta condición se llama número que acota superiormente al conjunto A). Evidentemente,

$$B \subset B^*. \tag{2.12}$$

Por A^* denotemos todos los demás números reales:

$$A^* = \boldsymbol{R} \setminus B^*.$$

Mostremos que los conjuntos A^* y B^* forman una cortadura en el conjunto de los números reales y que el número α que realiza esta cortadura satisface la condición indicada en el enunciado de la propiedad V para los conjuntos dados A y B.

Ante todo comprobemos que los conjuntos A^* y B^* satisfacen todas las condiciones que deben satisfacer los conjuntos que forman una cortadura. En efecto, por cuanto al conjunto A^* se llevaron todos los números que no cayeron en el conjunto B^*, entonces su unión $A^* \cup B^*$ es el conjunto de todos los números reales $\boldsymbol{R}$:

$$A^* \cup B^* = \boldsymbol{R}. \tag{2.13}$$

El conjunto B^* a ciencia cierta no es vacío por la inclusión (2.12), ya que por condición, el conjunto B no es vacío. Así pues

$$B^* \neq \varnothing. \tag{2.14}$$

Demostremos que el conjunto A^* tampoco es vacío. Por condición, el conjunto A no es vacío[**]. Esto significa que existe al menos un número $a \in A$. Entonces, el número $a - 1$, a ciencia cierta, no pertenece al conjunto B^*, ya que $a - 1 < a$,

[*] R. Dedekind (1831—1916), matemático alemán.

[**] Observemos que no necesariamente $A \subset A^*$. Más aún, en el caso cuando el conjunto A está compuesto por un punto $a \in B$ (esto es permisible), los conjuntos A y A^* incluso no se intersecan ya que en este caso $A = \{a\} \subset B \subset B^*$.

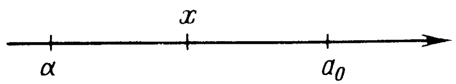


FIG. 5

$a \in A$, es decir, en el conjunto A se encontró un elemento mayor que $a - 1$. De esta forma $a - 1 \notin B^*$, ya que el conjunto B^* está compuesto sólo por los números mayores que todos los números de A o iguales a algunos de ellos. Por esto, $a - 1 \in A^*$, ya que al conjunto A^* pertenecen todos los números que no entran en B^*. Así pues, el conjunto A^* tampoco es vacío:

$$A^* \neq \varnothing. \tag{2.15}$$

Demostremos ahora que cada número $a^* \in A^*$ es menor que cualquier número $b^* \in B^*$:

$$a^* < b^*. \tag{2.16}$$

Supongamos lo contrario: supongamos que se encuentran los números $a^* \in A^*$ y $b^* \in B^*$ tales que $a^* \geqslant b^*$. Entonces, por la definición del conjunto B^*, para cualquier $a \in A$ se cumple la desigualdad $a \leqslant b^*$ y por consiguiente la desigualdad $a \leqslant a^*$. Esto significa que $a^* \in B^*$. De esta forma, el número a^* simultáneamente pertenece tanto al conjunto A^* como al conjunto B^*. Esto no es posible, ya que al conjunto A^* fueron llevados aquellos números que no se contienen en el conjunto B^*. La contradicción obtenida muestra que la desigualdad $a^* \geqslant b^*$ para la condición $a^* \in A$, $b^* \in B$ no es posible y por tanto se cumple la desigualdad (2.16).

El cumplimiento de las condiciones (2.13) — (2.16) significa que los conjuntos A^* y B^* efectivamente forman una cortadura en el conjunto de los números reales (véase la definición 1).

Sea α el número que realiza esta cortadura: $\alpha = A^* | B^*$. Tal número α existe por la suposición sobre el cumplimiento de la propiedad V*. Mostremos que $\alpha \in B^*$. Si esto no fuera así, entonces se encontraría un número $a_0 \in A$ tal que $a_0 > \alpha$. Escojamos cualquier x de forma tal que $\alpha < x < a_0$ (fig. 5). Por cuanto $x > \alpha$ y $\alpha = A^* | B^*$, entonces $x \in B^*$ y por consiguiente, para cualquier $a \in A$ debe cumplirse la desigualdad $x \geqslant a$, ya que B^* está compuesto sólo por tales números. No obstante, esta desigualdad no se cumple para $a = a_0$. La contradicción obtenida demuestra que $\alpha \in B^*$ y por esto el número α es el menor en la clase superior B^*, pero $B < B^*$, por consiguiente para cualesquiera $b \in B$ se cumple la desigualdad $\alpha \leqslant b$. Finalmente, por la propia definición del conjunto B^*, de la inculusión $\alpha \in B^*$ se deriva que para cualquier número $a \in A$ es válida la desigualdad $a \leqslant \alpha$.

Así pues, para todos los $a \in A$, $b \in B$ tiene lugar la desigualdad

$$a \leqslant \alpha \leqslant b.$$

Esto significa que la presencia de la propiedad V* conlleva la existencia de la propiedad V.

2.6*. POTENCIAS RACIONALES DE LOS NÚMEROS REALES

Señalemos que en el conjunto de los números reales para cualquier número $a \geqslant 0$ y cualquier número natural n existe siempre un número $b \geqslant 0$ que es la raíz

de n-ésimo grado de a, es decir, existe $\sqrt[n]{a}$. No nos detendremos por ahora en la demostración de esta afirmación, aunque se podría realizar aquí, por ejemplo, sobre la base del concepto de cortadura, y la demostraremos más adelante (véase el ejemplo en el p. 6.3). Claro, en algunos casos, la raíz puede existir para $a < 0$. Por ejemplo, existe $\sqrt[3]{-8} = -2$, pero ya la raíz $\sqrt{-4}$ no existe, en el sentido de que no existe el número real $b = \sqrt{-4}$, ya que en el caso contrario sería válida la igualdad $b^2 = -4$ que contradice la regla de los signos en la multiplicación.

Enunciemos las propiedades de la raíz. Sean n y m números naturales y $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, entonces son válidas las fórmulas siguientes:

1°) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$; 4°) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$;

2°) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$, 5°) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

3°) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;

Todas estas fórmulas se demuestran por un mismo método. Demostremos por ejemplo, la primera.

Sea $b = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Por la definición de raíz y por la propiedad 22° del p. 2.2* esto significa que $b^n = \sqrt[m]{a}$ y que $b^{mn} = a$. De aquí por la misma definición de raíz, se deduce que $b = \sqrt[mn]{a}$. De esta forma tenemos

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = b = \sqrt[mn]{a}. \ \square$$

Si $a < 0$ y todas las raíces que aparecen en la fórmula 1) existen, entonces también es válida y la demostración llevada a cabo mantiene su vigencia. En general, si $a < 0$ y todas las raíces que aparecen en cualquiera de las fórmulas 1) — 5) existen, entonces son válidas en este caso.

Teniendo el concepto de potencia y raíz enteras, definamos el concepto de potencia racional. Sea $a > 0$ y $r \in Q$, es decir, $r = m/n$, $m \in Z$, $n \in Z$, $n \neq 0$.

La potencia a^r se define con la igualdad

$$a^r \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Señalemos las propiedades fundamentales de la potencia racional. Sea $a > 0$, $b > 0$, $r_1 \in Q$, $r_2 \in Q$, $r \in Q$, entonces

6°) $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;

7°) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;

8°) $(ab)^r = a^r b^r$.

Demostremos, por ejemplo, la fórmula 6°). Si $r_1 = p/q$, $r_2 = m/n$, $q \neq 0$, $n \neq 0$, $p, q, m, n \in Z$, entonces, utilizando la definición de potencia racional, las propiedades de las raíces 2° y 3° y la propiedad 22 del p. 2.2* obtendremos:

$$a^{r_1}a^{r_2} = a^{p/q}a^{m/n} = \sqrt[q]{a^p}\,\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{np}}\,\sqrt[nq]{a^{mq}} =$$
$$= \sqrt[nq]{a^{np+mq}} = a^{\frac{np+mq}{nq}} = a^{p/q+\frac{m}{n}} = a^{r_1+r_2}. \ \square$$

De la propiedad 8° se deduce que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

En efecto,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = (ab^{-1})^r = a^r(b^{-1})^r = a^r b^{-r} = \frac{a^r}{b^r}.\square$$

Ejercicio. Sea $B = \{x : x^2 > 2,\ x > 0,\ x \in Q\}$ y $A = Q \setminus B$. Demuéstrese que los conjuntos A y B forman una cortadura en el campo de los números racionales Q y que esta cortadura no está definida por ningún número racional.

§ 3. CONJUNTOS NUMÉRICOS

3.1. RECTA NUMÉRICA EXTENDIDA

A menudo es cómodo completar el conjunto R de los números reales con los elementos que se denotan por $+\infty$ y $-\infty$ y que se llaman respectivamente *más y menos infinito*, considerando que por definición

$$-\infty < +\infty,$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty.$$

Pero, por ejemplo, las operaciones $(+\infty) + (-\infty)$ o $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ya no están definidas (véase también el p. 4.9). Además, para cualquier $a \in R$, por definición, se considera que se cumple la igualdad $\quad -\infty < a < +\infty$

y que son válidas las operaciones

$$a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty, \quad -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty;$$

para $a > 0$

$$a(+\infty) = (+\infty)a = +\infty, \quad a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty;$$

para $a < 0$

$$a(+\infty) = (+\infty)a = -\infty, \quad a(-\infty) = (-\infty)a = +\infty.$$

Los infinitos $+\infty$ y $-\infty$ se llaman a veces "*números infinitos*" a diferencia de los números reales $a \in R$ que se llaman a su vez *números finitos*.

En lo adelante, por número se entenderá siempre un número real finito si no se acuerda algo diferente.

El conjunto R de los números reales completado con los elementos $+\infty$ y $-\infty$ se llama *conjunto extendido de los números reales* (o recta numérica extendida) y se denota por $\bar{R}$. Los elementos $+\infty$ y $-\infty$ se llaman a veces *puntos infinitamente alejados de la recta numérica extendida*, en contraposición a los números de la recta numérica R que se llaman también puntos finitos.

3.2. INTERVALOS DE NÚMEROS REALES. ENTORNOS

Recordemos la definición de ciertos subconjuntos de números reales muy importantes, que en el futuro se encontrarán a menudo. Si $a \leqslant b$, $a \in \bar{R}$, $b \in \bar{R}$, entonces, el conjunto $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ se llama *segmento* de la recta numérica extendida $\bar{R}$ y se denota por $[a, b]$, es decir,

$$[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad a \in \bar{R}, b \in \bar{R}.$$

En el caso $a = b$ el segmento $[a, b]$ está constituido por un punto.

Si $a < b$, entonces el conjunto $\{x : a < x < b\}$ se llama *intervalo* y se denota por (a, b), es decir,

$$(a, b) \overset{\text{def}}{=} \{x : a < x < b\}.$$

El intervalo (a, b) se llama *interior del segmento* $[a, b]$.

Los conjuntos numéricos

$$[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a \leqslant x < b\} \quad \text{y} \quad (a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x : a < x \leqslant b\}$$

se llaman *intervelos semiabiertos*.

Los segmentos $[a, b]$, los intervalos (a, b) y los intervalos semiabiertos $[a, b)$, $(a, b]$ se llaman *intervalos*; los puntos a y b, sus *extremos*; a, el extremo derecho y b, el izquierdo y los puntos x son tales que $a < x < b$ se llaman sus *puntos interiores*.

Si a y b son finitos, es decir, $a \in R$ y $b \in R$, entonces el intervalo con extremos a y b se llama también *intervalo numérico* y el número $b - a$, su *longitud*.

Si al menos uno de los números a y b es infinto, entonces el intervalo con extremos a y b se llama *infinito*.

OBSERVACIÓN 1. Los intervalos de todos los tipos de la recta numérica extendida poseen la siguiente propiedad: *si los puntos $\alpha \in \bar{R}$ y $\beta \in \bar{R}$, $\alpha < \beta$ pertenecen a cierto intervalo con los extremos $a \in \bar{R}$ y $b \in \bar{R}$, entonces todo el segmento $[\alpha, \beta]$ pertenece a este intervalo*.

Para los intervalos de cada tipo esto se deduce directamente de su definición.

Un concepto importante para el futuro es el concepto de ε-entorno de un punto de la recta numérica extendida.

En el caso $a \in R$, es decir, cuando a es un número real, se llama ε-entorno $U(a, \varepsilon)$*), $\varepsilon > 0$, del número a el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$:

$$U(a, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Si $a = +\infty$, entonces

$$U(+\infty, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right],$$

y si $a = -\infty$, entonces

$$U(-\infty, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \left[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

*) La notación del entorno de un punto con el símbolo U viene del vocablo alemán Umgebung (entorno).

De esta forma, en todos los casos, es decir, cuando a es un número real o cuando a es uno de los infinitos $+\infty$, $-\infty$, con la disminución del número ε los ε-entornos correspondientes $U(a, \varepsilon)$ disminuyen: si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces $U(a, \varepsilon_1) \subset U(a, \varepsilon_2)$.

A veces resulta cómodo completar el conjunto de los números reales no con dos, sino con un infinito (sin signo) ∞. Su ε-entorno $U(\infty, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, se define por la igualdad

$$U(\infty, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \left\{x : x \in \boldsymbol{R},\ |x| > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\}.$$

Dicho de otra forma, el ε-entorno $U(\infty, \varepsilon)$ está compuesto por dos intervalos infinitos $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$ y por el propio elemento ∞. Este elemento a veces también se llama *punto infinitamente alejado* de la recta numérica. A diferencia de los infinitos con signo: $+\infty$ y $-\infty$, el infinito sin signo ∞ no está relacionado con los números reales por la relación de orden.

Cualquier ε-entorno de un punto finito o infinitamente alejado de la recta numérica se llama *entorno de este punto* y a menudo se denota simplemente por $U(a)$. A veces denotaremos a los entornos con otras letras, por ejemplo, con las letras V, W.

Junto con los entornos de los infinitos, definidos anteriormente, en el conjunto de los números reales completado por ellos, a veces se analizan los entornos de los infinitos ∞, $+\infty$ y $-\infty$ en el propio conjunto de los números reales: $U(\infty) \cap \boldsymbol{R}$, $U(+\infty) \cap \boldsymbol{R}$ y $U(-\infty) \cap \boldsymbol{R}$. Los propios infinitos, naturalmente, ya no caen en estos entornos. Nos mantendremos en las definiciones dadas inicialmente (señalemos además que el lema que se demuestra más adelante se mantiene válido en el caso cuando en él por entornos de los infinitos entendemos sus entornos en el conjunto de los números reales).

Enunciemos en forma de lema una importante propiedad de los entornos.

Lema. *Para dos puntos diferentes cualesquiera de la recta numérica extendida (extendida o bien con ayuda de dos infinitos con signo o bien sólo con ayuda de un infinito sin signo) existen entornos que no se intersecan.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos inicialmente el caso de la recta numérica extendida $\bar{\boldsymbol{R}}$ obtenida con la incorporación de dos infinitos con signo al conjunto de los números reales $\boldsymbol{R}$. Mostremos que para cualesquiera $a \in \bar{\boldsymbol{R}}$ y $b \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $a < b$, existen $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$. En realidad si a y b son números reales, entonces se puede tomar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{b - a}{2}$ (fig. 6, *a*). Si a es un número real y $b = +\infty$, entonces, en calidad de los $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ señalados sirven, por ejemplo, $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{|a| + 1}$ (fig. 6, *b*). Si $a = -\infty$ y b es un número real, entonces se puede tomar $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{|b| + 1}$, $\varepsilon_2 = 1$ (fig. 6, *c*). Finalmente, si $a = -\infty$ y $b = +\infty$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario, los entornos $U(-\infty, \varepsilon)$ y $U(+\infty, \varepsilon)$ no se intersecan (fig. 6, *d*).

Si la recta numérica $\boldsymbol{R}$ está completada sólo por un infinito ∞, entonces es suficiente analizar sólo el caso $a \in \boldsymbol{R}$ y $b = \infty$ (ya que el caso $a \in \boldsymbol{R}$ y $b \in \boldsymbol{R}$ está analiza-

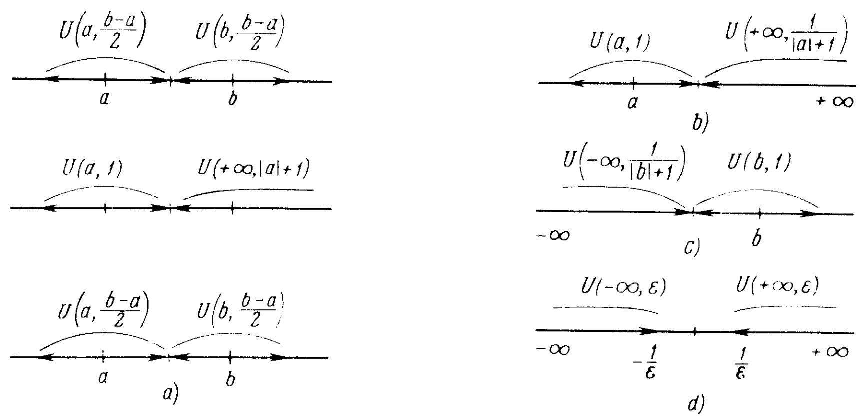


FIG. 6

do anteriormente), en el cual se puede tomar de nuevo (como para $a \in \boldsymbol{R}$, $b = +\infty$) $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{|a| + 1}$. $\square$

OBSERVACIÓN 2. En el caso $a < b$, $a \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $b \in \bar{\boldsymbol{R}}$ y $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$ para cualesquiera $x \in U(a, \varepsilon_1)$ e $y \in U(b, \varepsilon_2)$, evidentemente es válida la desigualdad $x < y$.

Su validez se establece directamente con una comprobación de todos los casos aquí posibles, es decir, para $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, para $a \in \boldsymbol{R}$, $b = +\infty$, para $a = -\infty$, $b \in \boldsymbol{R}$ y para $a = -\infty$, $b = +\infty$.

3.3. CONJUNTOS ACOTADOS Y NO ACOTADOS

Introduzcamos una serie de conceptos necesarios para el futuro y estudiemos algunas propiedades de los conjuntos numéricos.

Definición 3. *Si para el subconjunto E de números reales existe un número b tal que no es menor que cada número $x \in E$, es decir, para cualquier $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant b$, entonces el conjunto E se llama acotado superiormente y el número b, número que acota superiormente el conjunto E.*

Un conjunto que no sea un conjunto acotado superiormente se llama *no acotado superiormente*.

Con ayuda de los símbolos lógicos la definición de conjunto acotado superiormente se escribe de la siguiente forma:

el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ está acotado superiormente $\Leftrightarrow (\exists b \in \boldsymbol{R})\,(\forall x \in E) : x \leqslant b$, de aquí

el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ no está acotado superiormente $\Leftrightarrow (\forall b \in \boldsymbol{R})\,(\exists x \in E) : x > b$, es decir, el conjunto E no está acotado por arriba si cualquiera que sea el número $b \in \boldsymbol{R}$ se encuentra un número $x \in E$ tal que $x > b$.

Observemos que si el número b acota superiormente el conjunto E, es decir, para todas las $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant b$ y $b < b'$, entonces, para todas las $x \in E$ evidentemente, tiene lugar la desigualdad $x \leqslant b'$, y por consiguiente, el número b' también acota superiormente el conjunto E.

Si en el conjunto E se tiene un número b que no es menor que todos los otros números de E, se decir, $b \in E$ y para todos los $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant b$, entonces, el número b se llama *número máximo* o *mayor del conjunto* E : $b = \max$

Evidentemente, si en el conjunto E se tiene un número máximo, entonces, éste es único y el propio conjunto E, en este caso, está acotado superiormente por este número.

Señalemos además, que si el conjunto E no está acotado superiormente, entonces por la definición, esto significa que para cualquier número $b \in \boldsymbol{R}$ existe al menos un elemento $x \in E$ tal que $x > b$. Prestemos atención a que en realidad hay un número infinito de tales elementos. En efecto, supongamos que hay un número finito de éstos: $x_1, \ldots, x_n$, $n \in N$. Dicho de otro modo, para todos los $x \in E$ y $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ es válida la desigualdad $x \leqslant b$. Entonces, es evidente que para $b_0 = \max\{b, x_1, \ldots, x_n\}$ y todos los $x \in E$ se cumple desigualdad $x \leqslant b_0$, es decir, pese a la suposición, el conjunto E resultó ser acotado.

De forma análoga al conjunto acotado superiormente, se define un conjunto acotado inferiormente.

Definición 4. *Si para el subconjunto E de números reales existe un número a tal que no es mayor que cada número $x \in E$, es decir, para cualquier $x \in E$ se cumple la desigualdad $a \leqslant x$, entonces, el conjunto E se llama acotado inferiormente y el número a, número que acota inferiormente este conjunto.*

Un conjunto que no esté acotado inferiormente se llama *conjunto no acotado inferiormente.*

Con ayuda de los símbolos lógicos la definición de conjunto acotado inferiormente se escribe de la siguiente forma:

el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ está acotado inferiormente $\Leftrightarrow (\exists a \in \boldsymbol{R})\ (\forall x \in E) : x \geqslant a$, de aquí

el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ no está acotado inferiormente $\Leftrightarrow (\forall a \in \boldsymbol{R})\ (\exists x \in E) :$ $: x < a$, es decir, el conjunto E no está acotado inferiormente si cualquiera que sea el número $a \in \boldsymbol{R}$ se encuentra un elemento $x \in E$ tal que $x < a$.

Es evidente que si el número a acota inferiormente el conjunto E, entonces cualquier número $a' < a$ también acota inferiormente este conjunto.

Si en el conjunto E se tiene un número a que es no mayor que todos los otros números de E, es decir, $a \in E$ y para todos los $x \in E$ se cumple la desigualdad $a \leqslant x$, entonces, el número a se llama *número mínimo* o *menor del conjunto* E: $a = \min E$.

Si en el conjunto E se tiene un número mínimo, entonces, éste es único y el propio conjunto E, en este caso, está acotado inferiormente por este número.

Definición 5. *Un conjunto acotado superior e inferiormente se llama simplemente conjunto acotado.*

Con otras palabras, el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ se llama acotado si existen números a y b tales que para cualquier $x \in E$ se cumple la desigualdad $a \leqslant x \leqslant b$.

Es evidente que un conjunto no acotado puede estar no acotado superior e inferiormente.

Un conjunto que no está acotado se llama no acotado.

Ejercicio 3. Demuéstrese que el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ está acotado si y sólo si existe un número $a \geqslant 0$ tal que para todos los $x \in E$ se cumple la desigualdad $|x| \leqslant a$.

El segmento $[1, 2]$, el intervalo $(0, 1)$, el conjunto de los valores de la función sen x son ejemplos de conjuntos acotados. El intervalo infinito $(-5, +\infty)$, el conjunto de los números naturales $1, 2, 3, \ldots$ son conjuntos acotados inferiormente pero no acotados superiormente. Por último, el conjunto de todos los números enteros, de todos los números racionales, son conjuntos no acotados tanto superior como inferiormente.

La generalización formal de los conceptos de conjuntos acotados superiormente, acotados inferiormente y simplemente acotados sobre los subconjuntos del conjunto extendido $\bar{\boldsymbol{R}}$ de los números reales $\boldsymbol{R}$ (véase el p. 2.5) no nos lleva a conceptos sustanciales, ya que todos los subconjuntos del conjunto extendido de los números reales están acotados superiormente por el símbolo $+\infty$ e inferiormente por el símbolo $-\infty$ y por esto son simplemente acotados en $\bar{\boldsymbol{R}}$. No obstante, el concepto de elemento máximo (mínimo) de un conjunto también es sustancial en este caso. Su definición formalmente coincide con la definición correspondiente para los subconjuntos de conjunto no extendido de los números reales:

el número finito o infinito $c \in E \subset \bar{\boldsymbol{R}}$ se llama máximo (mínimo) en el conjunto $E \subset \bar{\boldsymbol{R}}$ si para todas las $x \in E$ se cumple la desigualdad $x \leqslant c$ (respectivamente $x \geqslant c$).

Más adelante nos serviremos de este concepto.

3.4. COTAS SUPERIOR E INFERIOR DE LOS CONJUNTOS DE NÚMEROS

Entre todos los números que acotan superiormente (inferiormente) un conjunto dado, el menor (mayor) de ellos, tiene un nombre especial.

Definición 6. *El menor entre todos los números que acotan superiormente el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ se llama cota superior y se denota*) por* $\sup E$ *o* $\sup\limits_{x \in E} \{x\}$.

Definición 7. *El mayor entre todos los números que acotan inferiormente el conjunto $E \subset \boldsymbol{R}$ se llama cota inferior y se denota**) por* $\inf E$ *o* $\inf\limits_{x \in E} \{x\}$.

A veces, la cota superior (inferior) de un conjunto la llaman *cota superior (inferior) exacta* de este conjunto.

Señalemos que en las definiciones hechas no se analiza la cuestión de si existe o no el número menor (respectivamente mayor) entre todos los números que acotan superiormente (inferiormente) el conjunto dado, esto se hará más tarde. Aquí sólo se dice que si tal número existe entonces se llama cota superior (respectivamente inferior) del conjunto analizado. De la propia definición de cota superior (inferior) se deduce que si para un conjunto dado esta cota existe, entonces es única ya que en cualquier conjunto el número máximo (mínimo) puede ser uno solo.

*) Del vocablo latino supremum, mayor.

**) Del vocablo latino infimum, menor.

Analicemos las definiciones 6 y 7. Sea $\beta = \sup E$. Esto significa, en primer lugar que el número β acota superiormente el conjunto E, es decir, para cada $x \in E$ es válida la desigualdad $x \leqslant \beta$; en segundo lugar, que el número β es el menor entre todos los números que acotan superiormente el conjunto E, es decir, cualquiera que sea el número $\beta' < \beta$ ya no acota superiormente al conjunto E y esto significa que en el conjunto E se encuentra un número x, tal que $x > \beta'$.

Así en "forma aritmética" la definición 6 se puede escribir de la siguiente manera.

Definición 6'. *El número β se llama cota superior del conjunto E si*

1°) $\forall x \in E : x \leqslant \beta$,

2°) $(\forall \beta' < \beta)\ (\exists x \in E) : x > \beta'$.

La condición 2°) se puede parafrasear del siguiente modo:

2[1]) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in E) : x > \beta - \varepsilon$.

Para convencerse de la equivalencia de las condiciones 2° y 2[1] es suficiente tomar β^* y ε relacionados por la igualdad $\beta^* = \beta - \varepsilon$ de lo cual se deriva que la condición $\varepsilon > 0$ es equivalente a la condición $\beta' < \beta$.

De forma análoga, si $\alpha = \inf E$, entonces por la definición 7, en primer lugar, el número α acota inferiormente el conjunto E y en segundo lugar cualquier número $\alpha' > \alpha$ ya no acota inferiormente este conjunto, ya que el número α es el mayor entre todos los números tales. Esto significa que para cualquier $\alpha^* > \alpha$ se encuentra $x \in E$ tal que $x < \alpha'$. Por consiguiente la definición 7 se puede parafrasear de la siguiente forma.

Definición 7'. *El número α se llama cota inferior del conjunto E si*

1°) $\forall x \in E : x \geqslant \alpha$,

2°) $(\forall \alpha' > \alpha)\ (\exists x \in E) : x < \alpha'$.

La condición 2°) es equivalente a la condición

2[1]) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in E) : x < \alpha + \varepsilon$.

Para convencerse de la equivalencia de las condiciones 2°) y 2[1]) es suficiente tomar $\alpha' = \alpha + \varepsilon$.

Hagamos algunas observaciones evidentes. Si un conjunto no vacío $E \subset \boldsymbol{R}$ tiene cota superior $\beta \in \boldsymbol{R}$ (tiene cota inferior $\alpha \in \boldsymbol{R}$), entonces es acotado superiormente (respectivamente inferiormente). Esto se deduce de la condición 1° de la definición 6' (de la definición 7').

Si $\beta = \sup E$ ($\alpha = \inf E$) y el número b (el número a) acota superiormente (inferiormente) el conjunto E, entonces $\beta \leqslant b$ (respectivamente $a \leqslant \alpha$). Esto se deduce de que la cota superior (inferior) de un conjunto es el número menor (mayor) entre todos los números que acotan superiormente (inferiormente) el conjunto dado.

Si en el conjunto existe el número máximo (mínimo), entonces es cota superior (inferior) de este conjunto. En particular, tal situación tiene lugar para los conjuntos finitos: cualquier conjunto finito de números tiene un número máximo y uno mínimo y por tanto cota superior e inferior. En principio, se pueden hallar simplemente analizando todos los números del conjunto dado, ya que es finito. No obstante, en general, sólo en principio y no en la práctica: si en el conjunto finito analizado, dado por ciertas propiedades de sus elementos, hubiera muchos, entonces, analizarlos a todos no está al alcance incluso de una superpotente máquina computadora moderna.

Citemos ejemplos que ilustran el concepto de cota superior e inferior de un conjunto.

El conjunto de todos los números reales positivos, denotémoslo por $\boldsymbol{R}_+$, está acotado inferiormente por el número cero, ya que para cualquier $x \in \boldsymbol{R}_+$ tiene lugar $x > 0$ y además $\inf \boldsymbol{R}_+ = 0$. El conjunto $\boldsymbol{R}_+$ no está acotado superiormente, ya que no hay un número que acote superiormente todos los números positivos.

Si $E = [a, b]$ es un segmento, entonces $\inf E = a$, $\sup E = b$. Si $E = (a, b)$ es un intervalo, entonces, también, $\inf E = a$, $\sup E = b$. Si finalmente el conjunto E está compuesto por dos puntos a y b, $a \leqslant b$, es decir, $E = \{a\} \cup \{b\}$, entonces de nuevo $\inf E = a$, $\sup E = b$. Estos ejemplos muestran, en particular, que la cota superior (inferior) de un conjunto puede pertenecer al mismo conjunto o no.

Pasemos ahora al esclarecimiento de la cuestión: ¿ existe siempre la cota superior (inferior) de un conjunto de números? Si el conjunto no está acotado superiormente (inferiormente), entonces no existen números que lo acoten superiormente (inferiormente). Por consiguiente, no existe entre ellos el mínimo (máximo). De esta forma, si el conjunto no está acotado superiormente (inferiormente), entonces no tiene cota superior (inferior). En este caso, la respuesta a la pregunta planteada se obtuvo fácilmente. Si el conjunto está acotado superiormente (inferiormente), entonces la respuesta es dada por el siguiente teorema.

Teorema 1. *Cualquier conjunto de números no vacío acotado superiormente tiene cota superior y cualquier conjunto de números no vacío acotado inferiormente tiene cota inferior.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto de números no vacío acotado superiormente. Denotemos por B el conjunto de todos los números que acotan superiormente el conjunto A. Por cuanto el conjunto A está acotado superiormente, el conjunto B no es vacío. Cada elemento $y \in B$ acotado por arriba el conjunto A, es decir, para cualquier elemento $x \in A$ se cumple la desigualdad $x \leqslant y$. Por cuanto, x e y son elementos arbitrarios correspondientes a los conjuntos A y B, entonces por la propiedad de la continuidad de los números reales (véase la propiedad V en el p. 2.1) existe un número β tal que para cualesquiera $x \in A$ e $y \in B$ tiene lugar la desigualdad

$$x \leqslant \beta \leqslant y. \tag{3.2}$$

El cumplimiento de la desigualdad $x \leqslant \beta$ para todos los $x \in A$ significa que el número β acota superiormente el conjunto A y el cumpliemiento de la desigualdad $\beta \leqslant y$ para todos los $y \in B$, es decir, para todos los números que acotan superiormente el conjunto A, significa que el número β es el menor entre todos estos números, es decir, es la cota superior del conjunto A:

$$\beta = \sup A. \tag{3.3}$$

Así pues, la existencia de la cota superior para un conjunto no vacío acotado superiormente está demostrada.

Si ahora B es un conjunto de números no vacío acotado inferiormente, entonces llevamos al conjunto A todos los números que acotan inferiormente el conjunto B. Más adelante, razonando análogamente al caso analizado de la cota superior, fácilmente nos convencemos de que por la propiedad de la continuidad de los números reales existe un número α que para cualesquiera $x \in A$ e $y \in B$ se cumple la desigualdad

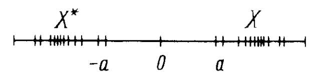


FIG. 7

$$X \leqslant \alpha \leqslant y. \tag{3.4}$$

Esto evidentemente significa que

$$\alpha = \inf B. \tag{3.5}$$

Por otra parte, la afirmación sobre la existencia de la cota inferior de un conjunto no vacío acotado inferiormente se puede obtener de la afirmación ya demostrada sobre la existencia de la cota superior de un conjunto no vacío acotado superiormente. Para esto es suficiente observar que si el conjunto E es un conjunto acotado inferiormente, entonces el conjunto E^* de todos los números es $-x$, donde $x \in E$, es decir, el conjunto sobre la recta numérica, simétrico al conjunto E con respecto al cero es ya un conjunto acotado superiormente (fig. 7). Efectivamente, si el número a acota inferiormente el conjunto E, entonces el número $-a$ acota superiormente el conjunto E^*. De aquí fácilmente se deduce que $\inf E = -\sup E^*$. □

El teorema sobre la existencia de las cotas superiores e inferiores pertenece a los tal llamados teoremas de existencia puros: en él se demuestra que en determinadas condiciones para el conjunto existe la cota superior, respectivamente la cota inferior. No obstante, de los razonamientos desarrollados en la demostración de este teorema no se deduce el método para encontrar estas cotas en un caso concreto. Esto se deduce de que la construcción del conjunto B, con ayuda del cual se realizó la demostración del teorema y que estaba constituido por todos los números que acotaban superiormente el conjunto analizado es equivalente a la búsqueda de la cota superior β de este conjunto. En realidad el problema de encontrar la cota superior (inferior) de un conjunto dado por ciertas condiciones de éste, puede resultar ser un problema muy difícil.

Si el conjunto no está acotado superiormente (inferiormente), entonces, como ya se señaló, ningún número puede ser su cota superior (inferior) ya que en general, no hay números que lo acoten superiormente (inferiormente). Para mayor comodidad se introduce la siguiente definición.

La cota superior de un conjunto no acotado superiormente se llama $+\infty$ y la cota inferior de un conjunto no acotado inferiormente se llama $-\infty$.

Esta definición es natural, ya que en los acuerdos tomados con respecto al uso de los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ en el p. 2.5 las cotas infinitas de los conjuntos así definidos también satisfacen las condiciones 1° y 2° de las definiciones 6′ y 7′.

La comodidad de esta definición consiste en que ahora *cada conjunto de números no vacío tiene una cota superior que pertenece al conjunto extendido de los números reales*. Además, si el conjunto dado está acotado superiormente, entonces su cota superior es finita, si no está acotado superiormente, entonces es infinita y es igual a $+\infty$. La afirmación análoga es válida para la cota inferior.

Ejercicios. 4. Supongamos que están dados los conjuntos de números X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ y sea

$$X \overset{\text{def}}{=} \{x : x = x_1 + \dots x_n, x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Demuéstrese que $\sup X = \sum\limits_{i=1}^{n} \sup X_i$.

5. Supongamos que están dados los conjuntos de números X e Y y sea

$$Z \overset{\text{def}}{=} \{z : z = x - y, x \in X, y \in Y\}.$$

Demuéstrese que $\sup Z = \sup X - \inf Y$.

Mostremos ahora, que del teorema sobre la existencia de las cotas superiores e inferiores se derivan dos propiedades importantes de los números reales, el así llamado principio de Arquímedes*) y el principio de los segmentos encajados.

3.5. PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

El principio de Arquímedes de los números reales consiste en lo siguiente:

Teorema 2. *Cualquiera que sea el número real a, existe un número natural n tal que $n > a$*, es decir,

$$(\forall a \in \boldsymbol{R})(\exists n \in N) : n > a.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el principio de Arquímedes no se cumple. Esto significa que existe un número a tal que para todos los naturales n se cumple la desigualdad $n \leqslant a$, es decir $(\exists a \in \boldsymbol{R})(\forall n \in N) : n \leqslant a$. Esto quiere decir, que el número a acota superiormente el conjunto de los números naturales. Por esto, el conjunto de los números naturales como cualquier conjunto de números no vacío acotado superiormente, por el teorema 1 del p. 2.8 tiene una cota superior finita. Denotémosla por β, $\beta = \sup W$.

Por cuanto $\beta - 1 < \beta$, entonces por la condición 2° de la cota superior en la definición 6′ del p. 2.8 existe un número natural n tal que $n > \beta - 1$. Pero entonces, $n + 1 > \beta$ y por la definición de los números naturales $n + 1 \in W$. La desigualdad $n + 1 > \beta$ contradice que $\beta = \sup N$ ya que la cota superior de un conjunto lo acota superiormente (véase la propiedad 1° de la cota superior en la definición 6′ del p. 2.8). La contradicción obtenida muestra que el número a indicado no existe, es decir, que el principio de Arquímedes es válido. □

Corolario. *Cualesquiera que sean los números a y b, $0 < a < b$, existe un número natural n tal que $na > b$.*

En efecto, por el principio de Arquímedes, para el número b/a existe un natural n tal que $n > b/a$. Este es el número n buscado, ya que multiplicando la desigualdad $n > b/a$ por el número positivo a obtendremos $na > b$.

Esta afirmación tiene un simple sentido geométrico: si tomamos dos segmentos de longitudes a y b, $0 < a < b$, respectivamente, entonces trazando en el segmento mayor desde un extremo dado, el segmento menor, después de un número finito de pasos salimos de los límites del segmento mayor (fig. 8).

Ejemplo. Supongamos que el conjunto E está compuesto por los números del tipo $\dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Hallemos $\sup E$ e $\inf E$.

*) Arquímedes (287-212 a.n.e.), matemático y mecánico de la Antigua Grecia.

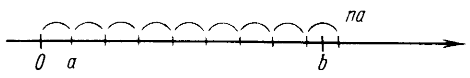


FIG. 8

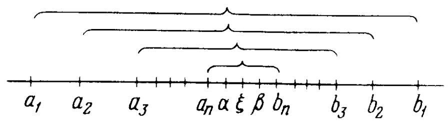


FIG. 9

Por cuanto el conjunto E tiene un número máximo 1, entonces éste es su cota superior: $\sup\limits_{n \in N} \left\{\frac{1}{n}\right\} = 1$. Para hallar la cota inferior del conjunto E observemos que para cualquier $n = 1, 2, \dots$ es válida la desigualdad $\frac{1}{n} > 0$, es decir, el cero acota inferiormente el conjunto E. Mostremos que él es el mayor entre todos estos números. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por el principio de Arquímedes existe un natural n tal que $n > \frac{1}{\varepsilon}$ o lo que es lo mismo $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Esta desigualdad muestra que cualquier número $\varepsilon > 0$ ya no acota inferiormente el conjunto E, ya que $\frac{1}{n} \in E$ para cualquier $n = 1, 2, \dots$. Así pues, el cero es el mayor de todos los números que acotan inferiormente el conjunto E, es decir, $\inf\limits_{n \in N} \left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$.

3.6. PRINCIPIO DE LOS SEGMENTOS ENCAJADOS

Ante todo aclaremos qué sistema de segmentos se llama encajado.

Definición 8. *El sistema de segmentos numéricos*

$$[a_1 b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots, a_n \in \mathbf{R}, \qquad b_n \in \mathbf{R}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

se llama sistema de segmentos encajados si

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n \leqslant \dots \leqslant b_n \leqslant \dots \leqslant b_2 \leqslant b_1, \tag{3.6}$$

es decir si cada segmento $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ *siguiente se contiene en el anterior* $[a_n, b_n]$ (fig. 9):

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots.$$

Teorema 3. *Para cualquier sistema de segmentos encajados existe al menos un número que pertenece a todos los segmentos del sistema dado.*

Esta propiedad de los números reales se llama también *continuidad del conjunto de los números reales en el sentido de Cantor*)*.

*) G. Cantor (1845 — 1918), matemático alemán.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Omega = \{[a_n, b_n]\}$ un sistema de segmentos encajados. Por las desigualdades (3.6) el conjunto $\{a_n\}$ de todos los extremos izquierdos del sistema Ω está acotado superiormente, por ejemplo, por el número b_1. Por esto, por el teorema sobre la existencia de la cota superior (véase el teorema 1 en el p. 3.4) para el conjunto $\{a_n\}$ existe la cota superior finita (fig. 9)

$$\alpha = \sup \{a_n\}. \tag{3.7}$$

Por cuanto el extremo derecho b_n de cualquier segmento del sistema Ω por las desigualdades (3.6) acota superiormente el conjunto $\{a_n\}$ y α es la cota superior de este conjunto, es decir, el menor de todos los números que acotan $\{a_n\}$ superiormente, entonces, para todos los $n = 1, 2, \dots$ se cumple la desigualdad

$$\alpha \leqslant b_n. \tag{3.8}$$

Esto significa que el conjunto $\{b_n\}$ de todos los extremos derechos de los segmentos del sistema Ω está acotado inferiormente y por esto existe la cota inferior finita

$$\beta = \inf \{b_n\}. \tag{3.9}$$

Por cuanto, el número α de acuerdo con (3.8) acota inferiormente el conjunto $\{b_n\}$ y la cota inferior β de este conjunto es el mayor entre todos estos números, entonces $\beta \geqslant \alpha$. Así pues, tenemos que para todos los $n = 1, 2, \dots$ son válidas las desigualdades

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n. \tag{3.10}$$

De aquí se deduce que cada punto del segmento $[\alpha, \beta]$ se contiene en todos los segmentos del sistema Ω: si $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, entonces para todos los $n = 1, 2, \dots$ tiene lugar la desigualdad $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, es decir, $x \in [a_n, b_n]$. □

OBSERVACIÓN. En la demostración del teorema 3 fue mostrado que cada punto del segmento $[\alpha, \beta]$ pertenece a todos los segmentos del sistema Ω y por consiguiente a su intersección, es decir,

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]. \tag{3.11}$$

Es fácil convencerse de la inclusión opuesta. Si $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, entonces para todos los $n = 1, 2, \dots$ tenemos $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. Por cuanto el número x acota superiormente el conjunto $\{a_n\}$ y $\alpha = \sup \{a_n\}$ es el menor entre todos estos números, entonces $\alpha \leqslant x$. Análogamente se muestra que $x \leqslant \beta$.

De esta forma, el punto x pertenece al segmento $[\alpha, \beta]$, es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset [\alpha, \beta]. \tag{3.12}$$

De (3.11) y (3.12) se deduce que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [\alpha, \beta]. \tag{3.13}$$

Definición 9. *Sea dado el sistema de segmentos* $[a_n, b_n]$, $a_n \in R$, $b_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$. *Diremos que la longitud* $b_n - a_n$ *de los segmentos de este sistema tiende a cero si para cada número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* n_ε *tal que para todos los números* $n \geqslant n_\varepsilon$ *se cumple la desigualdad* $b_n - a_n < \varepsilon$.

En el curso de matemática elemental se introduce el concepto de límite de una sucesión. La definición enunciada en los términos de límite, significa que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. En nuestro curso, al límite de una sucesión le será dedicado el párrafo siguiente.

Señalemos que el término "número" es sinónimo de término "número natural". El índice ε del número n_ε muestra que este número depende del número dado $\varepsilon < 0$.

Teorema 4. *Para cualquier sistema* $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, *de segmentos encajados con longitudes que tienden a cero existe un punto único* ξ *que pertenece a todos los segmentos del sistema dado* (véase la fig. 9) *y*

$$\xi = \sup_{n\in N}\{a_n\} = \inf_{n\in N}\{b_n\}. \tag{3.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario pero fijo. De la condición de que las longitudes de los segmentos $[a_n, b_n]$ tienden a cero se deduce que existe un número n_ε tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $b_n - a_n < \varepsilon$.

Por cuanto de la desigualdad (3.10) se deduce que $\beta - \alpha \leqslant b_n - a_n$, entonces $0 \leqslant \beta - \alpha < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Esto es posible sólo en el caso cuando $\alpha = \beta$ (si $\beta > \alpha$ entonces, por ejemplo, para $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$ la desigualdad indicada se convierte en una afirmación incierta $\beta - \alpha < \beta - \alpha$). De esta manera, el segmento $[\alpha, \beta]$ en este caso se convierte en un punto que denotaremos por $\xi = \alpha = \beta$.

Por la fórmula (3.13) esto significa que existe sólo un punto único ξ que pertenece a todos los segmentos $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. La fórmula (3.14) se deduce de (3.7) y (3.9). □

Muy a menudo, en diferentes demostraciones se aplica la siguiente construcción de un sistema de segmentos encajados con longitudes que tienden a cero. Se toma un segmento $[a, b]$ y con el punto $(a + b)/2$ se divide en dos segmentos iguales $[a, (a + b)/2]$ y $[(a + b)/2; b]$ de longitud $(b - a)/2$. Más adelante, se escoge uno de estos segmentos (cuál específicamente depende de las condiciones del problema concreto), se denota por $[a_1, b_1]$ y de nuevo con su punto medio se divide en dos segmentos iguales, uno de los cuales se denota $[a_2, b_2]$ etc. Como resultado se obtiene un sistema de segmentos encajados $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, con longitudes $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n}$. Mostremos que estas longitudes tienden a cero.

En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$, por el principio de Arquímedes se encuentra un natural n_ε tal que $n_\varepsilon > \dfrac{b - a}{\varepsilon}$, pero entonces para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumplirá la desigualdad $n > \dfrac{b - a}{\varepsilon}$ y por consiguiente la desigualdad $\dfrac{b - a}{n} < \varepsilon$. Observando que

$$2^n = (1 + 1)^n = 1 + n + \frac{n(n - 1)}{2} + \ldots > n,$$

obtenemos $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Por esto, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ es válida la desigualdad $\dfrac{b - a}{2^n} < \dfrac{b - a}{n} < \varepsilon$. Esto significa que las longitudes de los segmentos $[a_n, b_n]$ tienden a cero cuando n crece.

Observemos que el principio de los segmentos encajados es una propiedad inherente específicamente al conjunto de los números reales. Así, el campo de sólo los números racionales ya no posee la propiedad análoga.

Por ejemplo, si tomamos la sucesión de los "segmentos racionales" [1, 2], [1,4; 1,5], [1,41; 1,42], [1,414; 1,415],*) es decir, la sucesión de conjuntos de los números racionales que están en los segmentos, cuuos extremos a_n y b_n, $n = 1, 2, \cdots$, son los valores de $\sqrt{2}$ calculados respectivamente con defectos o con exceso salvo $1/10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **), entonces evidentemente no existe ningún número racional que pertenezca a todos estos segmentos. En realidad, tal número sólo podría ser el número $\sqrt{2}$ (¿ por qué?) que sin embargo no es racional***).

Se puede demostrar una afirmacion más exacta. Llamemos campo de Arquímedes a un campo si para él se cumple el principio de Arquímedes, es decir, es válida la afirmación del teorema 2 del p. 3.5. La propiedad de un campo ordenado (véase la definición de campo en la observación al final del p. 2.2*), que consiste en que para sus elementos se cumple la propiedad del p. 2.1 se llama continuidad del campo según Dedeking (véase además el p. 2.5*) y la propiedad de un campo ordenado que se expresa en que cada sistema de sus segmentos encajados tiene intersección no vacía, se llama continuidad del campo según Cantor.

Para los campos ordenados de Arquímedes se puede mostrar que su contituidad según Dedekind, continuidad según Cantor y la existencia de cota superior finita para cada conjunto no vacío acotado superiormente son equivalentes entre sí, es decir, de cualquiera de estas propiedades tomada como axioma se derivan las dos restantes.

Fue demostrado que de la cintinuidad según Dedekind se deduce la existencia de la cota superior finita para un conjunto acotado superiormente, de donde a su vez, se deduce la continuidad según Cantor. Para culminar la demostración de la equivalencia indicada de los tres conceptos de continuidad de los campos de Arquímedes es suficiente mostrar que de la continuidad según Cantor se deduce la continuidad según Dedekind. La demostración de esta afirmación se puede encontrar, por ejemplo, en el libro de L. D. Kudriavtsev "Análisis matemático", tomo 1 (Editorial "Mir").

Anteriormente se señaló (véase el p. 2.4*) que todos los campos ordenados continuos según Dedekind son isomorfos entre sí. Ahora vemos que cualquier campo

*) En el caso cuando los extremos del segmento $[a, b]$ están escritos en forma de fracción decimal, la coma entre a y b se cambia por un punto y coma.

**) Esto significa que $a_n^2 \leqslant 2 \leqslant b_n^2$ y $b_n - a_n = 1/10^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

***) La demostración de la irracionalidad del número $\sqrt{2}$ que a menudo se lleva a cabo en la matemática elemental se realiza más adelante en el p. 6.3.

ordenado de Arquímedes que posee una de las tres propiedades de continuidad señaladas también es isomorfo al conjunto de los números reales (además cuando existe la continuidad según Dedekind la exigencia de que el campo sea de Arquímedes se puede eliminar; como fue demostrado en el p. 2.9, en este caso, siempre tendrá lugar).

Como conclusión prestemos atención además a que la afirmación análoga al teorema 3 resulta ser incierta para los intervalos numéricos de otro tipo que no sean segmentos. Por ejemplo, el sistema de intervalos encajados $(0, 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$: cada intervalo siguiente se contiene en el anterior, es decir,

$$\left(0, \frac{1}{n+1}\right) \subset \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

tiene, como es fácil ver, una intersección vacía. Pero naturalmente, existen sistemas de intervalos encajados, que tienen intersección no vacía.

Problema 1. Demuéstrese con ayuda de las cortaduras que para cualquier número $a > 0$ y cualquier natural n existe la raíz $\sqrt[n]{a}$.

§ 4. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

4.1. DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Ante todo definamos el concepto de una sucesión numérica.

Definición 1. *Supongamos que a cada número natural n se le ha puesto en correspondencia un cierto número real x_n (y a los números naturales diferentes n pueden resultar puestos en correspondencia números iguales). El conjunto de elementos x_n*), $n = 1, 2, \ldots$, se llama sucesión numérica o simplemente sucesión*; *cada elemento x_n se llama elemento (o término) de esta sucesión y n, su número.*

A la sucesión numérica con elementos x_n la denotaremos por x_n, $n = 1, 2, \ldots$, o bien por $\{x_n\}$.

Según la propia definición, una sucesión contiene siempre un conjunto infinito de elementos: cualesquiera dos elementos distintos de la sucesión se diferencian al menos por sus números cuya cantidad es infinita.

Es evidente, que la sucesión numérica es un caso particular de función. Más preciso, una sucesión es una *función definida sobre el conjunto de los números naturales y que toma valor en el conjunto de los números reales*, es decir, una función de la forma $f : N \to R$ (véase el p. 1.3*).

A veces en calidad de números es cómodo utilizar no todos los números naturales, sino sólo algunos de ellos. Por ejemplo, los números naturales a partir de cierto número natural n_0 : x_n, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, o sólo los números pares: x_n, $n = 2, 4, \ldots$. Ocurre que para la numeración se usan no sólo los números naturales, sino también otros números, por ejemplo x_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (aquí en calidad de un número más se agrega el cero). En todos estos casos se pueden numerar de nuevo los x_n utilizando todos los números naturales m y sólo ellos. En el primer ejemplo es necesario hacer $m = n - n_0 + 1$; en el segundo, $m = \frac{n}{2}$; en el tercero, $m = n + 1$. Por esto, en casos similares, también se dice que los x_n forman una sucesión y claro está, se indica qué valores toman los números n.

*) Aquí por elemento se entiende el par compuesto por el número natural y el número real correspondiente a él según la correspondencia analizada (llamado en lo adelante valor del elemento dado de la sucesión).

Definición 2. *El número a se llama límite de una sucesión $\{x_n\}$ dada si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

En este caso se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ o $x_n \to a$ cuando $n \to \infty$.

Utilizando los símbolos lógicos esta definición se puede escribir en la forma:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n > n_\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

La sucesión para la cual existe el límite se llama *convergente*.

De esta forma, la sucesión $\{x_n\}$ es convergente si existe un número a tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentra un número n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$.

Con el uso de los símbolos lógicos esta definición tiene la siguiente forma:

$$(\exists a \in R)(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n > n_\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Una sucesión que no es convergente se llama divergente.

Señalemos que la desigualdad (4.1) es equivalente a la desigualdad

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Recordemos que para un número $x \in R$ dado, cualquier intervalo del tipo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$, se llama *ε-entorno* o simplemente entorno del número (punto) x y se denota por $U(x, \varepsilon)$ o $U(x)$.

Con ayuda del concepto de entorno, la definición del límite de una sucesión se puede enunciar de la siguiente forma.

Definición 2′. *El número a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si en cualquiera de sus entornos se contienen casi todos los miembros de la sucesión, es decir, todos los términos de la sucesión excluyendo un número finito de ellos.*

De esta forma, el número a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si cualquiera que sea el entorno del punto a, fuera de ella hay sólo un conjunto finito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$, en particular, ni uno (es decir, un conjunto vacío, que como se sabe se considera entre los conjuntos finitos).

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $x_n < a$ (respectivamente $x_n > a$) para todos los $n = 1, 2, \ldots$, entonces se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge al número *a por la izquierda* (respectivamente *por la derecha*) y a veces en lugar de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 0$ (respectivamente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a + 0$). En el caso cuando $a = 0$, en lugar de $0 + 0$ y $0 - 0$ se escribe respectivamente simplemente $+0$ y -0.

El concepto de límite de una sucesión está relacionado en determinado sentido con el problema, que aparece en la práctica, de obtención del valor de cierta magnitud que nos interese, con una exactitud $\varepsilon > 0$, dada con anterioridad. Los valores x_n aproximados sucesivos de la magnitud analizada pueden obtenerse como el resultado de la realización de ciertos experimentos o del cálculo a base de fórmulas recurrentes cualesquiera o por cualquier otra vía. Este problema será evidentemente resuelto si se halla un número n_ε a partir del cual todos los valores x_n se desviarán del valor exacto de la magnitud analizada en los límites de la exactitud dada. Naturalmente, si el n_ε indicado existe sólo para un $\varepsilon > 0$ dado, esto aún no significa que la sucesión $\{x_n\}$ converge: en la definición de límite de una sucesión se exige que el número correspondiente n_ε puede ser elegido para cualquier $\varepsilon > 0$.

Ejemplos 1. La sucesión $\{1/n\}$ converge y su límite es cero. En realidad, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, por el principio de Arquímedes (véase el p. 3.5) de los números reales, existe un número natural n_ε, tal que $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Por esto, para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ y esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Es evidente que la sucesión $\{1/n\}$ converge a cero por la derecha.

2. La sucesión $\left\{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} n\right\}$ es divergente. En realidad, cualquiera que sea el número a, fuera de su ε-entorno, por ejemplo, cuando $0 < \varepsilon < 1$, a ciencia cierta hay un número infinito de términos de la sucesión dada y esto significa que no es su límite.

3. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} n\right\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} n = 0$, lo cual se deduce (¿por qué?) de que

$$\left|\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} n\right| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

La sucesión convergente $\left\{\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} n\right\}$ no es una sucesión que converge hacia su límite por la izquierda o por la derecha.

4. La sucesión $\{n\}$ diverge.

En efecto, cualquiera que sea el número a, por ejemplo, para $\varepsilon = 1$ se encuentra, por el principio de Arquímides, un natural n_0 tal que $n_0 > a + 1$. Por consiguiente, para todos los naturales $n > n_0$ tendremos $n > a + 1$. Por esto, ningún número a puede ser límite de la sucesión $\{n\}$.

En los ejemplos 2 y 4 al demostrar la divergencia de las sucesiones, se utilizó la definición positiva de la condición de que el número a no es límite de la sucesión dada. Enunciemos esta definición.

Definición 3. *El número a no es*[*] *límite de la sucesión* $\{x_n\}$ *si existe* $\varepsilon > 0$ *tal que para cualquier natural n existe un natural* $m_n > n$[**] *tal que*

$$|x_{m_n} - a| \geqslant \varepsilon.$$

[*] Aquí la partícula "no" entra no en la definición, sino en el concepto definido.

[**] El índice n en el número m_n muestra que este número depende de la elección del número n.

En símbolos lógicos esta definición tiene la forma

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq a \Leftrightarrow (\exists\varepsilon > 0)(\forall_n \in N)(\exists m > n): |x_m - a| \geqslant \varepsilon.$$

Recordemos que en el enunciado de la negación de cualquier afirmación, los símbolos lógicos de existencia $\exists$ y de universalidad $\forall$ se intercambian. Precisamente así ha ocurrido en el caso dado, de lo cual es fácil convencerse comparando las escrituras de las definiciones 2 y 4 en símbolos lógicos.

Observemos que la definición 3 no es una definición independiente, ella es una consecuencia lógica de la definición 2.

Ejercicios 1. Enúnciese la definición positiva del concepto de sucesión divergente.

2. Demuéstrese que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Problema 2. Demuéstrese que la sucesión $\{x_n\}$ diverge si y sólo si existe un $\varepsilon > 0$ tal que cualquiera que sea el número real a y cualquiera que sea el número n, existe un número $m > n$ para el cual se cumple la desigualdad $|x_m - a| \geqslant \varepsilon$.

Ejercicio 3. Escríbanse la definición positiva de sucesión divergente y la condición del problema 2 en símbolos lógicos y compárense.

En los ejemplos analizados anteriormente, la existencia o ausencia de los límites para las sucesiones dadas fue bastante evidente y la demostración se redujo a la comprobación elemental de la definición de límite de una sucesión.

En calidad de ejemplo más complejo de la búsqueda del límite de una sucesión demostraremos la siguiente afirmación.

Ejemplo 5. *Si la sucesión* $\{x_n\}$ *converge, entonces la sucesión de las medias aritméticas de sus términos*

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

también converge y además, al mismo límite que la propia sucesión $\{x_n\}$.

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Ante todo, observemos que para cualesquiera números naturales n_0 y $n > n_0$ tiene lugar la igualdad

$$y_n - a = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a =$$
$$= \frac{x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a}{n} + \frac{(x_{n_0+1} - a) + \ldots + (x_n - a)}{n}. \quad (4.2)$$

Si ahora está dado $\varepsilon > 0$, entonces por la definición de límite existe un número n_0 tal que para todos los $n > n_0$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.3)$$

Por cuanto $x_1 + \ldots + x_{n_0} - n_0 a$ es un número dado y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, entonces como no es difícil ver

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\ldots+x_{n_0}-n_0a}{n}=0.$$

Por consiguiente, existe un número m_0 tal que para todos los $n > m_0$ se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{x_1+\ldots+x_{n_0}-n_0a}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Sea $n_\varepsilon = \text{máx}\,\{n_0, m_0\}$. Entonces para todos los números $n > n_\varepsilon$, por (4.2), (4.3) y (4.4) obtendremos

$$|y_n-a|\leqslant\left|\frac{x_1+\ldots+x_{n_0}-n_0a}{n}\right|+\frac{|x_{n_0+1}-a|+\ldots+|x_n-a|}{n}<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. □

Ejercicio 4. Demuéstrese: 1) que la eliminación o sustitución de un número finito de elementos de una sucesión no influye en su convergencia, y en el caso de una sucesión convergente no influye en el valor de su límite;

2) si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$ y $z_n = \begin{cases} x_k & \text{cuando } n = 2k-1, \\ y_k & \text{cuando } n = 2k, \end{cases}$ $k = 1, 2, \ldots$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

4.2. LÍMITES INFINITOS

Para mayor comodidad se introduce también el concepto de sucesiones que tienden al infinito. Tales sucesiones se llaman *infinitas*. Definámoslas.

Definición 4. *La sucesión $\{x_n\}$ se llama infinita si para cualquier número ε existe un número n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|x_n| > \varepsilon$.*

En este caso se utiliza el símbolo ∞ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Si la sucesión x_n, $n = 1, 2, \ldots$, es tal que para cualquier número ε* existe n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $x_n > \varepsilon$ (respectivamente $x_n < \varepsilon$), entonces se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (respectivamente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$). En todos estos casos se dice que la sucesión $\{x_n\}$ tiene *límite infinito*, igual respectivamente a ∞, $+\infty$ o $-\infty$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, es decir, $\{x_n\}$ es también una sucesión infinita. Es evidente que las sucesiones infinitas no tienen límite en el sentido que fue definido en el p. 3.1. La aplicación en este caso de la notación "lím" y la utilización de la palabra "límite" son tradicionales.

En el futuro siempre por límite de una sucesión entenderemos límite finito, es decir, un número, si no se acuerda lo contrario.

*) Es necesario prestar atención a que aquí ε no se supone positivo.

El término de "sucesión convergente" se utiliza sólo para las sucesiones que tienen límite finito.

Recordemos que en el p. 3.2. fue introducido el concepto de entorno para los números reales y para los infinitos ∞, $+\infty$ y $-\infty$. Resulta que utilizando el concepto de entorno, las definiciones de límite finito o cualquier infinito de una sucesión numérica se puede enunciar de un modo único.

Definición 5. *El punto a, finito o infinito (es decir, $a \in \boldsymbol{R}$ o a es uno de los infinitos ∞, $+\infty$ ó $-\infty$) se llama límite de una sucesión numérica $\{x_n\}$ si cualquiera que sea el entorno $U(a)$ del elemento a, para ella existe un número $n_0 \in N$ tal que para todos los $n \geqslant n_0$ es válida la inclusión $x_n \in U(a)$.*

Junto con las sucesiones numéricas, en nuestro curso se encontrarán sucesiones de puntos de la recta numérica extendida, es decir, colecciones $\{x_n\}$ de elementos del conjunto extendido de los números reales, numeradas por los números naturales $\bar{\boldsymbol{R}}$ (véase el p. 2.5). De esta forma, elementos de estas sucesiones, conjuntamente con los números reales, pueden ser los puntos infinitamente alejados $+\infty$ y $-\infty$. Para tales sucesiones también se puede introducir el concepto de límite, análogo al límite de las sucesiones numéricas y que los contienen en sí como caso particular.

Definición 6. *El punto a de la recta numérica extendida $\bar{\boldsymbol{R}}$ (es decir, un punto finito $a \in \boldsymbol{R}$ o uno de los infinitos con signo: $+\infty$ o $-\infty$) se llama límite de la sucesión de puntos $x_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, si cualquiera que sea el entorno $U(a)$ del punto a, para ella existe un número n_0 tal que para todos los números $n > n_0$ se cumple la inclusión*

$$x_n \in U(a).$$

OBSERVACIÓN 1. Para cualquier entorno $U(a, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, donde a es un número: $a \in \bar{\boldsymbol{R}}$ o uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$, existe un natural n tal que se cumple la inclusión $U\left(a, \frac{1}{n}\right) \subset U(a, \varepsilon)$. Para convencerse de esto es suficiente tomar $n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Por esto, si la sucesión $x_n \in \boldsymbol{R}$ es tal que para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la inclusión $x_n \in U\left(a, \frac{1}{n}\right)$ (aquí a es un número real o uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. En realidad, para cualquier entorno $U(a)$ existe un natural n_0 tal que $U\left(a, \frac{1}{n_0}\right) \subset U(a)$, entonces para todos los números $n > n_0$ tendremos $x_n \in U\left(a, \frac{1}{n}\right) \subset U\left(a, \frac{1}{n_0}\right) \subset U(a)$.

Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

OBSERVACIÓN 2. Si la sucesión $x_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, es tal que todos sus términos son iguales entre sí: $x_n = x_m$ para todos los $n \in N$ y $m \in N$, entonces ella, como es conocido, se llama *estacionaria*.

Cualquier sucesión estacionaria de puntos del conjunto extendido de los números reales tiene límite igual al valor común de sus términos. Esto se deduce directamente de que cada punto de la recta numérica extendida se contiene en cualquiera de sus entornos. En realidad, si para todos los $n \in N$ tiene lugar $x_n = a \in \boldsymbol{R}$, entonces para cualquier entorno $U(a)$ del punto a y todos los $n \in N$, de forma análoga se cumple la inclusión $x_n = a \in U(a)$.

En el futuro por sucesión siempre se entenderá sucesión numérica, es decir, una sucesión cuyos elementos son números reales si por supuesto no se acuerda especialmente algo diferente.

Ejercicios. 5. Cítese un ejemplo de sucesión no acotada que no sea infinita.

6. Demuéstrese que si $a_n \leqslant |b_n|$, $n = 1, 2, \dots$, y $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$.

7. Demuéstrese que cualquier subsucesión de una sucesión infinita también es una sucesión infinita.

8. Demuéstrese que la multiplicación término por término de una sucesión infinita por otra para la cual el valor absoluto de sus términos está acotado inferiormente por una constante positiva, da como producto una sucesión infinita.

4.3. PROPIEDADES MÁS SENCILLAS DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Demostremos ante todo que la definición de límite es correcta en el sentido de que si éste existe, entonces es único.

Teorema 1. *Una sucesión de puntos de la recta numérica extendida puede tener sobre esta recta sólo un límite.*

Corolario. *Una sucesión numérica puede tener sólo un límite finito o infinito de signo definido.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Supongamos que la afirmación del teorema no es válida. Esto significa que existe una sucesión $x_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \dots$ que tiene al menos dos límites diferentes $a \in \bar{\boldsymbol{R}}$ y $b \in \bar{\boldsymbol{R}}$. Tomemos $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ de forma tal que el ε_1-entorno del punto a no se interseca con el ε_2-entorno del punto b. Esto siempre se puede hacer por el lema del p. 3.2. (véase las figs. 6, *a*, *b*, *c* y *d*). Por la definición de límite, de la condición $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ se deduce que existe un número $n_1 \in N$ tal que para todos los números $n > n_1$, $n \in N$, tiene lugar la inclusión $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ y de la condición $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$ se deduce que existe un $n_2 \in N$ tal que para todos los $n > n_2$, $n \in N$, es válida la inclusión $x_n \in U(b, \varepsilon_2)$. Por consiguiente, si denotamos por n_0 al mayor de los números n_1 y n_2: $n_0 \overset{\text{def}}{=} \text{máx}\,\{n_1, n_2\}$, entonces para cualquier $n > n_0$ tendremos al mismo tiempo $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ y $x_n \in U(b, \varepsilon_2)$,es decir, $x_n \in U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2)$. Esto contradice la condición $U(a, \varepsilon_1) \cap U(b, \varepsilon_2) = \varnothing$. □

El corolario es un caso particular de la afirmación del teorema.

Para la unicidad del límite infinito de una sucesión de elementos de $\bar{\boldsymbol{R}}$ es esencial analizar sólo los infinitos de signo definido, ya que si la sucesión tiene como límite un infinito con signo, entonces al mismo tiempo el infinito sin signo es su límite. Por ejemplo, si $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$, entonces, naturalmente, $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \infty$.

Demostremos ahora algunas propiedades simples de los límites finitos e infinitos

I. *Si* $x_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $y_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $z_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$,
$$n = 1, 2, \dots, \tag{4.5}$$
y
$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} z_n = a \in \bar{\boldsymbol{R}}, \tag{4.6}$$
entonces $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$

DEMOSTRACIÓN. Sea dado $\varepsilon > 0$. Entonces, por la definición de límite existen $n_1 \in N$ y $n_2 \in N$ tales que para todos los $n > n_1$, $n \in N$, se cumple la inclusión $x_n \in U(a, \varepsilon)$ y para todos los $n > n_2$, $n \in N$, la inclusión $z_n \in U(a, \varepsilon)$. Por consiguiente, si denotamos por n_0 al mayor de los números n_1 y n_2: $n_0 \overset{\text{def}}{=} \text{máx}\,\{n_1, n_2\}$, entonces para todos los números $n > n_0$, $n \in N$, tendremos $x_n \in U(a, \varepsilon)$, $z_n \in U(a, \varepsilon)$ y por eso $[x_n, z_n] \subset U(a, \varepsilon)$ (véase la observación 1 en el p. 3.2). La desigualdad (4.5) significa que $y_n \in [x_n, z_n]$. Por consiguiente, para $n > n_0$ tiene lugar $y_n \in U(a, \varepsilon)$, es decir, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$. □

II. *Si* $x_n \leqslant y_n$, $x_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $y_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \dots$, y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ *(respectivamente,* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = -\infty$), *entonces* $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = +\infty$ *(respectivamente,* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$).

Esta propiedad es un fortalecimiento de la propiedad I para los límites infinitos: en este caso, la segunda sucesión $\{z_n\}$ no es necesaria.

DEMOSTRACIÓN. De la condición $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$, $n \in N$, se cumple la condición $x_n > \varepsilon$. Por la desigualdad $x_n \leqslant y_n$ es evidente que para todos los $n > n_\varepsilon$ tiene también lugar la desigualdad $y_n > \varepsilon$. Esto significa que $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = +\infty$.

Análogamente se analiza el caso $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = -\infty$. □

III. *Si* $x_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $y_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \dots$, *y existen los límites* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$ *y además* $a < b$, $a \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $b \in \bar{\boldsymbol{R}}$, *entonces existe un número* $n_0 \in N$ *tal que para todos los números* $n > n_0$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $x_n < y_n$.

Corolario. *Si existe el límite* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $x_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \dots$, $a \in \bar{\boldsymbol{R}}$ *y* $a < C$ *(respectivamente,* $a > c$) $c \in \bar{\boldsymbol{R}}$, *entonces existe* $n_0 \in N$ *tal que para todos los* $n > n_0$, $n \in N$, *es válida la desigualdad* $x_n < c$ *(respectivamente,* $x_n > c$).

DEMOSTRACIÓN. Escojamos cualesquiera $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ de forma tal que los entornos $U(a, \varepsilon_1)$ y $U(b, \varepsilon_2)$ no se intersequen (véase el p. 3.2). Entonces está claro que por la desigualdad $a < b$ para cualesquiera $x \in U(a, \varepsilon_1)$ e $y \in U(b, \varepsilon_2)$ se cumple la desigualdad $x < y$ (véase la observación 2 en el p. 3.2). Por la definición de límite existen tales $n_1 \in N$ y $n_2 \in N$ que para $n > n_1$, $n \in N$, se cumple la inclusión $x_n \in U(a, \varepsilon_1)$ y para $n > n_2$, $n \in N$, la inclusión $y_n \in U(b, \varepsilon_2)$. Por consiguiente, si hacemos $n_0 \overset{\text{def}}{=} \text{máx}\,\{n_1, n_2\}$, entonces para $n > n_0$ será válida la desigualdad $x_n < y_n$. □

El corolario se deduce de la propiedad III si en ella en calidad de sucesión $\{y_n\}$ tomamos la sucesión estacionaria $y_n = c$, $n = 1, 2, \dots$, (véase el p. 4.2).

IV. *Si existe* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $x_n \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $n = 1, 2, \dots$, *y para todos los* $n \in N$ *es* *valida la desigualdad* $x_n \leqslant b$ (*respectivamente, la desigualdad* $x_n \geqslant b$), $b \in R$, *entonces* $a \leqslant b$ (*respectivamente*, $a \geqslant b$).

En efecto, si resultara ser $a > b$ (respectivamente, $a < b$), entonces por el corolario de la propiedad III se encontraría $n_0 \in N$ tal que para $n > n_0$, $n \in N$ tendría lugar la desigualdad $x_n > b$ (respectivamente, $x_n < b$) lo que contradice la suposición de que $x_n \leqslant b$ ($x_n \geqslant b$) para todos los $n \in N$. □

Señalemos que principalmente nos interesan las sucesiones numéricas. Las sucesiones de puntos de la recta numérica extendida se introdujeron ante todo para hacer más compacta la exposición: ellas permiten no analizar separadamente los casos de límites de las sucesiones, finitos e infinitos de signo determinado. Partiendo de los fines principales, en el futuro, las afirmaciones y definiciones serán enunciadas para las sucesiones numéricas, aunque muchos de ellos sin ningún trabajo se generalizan para el caso de las sucesiones de puntos de la recta numérica extendida.

OBSERVACIÓN. Si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite finito igual a a y si está dado cierto número $c > 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un número que de la misma forma que en la definición de límite, se denotará por n_ε que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumpla la desigualdad

$$|x_n - a| < c\varepsilon.$$

En efecto, si hacemos $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, entonces por la definición de límite de una sucesión existe un número n_{ε_1} tal que para todos los números $n > n_{\varepsilon_1}$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - a| < \varepsilon_1 = c\varepsilon$$

y en calidad de número n_ε se puede tomar el número n_{ε_1}.

Por ejemplo, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A veces resulta útil analizar la sucesión obtenida de una sucesión por el cambio de numeración de sus términos. En el futuro para tales sucesiones utilizaremos repetidas veces el siguiente lema.

Lema. *Si la sucesión* $x_n \in R$, $n = 1, 2, \ldots$, *tiene un límite finito o infinito y* $\{n_k\}$ *es una sucesión de números naturales tal que*

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty, \tag{4.7}$$

entonces la sucesión $\{x_{n_k}\}$ *tiene ese mismo límite.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Esto significa que para cualquier entorno $U(a)$ del punto a existe un número n_0 tal que para todos los números $n > n_0$ se cumple la inclusión

$$x_n \in U(a). \tag{4.8}$$

Para el número n_0 por la condición (4.7) existe un número k_0 tal que para todos los números $k > k_0$ son válidas las desigualdades

$$n_k > n_0,$$

y por consiguiente, tiene lugar la inclusión

$$x_{n_k} \in U(a).$$

Esto significa que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. □

OBSERVACIÓN. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ y $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, entonces a veces, del límite de la sucesión $\{x_{n_k}\}$ se puede decir más que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$: puede ocurrir que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = -\infty$. Por ejemplo, $\lim\limits_{k\to\infty} (-n)^n = \infty$ y $\lim\limits_{k\to\infty} (-2k)^{2k} = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} [-(2k-1)]^{2k-1} = -\infty$.

Ejercicio 9*. Sea $k \mapsto n_k$ alguna biyección del conjunto de los números naturales N sobre sí mismo: $k \in N$, $n_k \in N$. Demuéstrese que si la sucesión $\{x_n\}$ converge (diverge), entonces la sucesión $\{x_{n_k}\}$ converge (diverge) y en el caso de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ o de la existencia para ella de cualquier límite infinito, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ tiene ese mismo límite.

4.4. ACOTACIÓN DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES

Es necesario diferenciar la *sucesión* $\{x_n\}$, es decir, el conjunto de los elementos a_n, y el *conjunto de los valores de sus elementos*. El primer conjunto siempre es infinito, ya que está constituido por un conjunto de elementos que se diferencian al menos por los números $n = 1, 2, \ldots$ El segundo conjunto está compuesto por todos los números que son valores de los elementos de la sucesión dada, que puede ser finito. Por ejemplo, la sucesión $x_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, como cualquier sucesión está compuesta por un número infinito de elementos y el conjunto de los valores de sus elementos está compuesto por un número 1.

Definición 7. *La sucesión se llama acotada superiormente* (*inferiormente*) *si el conjunto de los valores de los elementos de esta sucesión está acotado superiormente* (*inferiormente*).

En términos de los elementos de la sucesión esta definición puede ser enunciada de la siguiente forma.

Definición 7′. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se llama acotada superiormente* (*inferiormente*) *si existe un número b tal que para todos los números* $n = 1, 2, \ldots$ *se cumple la desigualdad* $x_n \leqslant b$ (*respectivamente, la desigualdad* $x_n \geqslant b$).

Definición 8. *Una sucesión acotada superiormente e inferiormente se llama simplemente acotada.*

Es evidente que una sucesión $\{x_n\}$ está acotada si y sólo si existe tal número b que para todos los números $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|x_n| \leqslant b$.

Definición 9. *Una sucesión que no está acotada* (*superiormente, inferiormente*) *se llama no acotada* (*superiormente, inferiormente*).

Por ejemplo, las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y $\left\{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n\right\}$ están acotadas. La sucesión $\{n\}$ es no acotada, más exactamente, es acotada inferiormente, pero no está acotada superiormente y la sucesión $\left\{n \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n\right\}$ es no acotada, tanto superior como inferiormente.

Teorema 2. *Si una sucesión tiene límite finito, entonces está acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una sucesión convergente $\{x_n\}$ y sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$. Por la definición de límite de una sucesión, existe n_1 tal que para todos los $n > n_1$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < 1$. Sea d el mayor de los números 1, $|x_1 - a|, \dots, |x_{n_1} - a|$. Entonces para todos los $n = 1, 2, \dots$ es válida la desiguldad $|x_n - a| \leqslant d$, es decir, para todos los n

$$a - d \leqslant x_n \leqslant a + d.$$

Esto significa que la sucesión está acotada. □

4.5. SUCESIONES MONÓTONAS

Definición 10. *La cota superior (inferior) de conjunto de los valores de los elementos de una sucesión $\{x_n\}$ se llama cota superior (inferior) de la sucesión dada y se denota por* $\sup\{x_n\}$ *o* $\sup\limits_{n=1,2,\dots} x_n$ *(respectivamente,* $\inf\{x_n\}$ o $\inf\limits_{n=1,2,\dots} x_n$*).*

Si la cota superior (inferior) es un número, entonces esta definición se puede enunciar de la siguiente forma.

Definición 10′. *El número a es cota superior (inferior) de la sucesión x_n, $n = 1, 2, \dots$ si:*

1) *para todos los $n = 1, 2, \dots$ se cumple la desigualdad $x_n \leqslant a$ (respectivamente, la desigualdad $x_n \geqslant a$);*

2) *para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ (respectivamente, $x_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$).*

De forma análoga se puede enunciar la definición de cota superior (inferior) de una sucesión en el caso cuando la cota indicada es infinita. (Hágase esto).

En calidad de ejemplos señalemos que $\sup\{1/n\} = 1$, $\inf\{1/n\} = 0$, $\sup\{n\} = +\infty$, $\inf\{n\} = 1$. Aquí por doquier $n = 1, 2, \dots$

Definición 11. *La sucesión $\{x_n\}$ se llama sucesión creciente (decreciente) si para cada $n = 1, 2, \dots$ se cumple la desigualdad $x_n \leqslant x_{n+1}$ (respectivamente, la desigualdad $x_n \geqslant x_{n+1}$)**)*.*

Las sucesiones crecientes y decrecientes se llaman *monótonas*. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ decrece, la sucesión $\{n\}$ crece, y la sucesión $\left\{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}n\right\}$ no es monótona.

Teorema 3 (de Weierstrass)**). *Cualquier sucesión creciente (decreciente) $\{x_n\}$ tiene límite, finito si está acotada superiormente (inferiormente), e infinito igual a $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$) si no está acotado superiormente (inferiormente) con la particularidad de que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$$

(respectivamente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}).$$

*) Las sucesiones crecientes (decrecientes) también se llaman no decrecientes (no crecientes).

**) C. Weierstrass (1815—1897), matemático alemán.

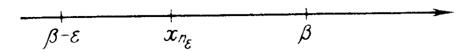


FIG. 10

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ crece y está acotada superiormente. Por la última condición tiene cota superior finita (véase el teorema 1 en el p. 3.4). Sea $\beta \overset{\text{def}}{=} \sup\{x_n\}$. Mostremos que $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. De $\beta = \sup\{x_n\}$ se deduce que para todos los $n = 1, 2, \dots$ es válida la desigualdad $x_n \leqslant \beta$ y que existe un número n_ε tal que $x_{n_\varepsilon} > \beta - \varepsilon$ (fig. 10). Entonces por el crecimiento de la sucesión $\{x_n\}$ para todos los números $n > n_\varepsilon$ tendremos: $\beta - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leqslant x_n \leqslant \beta$. Por eso para todos los $n > n_\varepsilon$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $|x_n - \beta| < \varepsilon$. Esto significa que $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Si la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente, entonces $\sup\{x_n\} = +\infty$ (véase el p. 3.4). Mostremos que en este caso $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

De nuevo, escogemos un $\varepsilon > 0$ de forma arbitraria. De que la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente se deduce que existe un númro n_ε tal que $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Entonces por el crecimiento de la sucesión $\{x_n\}$ para todos los números $n > n_\varepsilon$ tendremos: $x_n \geqslant x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

De forma análoga, se analiza el caso de las sucesiones decrecientes. Además, se puede reducir al caso de la sucesión creciente si observamos que para cada sucesión decreciente $\{x_n\}$ la sucesión $\{-x_n\}$ es creciente. □

OBSERVACIÓN 1. De esta forma, cualquier sucesión monótona tiene límite: finito si está acotada e infinito si no está acotada. Este límite es igual a $+\infty$ si la sucesión monótona no está acotada superiormente y es igual a $-\infty$ si no está acotada inferiormente.

Por cuanto cualquier subsucesión de una sucesión monótona también es monótona, entonces ella a su vez siempre tiene límite finito o infinito, que evidentemente coincide con el límite de toda la sucesión (véase el lema en el p. 4.3).

Vimos que si una sucesión converge, entonces está acotada (teorema 2), de donde, en particular, se deduce que si una sucesión creciente converge, entonces está acotada superiormente; por otro lado, si una sucesión creciente está acotada superiormente, entonces converge (teorema 3). De esta forma, es válida la siguiente afirmación.

Corolario. *Para que una sucesión creciente converja, es necesario y suficiente que esté acotada superiormente.*

La afirmación análoga también es válida para una sucesión decreciente.

OBSERVACIÓN 2. Si $[a_n, b_n]$ es un sistema de segmentos encajados que tienden a cero por longitud y ξ es el punto que pertenece a todos los segmentos del sistema dado, entonces

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{4.9}$$

En realidad, en el punto 3.6 fue mostrado que $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$. Por otro lado, la sucesión $\{a_n\}$ (respectivamente, $\{b_n\}$) crece (decrece) de donde se deduce (4.9).

Ejemplo. El número e.

$$\text{Sea } x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Mostremos que esta sucesión converge. Aplicando la fórmula del binomio de Newton obtenemos:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \tag{4.10}$$

Por cuanto en el paso de n a $n + 1$ el número de sumandos, que son positivos, crece y además, cada sumando a partir del tercero crece:

$$1 - \frac{s}{n} < 1 - \frac{s}{n+1}, \quad s = 1, \ 2, \dots, \ n - 1, \ n = 1, 2, \dots,$$

entonces

$$x_n < x_{n+1}, n = 1, 2, \dots .$$

Más adelante, observando que en (4.10) cada paréntesis del tipo $\left(1 - \frac{s}{n}\right)$ es menor que uno y $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ para todos los $n = 1, 2, 3, \dots$, tenemos

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ (que se puede calcular fácilmente por la fórmula conocida de la matemática elemental para la suma de los términos de una progresión geométrica, es igual a $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$), para cualquier $n = 1, 2, \dots$, es menor que uno, por lo que finalmente

$$2 \leqslant x_n < x_{n+1} < 3. \tag{4.11}$$

Así pues, la sucesión $\{x_n\}$ crece y está acotada superiormente, lo que quiere decir, que por el teorema 3 tiene límite. Este límite se denota por la letra e.

Pasando al límite en (4.11) obtenemos $2 < e \leqslant 3$. Con estimaciones más exactas se puede obtener que es válida la igualdad aproximada

$$e \approx 2{,}718281828459045.$$

Se demuestra también que el número e es irracional (véase el p. 35.14*)) y aún más, trascendente, es decir, no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros. El número e en el análisis matemático juega un papel importante. En particular, es la base de los logaritmos naturales.

4.6. TEOREMA DE BOLZANO — WEIERSTRASS

Ante todo introduzcamos el concepto de subsucesión de una sucesión dada.

Definición 7. *La sucesión y_k, $k = 1, 2, \dots$, se llama subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ si para cualquier k existe un natural n_k tal que $y_k = x_{n_k}$ y además $n_{k_1} < n_{k_2}$ si y sólo si $k_1 < k_2$. La sucesión $\{y_k\}$ se denota en este caso por $\{x_{n_k}\}$ o x_{n_k}, $k = 1, 2, \dots$*

Dicho de otro modo, si se da una sucesión cualquiera y de algún subconjunto de sus elementos se forma una nueva sucesión, entonces ésta se llama *subsucesión de la sucesión inicial*, si el orden seguido por los elementos en él es el mismo que el de la sucesión dada.

Así, la sucesión $1, 3, 5, \dots, 2n + 1 \dots$ es una subsucesión y la sucesión $2, 1, 3, 4, \dots, n, \dots$ no es subsucesión de la serie natural de números $1, 2, \dots, n \dots$ En ambos casos, los elementos de las sucesiones forman un subconjunto*) del conjunto de los números naturales, pero en el primer caso, los miembros de la sucesión están ubicados en el mismo orden que en la serie natural de números, y en el segundo caso, este orden está alterado.

Si $\{x_{n_k}\}$ es subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$, entonces evidentemente $n_k \geqslant k$, $k = 1, 2, \dots$, por consiguiente

$$\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty. \tag{4.7}$$

De aquí se deduce por el lema del p. 4.3 que si la sucesión tiene límite finito o infinito, entonces cualquiera de sus subsucesiones tiene ese mismo límite.

En el p. 4.4 fue demostrado que cualquier sucesión convergente está acotada. La afirmación inversa, por supuesto, no es cierta. Por ejemplo, la sucesión $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$, está acotada y diverge. No obstante, resulta que cualquier sucesión acotada contiene una subsucesión convergente. Esta afirmación se llama teorema de Bolzano-Weierstrass**) o propiedad de compacidad de una sucesión acotada.

Teorema 4. *De cualquier sucesión acotada se puede extraer una subsucesión convergente y de cualquier sucesión no acotada se puede extraer una subsucesión infinita cuyo límite es un infinito de signo definido.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada, es decir, que existe un segmento $[a, b]$ tal que $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todos los $n = 1, 2, \dots$. Dividamos al segmento $[a, b]$ en dos segmentos iguales. Al menos uno de los segmentos obtenidos contiene un

*) Recordemos (véase el p. 1.1) que el propio conjunto se considera su subconjunto.

**) B. Bolzano (1781—1848), matemático checo.

número infinito de elementos de la sucesión dada. Denotémoslo por $[a_1, b_1]$. Sea x_{n_1} cualquiera de los elementos de la sucesión dada que pertenece al segmento $[a_1, b_1]$.

Dividamos el segmento $[a_1, b_1]$ en dos segmentos iguales; de nuevo, al menos uno de los dos segmentos obtenidos contiene un número infinito de términos de la sucesión inicial, denotémoslo por $[a_2, b_2]$. Por cuanto, en el segmento $[a_2, b_2]$ hay un número infinito de términos de la sucesión $\{x_n\}$, se encuentra un término x_{n_2} tal que $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ y $n_2 > n_1$. Continuando este proceso, obtenemos una sucesión de segmentos $[a_k, b_k]$ en la cual cada segmento posterior es la mitad del anterior, y una sucesión de tales elementos $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión dada que $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ y $n_{k''} > n_{k'}$ cuando $k'' > k'$. La sucesión $\{x_{n_k}\}$ es subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ por construcción. Mostremos que esta subsucesión es convergente.

La sucesión de segmentos $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, es una sucesión de segmentos encajados cuyas longitudes tienden a cero, ya que $b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por el principio de los segmentos encajados (véase el p. 3.6) existe un punto ξ único que pertenece a todos estos segmentos. Como vimos (véase (4.9) en la observación 2 al teorema 3), $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$, pero $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, $k = 1, 2, \ldots$, por lo que por la propiedad I (véase el p. 4.3) de las sucesiones convergentes, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ también converge y $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

Supongamos que ahora la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada. Entonces no está acotada superiormente o bien no está acotada inferiormente o bien tiene lugar uno y lo otro. Supongamos para mayor exactitud que la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente. Entonces existe un número $n_1 \in N$ tal que $x_{n_1} > 1$.

Es evidente que la sucesión x_n, $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$, tampoco está acotada superiormente, ya que se obtiene de la sucesión x_n, $n = 1, 2, \ldots$, no acotada superiormente con la exclusión de un número finito de términos. Por esto, existe $n_2 > n_1$, $n_2 \in N$, tal que $x_{n_2} > 2$.

Continuando este proceso obtenemos una sucesión de números n_k tales que

$$n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots$$

y

$$x_{n_1} > 1, \quad x_{n_2} > 2, \ldots, \quad x_{n_k} > k, \ldots$$

De aquí se deduce, que $\{x_{n_k}\}$ es una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$, y debido a la propiedad II del p. 4.3, que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$. □

OBSERVACIÓN. La segunda afirmación del teorema 4 puede ser precisada. Como se ve de la demostración dada, en ella se mostró que si la sucesión no es acotada superiormente, entonces ésta contiene una subsucesión que tiende hacia $+\infty$. Análogamente, si la sucesión no es acotada inferiormente, entonces ella contiene una subsucesión, que tiende hacia $-\infty$.

Definición 13. *El límite, finito o infinito, de signo determinado, de una subsucesión de cierta sucesión se llama límite parcial de la sucesión dada.*

El teorema de Bolzano — Weierstrass (primera parte del teorema 4) y su análogo para las sucesiones no acotadas (segunda parte del teorema 4), muestra que

cualquier sucesión tiene al menos un límite parcial finito o infinito, además, es a ciencia cierta, finito si la sucesión dada es acotada.

De esta forma, cada sucesión numérica $\{x_n\}$, $x_n \in R$, tiene al menos un límite parcial en el conjunto ampliado de los números reales, es decir, el conjunto de los límites parciales en $\bar{R}$ para cualquier sucesión siempre es no vacío.

Ejercicios. 10. Demuéstrese que para que una sucesión sea convergente, es necesario y suficiente que sea acotada y tenga un límite parcial único.

11. Demuéstrese que el elemento a (un número o uno de los infinitos con signo: $+\infty$ o $-\infty$) es un límite parcial de una sucesión si, y sólo si, en cualquiera de sus entornos se contiene un número infinito de términos de la sucesión dada.

4.7. CRITERIO DE CAUCHY PARA LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Hasta ahora no se ha dado un criterio suficientemente general con ayuda del cual se pueda conocer, si una sucesión dada es convergente o no. La propia definición de sucesión convergente es poco cómoda para esto, ya que en ella interviene el valor del límite, el que puede ser desconocido. Por esto, es deseable tener un criterio tal para la definición de convergencia y divergencia de una sucesión, que se basase solamente en las propiedades de los elementos de la sucesión dada. El teorema 5, que se expone a continuación, da precisamente un criterio semejante.

Definición 14. *Diremos que la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy*), si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los números n y m, que satisfacen las condiciones $n > n_\varepsilon$, $m > n_\varepsilon$, se cumple la desigualdad*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{4.12}$$

Las sucesiones, que satisfacen la condición de Cauchy, se llaman también *sucesiones fundamentales.*

Con ayuda de los símbolos lógicos, la condición de Cauchy se escribe de la forma siguiente:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n \in N, \forall m \in N, n > n_\varepsilon, m > n_\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

La condición (4.12) se puede enunciar de la siguiente forma.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ y todos los enteros no negativos p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{4.13}$$

Para convencerse de la equivalencia de las condiciones (4.12) y (4.13) es suficiente hacer $p = n - m$, si $n \geqslant m$, y $p = m - n$ si $m > n$.

Teorema 5 (criterio de Cauchy). *Para que una sucesión converja es necesario y suficiente que satisfaga la condición de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Demos $\varepsilon > 0$; entonces de acuerdo con la definición de límite de una

*) A. L. Cauchy (1798—1857), matemático francés.

sucesión, existe n_ε tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea ahora $n > n_\varepsilon$ y $m > n_\varepsilon$, entonces

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, se cumple la condición de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que si $n > n_\varepsilon$ y $m > n_\varepsilon$, entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, entonces existe n_1 tal que para $n > n_1$ y $m > n_1$ se cumple la desigualdad $|x_n - x_m| < 1$. En particular, si $n > n_1$ y $m = n_1 + 1$, entonces $|x_n - x_{n_1+1}| < 1$, es decir, $x_{n_1+1} - 1 < x_n < x_{n_1+1} + 1$ cuando $n > n_1$. Esto significa que la sucesión x_n, $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$ está acotada. Por esto, por el teorema 4, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente.

Sea $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. Mostremos que toda la sucesión $\{x_n\}$ dada, también converge y tiene como límite al número a. Demos cierto $\varepsilon > 0$. Entonces, en primer lugar, por la definición de límite de una sucesión, existe k_ε tal que para todos los números $k > k_\varepsilon$, o lo que es lo mismo, por la definición de subsucesión, para todos los $n_k > n_{k_\varepsilon}$ se cumple la desigualdad $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

En segundo lugar, ya que la sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, entonces existe n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ y todos los $m > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hagamos $N_\varepsilon = \text{máx}\,\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ y fijemos cierto $n_k > N_\varepsilon$. Entonces, para todos los $n > N_\varepsilon$ obtendremos:

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y esto demuestra que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. □

Ejercicios. 12. Enúnciense las condiciones positivas necesarias y suficientes que sean la negación del criterio de Cauchy para que la sucesión no tenga límite.

13. Demuéstrese que para que la sucesión $\{x_n\}$ sea convergente es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $n > n_\varepsilon$, $n \in N$, se cumpla la desigualdad $|x_n - x_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$.

Problema 3. Aclárese si se deduce o no la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ de la condición de que para cualquier natural p existe el límite $\lim\limits_{n \to \infty} (x_{n+p} - x_n) = 0$.

4.8. SUCESIONES INFINITESIMALES

Sobre las sucesiones se pueden efectuar las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y devisión. Definámoslas.

Definición 15. *Sean dadas las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$; se llaman suma, diferencia y producto de estas sucesiones respectivamente las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ y $\{x_n y_n\}$. Si $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces se llama cociente de la división de la sucesión $\{x_n\}$ entre la sucesión $\{y_n\}$ la sucesión $\{x_n/y_n\}$. Finalmente, se llama producto de la sucesión $\{x_n\}$ por un número c la sucesión $\{cx_n\}$.*

Si la sucesión $\{y_n\}$ es tal que en ella se tiene sólo un número finito de elementos iguales a cero, es decir, existe $n_0 \in N$ tal que para $n \geqslant n_0$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $y_n \neq 0$, entonces se puede analizar la sucesión $\{x_n/y_n\}$ entendiendo por ella la sucesión con números $n \geqslant n_0$.

Definición 16. *La sucesión $\{\alpha_n\}$ se llama infinitesimal si $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$.*

Ya nos encontramos en el p. 4.1 con las sucesiones infinitesimales $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} n$, $n = 1, 2, \ldots$

Señalemos algunas propiedades de las sucesiones infinitesimales.

I. *La suma algebraica de un número finito de sucesiones infinitésimas es una sucesión infinitésima.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ sucesiones infinitesimales. Mostremos que las sucesiones $\{\alpha_n + \beta_n\}$ y $\{\alpha_n - \beta_n\}$ son también infinitésimas. Demos un $\varepsilon > 0$, entonces existe (¿por qué?) un número n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumplen las desigualdades $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por esto, para $n > n_\varepsilon$ tenemos

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que significa que $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$.

La afirmación correspondiente para cualquier número finito de sumandos se deriva de lo demostrado por inducción. □

Problema 4. Definiendo la suma de un número infinito de sumandos numerados (concepto generalizado de la suma de un número finito de sumandos) y luego la suma de un número infinito de sucesiones, constrúyase un ejemplo de un número infinito de sucesiones infinitesimales cuya suma no es una sucesión infinitésima.

II. *El producto de una sucesión infinitesimal por una sucesión acotada es una sucesión infinitesimal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinitesimal y $\{x_n\}$, una sucesión acotada, es decir, existe un número $b > 0$ tal que para todos los números $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|x_n| \leqslant b$.

Demos un $\varepsilon > 0$; por la definición de sucesión infinitesimal existe un número n_ε tal que para todos los $n > n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{b}$. Por esto, para todos los $n > n_\varepsilon$ tenemos

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n|\,|x_n| < \frac{\varepsilon}{b} \cdot b = \varepsilon,$$

lo que significa que la sucesión $\{\alpha_n x_n\}$ es infinitesimal. □

Corolario. *El producto de un número finito de sucesiones infinitesimales es una sucesión infinitesimal.*

Esto se deduce directamente por inducción de la propiedad II si observamos que una sucesión infinitesimal, como cualquier sucesión que tiene límite, está acotada (véase el teorema 2 del p. 3.4).

Problema 5. Definiendo el producto de un número infinito de factores numerados (concepto generalizado de producto de un número finito de factores) y luego el producto de un número infinito de sucesiones, constrúyase un ejemplo de un número infinito de sucesiones infinitesimales, cuyo producto no sea una sucesión infinitesimal.

Ejercicio 14. Demuéstrese que para que una sucesión $x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, sea infinitesimal es necesario y suficiente que la sucesión $1/x_n$, $n = 1, 2, \dots$, sea infinita.

4.9. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES RELACIONADAS CON LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS SOBRE LAS SUCESIONES

Lema. *Para que el número a sea el límite de la sucesión $\{x_n\}$ es necesario y suficiente que su término x_n sea del tipo $x_n = a + \alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$, donde $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitesimal.*

En realidad, sea dada una sucesión cualquiera $\{x_n\}$ y el número a; hagamos $\alpha_n \overset{def}{=} x_n - a$. Entonces, la condición $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ por la definición de límite de la sucesión es equivalente a que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que para todos los $n > n_0$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$, es decir, la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$ y esto es equivalente a $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. □

Este lema muestra el papel singular de las sucesiones infinitesimales en el estudio del concepto de límite, ya que el concepto general de límite de una sucesión con ayuda de este lema se reduce al concepto del límite nulo. Esta circunstancia más adelante se utiliza ampliamente en el estudio de una serie de propiedades de las sucesiones convergentes.

1°. *Si $x_n = c$, $n = 1, 2, \dots$ (es decir, la sucesión $\{x_n\}$ es estacionaria), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.*

Dicho brevemente, el límite de una constante es igual a esta misma constante.

En realidad, la sucesión $x_n - c = c - c = 0$ es infinitesimal y por esto, por el lema, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. □

2°. *Si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente, entonces también es convergente la sucesión $\{|x_n|\}$, además, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \boldsymbol{R}$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los números $n > n_\varepsilon$, se cumple la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$, pero $||x_n| - |a|| < |x_n - a|$. Por lo tanto, para todos los números $n > n_\varepsilon$ tiene lugar la desigualdad $||x_n| - |a|| < \varepsilon$ y esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. □

3°. *Si las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen, entonces las sucesiones $\{x_n \pm y_n\}$ también convergen y*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

es decir, el límite de la suma algebraica de dos sucesiones convergentes es igual a la suma de los límites de las sucesiones dadas.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Por la necesidad de las condiciones del lema para la existencia del límite tenemos

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Por consiguiente, $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$, $n = 1, 2, \dots$, donde por la propiedad I de las sucesiones infinitesimales (véase el p. 4.8) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$. Por esto, según la suficiencia de las condiciones del lema para la existencia del límite, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n. \ \square$$

Corolario. *El límite de la suma algebraica finita de sucesiones convergentes es igual a esa misma suma algebraica de los límites de las sucesiones sueltas.*

Esto se deduce directamente por inducción de la propiedad demostrada de los límites de las sucesiones convergentes.

4°. *Si las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen, entonces la sucesión $\{x_n y_n\}$ también converge y*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n,$$

es decir, el límite del producto de sucesiones convergentes existe y es igual al producto de los límites de las sucesiones dadas.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, entonces

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$; por lo que $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n)$.

Por las propiedades I y II de las sucesiones infinitesimales (véase el p. 4.8) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) = 0$; por lo que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Corolario 1. *Si la sucesión $\{x_n\}$ converge, entonces para cualquier número c, la sucesión $\{cx_n\}$ también converge y*

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c \lim_{n\to\infty} x_n,$$

es decir, una constante se puede sacar fuera del signo del límite.

Esta afirmación se deduce inmediatamente de las propiedades 1° y 4°.

Corolario 2. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente y k es un número natural, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k.$$

Esto se deduce directamente de la propiedad 4° por inducción.

5°. *Si las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *convergen,* $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *y* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *entonces, la sucesión* $\{x_n/y_n\}$ *converge y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

es decir, en las suposiciones hechas, el límite del cociente de sucesiones convergentes existe y es igual al cociente de los límites de las sucesiones dadas.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ y para mayor exactitud, $b > 0$. Entonces,

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ y por el corolario de la propiedad III de los límites de las sucesiones del p. 4.3 existe un número n_0 tal que para todos números $n > n_0$ se cumple la desigualdad $y_n > \frac{b}{2} > 0$ (efectivamente, observando que $\frac{b}{2} < b$, en la propiedad indicada en calidad de c hace falta tomar $c = \frac{b}{2}$), aquí se utiliza la suposición de que $b > 0$; por lo que para $n > n_0$ tenemos $\frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}$ (por cuanto $y_n \neq 0$, entonces por él se puede dividir).

A continuación

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b + \beta_n)}(\alpha_n b - \beta_n a). \tag{4.14}$$

Aquí $0 < \frac{1}{b(b + \beta_n)} = \frac{1}{b y_n} < \frac{2}{b^2}$, es decir, la sucesión $1/(b(b + \beta_n))$, $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$, está acotada (de aquí, claramente se deduce que esta sucesión está acotada para todos los $n = 1, 2, \ldots$).

Por las propiedades de las sucesiones infinitesimales, la sucesión $\{\alpha_n b - \beta_n b\}$ es infinitesimal, por lo que la sucesión $\left\{\frac{1}{b(b + \beta_n)}(\alpha_n b - \beta_n a)\right\}$ es infinitesimal. Por esto, de (4.14) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

De forma análoga se analiza el caso cuando $b < 0$. □

OBSERVACIÓN. En el caso de sucesiones que tienen límites infinitos las afirmaciones análogas a 3° — 5°, en general, no tienen lugar. Por ejemplo, sea $x_n = n + 1$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 1.$$

Si $x_n = 2n$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = +\infty.$$

Si ahora $x_n = n + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

y la sucesión $x_n - y_n = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, no tiene ni límite finito ni infinito.

Estos ejemplos muestran que en suposiciones iguales, con respecto a las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que tienen límites infinitos, para las sucesiones $\{x_n - y_n\}$ pueden encontrarse los casos más diversos. Junto con esto, algunas generalizaciones de las propiedades 3° — 5° en el caso de sucesiones con límites infinitos, no obstante, tienen lugar. Por ejemplo, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ (o $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ es finito), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$ o si $\alpha > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (se recomienda demostrarlo por sí mismo).

Ejercicio 15. Demuéstrese que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y la sucesión $\{y_n\}$ está acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.

Ejemplos. 1. Sea $a > 0$, $x_0 > 0$ y

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.15}$$

Demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. Por inducción, es evidente que $x_n > 0$ para todos los $n = 0, 1, 2, \ldots$. Mostremos inicialmente que

$$x_n \geqslant \sqrt{a}, n = 1, 2, \ldots. \tag{4.16}$$

Para esto, observemos previamente, que de la desigualdad evidente $(t - 1)^2 \geqslant 0$ en el caso de $t > 0$ se deduce la desigualdad $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$. Utilizando esta desigualdad para $t = \frac{x_n}{\sqrt{a}}$ por (4.15) obtenemos:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2} 2 = \sqrt{a}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Mostremos ahora que la sucesión x_n, $n = 1, 2, \ldots$, decrece monótonamente. Aplicando la desigualdad (4.16) obtenemos:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leqslant \frac{x_n}{2} 2 = x_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.17}$$

Así pues, $\sqrt{a} \leqslant \ldots \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant \ldots \leqslant x_1$, dondequiera que esté ubicada "la aproximación nula" $x_0 > 0$, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ está acotada inferiormente y decrece monótonamente, por eso, según el teorema 3, tiene límite.

Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Pasando al límite en la igualdad (4.15), cuando $n \to \infty$ obte-

nemos la igualdad
$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$
de donde $x^2 = a$ y ya que $x_n \geqslant 0$, entonces $x \geqslant 0$ y por eso $x = \sqrt{a}$.

La fórmula (4.15) puede servir para el cálculo aproximado de los valores de la raíz cuadrada del número a. En efecto, ella se aplica en la práctica con este fin, en particular, en los cálculos con las máquinas calculadoras de acción rápida.

No es difícil calcular la exactitud con la que la aproximación n-ésima, es decir, el término x_n, da el valor de la raíz $\sqrt{a}$.

De fórmula recurrente (4.15) tenemos:
$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a) =$$
$$= \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Aplicando la desigualdad (4.16) de aquí hallamos:
$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2, \quad n = 1, 2, \dots .$$

La estimación obtenida no es totalmente cómoda en la práctica, por cuanto no conocemos el valor de la raíz $\sqrt{a}$, pues ésta es precisamente la que buscamos. No obstante, siempre se puede hallar un c aproximado tal que $0 < c < \sqrt{a}$ y se puede escoger $x_0 \geqslant c$, entonces, de la estimación obtenida tendremos
$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a})^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$
o
$$\frac{1}{2c}(x_{n+1} - \sqrt{a}) \leqslant \left[\frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a})\right]^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

De aquí, por inducción, hallamos:
$$\frac{1}{2c}(x_n - \sqrt{a}) \leqslant \left[\frac{1}{2c}(x_{n-1} - \sqrt{a})\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\left(\frac{1}{2c}(x_{n-2} - \sqrt{a})\right)^2\right]^2 \leqslant \dots \leqslant \left[\frac{1}{2c}(x_0 - \sqrt{a})\right]^{2^n}. \tag{4.18}$$

Si escogemos la aproximación nula x_0 de forma tal, que
$$q \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2c}|x_0 - \sqrt{a}| < 1,$$
entonces de (4.18) se obtendrá que
$$0 \leqslant x_n - \sqrt{a} \leqslant 2cq^{2^n}, n = 1, 2, \dots ,$$
es decir, la sucesión (4.15) converge al valor de la raíz mucho más rápido que la progresión geométrica con denominador q, $0 < q < 1$.

Para la ilustración del cálculo aproximado de la raíz por la fórmula (4.15) demos los resultados del cálculo de $\sqrt{2}$ en la computadora, en el caso cuando en calidad de aproximación nula x_0 fue escogido $x_0 = 1$:

$x_1 =$ **1**,500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000

$x_2 =$ **1,41**666666666666666666666666666666666666666666666666666666666

$x_3 =$ **1,41421**568627450980392156862745098039215686274509803921568627

$x_4 =$ **1,41421356237**468991062629557889013491011655962211574404458490

$x_5 =$ **1,41421356237309504880168**962350253024361498192577619742849828

$x_6 =$ **1,41421356237309504880168872420969807856967187537**723400156101

$x_7 =$ **1,414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679**

Aquí, con cifras gruesas se resaltan los números que son la aproximación correcta de $\sqrt{2}$ con exactitud hasta el número de las cifras significativas que entran en el número resaltado, (estas cifras se estabilizan en el proceso de cálculo). El número de las cifras correctas en este sentido, se duplica (como puede verse en la tabla) en el paso a la siguiente aproximación: en x_1 se tiene una cifra correcta, en x_2 ya son 3; en x_3, 6; en x_4, 12; en x_5, 24; en x_6, 48, y x_7 ya da la aproximación correcta de $\sqrt{2}$ con 60 cifras significativas, es decir, con todos los órdenes utilizados.

Observemos que si el número $a > 0$ es tal que su raíz se calcula en forma finita, en el sentido de que existe tal fracción decimal finita x que $x^2 = a$, entonces esta fracción puede ser hallada (en cualquier caso en principio) con ayuda del método clásico del cálculo de raíz "por columna". En el caso del cálculo de la raíz de este número con ayuda de la fórmula (4.15), si x_0 es escogido diferente del valor exacto de la raíz: $x_0 \neq \sqrt{a}$, entonces el valor exacto de la raíz indicada no se obtiene en ningún paso. Esto se deduce de que en el caso de $x_0 \neq \sqrt{a}$ la sucesión (4.15) decrece estrictamente: $x_{n+1} < x_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Antes de analizar los ejemplos posteriores demostremos una desigualdad útil.

Lema (desigualdad de Bernoulli)*). *Sea $\alpha > 0$, entonces para cualquier natural n es válida la desigualdad*
$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha. \tag{4.19}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula del binomio de Newton tenemos
$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \dots + \alpha^n.$$

Todos los sumandos en el segundo miembro de la igualdad son positivos; eliminando todos, menos el primero y el segundo, con lo cual el segundo miembro sólo puede disminuir, obtenemos la desigualdad buscada (4.19)

Volvamos al análisis de los ejemplos.

2. Si $p > 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = +\infty$, y si $0 < p < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0$.

Sea inicialmente $p > 1$, entonces $p = 1 + \alpha$, donde $\alpha > 0$ y por la desigualdad de Bernoulli (véase (4.19))
$$p^n = (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha > n\alpha.$$

*) J. Bernoulli (1654—1705), matemático suizo.

Por cuanto $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, $\alpha > 0$, entonces también $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = +\infty$.

Si ahora $0 < p < 1$, entonces $q = \dfrac{1}{p} > 1$ y

$$\lim_{n\to\infty} p^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} q^n} = 0,$$

ya que por lo demostrado $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

3. Para cualquier $a > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1, \tag{4.20}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1. \tag{4.21}$$

Sea inicialmente $a > 1$, entonces $b \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a} > 1$. En realidad, por la definición de la raíz $b^n = a$. Si fuera $b \leqslant 1$ entonces, multiplicando por sí misma esta desigualdad n veces, obtendríamos que $a = b^n \leqslant 1$, pero esto contradice la condición $a > 1$. Pongamos

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a} - 1. \tag{4.22}$$

Por lo dicho, $x_n > 0$. De (4.22) se deduce que $a = (1 + x_n)^n$. Aplicando la desigualdad de Bernoulli obtenemos

$$a = (1 + x_n)^n > nx_n.$$

Por consiguiente, $0 < x_n < \dfrac{a}{n}$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, de donde por (4.22)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Si ahora, $0 < a < 1$, entonces $b \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{a} > 1$ y ya que por lo demostrado $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = 1.$$

Si $a = 1$, entonces $\sqrt[n]{a} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, y por consiguiente también $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

De esta forma, (4.20) está demostrada para cualquier $a > 0$. De aquí inmediatamente se deduce (4.21):

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{1/n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = 1. \square$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0.$

En realidad, sea $n_0 \in N$ tal que $\dfrac{a}{n_0} < \dfrac{1}{2}$. Entonces para todos los $n > n_0$ será válida la desigualdad $\dfrac{a}{n} < \dfrac{1}{2}$ y por esto

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{a}{n_0 + 1} \frac{a}{n_0 + 2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n - n_0}.$$

Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} = \dfrac{2^{n_0} a^{n_0}}{n_0!} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

La igualdad (4.23) se puede demostrar de otra forma. Analicemos la sucesión $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, entonces $x_{n+1} = x_n \dfrac{a}{n+1}$, y cuando $n + 1 > a$, se cumple la desigualdad $x_{n+1} < x_n$, es decir, a partir de cierto número, la sucesión $\{x_n\}$ decrece. Ya que, además, para todos los $n \in N$ tiene lugar la desigualdad $x_n > 0$, entonces esta sucesión es acotada inferiormente, y, por lo tanto, tiene límite finito. Sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Pasando al límite para $n \to \infty$ en la igualdad $x_{n+1} = x_n \dfrac{a}{n+1}$, obtenemos $x = x \cdot 0$,de donde $x = 0$, es decir, tenemos otra vez (4.23).

5. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty. \tag{4.24}$$

Ya que para cualquier $a > 0$ tiene lugar la igualdad (4.23), entonces para cualquier $a > 0$ existe un $n_a \in N$ tal que para todos los $n > n_a$ se cumple la desigualdad

$$\frac{a^n}{n!} < 1,$$

es decir, cuando $n > n_a$, tiene lugar $\sqrt[n]{n!} > a$, y ya que $a > 0$ es arbitrario, entonces esto significa que es válida la igualdad (4.24).

6. $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e. \tag{4.25}$$

Recordemos (véase el p. 4.5) que el número e es el límite de la sucesión

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e. \tag{4.26}$$

Hagamos

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Se demostró (véase (4.11)) que

$$x_n < s_n, n = 1, 2, \ldots. \tag{4.27}$$

Por otra parte, fijando en la fórmula (4.10) un $k \geqslant 1$ arbitrario y elijiendo $n > k$, eliminemos en el segundo miembro de la igualdad (4.10) todos los sumandos, a partir del $(k + 2)$-ésimo orden. Como resultado, obtenemos la desigualdad

$$x_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Pasando al límite en esta desigualdad para $n \to \infty$ y un k fijo, y notando que el segundo miembro tiene como límite s_k, obtenemos, por (4.26), la desigualdad

$$e \geqslant s_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.28}$$

Uniendo (4.27) y (4.28), tendremos

$$x_n < s_n \leqslant e, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

De aquí, según (4.26), se deduce directamente que $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = e$, es decir, la igualdad (4.25).

OBSERVACIÓN. Para el cálculo aproximado del número e, la fórmula

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

no es muy cómoda, ya que cuando se pasa de n a $n + 1$, hay que realizar todos los cálculos de nuevo. La fórmula aproximada

$$e \approx s_n$$

en este sentido está mejor acondicionada para los cálculos numéricos, ya que durante el paso de n a $n + 1$, es necesario agregar al valor ya hallado s_n el número $\frac{1}{(n+1)!}$:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!},$$

es decir, los cálculos efectuados cuando se hallaba s_n, no se pierden. Además, en este caso, es fácil establecer también la estimación del error cuando se sustituye el número e por el valor de la suma s_n. (Esto será hecho en el p. 34.14, véase el ejemplo 4).

Ejercicio 16. Sea $a_0 > 0$, $b_0 \geqslant 0$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$, $b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Demuéstrese que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienden a un mismo límite a y que $0 \leqslant a - a_n \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, $0 \leqslant b_n - a \leqslant \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}$.

4.10. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES POR FRACCIONES DECIMALES INFINITAS

Sea dado cualquier número a, para mayor exactitud $a \geqslant 0$. Por el principio de Arquímedes existe un número entero $n_0 > a$. Entre los números $n = 1, 2, \ldots, n_0$, tomemos el menor que tiene la propiedad $n > a$ y denotémoslo por $\alpha_0 + 1$, entonces $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$.

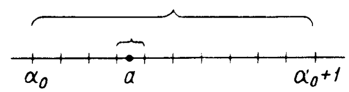


FIG. 11

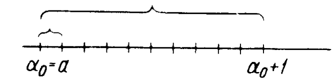


FIG. 12

FIG. 13

Dividamos el segmento $I_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1]$ en diez segmentos iguales, es decir, analicemos los segmentos

$$[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + 1/10],$$

donde $\alpha_1 = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

Son posibles dos casos: o bien el punto a no coincide con ninguno de los puntos de división (fig. 11), o bien el punto a coincide con uno de los puntos de división (figs. 12, 13). En el primer caso, el punto a pertenece sólo a uno de estos segmentos. Denotémoslo por

$$I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right],$$

donde α_1 denota el número del segmento, es decir, una de las cifras $0, 1, \ldots, 9$.

En el segundo caso, el punto a puede pertenecer a dos segmentos vecinos (fig. 13). Entonces por $I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right]$ denotamos aquel de ellos para el cual el punto a es el extremo izquierdo. En todos los casos $a \in I_1$. Dividamos el segmento I_1 a su vez en diez segmentos iguales y por $I_2 = \left[\alpha_0, \alpha_1\alpha_2; \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}\right]$ denotemos aquel de los segmentos obtenidos que contiene a y para el cual a no es extremo derecho. Continuando este proceso obtendremos un sistema de segmentos encajados

$$I_n = [\underline{a}_n, \bar{a}_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde

$$\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n, \quad \bar{a}_n = \alpha_0, \quad \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \frac{1}{10^n}$$

y α_n es una de las cifras $0, 1, 2, \cdots, 9$. Cada uno de los segmentos I_n contiene a, y a no es su extremo derecho,

$$a \in I_n, \quad a \neq \bar{a}_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots;$$

la longitud del segmento I_n es igual a 10^{-n} y por consiguiente tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Las fracciones decimales finitas $\underline{a}_n$ y $\bar{a}_n$ se llaman *fracciones decimales que aproximan el número a*. Más exactamente, el número $\underline{a}_n$ es la *aproximación decimal inferior* de orden n y el número $\bar{a}_n$, la *aproximación decimal superior* del mismo orden del número a. Ellas poseen las siguientes propiedades que se deducen directamente de su definición:

$$\underline{a}_n \leqslant a < \bar{a}_n, \tag{4.29}$$

$$\underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \quad \bar{a}_{n+1} \leqslant \bar{a}_n, \tag{4.30}$$

$$\bar{a}_n - \underline{a}_n = 1/10^n. \tag{4.31}$$

En el caso cuando $a < 0$, entonces, suponiendo que $b = -a$, determinamos

$$\underline{a}_n = -\bar{b}_n, \quad \bar{a}_n = -\underline{b}_n$$

y las propiedades (4.29) — (4.31) evidentemente se conservan, sólo en la desigualdad (4.29) los signos $\leqslant$ y $<$ se intercambian.

La propiedad (4.30) significa que los segmentos $[\underline{a}_n, \bar{a}_n]$ forman un sistema de segmentos encajados. De la propiedad (4.31) se deduce que las longitudes de los segmentos $[\underline{a}_n, \bar{a}_n]$ tienden a cero. Finalmente, (4.29) significa que el punto a pertenece a todos estos segmentos, por lo que por la observación 2 del p. 4.5 es el límite de sus extremos $\underline{a}_n$ y $\bar{a}_n$.

Así pues, en particular, está demostrado el siguiente lema.

Lema 1. *Cualquiera que sea el número a, la sucesión $\{\underline{a}_n\}$ crece monótonamente, la sucesión $\{\bar{a}_n\}$ decrece monótonamente, y*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = a.$$

Corolario. *Cualquier número real es el límite de una sucesión de números racionales.*

El corolario del lema se deriva de que $\underline{a}_n$ y $\bar{a}_n$ son números racionales.

Sea ahora, de nuevo, $a \geqslant 0$ y $\underline{a}_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$. Pongamos en correspondencia al número a la fracción decimal infinita $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$. Subrayemos que aquí α_0 es un número entero no negativo y α_n, $n = 1, 2, \dots$, una de las cifras $0, 1, 2, \dots , 9$. Por cuanto, el número a es el único número que pertenece a todos los segmentos I_n, $n = 1, 2, \dots$, entonces, en la correspondencia indicada, a números diferentes les corresponden diferentes fracciones decimales, es decir, que se diferencian al menos en un α_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$.

Observemos a continuación que en nuestra construcción no puede obtenerse una fracción con período compuesto por la única cifra 9. En efecto, supongamos que al número a le corresponde la fracción $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n_0} 9 \dots 9 \dots$, donde en el caso de $n_0 \neq 0$ se cumple la desigualdad $\alpha_{n_0} \neq 9$. Entonces por la construcción,

$$a \in \left[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n_0} 9 \dots 9;\ \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}\right]$$

para todos los $n \geqslant n_0$, donde n es el número de los símbolos decimales después de la coma en la fracción $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n_0} 9 \dots 9$. De aquí se deduce que a es el extremo derecho de todos los segmentos I_n, $n \geqslant n_0$, lo que contradice la elección de estos segmentos.

De esta forma, por la correspondencia establecida, a cada número real $a \geqslant 0$ le corresponde cierta fracción decimal infinita que no tiene período compuesto por una sola cifra 9. Tales fracciones decimales se llaman *admisibles*.

Finalmente, cada fracción decimal infinita y admisible $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ como resultado de la correspondencia descrita resulta puesta en correspondencia a cierto número a, y específicamente a aquel número único que pertenece a todos los segmentos:

$$\left[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n;\ \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right], \quad n = 1, 2, \dots .$$

Esta correspondencia se puede extender también a los números negativos: si al número $a > 0$ le corresponde la fracción $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, entonces al número $-a$ le ponemos en correspondencia la fracción $-\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$.

Los resultados obtenidos se pueden enunciar en forma del teorema siguiente.

Teorema 6. *Entre el conjunto de todos los números reales y el conjunto de las fracciones decimales admisibles existe una correspondencia biunívoca, y, además, si en esta correspondencia al número a le corresponde la fracción $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, entonces*

$$\pm \lim_{n\to\infty} \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = a.$$

La fracción decimal infinita $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ correspondiente al número a se llama su *notación decimal* y se utiliza para su designación, por lo que se escribe

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Si una fracción decimal infinita tiene período compuesto sólo por ceros, $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n 00 \dots 0 \dots$, y, además, $\alpha_n \neq 0$, entonces se dice que esta fracción tiene n cifras significativas después de la coma; y generalmente, el cero en el período no se escribe, es decir, el número indicado se escribe con la fracción decimal finita $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ (precisamente, tal escritura se usó anteriormente).

OBSERVACIÓN 1. A cualquier fracción decimal infinita

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

(no necesariamente admisible) se le puede también poner en correspondencia de forma natural un número real único perteneciente a todos los segmentos:

$$\left[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n;\ \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + \frac{1}{10^n}\right].$$

No obstante, la correspondencia obtenida aquí ya *no será biunívoca*: puede ocurrir que a fracciones decimales diferentes les corresponda un mismo número real. Especialmente, a las fracciones del tipo

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n 99 \dots 9 \dots \quad \text{y} \quad \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots (\alpha_n + 1)\, 00 \dots 0 \dots \ (\alpha_n \neq 9)$$

les corresponde un mismo número. En la construcción descrita anteriormente de la correspondencia de los números reales y las fracciones decimales infinitas obtendríamos no sólo fracciones decimales admisibles, si hubiéramos rechazado la condición de elegir cada vez aquel segmento I_n para el cual a no es su extremo derecho.

Utilizando la escritura de los números reales, con ayuda de las fracciones decimales infinitas se puede obtener la regla para su comparación por su magnitud y las reglas de las operaciones aritméticas sobre ellas. Uno y otro se reducen a las operaciones análogas sobre sus correspondientes aproximaciones decimales y, tal vez, a un paso límite. Enunciemos estos resultados en forma de lemas.

Lema 2. *Sean a y b números reales. Entonces $a < b$ si y sólo si existe un natural n_0 tal que para todos los $n > n_0$, tiene lugar la desigualdad*

$$\underline{a}_n < \underline{b}_n .$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a < b$. De $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, por la propiedad III de los límites de las sucesiones del p. 4.3, se deduce inmediatamente la existencia del número exigido n_0, es decir, tal que para todos los números $n > n_0$ se cumple la desigualdad $\underline{a}_n < \underline{b}_n$.

Viceversa, si existe el número señalado n_0, entonces el caso $a > b$ es imposible, por lo demostrado. Es imposible también el caso $a = b$, ya que entonces por la univocidad de la escritura de los números con ayuda de las fracciones decimales admisibles, para todos los $n = 1, 2, \ldots$, tendría lugar la igualdad $\underline{a}_n = \underline{b}_n$. Por lo tanto, $a < b$. □

Lema 3. *Sean a y b dos números reales, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} (\underline{a}_n + \underline{b}_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} (\underline{a}_n - \underline{b}_n) = a - b, \quad \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n \underline{b}_n = ab$$

y cuando $b \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} = \frac{a}{b}.^{*)}$$

Todas las afirmaciones de este lema se deducen directamente del lema 1 y de las propiedades de los límites, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las sucesiones (véase el p. 4.9).

OBSERVACIÓN 2. Del lema 3 se deduce que para realizar, con un grado dado de exactitud, cualquier operación aritmética sobre números escritos en forma de fracciones decimales admisibles, es necesario tomar con suficiente exactitud las aproximaciones decimales finitas y realizar sobre ellas las operaciones correspondientes. En la suma, resta y multiplicación como resultado se obtiene de nuevo una fracción decimal finita. En el caso de la división, el cociente de dos fracciones decimales finitas será, en general, una fracción decimal infinita, y, como es conocido de la matemática elemental, periódica. No obstante, en este caso, también se puede obtener el resultado, con cualquier grado de exactitud, expresado en fracción decimal finita. Por ejemplo, si $\underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)}_n$ es la aproximación decimal inferior de orden n para el cociente $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)}_n = \frac{a}{b} \tag{4.32}$$

y, por consiguiente, el cociente a/b, $b \neq 0$ se puede expresar con ayuda de fracciones decimales finitas del tipo $\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)}_n$ con cualquier exactitud.

*) Puede ocurrir que para algunos n tengamos $\underline{b}_n = 0$ y, por consiguiente, la expresión $\underline{a}_n/\underline{b}_n$ carece de sentido. No obstante, por la condición $b \neq 0$ y la propiedad III de los límites de las sucesiones, demostrada en el p. 4.3, existe n_0 tal que $\underline{b}_n \neq 0$ para $n \geqslant n_0$. En este caso, en lugar de la sucesión $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, es necesario analizar la sucesión $\underline{a}_n/\underline{b}_n$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$.

Para la demostración de la igualdad (4.32) hagamos

$$\alpha_n = \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} - \frac{a}{b};$$

por el lema 3 tenemos (véase el lema en el p. 4.9) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Ahora, utilizando (4.29) y (4.31) obtenemos

$$\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)}_n - \frac{a}{b} = \left[\underline{\left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right)}_n - \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}\right] + \left(\frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} - \frac{a}{b}\right) < \frac{1}{10^n} + \alpha_n .$$

Y por cuanto $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10^n} + \alpha_n\right) = 0$, entonces la igualdad (4.32) queda demostrada.

OBSERVACIÓN 3. Como resultado de los cálculos señalados anteriormente con las aproximaciones decimales inferiores de orden n, en el caso de la suma $\underline{a}_n + \underline{b}_n$, de la resta $\underline{a}_n - \underline{b}_n$ y de la división $\underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)}_n$, de nuevo obtendremos fracciones decimales finitas con no más de n cifras significativas después de la coma. En la multiplicación $\underline{a}_n\underline{b}_n$, se obtendrá, en general, una fracción decimal con $2n$ cifras significativas después de la coma. Si $\underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)}_n$ es la aproximación decimal inferior del producto $\underline{a}_n\underline{b}_n$, entonces análogamente a (4.32) se demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)}_n = ab.$$

De esta forma, en los cálculos aproximados de las sumas $a + b$, de las diferencias $a - b$, de los productos ab y de los cocientes a/b, $b \neq 0$, respectivamente por las fórmulas

$$\underline{a}_n + \underline{b}_n, \quad \underline{a}_n - \underline{b}_n, \quad \underline{(\underline{a}_n\underline{b}_n)}_n \quad \text{y} \quad \underline{(\underline{a}_n/\underline{b}_n)}_n,$$

como resultado de las operaciones indicadas sobre las fracciones decimales finitas $\underline{a}_n$ y $\underline{b}_n$ que tienen no más de n cifras significativas después de la coma, se obtienen de nuevo fracciones decimales con no más de n cifras significativas después de la coma y, además, el resultado puede ser obtenido con cualquier grado de exactitud dado. Precisamente de esta forma se realizan comúnmente las operaciones con números en la práctica.

OBSERVACIÓN 4. Señalemos que en la construcción del método de notación de los números reales con sucesiones de cifras, como base fue tomado el número 10 (los segmentos se dividieron consecutivamente en diez partes iguales). En lugar del número 10 se puede tomar cualquier número natural n. En la utilización de máquinas computadoras de acción rápida a menudo se usa el tal llamado sistema binario de notación de los números, correspondiente al caso $n = 2$. En la escritura de un número en el sistema binario participan sólo dos cifras, 0 y 1. Por ejemplo, el número 14,625 en el sistema binario tendrá la forma 1110,101, ya que

$$14{,}625 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3}$$

y las cifras en el sistema binario de escritura de un número son los coeficientes correspondientes a su descomposición según las potencias del dos.

OBSERVACIÓN 5. En la exposición de la teoría de los números reales se puede ir también en orden contrario: definir a los números reales como fracciones decimales infinitas y admisibles y utilizando esta escritura introducir en ellos de la forma correspondiente la relación de orden y las operaciones aritméticas.

Existen otras construcciones de los números reales, que parten de otros objetos concretos, no obstante, todas ellas nos llevan a conjuntos de elementos que satisfacen las propiedades I — V del p. 2.1. Recordemos (véase el p. 2.4*) que la presencia de las propiedades I — V definen unívocamente el conjunto de elementos que poseen estas propiedades. Unívocamente en el sentido de que dos conjuntos cualesquiera, para cuyos elementos se cumplen las condiciones I — V, son isomorfos con respecto a las operaciones de suma y multiplicación y a la propiedad de ordenamiento. Aquí nos encontramos con un rasgo característico de los métodos matemáticos de investigación, para los cuales es absolutamente indiferente la naturaleza de los elementos, y sólo son importantes las "relaciones cuantitativas" entre ellos, las cuales en el caso dado se expresan con las propiedades I — V.

4.11* NUMERABILIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES. INNUMERABILIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

Surge una pregunta natural: ¿si todos los conjuntos infinitos contienen un número igual de elementos o hay diferentes infinitos? Ante todo, resulta que no se entiende qué significa, en general, el término "igual número de elementos" para los conjuntos infinitos. La comparación de conjuntos infinitos por la cantidad de elementos contenidos en ellos o, como se acostumbra decir, por su potencia, es cómodo realizarla con ayuda del concepto de correspondencia biunívoca entre los elementos de los conjuntos (véase el p. 1.2*).

Definición 17. *Dos conjuntos se llaman equipotentes, si entre sus elementos se puede establecer una correspondencia biunívoca.*

Desde este punto de vista los números naturales $1, 2, \ldots, n, \ldots$ forman un conjunto equipotente al conjunto de los números pares $2, 4, \ldots, 2n, \ldots$ aunque a primera vista parece que los últimos son dos veces menores. La correspondencia biunívoca exigida se obtiene si al número natural n se le pone en correspondencia el número $2n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Los números pares forman una parte del conjunto de los números naturales, no obstante, estos conjuntos son equipotentes, por consiguiente, en el caso de conjuntos infinitos, ¡una parte puede igualarse en nuestro sentido al todo!

Definición 18. *Un conjunto equipotente al conjunto de todos los números naturales se llama numerable.*

De esta forma, si X es numerable, entonces entre el conjunto X y el conjunto de los números naturales se puede establecer una correspondencia biunívoca o, como se dice, se pueden numerar los elementos del conjunto X, entendiendo por número de cada elemento $x \in X$ el número natural que le corresponde en la correspondencia indicada.

Los conjuntos numerables en el sentido definido son los conjuntos infinitos más simples. Precisamente es válido el siguiente lema.

Lema 1. *Cualquier conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea X un conjunto infinito. Tomemos cualquiera de sus elementos y denotémoslo por x_1. Ya que X es un conjunto infinito, en él, a ciencia cierta, se tiene al menos un elemento diferente de x_1. Elijamos cualquiera de estos elementos y denotémoslo por x_2.

Supongamos que en el conjunto X ya se escogieron los elementos $x_1, \ldots, x_n$. Por cuanto X es un conjunto infinito, entonces en él, a ciencia cierta, hay otros elementos más; escojamos cualquiera de los elementos restantes y denotémoslo por x_{n+1}, etc. Como resultado obtuvimos los elementos $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, que forman un subconjunto numerable del conjunto X. □

Lema 2. *Cualquier subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un conjunto numerable, sus elementos pueden ser numerados: $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Sea Y un subconjunto infinito del conjunto X. Denotemos por b_1 el elemento del conjunto Y que se encuentra primeramente en la serie $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, es decir, aquel de los elementos $a_n \in X$ que pertenece al conjunto Y y tiene el número mínimo $n_0 : b_1 = a_{n_0}$. Por b_2 denotemos aquel de los elementos a_n que pertenece al conjunto Y y tiene el número menor entre los números $n > n_0$, etc. Cada elemento del conjunto Y se encuentra en la serie $a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n, \ldots$, por lo que después de un número finito de pasos, será denotado por b_m, y por cuanto el conjunto Y es infinito, entonces el índice m toma cualquier valor $1, 2, 3, \ldots$. De esta forma, todos los elementos del conjunto Y resultaron numerados con los números naturales $m = 1, 2, \ldots$. Esto significa que el conjunto Y es un conjunto numerable. □

El siguiente teorema da un ejemplo interesante de conjunto numerable.

Teorema 7. *El conjunto de todos los números racionales es un conjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Coloquemos los números racionales en una tabla de la siguiente forma. En la primera fila pongamos todos los números enteros en orden creciente por su valor absoluto y de forma tal que después de cada número natural esté colocado el opuesto a él:

$$0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots, n \in N.$$

En la segunda fila coloquemos todas las fracciones racionales irreducibles con denominador 2, ordenadas por su valor absoluto y de nuevo, después de cada número positivo ponemos el opuesto a él:

$$1/2, -1/2, 3/2, -3/2, 5/2, -5/2, \ldots .$$

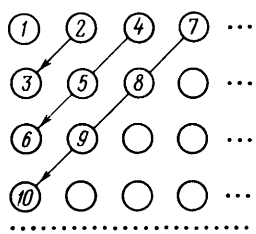
En general, en la n-ésima fila coloquemos todas las fracciones racionales irreducibles con denominador n, ordenadas por su valor absoluto de forma tal que después de cada número positivo va el opuesto.

Como resultado obtendremos una tabla con un número infinito de filas y columnas:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \\[4pt]
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \dots \\[4pt]
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \dots \\[4pt]
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\[4pt]
\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & \dots & \dots & \dots \\[4pt]
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Es evidente que cada número racional cae en algún lugar en esta tabla.

Numeremos ahora los elementos de la tabla obtenida, de acuerdo al siguiente esquema (en los círculos están los números de los elementos correspondientes, la flecha indica el sentido de la numeración):



Como resultado, todos los números racionales resultan numerados, es decir, el conjunto Q de los números racionales es numerable. □

Naturalmente, surge la pregunta: ¿existen conjuntos infinitos que no sean numerables? Resulta que sí, existen y se llaman, naturalmente, *conjuntos innumerables.* Un ejemplo importante de conjunto innumerable se establece con el teorema que sigue.

Teorema 8 (de Cantor). *El conjunto de todos los números reales es innumerable.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario, que logramos numerar todos los números reales: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; escribámoslos con ayuda de fracciones decimales admisibles:

$$\begin{array}{l}
x_1 = \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)} \dots \alpha_m^{(1)} \dots \\
x_2 = \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)} \dots \alpha_m^{(2)} \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n = \alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}\alpha_1^{(n)} \dots \alpha_m^{(n)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array} \tag{4.33}$$

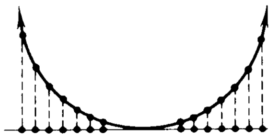


FIG. 14

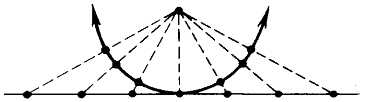


FIG. 15

Aquí $\alpha_m^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$, denota una de las cifras $0, 1, 2, \dots, 9$ y $\alpha_0^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, un número entero con uno u otro signo.

Escojamos la cifra α_n, $n = 1, 2, \dots$, de forma tal que $\alpha_n \neq \alpha_n^{(n)}$ y $\alpha_n \neq 9$. Entonces, la fracción $0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ es admisible, pero el número $a = 0, \alpha_1\alpha_2 \dots \dots \alpha_n \dots$, a ciencia cierta, no está entre los números x_n, $n = 1, 2, \dots$, ya que la fracción decimal $0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, al menos en un signo decimal se diferencia de cada una de las fracciones decimales (4.33). La contradicción obtenida demuestra el teorema. □

Corolario 1. *El conjunto de los números reales que forman cualquier intervalo es innumerable.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que más aún, el conjunto de los números reales de cualquier intervalo es equipotente al conjunto de todos los números reales.

En realidad, ante todo, cualquier intervalo es equipotente al intervalo $(-1, +1)$. Una correspondencia biunívoca entre el intervalo (a, b) y $(-1, +1)$ se puede establecer, por ejemplo, con ayuda de la representación lineal $x = \dfrac{2t - a - b}{b - a}$. Si $a < t < b$, entonces $-1 < x < +1$. El intervalo $(-1, +1)$ biunívocamente con ayuda de la aplicación

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|}, \quad -1 < x < 1,$$

se aplica sobre todo el eje real (compruébese esto). De esta forma, resulta que el intervalo (a, b) es equipotente a todo el eje real y, por consiguiente, es un conjunto innumerable. □

Una correspondencia biunívoca entre un intervalo y toda la recta es fácil de realizar visualmente con el método geométrico: inicialmente, proyectamos una semicircunferencia abierta, es decir, una semicircunferencia sin sus puntos extremos con ayuda de una proyección paralela sobre el intervalo (fig. 14) y, por tanto, establecemos una correspondencia biunívoca entre sus puntos. Luego, con ayuda de una proyección central desde el centro de la semicircunferencia, la proyectamos sobre la recta (fig. 15). Esta proyección también establece una correspondencia biunívoca, pero esta vez, entre la semicircunferencia indicada y toda la recta.

Corolario 2. *En cualquier intervalo se tienen números irracionales.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si en cierto intervalo no hubiera números irracionales, entonces esto significaría que todos los puntos de este intervalo son números racionales, es decir, son un subconjunto del conjunto numerable de los números racionales y por tanto conforman un conjunto finito, o numerable (véase el lema 2) lo cual contradice el corolario 1. □

OBSERVACIÓN. En el punto 4.10 se demostró que un número real es el límite de una sucesión de números racionales (por ejemplo, de sus aproximaciones decimales superiores). De aquí inmediatamente se deduce que cualquier intervalo contiene una cantidad infinita de números racionales. En realidad, supongamos que está dado el intervalo (a, b). Escojamos cualquier número $\xi \in (a, b)$, por ejemplo, $\xi = \frac{a+b}{2}$. Entonces, si $\bar{\xi}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, son las aproximaciones decimales superiores para ξ, pues $\bar{\xi}_n \neq \xi$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{\xi}_n = \xi$. Por cuanto el intervalo (a, b) es un entorno del punto escogido ξ, entonces, por la definición de límite de una sucesión, casi todos los números racionales $\bar{\xi}_n$ se contendrán en el intervalo (a, b). Dicho de otro modo, se encuentra un número n_0 tal que para todos los números $n \geqslant n_0$ se cumplirá la desigualdad $a < \bar{\xi}_n < b$, es decir, $\bar{\xi}_n$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$, son los números racionales buscados.

De esta forma, en cualquier intervalo del eje numérico se contienen tanto números racionales, como irracionales. Esta propiedad se expresa brevemente diciendo que "los números racionales e irracionales forman subconjuntos siempre densos del conjunto de los números reales".

Ejercicio 17. *Demuéstrese que los conjuntos de los puntos de un intervalo, segmento e intervalo semiabierto son equipotentes.*

4.12* LÍMITES SUPERIOR E INFERIOR DE LAS SUCESIONES

En el p. 4.6 fue demostrado que cualquier sucesión numérica siempre tiene al menos un límite parcial finito o infinito. El mayor y menor de ellos (más adelante será mostrado que siempre existen) juegan un papel singular en la teoría de sucesiones. Aquí los conceptos de "mayor" y "menor" se interpretan en el sentido del conjunto extentido de los números reales $\bar{R}$ (véase el p. 3.1), es decir, en particular, el mayor elemento (menor) del conjunto $X \subset \bar{R}$ puede resultar $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$). Esto tendrá lugar cuando $+\infty \in X$ $(-\infty \in X)$. En nuestro caso, esto significa que el infinito del signo correspondiente es un límite parcial de la sucesión analizada.

No todo conjunto en la recta numérica extendida tiene elemento máximo (mínimo). Sin embargo, si este conjunto es el conjunto de los límites parciales de cierta sucesión, entonces en él existe siempre un elemento máximo y un elemento mínimo.

Definición 19. *El mayor límite parcial de la sucesión $\{x_n\}$ se llama límite superior y se denota por $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ y el menor límite parcial se llama límite inferior y se denota por $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.*

Teorema 9. *Cualquier sucesión $\{x_n\}$ tiene límite parcial tanto superior como inferior.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la existencia del límite parcial superior. Para la sucesión $\{x_n\}$ dada son posibles dos casos: está acotada superiormente o bien no lo está. Si no está acotada superiormente, entonces $+\infty$ es un límite parcial y evidentemente el mayor, es decir, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$.

Si la sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente, entonces de nuevo, son posibles dos casos: el conjunto de sus límites finitos que denotaremos por A no es vacío o bien es vacío. Analicemos inicialmente el primer caso. De la acotación superior de la sucesión $\{x_n\}$ dada se deduce la acotación superior del conjunto no vacío A de sus límites parciales finitos. Por esto, el conjunto A tiene una cota superior finita. Mostremos que $b = \sup A$ es un límite parcial, es decir, que $b \in A$. En efecto, si $b \notin A$, entonces existiría $\varepsilon > 0$ tal que en el intervalo $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ se contendría sólo un número finito de términos de la sucesión $\{x_n\}$ (en particular, ninguno) y por lo tanto, (¿por qué?) en este intervalo no habría ni un elemento de A, lo cual contradice la condición $b = \sup A$.

De esta forma $b \in A$ y, por consiguiente, es el mayor elemento del conjunto A, por lo que $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

En el otro caso, es decir, cuando la sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente y el conjunto de sus límites parciales finitos A es vacío, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (demúestrese esto), es decir, en este caso el conjunto de sus límites parciales está compuesto por un elemento $-\infty$ que a su vez es el mayor en este conjunto, es decir, aquí

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty.$$

De forma análoga, para cualquier sucesión se demuestra la existencia del límite parcial menor (finito o infinito). □

Ejercicio 18. Sea $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Hállese $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$.

Teorema 10. *Para que el número a sea el límite superior de la sucesión $\{x_n\}$ es necesario y suficiente que para cualquier número $\varepsilon > 0$ se cumplan las dos condiciones siguientes.*

1. *Existe un número n_ε tal para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ es válida la desigualdad $x_n < a + \varepsilon$.*

2. *Para cualquier número n_0 existe un número n' (que depende de ε y de n_0) tal que $n' > n_0$ y $x_{n'} > a - \varepsilon$.*

La condición 1 significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo, en la sucesión $\{x_n\}$ existe sólo un número finito de términos x_n tales que $x_n \geqslant a + \varepsilon$ (su número es menor que n_ε).

La condición 2 significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo, en la sucesión $\{x_n\}$ existe un número infinito de términos x_n tales que $x_n > a + \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ y supongamos que $\varepsilon > 0$ está dado. Si en el intervalo semiabierto $[a + \varepsilon, +\infty]$ hubiera una cantidad infinita de elementos de la sucesión $\{x_n\}$, entonces se encontraría una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ cuyos elementos pertenecen a este intervalo semiabierto y que tiene límite infinito o finito. Denotémoslo por b. Es evidente que $b \geqslant a + \varepsilon > a$, lo que contradice que a es el límite parcial mayor de la sucesión $\{x_n\}$. La propiedad 1 queda demostrada.

Más adelante, por cuanto el límite superior es también un límite parcial, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Casi todos los términos de la sucesión $\{x_{n_k}\}$ son mayores que $a-\varepsilon$ y por consiguiente existe una cantidad infinita de términos de la sucesión $\{x_n\}$ dada, mayores que $a-\varepsilon$. La condición 2 también queda demostrada.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que el número a satisface las condiciones 1 y 2. Mostremos que entonces a es un límite parcial. Tomemos $\varepsilon = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$. Para cada natural k existe un número n_k tal que $x_{n_k} > a - 1/k$ (por la condición 2) y $x_{n_k} < a + 1/k$ (por la condición 1). Por cuanto, para cualquier k el conjunto de los elementos x_n de la sucesión dada, para los cuales se cumple la desigualdad $a - \frac{1}{k} < x_n < a + \frac{1}{k}$, es infinito, entonces, los números n_k se puede escoger sucesivamente ($k = 1, 2, \ldots$) de forma tal que $n_{k_1} < n_{k_2}$ cuando $k_1 < k_2$. Como resultado obtendremos la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$ dada. De la desigualdad $|a - x_{n_k}| < \frac{1}{k}$ se deduce que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, es decir, que a es un límite parcial de la sucesión $\{x_n\}$.

Mostremos ahora que el número a es el límite parcial mayor. En efecto, si se encontrara un límite parcial b de la sucesión $\{x_n\}$ tal que $b > a$, entonces, tomando $\varepsilon > 0$ de forma tal que $a + \varepsilon < b$, obtendríamos que sobre el intervalo $(a + \varepsilon, +\infty)$ se encontrará un número infinito de términos de la sucesión $\{x_n\}$ (y precisamente, casi todos los términos de la subsucesión convergente a b). Esto contradice la condición 1. □

Ejercicios. 19. Demuéstrese que para que una sucesión tenga límite (finito o infinito, igual a uno de los símbolos $+\infty$ o $-\infty$), es necesario y suficiente que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

20. Demuéstrese que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, (x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$.

21. Demuéstrese que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_n \left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{m\geqslant n} x_m\right\},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_n \left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\inf_{m\geqslant n} x_m\right\}.$$

§ 5. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

5.1. FUNCIONES REALES

En el estudio de unos u otros procesos del mundo real (físicos, químicos, biológicos, económicos y otros) constantemente nos encontramos con unas u otras magnitudes que los caracterizan y que cambian en el transcurso de los procesos analizados. A menudo ocurre que la variación de una magnitud va acompañada por la variación de otra o incluso, aún más, la variación de una magnitud es causa de la variación de otra. Las variaciones relacionadas entre sí de las características numéricas

de las magnitudes analizadas nos llevan a su dependencia funcional en los modelos matemáticos correspondientes. Por esto, el concepto de función es uno de los conceptos más importantes en la matemática y sus aplicaciones.

En nuestro curso de análisis matemático, inicialmente serán estudiadas sólo las funciones reales de un argumento real, es decir, las funciones $f: X \to \boldsymbol{R}$, donde $X \subset \boldsymbol{R}$ y $X \neq \varnothing$. Las variables independientes y dependientes se llaman en este caso, *variables reales*. Luego aparecen las funciones de varias variables, es decir, las funciones definidas sobre cierto conjunto de elementos, cada uno de los cuales es un conjunto ordenado de números. Se estudiarán también las funciones que toman valores complejos, las funciones cuyos argumentos son números complejos y otras funciones de naturaleza más general.

Sobre las funciones que toman valores numéricos (tales funciones se llaman *funciones numéricas*) se pueden realizar diferentes operaciones aritméticas. Si están dadas dos funciones numéricas f y g definidas sobre un mismo conjunto X y c es un número (o, como se dice a menudo, una constante), entonces la función cf se define como la función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $cf(x)$; la función $f + g$ como la función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x) + g(x)$; fg como la función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x)g(x)$; y finalmente f/g como la función que en cada punto $x \in X$ es igual a $f(x)/g(x)$ (lo cual, naturalmente, tiene sentido sólo para $g(x) \neq 0$).

La función numérica f definida sobre el conjunto X se llama *acotada superiormente* (*acotada inferiormente*) si el conjunto de sus valores está acotado superiormente (inferiormente). Dicho de otro modo, la función f está acotada superiormente (inferiormente) si existe una constante M tal que para cada $x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant M$ (respectivamente $f(x) \geqslant M$).

La función f acotada sobre el conjunto X tanto superior como inferiormente se llama simplemente *acotada* sobre este conjunto. Evidentemente esta función está acotada sobre el conjunto X si y sólo si existe un número $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para cada $x \in X$.

La cota superior (inferior) del conjunto de los valores Y_f de la función numérica $y = f(x)$ definida sobre el conjunto X se llama *cota superior* (*inferior*) de la función f y se denota por

$$\sup f,\ \sup_X f,\ \sup_{x\in X} f(x)\ \left(\inf f,\ \inf_X f,\ \inf_{x\in X} f(x)\right).$$

Más detalladamente, esto significa que, por ejemplo, $\lambda = \sup f$, si, en primer lugar, para cada $x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant \lambda$ y, en segundo lugar, para cada $\lambda' < \lambda$ existe $x_{\lambda'} \in X$ tal que $f(x_{\lambda'}) > \lambda'$. El índice λ' del elemento del conjunto X muestra que éste depende de la elección del número λ'.

En la definición dada la cota superior (inferior) de una función puede ser tanto finita como infinita.

Por los resultados del p. 3.4 la función f está acotada superiormente (inferiormente) sobre el conjunto X si y sólo si tiene sobre este conjunto cota superior (inferior) finita.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si la función f no está acotada superiormente (respectivamente inferiormente) sobre el segmento $[a, b]$, entonces existe una sucesión de puntos $x_n \in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ (respectivamente, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$).

2. Demuéstrese que si la función no está acotada sobre un segmento, entonces existe un punto de este segmento, en cada entorno del cual la función no está acotada. ¿Es válida esta afirmación para un intervalo?

3. Constrúyase un ejemplo de función definida sobre un segmento y no acotada sobre él.

Diremos que la función numérica f definida sobre el conjunto X toma en el punto $x_0 \in X$ el *valor máximo* (respectivamente, *mínimo*) si $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivamente, $f(x) \geqslant f(x_0)$) para cada punto $x \in X$. En este caso, escribiremos $f(x_0) = \max\limits_X f$ o $f(x_0) = \max f$ (respectivamente, $f(x_0) = \min\limits_X f$ ó $f(x_0) = \min f$).

Los valores máximos y mínimos se llaman *extremales*.

Es evidente, que si la función f toma en el punto x_0 el valor máximo (mínimo), entonces $f(x_0) = \sup f$ (respectivamente, $f(x_0) = \inf f$).

Señalemos, además, que si están dados los conjuntos X, Y y la aplicación f que pone en correspondencia a cada elemento del conjunto X un único elemento del conjunto Y, entonces con esto la función f definida sobre el conjunto X y con el conjunto de valores contenido en el conjunto Y está definida totalmente. En particular, es indiferente con qué letra se denota el argumento y con la cuál el valor de la función. Así, en la aplicación dada f, las escrituras $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ y $v = f(u)$, $u \in X$, $v \in Y$ denotan lo mismo. Por ejemplo, $y = \log_a x$, $x > 0$, y $x = \log_a y$, $y > 0$, denotan una misma función.

Hagamos para concluir una observación sobre la terminología. En el caso del entorno de un punto, junto con la expresión "función definida sobre un entorno" se utiliza "función definida en un entorno". En expresiones semejantes, utilizadas usualmente para conjuntos abiertos, las preposiciones "en" y "sobre" tienen un mismo sentido.

5.2. FORMAS DE REPRESENTAR FUNCIONES

En este capítulo se estudian sólo las funciones reales de una variable real, es decir, las funciones f tales que $f: X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$, $X \neq \varnothing$. Por esto nos detendremos aquí sólo en las formas de representar tales funciones.

Ante todo las funciones se pueden representar (definir) con ayuda de fórmulas: *método analítico*. Para esto se utiliza cierta reserva de funciones estudiadas y especialmente denotadas, operaciones algebraicas y pasos límites. Por ejemplo, $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$.

Siempre por función representada por cierta fórmula se entiende la función definida sobre el conjunto de todos aquellos números reales para los cuales, en primer lugar, la fórmula indicada tiene sentido y, en segundo lugar, en el proceso de la realización de todos los cálculos necesarios a base de esta fórmula se obtienen sólo números reales y, además, el resultado final de los cálculos para el número dado x del dominio de la función analizada (conjunto de definición) es su *valor* en el punto x. Así, el campo de existencia de la función $f(x) = \dfrac{x + |x|}{\sqrt{1 - x^2}}$ es el intervalo $(-1, 1)$, aunque esta función toma valores reales en la semirrecta $x < 1$ con el "punto excluido" $x = -1$.

Señalemos que en esta definición las funciones reales $f(x) = x$ y $f(x) = (\sqrt{x})^2$ tienen diferentes dominios: la primera está definida sobre el conjunto de todos los números reales y la segunda, sólo sobre el conjunto de todos los no negativos.

A veces la función se da con ayuda de varias fórmulas, por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{para } x = 0, \\ x - 1 & \text{para } x < 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Una función puede darse también simplemente con ayuda de la descripción de la correspondencia. Pongamos en correspondencia a cada número $x > 0$ el número 1, al número 0, el número 0 y a cada $x < 0$, el número -1. Como resultado obtendremos una función definida sobre todo el eje real y que toma tres valores: 1, 0 y -1. Esta función tiene una notación especial $\operatorname{sign} x$ *) y, naturalmente, puede ser escrita con ayuda de varias fórmulas:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{para } x = 0, \\ -1 & \text{para } x < 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Otro ejemplo: a cada número racional pongámosle en correspondencia el número 1 y a cada irracional, el cero. La función obtenida se llama *función de Dirichlet* **).

Señalemos que cualquier fórmula es una escritura simbólica de cierta correspondencia descrita anteriormente en algún lugar, así que al fin y al cabo no hay diferencia principal entre la representación de una función con ayuda de una fórmula o con ayuda de la descripción de la correspondencia; esta diferencia es simplemente externa.

Es necesario también tener en cuenta que cualquier función definida por primera vez, si para ella se introduce una notación especial, puede servir para la definición de otras funciones con ayuda de fórmulas que incluyan este nuevo símbolo.

Si se habla de funciones reales de un argumento real, entonces para la presentación evidente del carácter de la dependencia funcional, a menudo se construyen las gráficas de las funciones.

Se llama gráfica de la función $y = f(x)$ *(x e y son números) el conjunto de puntos sobre el plano con coordenadas* $(x, f(x))$, $x \in X$ *(X, como siempre, es el campo de definición de la función).*

Así, la gráfica de la función (5.1) tiene la forma representada en la fig. 16, la gráfica de la función sign x (véase (5.2)), en la fig. 17, y la gráfica de la función $y = 1 + \sqrt{\log \cos 2\pi x}$ está compuesta por puntos sueltos (fig. 18).

El conjunto de puntos $\{(x, y): x \in X, y \geqslant f(x)\}$ se llama *supergráfica* de la función f dada y el conjunto $\{(x, y): x \in X, y \leqslant f(x)\}$ *su subgráfica*.

*) *Signum* en latín significa "signo".

**) L. Dirichlet (1805 — 1859), matemático alemán.

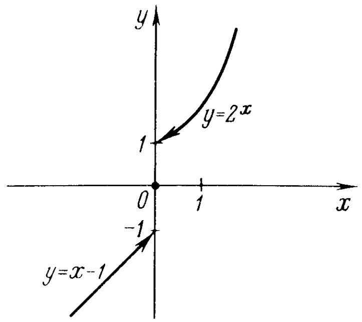


FIG. 16

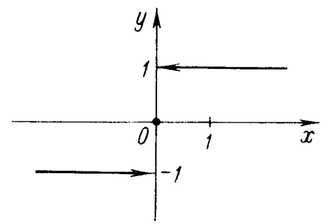


FIG. 17

La representación gráfica de una función también puede servir para la definición de la dependencia funcional. Claro, esta definición será aproximada, porque la medición de los segmentos prácticamente puede realizarse sólo con determinado grado de exactitud. Como ejemplos de definición gráfica de funciones que se encuentran en la práctica, pueden servir, por ejemplo, las indicaciones de un oscilógrafo.

Una función se puede representar además *con ayuda de tablas*, es decir, para algunos valores de la variable x indicar los valores respectivos de la variable y. Los datos de las tablas pueden ser obtenidos tanto directamente de un experimento como con ayuda de unos u otros cálculos matemáticos. Ejemplos de tal definición de las funciones son las tablas logarítmicas y las tablas de las funciones trigonométricas.

Por último, en la realización de cálculos numéricos en computadoras, las funciones se dan *con ayuda de programas*, para su cálculo con los valores necesarios del argumento, o los valores exigidos de la función, en forma preparada, se introducen de uno u otro modo en la memoria de la computadora.

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones:

4. $y = 2x + 1$.
5. $y = ax + b$.
6. $y = a/x$.
7. $y = 2x^2$.
8. $y = ax^2 + bx + c$.
9. $y = 2^x$.
10. $y = (1/2)^x$.
11. $y = \log x$.
12. $y = \log_{1/2} x$.

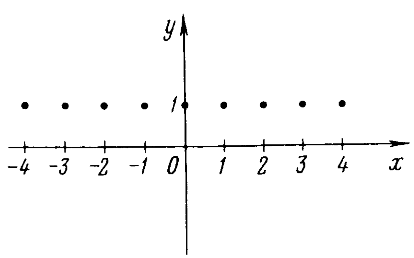


FIG. 18

13. $y = \operatorname{sen} 2x$.
14. $y = 2\cos(3x + 2) + 1$
15. $y = \operatorname{tg} 3x$.
16. $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$
17. $y = \operatorname{arcsen} x$.
18. $y = 3\arccos\frac{x}{2} + 1$.
19. $y = \operatorname{arctg} x$.
20. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$.
21. $y = \dfrac{x^2(x - 1)^2}{x + 1}$.

Analicemos más detalladamente algunos métodos analíticos especiales de definición de una función.

FUNCIONES IMPLÍCITAS. Supongamos que está dada una ecuación del tipo

$$F(x, y) = 0, \tag{5.3}$$

es decir, está dada la función $F(x, y)$ de dos variables reales x e y y se analizan sólo aquellos pares x, y (si existen) para los cuales se cumple la condición (5.3).

Supongamos que existe el conjunto X tal que para cada $x_0 \in X$ existe al menos un número y que satisface la ecuación $F(x_0, y) = 0$. Denotemos uno de estos y por y_0 y pongámosle en correspondencia al número $x_0 \in X$. Como resultado obtendremos la función f definida sobre el conjunto X y tal que $F(x_0, f(x_0)) = 0$ para todos los $x_0 \in X$. En este caso se dice que la función f se da implícitamente por la ecuación (5.3). La misma ecuación (5.3) define, en general, no una, sino cierto conjunto de funciones.

Las funciones definidas implícitamente por ecuaciones del tipo (5.3) se llaman *funciones implícitas* a diferencia de las funciones definidas por una fórmula resoluble con respecto a la variable y, es decir, por una fórmula del tipo $y = f(x)$.

El término "función implícita" refleja no el carácter de la dependencia funcional, sino sólo el método de su representación. Una misma función se puede dar tanto explícita como implícitamente. Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ pueden ser definidas también de forma implícita con ayuda de la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$, en el sentido de que entran en el conjunto de las funciones definidas por esta ecuación.

FUNCIONES COMPUESTAS. Recordemos que si están definidas las funciones $y = f(x)$ y $z = F(y)$ y, además, el dominio de la función F contiene el campo de valores de la función f, entonces a cada x del dominio de la función f, de forma natural, le corresponde un z tal que $z = F(y)$, donde $y = f(x)$. Esta función definida por la correspondencia $z = F[f(x)]$ se llama, como es conocido, ***función compuesta*** o ***composición*** (***superposición***) de las funciones f y F y se denota por $F \circ f$, es decir,

$$(F \circ f)(x) \overset{\text{def}}{=} F(f(x)).$$

Una función compuesta refleja no el carácter de la dependencia funcional, sino sólo el método de su representación: puede ocurrir que una misma función puede ser representada tanto con ayuda de composiciones de algunas funciones como sin su ayuda. Por ejemplo, la función compuesta $z = 2^y$, $y = \log_2(1 + \operatorname{sen}^2 x)$ definida con ayuda de las superposiciones de las funciones logarítmica y exponencial puede ser representada sin esta composición $z = 1 + \operatorname{sen}^2 x$.

De forma similar, se pueden analizar las funciones compuestas que son la composición de más de dos funciones, por ejemplo, la función $w =$

$= \operatorname{sen}\log\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ se puede analizar como la composición de las siguientes funciones: $w = \operatorname{sen} v$, $v = \log u$, $u = 1 + z$, $z = 1/y$, $y = \sqrt{x}$.

5.3. FUNCIONES ELEMENTALES Y SU CLASIFICACIÓN

Las funciones: constante $y = c$, c es una constante, potencial $y = x^{\alpha}$, exponencial $y = a^x$ $(a > 0)$, logarítmica $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, y trigonométricas inversas $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ e $y = \operatorname{arcctg} x$ se llaman *principales funciones elementales*.

Cualquier función que pueda ser dada en forma explícita con ayuda de una fórmula que contiene sólo un número finito de operaciones aritméticas y de composiciones de las principales funciones elementales se llama simplemente función elemental.

Por campo de existencia de una función elemental en correspondencia con el acuerdo general sobre las funciones dadas por fórmulas (véase el p. 5.2), comúnmente se entiende el conjunto de todos los números reales x para los cuales, en primer lugar, la fórmula que define la función elemental analizada tiene sentido y, en segundo lugar, en el proceso de realización de todos los cálculos necesarios por esta fórmula se obtienen sólo números reales.

Las funciones analizadas anteriormente representadas por las fórmulas $y = ax + b$, $y = ax^2$, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 1 + \sqrt{\log\cos 2\pi x}$, $y = \operatorname{sen}\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $y = \dfrac{x + |x|}{\sqrt{1 - x^2}}$ (observemos que $|x| = \sqrt{x^2}$ es una función elemental) son funciones elementales.

Las funciones elementales comúnmente se dividen en las siguientes clases.

1. POLINOMIOS. A los polinomios pertenecen las funciones que pueden ser definidas por fórmulas del tipo

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$

Si $a_n \neq 0$, entonces el número n se llama grado del polinomio dado. Los polinomios de primer grado también se llaman funciones lineales.

2. FUNCIONES RACIONALES (FRACCIONES RACIONALES). A esta clase de funciones pertenecen las funciones que pueden ser definidas de la forma

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Notemos que la clase de los polinomios está contenida en la clase de las funciones racionales.

3. FUNCIONES IRRACIONALES. Se llama función irracional la función que no es racional, la que puede ser representada con ayuda de composiciones de un número finito de funciones racionales, funciones potenciales con exponentes racionales y las cuatro operaciones aritméticas. Por ejemplo, la función

$$y = \sqrt[5]{(x-1)/(x^2 + \sqrt{x})}$$

es una función irracional.

4. FUNCIONES TRASCENDENTES. Las funciones elementales que no son racionales ni irracionales se llaman funciones elementales trascendentes. Se puede mostrar que todas las funciones trigonométricas directas e inversas y también la exponencial y logarítmica son funciones trascendentes.

Por cuanto en nuestro curso de análisis se estudian principalmente las funciones reales de uno o varios argumentos reales, en lugar de "función real" diremos y escribiremos simplemente "función". En aquellos casos cuando se analicen funciones de otra naturaleza, esto se acordará especialmente o bien quedará claro del contexto.

5.4. PRIMERA DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Pasemos ahora al estudio de uno de los conceptos más fundamentales del análisis matemático, el concepto de límite de una función. Como "puntos" vamos a entender puntos finitos o infinitamente alejados, es decir, o bien números reales, o bien uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$. Daremos primeramente la definición de límite de la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$ en términos de límites de sucesiones. Esta definición frecuentemente se nombra definición de límite de la función según Heine *).

Definición 1. *El punto a se llama límite de la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ en el punto x_0 (o lo que es lo mismo cuando $x \to x_0$ **), si para cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$*, que tiene como límite el punto x_0, *es decir, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \tag{5.4}$$

la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene como límite el punto a, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a. \tag{5.5}$$

En el caso cuando a es el límite de la función f en el punto x_0, se escribe

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{ó} \quad f(x) \to a \text{ cuando } x \to x_0,$$

y si x_0 es un número $x_0 \in \boldsymbol{R}$, entonces, a veces también se escribe

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a.$$

Subrayemos que en la definición 1 x_0 y a pueden ser tanto números reales, como los infinitos: ∞, $+\infty$ y $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ y a es un número real, entonces se dice que en el punto x_0 la función f tiene *límite finito* (igual a a).

*) H. Heine (1821 — 1881), matemático alemán.

**) La notación "cuando $x \to x_0$" se lee "cuando x tiende a x_0".

La definición de límite para la función dada $f: X \to \boldsymbol{R}$, tiene sentido, naturalmente, si y sólo si para el punto x_0 realmente existen sucesiones de puntos $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, que tengan como límite (finito o infinito) el punto x_0: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Definición 2. *Sea $X \subset \boldsymbol{R}$. El punto x_0, para el cual existe la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, que tiene como límite el punto x_0:*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{5.6}$$

se llama punto de adherencia del conjunto X.

Si el punto de adherencia x_0 del conjunto X es uno de los infinitos ∞, $+\infty$ ó $-\infty$, entonces se denomina también *punto de adherencia infinitamente alejado*. Es evidente que si $x_0 = \infty$ es un punto de adherencia infinitamente alejado del conjunto X, entonces el conjunto es no acotado; si $x_0 = +\infty$ (respectivamente, $x_0 = -\infty$) es un punto de adherencia infinitamente alejado del conjunto X, entonces el conjunto es no acotado superiormente (respectivamente, inferiormente).

Es evidente que cualquier punto x_0, perteneciente al mismo conjunto X, es su punto de adherencia, ya que la sucesión estacionaria $x_n = x_0 \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, satisface las condiciones de la definición 2: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ y $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Pero sin duda, en los conjuntos pueden existir puntos de adherencia finitos no pertenecientes a estos conjuntos. Así, por ejemplo, los puntos $x = a$ y $x = b$ son puntos de adherencia del intervalo (a, b) y no están incluidos en él.

Ejercicio 22. Demuéstrese que si el punto x_0 es un punto de adherencia del conjunto X y $X \subset Y \subset \boldsymbol{R}$, entonces el punto x_0 es un punto de adherencia del conjunto Y.

OBSERVACIÓN 1. No es difícil convencerse de que un punto es punto de adherencia del conjunto dado si y sólo si cualquiera de sus entornos se interseca con este conjunto.

En realidad, si x_0 es un punto de adherencia del conjunto X, entonces existe una sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ y, por lo tanto, en cualquier entorno del punto x_0 caerán todos los términos de esta sucesión a partir de un cierto término (ellos son puntos del conjunto X).

Viceversa, si en cualquier entorno del punto x_0 se tienen puntos del conjunto X, entonces, eligiendo para cada natural n algún punto en la intersección no vacía por hipótesis $X \cap U\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$ y denotándolo por x_n, es decir,

$$x_n \in X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x_0$ (véase la observación 1 en el p. 4.2) y $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Esto significa que x_0 es un punto de adherencia del conjunto X. $\square$

Para cualquier conjunto no vacío $X \subset \boldsymbol{R}$, su cota superior $\beta = \sup X$ y cota inferior $\alpha = \inf X$ son sus puntos de adherencia (ellos pueden ser finitos o infinitos). Esto inmediatamente se deduce, por el lema 1, de la definición 6′ de cota superior y

de la definición 7′ de cota inferior, ya que en estas definiciones se exige que en cualquier entorno de la cota correspondiente del conjunto se encuentre un punto de éste (e incluso por un lado de la cota analizada).

De la definición 1 de límite de la función, se deduce directamente que en el punto de adherencia de la definición, la función no puede tener dos límites distintos, es decir, como se dice, la definición señalada es unívoca.

Más adelante, de la definición de límite de la función se deduce que los valores tomados por la función en los puntos que se encuentran fuera de cualquier entorno dado del punto x_0 no influyen en la existencia ni en el valor del límite de la función en el punto x_0. Dicho figuradamente el hecho de que existe o no el límite de la función en el punto dado x_0 y si existe, entonces, cuál es su valor, se determina completamente por los valores de la función en la intersección $U(x_0) \cap X$ de cualquier entorno $U(x_0)$ del punto x_0 (que es un punto de adherencia del conjunto X) con este mismo conjunto. En realidad, cualquiera que sea el entorno $U(x_0)$ y cualquiera que sea la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ se encuentra un número n_0 tal que cuando $n > n_0$, $n \in N$, va a tener lugar la inclusión $x_n \in U(x_0) \cap X$, y el número finito de términos restantes $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ de la sucesión $\{f(x_n)\}$ no influye en la existencia de su límite, ni en su valor, si éste existe.

Las propiedades de la función, que dependen sólo de los valores de la función en cualquier entorno del punto analizado, dicho más exacto, que no varían durante el paso a la restricción de la función en la intersección de su conjunto de definición con cualquier entorno del punto, se llaman propiedades locales de la función en el punto dado. De lo dicho se deduce, que tanto la existencia del límite en el punto, como su valor, si éste existe, son propiedades locales de la función en este punto.

Ejemplos. 1. Sea

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}. \tag{5.7}$$

El conjunto X, sobre el cual está definida la función (5.7) se obtiene del conjunto de todos los números reales $\boldsymbol{R}$ restando del mismo la unidad: $X = \boldsymbol{R} \setminus \{1\}$. Aclaremos si existe o no el límite de la función f (5.7) en el punto $x_0 = 0$.

Tomemos cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Entonces, basándonos en los teoremas del p. 4.9, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \frac{2\left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n\right)^2 + \lim\limits_{n \to \infty} x_n - 1}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n - 1} = 1.$$

De esta manera, existe $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1$, y ya que él no depende de la elección de la sucesión $x_n \to 0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces también existe el límite $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = 1$.

2. Analicemos la función

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \tag{5.8}$$

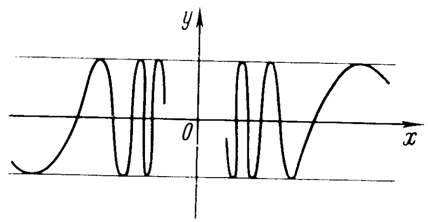


FIG. 19

(fig. 19). Ella está definida sobre el conjunto $X = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$. Aclaremos de nuevo, si existe o no para la función f el límite en el punto $x_0 = 0$. Tomemos dos sucesiones

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{y} \quad x_n' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Es evidente que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n' = 0$, $x_n \neq 0$, $x_n' \neq 0$ (la condición $x \neq 0$ en este caso significa que $x \in X$), $f(x_n) = \operatorname{sen} \pi n = 0$, $f(x_n') = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Por esto, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$ y $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n') = 1$, lo que significa que el límite de la función (5.8) cuando $x \to 0$ no existe.

3. Sea

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2}.$$

Hallemos el límite de esta función cuando $x \to \infty$. Su dominio es el conjunto $X = \boldsymbol{R} \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Tomando cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ tendremos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n^2 + x_n + 1}{x_n^2 - 2} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}}{1 - \frac{2}{x_n^2}} = \frac{1 + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x_n^2}}{1 - 2 \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x_n^2}} = 1.$$

De aquí se deduce que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2} = 1.$$

Ejercicio 23. Demuéstrese que el límite $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ no existe, y los límites $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ existen y hállense.

En el estudio de los límites de las funciones, frecuentemente tenemos que operar con los límites de las restricciones de las funciones sobre uno u otro conjunto, es decir, con límites de funciones que se obtienen de las funciones dadas analizándolas no sobre todo el conjunto, sobre el cual ellas están definidas, sino sobre un contenido en éste.

Definción 3. *Sea $f\colon X \to \boldsymbol{R}$. El límite de la restricción $f_E\colon E \to \boldsymbol{R}$, $E \subset X$, de la función f sobre el conjunto E en el punto x_0, se llama límite de la función f por el conjunto E en este punto y se denota por*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x).$$

De esta forma

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0} f_E(x), \tag{5.9}$$

es decir, el límite de la función por el conjunto $E \subset X$ no es un concepto nuevo en comparación con el límite de la función, éste es sencillamente el límite, en el sentido de la definición 1 de la función que es la restricción de la dada sobre este conjunto E.

El concepto de límite de la función por un conjunto en el punto x_0 tiene sentido sólo para un conjunto E, para el cual el punto x_0 es su punto de adherencia (en este caso evidentemente, es un punto de adherencia del conjunto X).

Utilizando la terminología de la definición 3, se puede decir que el límite de la función en el sentido de la definición 1 es su límite en el punto x_0 por todo el conjunto de definición X de la función f

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x).$$

En el caso, cuando la función f está dada por una fórmula, entonces por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se entiende el límite de esta función en el punto x_0 por todo el conjunto de valores X, para los cuales la fórmula señalada tiene sentido y para los cuales en el proceso de realización de todos los cálculos según esta fórmula se obtienen sólo números reales (véase el p. 5.2).

Ejemplo 4. Sea f la función de Dirichlet (véase el p. 5.2), es decir, la función igual a 1 sobre el conjunto $\boldsymbol{Q}$ de todos los números racionales e igual a cero sobre el conjunto $\boldsymbol{I}$ de todos los números irracionales. Entonces, en el punto $x_0 = 0$ su límite por el conjunto de los números racionales es igual a 1:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} f(x) = 1,$$

y por el conjunto de los irracionales es igual a cero:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in I}} f(x) = 0.$$

Por todo el conjunto de los números reales (es decir, por el conjunto de definición de la función de Dirichlet) el límite en el punto $x_0 = 0$ no existe, ya que la exis-

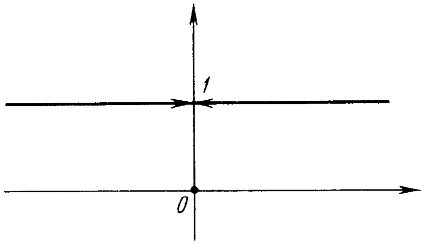


FIG. 20

tencia o no del límite de la sucesión $\{f(x_n)\}$ para $n \to \infty$ depende, en el caso dado, de la elección de la sucesión $\{x_n\}$ que tiende a cero.

Destaquemos la siguiente sencilla afirmación.

Lema 1. *Si f: $x \to R$, $E \subset X$, x_0 es un punto de adherencia del conjunto E y existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ de la función f en el punto x_0 (es decir, el límite por el conjunto X), entonces, en el punto x_0 existe también el límite de la función f por el conjunto E y los valores de ambos límites son iguales:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x). \tag{5.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Si para cualquier sucesión $x_n \subset X$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ todas las sucesiones $\{f(x_n)\}$ tienen un mismo límite a, entonces esto, a ciencia cierta, es válido también para cualquier sucesión $x_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, ya que $E \subset X$. □

Destaquemos un caso de límite de la función en el punto, que se encuentra con frecuencia, cuando el límite se toma por el así llamado entorno reducido de este punto o por la intersección del entorno reducido con el conjunto de definición de la función estudiada.

Definición 4. *Se denomina ε-entorno reducido del punto x_0 el conjunto que se obtiene al eliminar el punto x_0 de su ε-entorno.*

El ε-entorno reducido del punto x_0 se denota por $\overset{\circ}{U}(x_0, \varepsilon)$:

$$\overset{\circ}{U}(x_0, \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} U(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}. \tag{5.11}$$

Cualquier ε-entorno reducido del punto x_0 se llama sencillamente entorno reducido y se denota también por $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

Ejemplo 5. Analicemos la función $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ (véase la difinición de la función $\operatorname{sign} x$ en el p. 5.2). Su gráfica está representada en la fig. 20. Cualquiera que sea el entorno del cero $U(0)$, para esta función, en el punto $x_0 = 0$, evidentemente, existe el límite por el entorno reducido $\overset{\circ}{U}(0)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(0)}} |\operatorname{sign} x| = 1.$$

Además, el límite $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in U(0)}} |\operatorname{sing} x|$ por todo el entorno $U(0)$ en el punto $x_0 = 0$ para la función $|\operatorname{sign} x|$ no existe, ya que, por ejemplo, para la sucesión

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{si } n = 2k, \\ 0, & \text{si } n = 2k - 1, \\ & k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

tenemos $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ (y, por lo tanto, todos sus términos a partir de uno, van a encontrarse en el entorno $U(0)$ dado), y la sucesión $|\operatorname{sign} x_n|$ no tiene límite (en los lugares pares tiene valor uno y en los impares, cero).

Los ejemplos 4 y 5 analizados muestran, en particular, que una misma función puede tener límite en un punto por un conjunto y por otro no tener límite en este punto o tenerlo, pero distinto.

OBSERVACIÓN 2. Si las funciones f y g están definidas en un entorno $U(x_0)$ del punto x_0, excepto, quizá, el mismo punto x_0, y para cada x perteneciente al entorno reducido $\overset{\circ}{U}(x_0)$, $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, ellas toman valores iguales

$$f(x) = g(x),$$

entonces, sus límites por el entorno reducido $\overset{\circ}{U}(x_0)$ existen o no simultáneamente, y si existen, entonces son iguales entre sí

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)}} g(x),$$

ya que en su definición participan sólo los valores de las funciones en los puntos del entorno reducido $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

En esta sencilla observación está basada la llamada regla de resolución de las indeterminaciones, con ayuda de la simplificación de fracciones. Aclarémosla con un ejemplo.

Ejemplo 6. Hallemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x}. \tag{5.12}$$

La repetición de los razonamientos, análogos a aquellos con ayuda de los cuales fue calculado el límite en el ejemplo 1, nos lleva a la expresión $\frac{0}{0}$, es decir, a una indeterminación, sin responder de este modo a la pregunta sobre la existencia del límite (5.12), ni a la cuestión sobre su valor, si éste existe. Por eso, analicemos la función

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$$

obtenida de la función

$$g(x) = \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x},$$

que se encuentra bajo el signo del límite en la expresión (5.12), simplificando el segundo miembro de la igualdad por x. Las funciones f y g coinciden en el entorno reducido $\overset{\circ}{U}(0, 1) = (-1, 1) \setminus \{0\}$ del punto $x_0 = 0$ y, por eso, según la observación hecha anteriormente, al mismo tiempo tienen límites o no en este punto por el entorno reducido señalado, además en el caso en que existan estos límites, son iguales. En el ejemplo 1 fue mostrado que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ por todo el dominio de la función f, por lo tanto por su subconjunto $\overset{\circ}{U}(0, 1)$. De esta forma,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(0,1)}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(0,1)}} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

(la primera igualdad es válida porque el límite es una propiedad local de la función). Estos razonamientos son la base de los cálculos que en la notación utilizada comúnmente tienen la forma

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = 1.$$

OBSERVACIÓN 3. Un caso particular de límite (finito o infinito) de una función es el límite de una sucesión (finito o infinito, respectivamente). En realidad, la sucesión $x_n \in \boldsymbol{R}$, $n = 1, 2, \dots$, es una función definida sobre el conjunto de los números naturales:

$$f\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$$

y, además, $f(n) = x_n$, $n = 1, 2, \dots$. La definición dada anteriormente de límite de una sucesión $\lim_{n \to \infty} x_n$ (véase la definición 5 en el p. 4.2) y la definición de su límite, como de un caso particular de la definición de límite de una función $\lim_{n \to \infty} f(n)$ (véase la definición 1 de este punto), son equivalentes porque si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite (finito o infinito) en el sentido de la definición 5 del p. 4.2, entonces para cualquier elección de la sucesión de los números naturales $\{n_k\}$, tal que $\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty$, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ tiene el mismo límite que la sucesión $\{x_n\}$ (véase el lema en el p. 4.3) como esto se exige en la definición 1.

5.5. FUNCIONES CONTINUAS

En el estudio del límite de una función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ cuando $x \to x_0$ puede suceder que $x_0 \in X$ (entonces, x_0 es un número: $x_0 \in \boldsymbol{R}$) o viceversa, que $x_0 \notin X$. El caso $x_0 \in X$ presenta especial interés ya que conlleva al concepto importante de función continua. Su estudio lo comenzaremos por la demostración del siguiente lema.

Lema 2. *Sea* $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ y $x_0 \in X$. *Entonces, para que la función* f *tenga límite en el punto* x_0 *es necesario y suficiente que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.13}$$

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia de la condición (5.13) para la existencia del límite de la función f en el punto x_0 es evidente: esta condición es incluso más fuerte, ya que ella afirma no sólo la existencia del límite, sino que señala su valor igual a $f(x_0)$.

Demostremos la necesidad de la condición (5.13) para la existencia del límite de la función f en el punto x_0. Supongamos que para la función f en el punto x_0 existe

el límite igual a a:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a. \tag{5.14}$$

Según la definición de límite, esto significa que para cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, es válida la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a. \tag{5.15}$$

En particular, por cuanto $x_0 \in X$ esta igualdad es válida para la sucesión estacionaria, formada por un único punto x_0, es decir, para la sucesión $x_n = x_0$, $n = 1, 2, \dots$ En este caso, (5.15) tiene la forma

$$\lim_{n \to \infty} f(x_0) = a. \tag{5.16}$$

Por otro lado, ya que el límite de una constante es igual a esa misma constante, entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(x_0) = f(x_0). \tag{5.17}$$

Comparando (5.16) y (5.17) obtenemos

$$f(x_0) = a. \ \square$$

Definamos ahora el concepto de función continua en un punto dado.

Defininción 5. *La función* $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ *se llama continua en el punto* $x_0 \in X$ *si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.18}$$

La condición (5.18) significa que en el caso de continuidad de la función f en el punto x_0, el límite de f en este punto se halla por una regla muy sencilla: se debe calcular el valor de la función f en el punto x_0.

Según el lema 2, la condición (5.18) es equivalente a que la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ tiene límite en el punto x_0 y que $x_0 \in X$. Se sobrentiende que en el caso, cuando para la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ es igual a uno de los infinitos ∞, $+\infty$ ó $-\infty$, entonces, a ciencia cierta, $x_0 \notin X$. En el caso contrario, para la sucesión estacionaria $x_n = x_0$, $n = 1, 2, \dots$, tendría lugar $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_0) = f(x_0)$ y ya que, por condición, la función toma sólo valores numéricos, entonces, a pesar de la suposición, el límite $\lim_{x \to x_0} f_x$ sería finito. De lo dicho se deduce, en particular, que si para la función en algún punto existe límite infinito, entonces en él la función, a ciencia cierta, no es continua.

Señalemos además, que en la definición 5, el punto x_0, en el cual se define el concepto de continuidad de la función, pertenece a la recta numérica $\boldsymbol{R}$, es decir, no es un punto infinito.

Para realizar el análisis del concepto de continuidad de la función en el punto, daremos las definiciones de puntos aislados y límite de los conjuntos.

Definición 6. *El punto* $x_0 \in X$ *se llama punto aislado del conjunto* $X \subset \boldsymbol{R}$ *si existe un entorno* $U(x_0)$ *de este punto cuya intersección* $U(x_0) \cap X$ *con el conjunto* X *está compuesta sólo por un punto* x_0:

$$U(x_0) \cap X = \{x_0\}. \tag{5.19}$$

Todos los puntos del conjunto de los números naturales N son aislados, y el conjunto Q de todos los números racionales no tiene ningunos puntos aislados.

Definición 7. *El punto $x_0 \in R$ se llama punto de acumulación del conjunto $X \subset R$, si en cualquiera de sus entornos existe un punto diferente de él y perteneciente al conjunto X.*

Un punto de acumulación de un conjunto puede pertenecer o no a éste. Por ejemplo, cada punto del segmento $[a, b]$ es un punto de acumulación del intervalo (a, b). En este caso, los puntos a y b no pertenecen al intervalo señalado, y todos los restantes están contenidos en él.

Si un punto pertenece a un conjunto, entonces, por las definiciones 6 y 7, es un punto aislado de éste, si y sólo si, no es un punto de acumulación.

Cualquier punto adherente del conjunto es o bien un punto aislado de este conjunto, o bien es su punto de acumulación, ya que o bien en cualquiera de sus entornos se contiene un punto del conjunto, diferente de él (entonces, este punto es de acumulación), o bien existe un entorno, que no contiene puntos del conjunto que no coincidan con él, y, por eso, ya que en este entorno, no obstante, existe un punto del conjunto (o sea, el punto dado por hipótesis, es su punto de adherencia), entonces este punto resulta ser el mismo, por lo tanto, en primer lugar, pertenece al conjunto analizado, y, en segundo lugar, es un punto aislado de este conjunto.

Es válida la proposición siguiente.

Lema 3. *Cualquier función es continua en cada punto aislado del conjunto de su definición.*

DEMOSTRACIÓN. Sea x_0 un punto aislado del conjunto de definición X de la función f. Entonces, por la definición 6, existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0, cuya intersección con el conjunto X está compuesta por un único punto x_0, es decir, $U(x_0) \cap X = \{x_0\}$. Cualquiera que sea la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, para el entorno señalado, por la definición de límite de una sucesión, existe un número n_0 tal que para todos los números $n > n_0$, se cumple la inclusión $x_n \in U(x_0)$ y, por lo tanto, la inclusión $x_n \in U(x_0) \cap X$. Pero ya que $U(x_0) \cap$ $\cap X = \{x_0\}$, entonces para todos los $n > n_0$ tenemos $x_n = x_0$. Esto significa que a partir del número $n_0 + 1$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ se hace estacionaria: $f(x_n) = f(x_0)$ para $n > n_0$. Por esto, existe el límite $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$, que por la elección arbitraria de la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, significa que se cumple la condición (5.18), es decir, la función f es continua en el punto x_0.

Ejemplo. La función $f(x) = \sqrt{\ln \cos 2\pi x} + 1$ (véase el p. 5.2) está definida sólo para los valores enteros del argumento $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. De esta forma, cada punto del conjunto de definición de esta función es un punto aislado de éste, por esto, según el lema 3, la función analizada es continua en todos los puntos de su conjunto de definición.

Del lema 3 se deduce que la cuestión sobre el límite de una función en un punto aislado del conjunto de su definición se resuelve muy fácilmente: existe siempre y es igual a $f(x_0)$. Por esto, el concepto de límite de una función (en particular, su continuidad), tiene sentido sólo para los puntos de acumulación del conjunto de definición de la función.

Ejercicio 24. Demostrar que la función $f\colon X \to R$ es continua en el punto de acumulación $x_0 \in X$ del conjunto X si y sólo si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathring{U}(x_0) \cap X}} f(x) = f(x_0).$$

De modo semejante a como se analizó el límite de la función por cualquier conjunto, perteneciente a su dominio, se puede, en particular, analizar la continuidad de la función por el conjunto correspondiente.

Definición 8. *Sea $f\colon X \to R$ y $x_0 \in E \subset X$. La función f se llama continua en el punto x_0 por el conjunto E, si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0).$$

Dicho de otra forma, *la función f se llama continua en el punto $x_0 \in E$ por el conjunto E, si en este punto es continua la restricción f_E de esta función sobre el conjunto E:*

$$\lim_{x \to x_0} f_E(x) = f_E(x).$$

Sobre la función $f\colon X \to R$, continua en el punto $x_0 \in X$ en el sentido de la definición 5, se puede decir que ella es continua en este punto según el conjunto X.

Por ejemplo, la función de Dirichlet f (véase el ejemplo 3 en el p. 5.4) es continua en el punto $x_0 = 0$ por el conjunto Q de todos los números racionales, ya que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} f(x) = 1 = f(0)$$

y no es continua en él por el conjunto de todos los números reales, o sea, el límite en el punto $x_0 = 0$ por el conjunto de todos los números reales, para la función de Dirichlet sencillamente no existe.

5.6. CONDICIONES DE LA EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Por la definición de límite, la función $f\colon X \to R$ tiene límite en el punto x_0, si cualquiera que sea la sucesión $x_n \to 0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, la sucesión de los valores correspondientes de la función $\{f(x_n)\}$ tiene límite (finito o infinito), y estos límites no dependen de la elección de las sucesiones señaladas $\{x_n\}$, es decir, todas las sucesiones $\{f(x_n)\}$ tienen, el mismo límite a: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$. Este valor a es el límite de la función f en el punto x_0.

Mostremos que si debilitamos la hipótesis, de forma más precisa, si suponemos sólo la existencia del límite, finito o infinito de un signo determinado, para cada una de las sucesiones analizadas $\{f(x_n)\}$, entonces de esto se deducirá, que todos estos límites coinciden, y de esta forma la función f en este caso, tendrá límite en el punto x_0

Lema 4. *Para que la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ tenga límite finito o infinito de signo determinado, en el punto x_0, que es punto adherente del conjunto X, es necesario y suficiente que para cualquier sucesión $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$*, la sucesión de los valores correspondientes de la función $\{f(x_n)\}$ *tenga límite finito o infinito de un signo determinado.*

Corolario. *Para que la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ tenga límite en e' punto x_0, que es un punto adherente del conjunto X, es necesario y suficiente que para cualquier sucesión $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, la sucesión de los valores correspondientes de la función $\{f(x_n)\}$ sea convergente.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. La necesidad de la condición, enunciada en las hipótesis del lema, para la existencia del límite de la función f cuando $x \to x_0$, está contenida en la propia definición de este concepto (véase la definición 1 en el p. 5.4), en la que se afirma la existencia del límite $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ para todas las sucesiones $\{x_n\}$ analizadas.

Demostremos la suficiencia de la condición señalada en el lema, para la existencia del límite de la función. Sea $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ y para cualquier sucesión $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene límite (finito o infinito de signo determinado). Analicemos dos sucesiones cualesquiera $x_n' \to x_0$ y $x_n'' \to x_0$, $x_n' \in X$, $x_n'' \in X$, $n = 1, 2, \dots$. Entonces la sucesión

$$x_n = \begin{cases} x_k', & \text{si } n = 2k - 1, \\ x_n'', & \text{si } n = 2k, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots$$

también tiene como límite el punto x_0 (finito o infinito) y $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$. Por esto, según la suposición hecha, existen los límites $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, además, las sucesiones $\{f(x_n')\}$ y $\{f(x_n'')\}$ son subsucesiones de la sucesión $f(x_n)$, ya que las sucesiones $\{x_n'\}$ y $\{x_n''\}$ son subsucesiones de la sucesión $\{x_n\}$.

Recordemos ahora, que si una sucesión tiene límite (finito o infinito), entonces cualquiera de sus subsucesiones tiene el mismo límite (véase el p. 4.6). Por esto

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} f(x_n'').$$

De esta forma, los límites de las sucesiones $\{f(x_n)\}$, donde $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, no dependen de la elección de las sucesiones $\{x_n\}$. Designando el valor común de los límites de las sucesiones $\{f(x_n)\}$ por a, tendremos, por la definición 1 del p. 5.4, que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

La afirmación del corolario se deduce directamente del lema 4 (recordemos que el término "sucesión convergente" se utiliza sólo para las sucesiones que tienen límite finito).

5.7. SEGUNDA DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Existe otra definición del límite de una función, que no utiliza el concepto de límite de una sucesión, sino que se enuncia en términos de entornos y se llama defi-

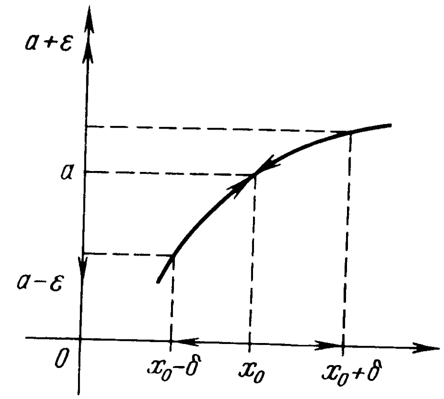


FIG. 21

nición del límite de una función según Cauchy. Esta definición es equivalente a la definición 1 en el p. 5.4.

Definición 9. *El punto a se llama límite de la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ cuando $x \to x_0$ (o lo que es lo mismo, en el punto x_0), si para cualquier entorno $U(a)$ del punto a existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que*

$$f(X \cap U(x_0)) \subset U(a). \tag{5.20}$$

El límite según Cauchy para una función también lo denotaremos por $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Esto es natural, ya que el concepto de límite de una función dado según Cauchy, como se ha señalado más arriba y próximamente será demostrado, es equivalente a la definición de límite de una función dada en el p. 5.4.

La figura 21 ilustra la definición 9 en el caso cuando x_0 y a son números reales y el conjunto X es un entorno reducido del punto x_0.

Utilizando los símbolos lógicos la definición 9 puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\, U(a))(\exists\, U(x_0)) : f(X \cap U(x_0)) \subset U(a).$$

Descifrando detalladamente la inclusión (5.20), la definición 9 se puede enunciar de la forma siguiente.

El punto a se llama límite de la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ cuando $x \to x_0$, si para cualquier entorno $U(a)$ del punto a existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para cualquier punto

$$x \in X \cap U(x_0) \tag{5.21}$$

se cumple la inclusión

$$f(x) \in U(a). \tag{5.22}$$

En símbolos lógicos esta definición se presenta en la forma siguiente:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\, U(a))(\exists\, U(x_0))(\forall x \in X \cap U(x_0)) : f(x) \in U(a). \tag{5.23}$$

Recordando la definición de entornos de los puntos finitos e infinitamente alejados, la definición 9 puede ser expresada, en cada caso concreto, en términos de desigualdades. Enunciemos inicialmente en esta forma la definición del límite finito en un punto finito.

El número a se llama límite de la función f en el punto $x_0 \in \boldsymbol{R}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ *) tal que para todos los x, que satisfacen las condiciones

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \in X,$$

se cumple la desigualdad

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

En símbolos lógicos esta definición tiene el aspecto siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \boldsymbol{R} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, \quad |x - x_0| < \delta) : |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Demos un ejemplo más de la definición de límites infinitos en términos de desigualdades. Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ para la función $f: X \to \boldsymbol{R}$ significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos los x que satisfacen la condición

$$x > \delta, \quad x \in X,$$

se cumple la desigualdad

$$f(x) < -\varepsilon$$

o en símbolos lógicos

$$\lim_{x \to +x_0} f(x) = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X, x > \delta) : f(x) < -\varepsilon.$$

De lo dicho se ve que pueden encontrarse diferentes combinaciones del paso a los valores límites (tanto finitos, como infinitos) de las variables dependientes e independientes. El enunciado de la definición de límite de una función para cada caso particular en términos de desigualdades, o como se dice también, a veces, "en el lenguaje de ε y δ", aunque frecuentemente es más cómodo en situaciones concretas (por esto es necesario saber hacerlo) conviene peor para resolver cuestiones generales, ya que exige la realización de demostraciones especiales para cada caso por separado, en correspondencia con el enunciado de la definición dada. Por esto, es cómodo utilizar la definición 9, que abarca todos los casos concretos.

Pasemos ahora a la comparación de las definiciones de límite de una función dadas por Heine (definición 1) y por Cauchy (definición 9).

Teorema 1. *Las definiciones 1 y 9 de límite de una función en un punto adherente del conjunto de definición de una función son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. I. Sean $f: X \to \boldsymbol{R}$, x_0 un punto adherente del conjunto X y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ en el sentido de la definición 1. Mostremos que entonces se cumple también la condición que se encuentra en la parte derecha de la fórmula (5.23).

Supongamos que esto no es así, es decir, que

---

*) A veces se escribe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ para subrayar que la elección de δ depende de ε.

$$(\exists U(a))(\forall U(x_0))(\exists x \in X \cap U(x_0)) : f(x) \notin U(a) \tag{5.24}$$

o, dicho de otra forma, se encuentra un entorno $U(a)$ del punto a tal que en cualquier entorno $U(x_0)$ del punto x_0 existe un punto $x \in X$ tal que los valores de la función $f(x)$ en este punto no pertenecen al entorno $U(a)$. En particular, los puntos x señalados se encuentran en cada entorno $U\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$. Denotémoslos por x_n, es decir,

$$x_n \in X \cap U\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \tag{5.25}$$

y

$$f(x_n) \notin U(a). \tag{5.26}$$

De la condición (5.25) se deduce que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{5.27}$$

(véase la observación 1 en el p. 4.2). Ya que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ en el sentido de la definición 1, entonces para cualquier sucesión $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tiene lugar la igualdad $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$. Por la definición de límite de una sucesión, esto significa que para cualquier entorno $U(a)$ existe un número n_0 tal que para todos los números $n > n_0$ tiene lugar la inclusión

$$f(x_n) \in U(a). \tag{5.28}$$

Sin embargo, si se toma el entorno $U(a)$ del punto a, según la condición (5.24), y después se construye, como esto fue hecho anteriormente, la sucesión $\{x_n\}$, que satisface las condiciones (5.25) y (5.26), y, por lo tanto, la condición (5.27), entonces, para ella, por la condición (5.26), para ningún n_0 se cumplirá la condición (5.28). La contradicción obtenida demuestra la afirmación hecha. □

II. Sea ahora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, en el sentido de la definición 9 de límite de la función, $f: X \to \boldsymbol{R}$, x_0 es un punto adherente del conjunto X y sea

$$x_n \to x_0, \quad x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5.29}$$

Mostremos que entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a, \tag{5.30}$$

es decir, que el punto a es límite de la función f en el sentido de la definición 1.

Demos un entorno arbitrario $U(a)$ del punto a y escojamos para él el entorno $U(x_0)$ del punto x_0, que satisface las condiciones (5.21) — (5.22). Para este entorno $U(x_0)$, por la condición (5.29) se encuentra un número n_0 tal que para todos los números $n > n_0$ se cumplirá la inclusión

$$x_n \in X \cap U(x_0).$$

Pero entonces por (5.22) tendremos

$$f(x_n) \in U(a).$$

Esto significa que se cumple la condición (5.30). □

El límite de una función, como fue señalado en el p. 5.4, es una propiedad local de la función en el sentido de que su existencia para una función en el punto dado, y si existe, entonces también su valor no dependen de la restricción de la función de la intersección de cualquier entorno del punto x_0 con el conjunto de definición de la función dada. Esto también se ve claramente de la definición 9: si se da un entorno arbitrario $U_0(x_0)$ del punto x_0 y se agrega en la definición 9 la condición complementaria, que consiste en que todos los entornos $U(x_0)$, cuya existencia se afirmaba allí, deben además estar contenidas en el entorno $U_0(x_0)$:

$$U(x_0) \subset U_0(x_0),$$

entonces se obtiene una definición equivalente a la inicial. En efecto, si la condición (5.23) se cumple para cierto entorno $U(x_0)$ del punto x_0, entonces se cumple también para cualquier entorno de este punto contenido en él.

Para concluir, señalemos que por límite de una función en un punto dado, usualmente se entiende un límite finito, si no se ha dicho otra cosa, y por $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$, cuando no se ha dicho nada sobre el conjunto por el cual se toma el límite, se denota el límite, finito o infinito, por todo el conjunto de definición de la función f.

Ejercicio 25. Demuéstrese que si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geqslant 1$, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \infty$.

La definición de límite de una función en un punto, sin mayor esfuerzo, puede ser generalizada también para las funciones cuyos conjuntos de sus valores, así como los conjuntos de definición pertenecen al conjunto extendido de los números reales $\bar{\boldsymbol{R}}$, es decir, para las funciones de la forma $f: X \to \bar{\boldsymbol{R}}$, $X \subset \bar{\boldsymbol{R}}$. El lector en caso de necesidad puede enunciar las definiciones correspondientes por sí mismo.

5.8. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN POR LA UNIÓN DE CONJUNTOS

Ya sabemos que si la función $f: X \to \boldsymbol{R}$ tiene límite en el punto x_0, que es punto adherente del conjunto $E \subset X$, entonces tiene el mismo límite en este punto también por conjunto E (véase el lema 1 en el p. 5.4). Demostremos una propiedad sencilla, pero útil en el futuro, de los límites de funciones por los conjuntos.

Lema 5. *Sean $f: X \to \boldsymbol{R}$, $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$ y x_0 un punto adherente de los conjuntos $X_1 \neq \varnothing$ y $X_2 \neq \varnothing$. Entonces, si la función f para $x \to x_0$ tiene límites, finitos o infinitos, por los conjuntos X_1 y X_2 y además ellos son iguales*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} f(x) = a, \tag{5.31}$$

entonces tiene el mismo límite por el conjunto $X_1 \cup X_2$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1 \cup X_2}} f(x) = a. \tag{5.32}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la igualdad (5.31), para cualquier entorno $U(a, \varepsilon)$ del punto a, existen entornos $U(x_0, \delta_1)$ y $U(x_0, \delta_2)$ del punto x_0 tales que

$$f(X_1 \cap U(x_0, \delta_1) \subset U(a, \varepsilon), f(X_2 \cap U(x_0, \delta_2)) \subset U(a, \varepsilon). \tag{5.33}$$

Sea

$$\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\},$$

entonces

$$U(x_0, \delta) \subset U(x_0, \delta_1) \text{ y } U(x_0, \delta) \subset U(x_0, \delta_2),$$

y por esto

$$(X_1 \cup X_2) \cap U(x_0, \delta) = (X_1 \cap U(x_0, \delta)) \cup (X_2 \cap \cap U(x_0, \delta)) \subset (X_1 \cap U(x_0, \delta_1)) \cup (X_2 \cap U(x_0, \delta_2)).$$

Por consiguiente, por (5.33):

$$f((X_1 \cup X_2) \cap U(x_0, \delta)) \subset f(X_1 \cap U(x_0, \delta_1)) \cup f(X_2 \cap U(x_0, \delta_2)) \subset U(a, \varepsilon).$$

Esto significa, por la definición 9, el cumplimiento de las condiciones (5.32). □

Ejemplo. Si $\{x_n\}$ es una sucesión tal que $\lim\limits_{k \to \infty} x_{2k} = \lim\limits_{k \to \infty} x_{2k-1} = a$ y a es un número real o bien uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Esto se deduce directamente del lema 5 si analizamos la función $f(n) = x_n$, $n \in N$, y hacemos $X_1 = \{2k\}$, $X_2 = \{2k - 1\}$, $k = 1, 2, \ldots$.

5.9. LÍMITES UNILATERALES Y CONTINUIDAD UNILATERAL

En el estudio de las funciones, a veces resulta útil el análisis de los límites de sus restricciones sobre los conjuntos correspondientes al caso particular cuando estos conjuntos son partes de los conjuntos de definición de las funciones dadas, que están por un lado del punto, en el cual se analiza el límite. Estos límites se llaman *límites unilaterales.* Este concepto tiene sentido sólo cuando en realidad existen los conjuntos que están por lados diferentes del punto x_0, en el cual se analiza el límite. En el caso cuando el punto x_0 es uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$, esto, a ciencia cierta, no es posible. Por esto, en el presente punto, en el futuro supondremos siempre que x_0 es un número real: $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Introduzcamos para simplificar la escritura algunas notaciones.

Para cualquier conjunto $X \in \boldsymbol{R}$ y para $x_0 \in \boldsymbol{R}$ haremos:

$$X_-(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x : x \in X, x \leqslant x_0\},$$

$$X_+(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x : x \ni X, x \geqslant x_0\}.$$

Dicho de otro modo, el conjunto $X_+(x_0)$, respectivamente $X_-(x_0)$, es la intersección del conjunto X con el rayo cerrado del eje numérico, cuyo vértice es el punto x_0 y que está dirigido en el sentido positivo, respectivamente negativo.

Definición 10. *Sea $f: X \to \boldsymbol{R}$ y $x_0 \in \boldsymbol{R}$. El punto a se llama límite de la función f por la izquierda, respectivamente por la derecha, cuando $x \to x_0$, si es límite de la* *función f para $x \to x_0$ por el conjunto $X_-(x_0)$, es decir,*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = a,$$

respectivamente, por el conjunto $X_+(x_0)$, es decir

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = a.$$

Para los límites por la izquierda y por la derecha de la función f por el conjunto $X \setminus \{x_0\}$ se tienen notaciones especiales: el límite por la izquierda se denota por $f(x_0 - 0)$ o $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ y el límite por la derecha por $f(x_0 + 0)$ o $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. De esta forma,

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \subset X_-(x_0) \setminus \{x_0\}}} f(x),$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0) \setminus \{x_0\}}} f(x).$$

Si $x_0 = 0$, entonces en lugar de $0 + 0$, respectivamente, en lugar de $0 - 0$, tanto en el caso de los límites de las funciones, como en el caso de los límites de las sucesiones (véase el p. 4.1), se escribe simplemente $+0$, respectivamente -0.

Los límites por la izquierda y por la derecha se llaman límites unilaterales. Si el punto x_0 es la cota superior para el conjunto $X_-(x_0) \setminus \{x_0\}$ y la cota inferior para $X_+(x_0) \setminus \{x_0\}$ (X es el conjunto de definición de la función f):

$$x_0 = \sup (X_-(x_0) \setminus \{x_0\}) = \inf (X_+(x_0) \setminus \{x_0\}),$$

entonces el límite común de la función f cuando $x \to x_0$ se llama también límite bilateral.

En calidad de ejemplo analicemos la función $y = \operatorname{sign} x$ (véase el ejemplo en el p. 5.2 y fig. 17). Sean $x_n > 0, x_n' < 0, n = 1, 2, \ldots$ y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n' = 0$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{sign} x_n = \lim_{n \to \infty} 1 = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \operatorname{sign} x_n' = \lim_{n \to \infty} (-1) = -1.$$

Esto significa que

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1.$$

El concepto de límite por la izquierda, respectivamente por la derecha, cuando $x \to x_0$ (como en general, el concepto de límite en un punto) tiene sentido sólo cuando x_0 es un punto de adherencia del conjunto por el cual se toma el límite, en el caso dado, del conjunto $X_-(x_0)$, respectivamente del conjunto $X_+(x_0)$. Por cuanto cada uno de estos conjuntos está por un lado del punto x_0, entonces él es su punto de adherencia si y sólo si

$$x_0 = \sup X_-(x_0)$$

y respectivamente

$$x_0 = \inf X_+(x_0).$$

Teorema 2. *La función f: $X \to \boldsymbol{R}$ tiene límite en el punto $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$, $X_-(x_0) \neq \varnothing$, $X_+(x_0) \neq \varnothing$ si y sólo si en este punto existen los límites de la función f tanto por la izquierda como por la derecha y son iguales. En este caso, su valor común es el límite de la función en el punto x_0.*

Corolario. *Para que la función f: $X \to \boldsymbol{R}$ tenga el límite bilateral por el conjunto $X \setminus \{x_0\}$ en el punto x_0 es necesario y suficiente que existan y sean iguales entre sí los límites unilaterales $f(x_0 - 0)$ y $f(x_0 + 0)$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. En realidad, sea f: $X \to \boldsymbol{R}$, $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, es decir, para la función f existe el límite (por el conjunto X) en el punto x_0. Pero entonces, en este punto, ese mismo límite existe para la restricción por cualquier conjunto (véase el lema 1 en el p. 5.4), en particular, por los conjuntos $X_-(x_0)$ y $X_+(x_0)$, es decir, existen ambos límites unilaterales cuando $x \to x_0$ y son iguales a a:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = a. \tag{5.34}$$

Supongamos, por el contrario, que en el punto $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$ se cumple la condición (5.34). Entonces, por cuanto $X = X_-(x_0) \cup X_+(x_0)$, entonces por el lema 5 existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x)$ y es igual a a:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = a.$$

Para convencerse de la validez del corolario es suficiente aplicar el teorema 2 a la restricción de la función f: $X \to \boldsymbol{R}$ sobre el conjunto $X \setminus \{x_0\}$.

Si uno de los límites unilaterales de la función en cierto punto coincide con el valor de la función en este punto, entonces tal función se llama continua unilateralmente en el punto analizado. Enunciemos esta definición más detalladamente.

Definición 11. *La función f: $X \to \boldsymbol{R}$ se llama continua por la izquierda, respectivamente por la derecha, en el punto $x_0 \in X$, si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = f(x_0),$$

respectivamente, si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = f(x_0).$$

Ejemplo. Analicemos la función definida sobre todo el eje numérico e igual, para cada número real x, al mayor entero que sea menor o igual que x. Esta función tiene una notación especial $y = [x]$ y se lee "y es la parte entera de x" o "y es igual a entier x" *). Su gráfica se representa en la fig. 22. La función $[x]$ en los puntos ente-

*) entier, entero (del francés).

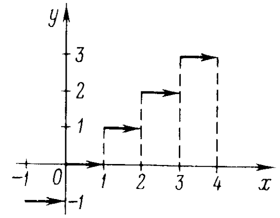


FIG. 22

ros $x = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, de la recta numérica es continua por la derecha y descontinua por la izquierda. En todos los otros puntos es continua tanto por la derecha como por la izquierda. De esta forma, en particular, la función $[x]$ es continua por la derecha en todos los puntos del eje numérico.

OBSERVACIÓN. Si para la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ existe el límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, y además, para todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad $f(x) < a$ (respectivamente, la desigualdad $f(x) > a$), entonces se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a - 0$ (respectivamente, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a + 0$). En este caso, si $a = 0$, entonces, en lugar de $0 + 0$ y $0 - 0$ se escribe simplemente $+0$ y -0.

5.10. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE LAS FUNCIONES

Todas las funciones analizadas en este punto están definidas sobre cierto conjunto $X \subset \boldsymbol{R}$ y todos sus límites se toman por el conjunto X en cierto punto x_0, que es un punto de adherencia (finito o infinitamente alejado) del conjunto X. Recordemos que x_0 es un número real: $x_0 \in \boldsymbol{R}$, entonces x_0 es un punto común de adherencia del conjunto X. Si $x_0 = \infty$, entonces el conjunto X no está acotado, y si $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$, entonces el conjunto X no está acotado superior, respectivamente inferiormente.

1 °. *Si la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ tiene límite finito en el punto x_0, entonces existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que la función f está acotada sobre la intersección $U(x_0) \cap X$ de este entorno con el conjunto de definición X de la función f.*

Corolario. *La función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ continua en el punto $x_0 \in X$ está acotada sobre la intersección de cierto entorno de este punto con el conjunto X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ un límite finito, entonces por la definición del p. 5, para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular para $\varepsilon = 1$, existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que $f(X \cap U(x_0)) \subset U(a, 1)$, es decir, para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la inclusión $f(x) \in U(a, 1)$. Dicho de otro modo, para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ es válida la desigualdad

$$a - 1 < f(x) < a + 1,$$

y esto significa que la función f está acotada sobre la intersección $X \cap U(x_0)$. □

El corolario se deriva directamente de la afirmación demostrada, ya que la continuidad de la función en el punto es un caso particular de la existencia del límite finito en el punto.

2 °. **(Lema sobre la conservación del signo).** *Si la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ tiene en el punto x_0 límite diferente de cero: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, entonces existen un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 y el número $c > 0$ tales que para todos los puntos x del dominio X de la función f que pertenecen al entorno $U(x_0)$, es decir, para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad*

$$\begin{aligned} f(x) &> c \quad \text{si} \quad a > 0,\\ f(x) &< -c \quad \text{si} \quad a < 0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Corolario 1. *Si la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ es continua en el punto $x_0 \in X$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces existen un entorno $U(x_0)$ del punto x_0* y una constante c > 0 *tales que para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad*

$$\begin{aligned} f(x) &> c \quad \text{si} \quad f(x_0) > 0,\\ f(x) &< -c \quad \text{si} \quad f(x_0) < 0. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Corolario 2. *Si la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ es continua en el punto $x_0 \in X$ y $f(x_0) > c$ (respectivamente, $f(x_0) < c$), entonces existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los puntos $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad $f(x) > c$ (respectivamente, $f(x) < c$).*

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 2 °. Sea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \boldsymbol{R}$ y $a \neq 0$. Entonces, por la definición de límite, para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular, para $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la inclusión $f(x) \in U\left(a, \dfrac{|a|}{2}\right)$, es decir, es válida la desigualdad

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}.$$

Dicho de otro modo, cuando $a > 0$:

$$f(x) > a - \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2} > 0$$

y cuando $a < 0$;

$$f(x) < a + \frac{|a|}{2} = -|a| + \frac{|a|}{2} = -\frac{|a|}{2} < 0.$$

De esta forma, la desigualdad (5.35) se cumple para $c = \dfrac{|a|}{2}$.

El corolario 1 se deriva de la afirmación demostrada, ya que en el caso de la continuidad de la función f en el punto x_0 su límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ es finito e igual a $f(x_0)$. Como se ve de la demostración, en calidad de constante c, en este caso se puede tomar $c = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$.

Para obtener la afirmación del corolario 2 es suficiente aplicar el corolario 1 a la función $f(x) - c$, la cual, como es fácil ver, también es continua en el punto x_0.

OBSERVACIÓN. Si en el punto x_0 la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ tiene el límite infinito igual a ∞, $+\infty$ o $-\infty$, entonces, para cualquier $c > 0$ tiene lugar la afirmación análoga a la propiedad 2°. Esto se deduce directamente de la definición de límite infinito enunciada en términos de desigualdades. Precisamente, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (respectivamente, $+\infty$ o $-\infty$) significa que para cualquier $c > 0$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los $x \in X \cap U(x_0)$ se cumple la desigualdad $|f(x)| > c$ (respectivamente, la desigualdad $f(x) > c$ o $f(x) < -c$).

3°. *Si $f(x) = c$ es una constante $x \in X$, entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$.

4°. *Si $f(x) \geqslant a$, $x \in X$, y existe el límite finito o infinito de signo determinado* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant a. \tag{5.37}$$

5°. *Si $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$, $x \in X$, y existen los límites finitos o infinitos de signo determinado* $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = a$, *entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a. \tag{5.38}$$

6°. *Si existen los límites finitos* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *entonces existen también los límites finitos* $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)]$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ *y si* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, *entonces existe el límite* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *además*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x), \tag{5.39}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x), \tag{5.40}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}. \tag{5.41}$$

Corolario 1. *Si existe el límite finito* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *entonces para cualquier número $c \in \boldsymbol{R}$ existe el límite* $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)$ *y además*

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x). \tag{5.42}$$

En el caso $c \neq 0$ la igualdad (5.42) es válida para los límites infinitos de signo determinado.

Corolario 2. *Si las funciones f y g son continuas en el punto $x_0 \in X$, entonces las funciones cf (c es una constante), $f + g$, fg y, si además $g(x_0) \neq 0$, también la función $\dfrac{f}{g}$ son continuas en el punto x_0.*

Observemos que según las suposiciones enunciadas en la afirmación 6 y su corolario 2, el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, naturalmente, puede no estar definido sobre todo el conjunto X inicial, ya que en él pueden existir puntos x en los cuales $g(x) = 0$. No obstante, por la propiedad 2, de la condición $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ se deduce que existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 sobre la intersección del cual con el conjunto X se cumple la desigualdad $g(x) \neq 0$ y por consiguiente, sobre esta intersección ya está definido el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. En la fórmula (5.41) por límite se sobrentiende el límite de la restricción de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sobre el conjunto $U(x_0) \cap X$. Puesto que el límite de la función en el punto es una propiedad local (véase el p. 5.4 y el p. 5.7), este límite no depende de la elección del entorno $U(x_0)$ indicado.

Las propiedades 3° — 6° pueden ser demostradas con un método único, basado en las propiedades correspondientes de los límites de las sucesiones (véase el p. 4.9).

Demostremos, por ejemplo, la fórmula (5.40). Sea $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $b = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Entonces, por la definición 15 de límite de una función (véase el p. 5.9), para cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ son válidas las igualdades

$$a = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \quad b = \lim_{n\to\infty} g(x_n).$$

Por esto, recordando que el límite del producto de sucesiones convergentes existe y es igual al producto de sus límites (véase el p. 4.9), obtendremos que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\, g(x_n) = ab. \tag{5.43}$$

Por cuanto este límite, siendo igual a ab, no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$ indicada, entonces, por la misma definición 15, la igualdad (5.43) demostrada significa que

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x). \ \square$$

El corolario 1 por la propiedad 3 es un caso particular de la fórmula (5.40). El corolario 2 se deriva directamente de la propiedad 6, por cuanto la continuidad de una función en el punto significa la existencia del límite finito para ella en este punto, igual al valor de la función en este punto. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\,g(x_0), \tag{5.44}$$

ya que los límites $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ por la continuidad de las funciones f y g en el punto x_0 son iguales a $f(x_0)$ y $g(x_0)$, respectivamente. El cumplimiento de la igualdad (5.44) significa que el producto fg es continuo en el punto x_0.

5.11. FUNCIONES INFINITAMENTE PEQUEÑAS E INFINITAMENTE GRANDES

Supondremos que todas las funciones analizadas en este punto están definidas sobre el conjunto $X \subset \boldsymbol{R}$ y analizaremos sus límites finitos o infinitos cuando el argumento tiende a un punto x_0 finito o infinitamente alejado.

Definición 12. *La función* $\alpha: X \to \boldsymbol{R}$ *se llama infinitamente pequeña (infinitesimal) para* $x \to x_0$, *si*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0. \tag{5.45}$$

Las funciones infinitamente pequeñas juegan un papel singular entre todas las funciones que tienen límite, relacionado, en particular, con que el concepto general de límite finito puede ser reducido al concepto de un infinitésimo. Enunciemos esta afirmación en forma de lema.

Lema 6. *El límite finito* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existe y es igual a* a *si y sólo si* $f(x) = a + \alpha(x)$, $x \in X$, *donde* $\alpha = \alpha(x)$ *es un infinitésimo cuando* $x \to x_0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, entonces, haciendo $\alpha(x) = f(x) - a$, $x \in X$, obtendremos que $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - a = a - a = 0$.

Viceversa, si $f(x) = a + \alpha(x)$, $x \in X$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a + \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = a$. □

Teorema 3. *La suma y el producto de un número finito de infinitésimos para* $x \to x_0$ *y también el producto de un infinitésimo para* $x \to x_0$ *por una función acotada sobre* X *son infinitésimos cuando* $x \to x_0$.

DEMOSTRACIÓN. El hecho de que la suma y el producto de un número finito de infinitésimos son infinitésimos se deduce directamente de la propiedad de la suma y del producto de los límites de las funciones (véase la propiedad 6 en el p. 5.10), en particular cuando estos límites son iguales a cero.

Demostremos la última afirmación del teorema. Sean $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ y $f(x)$ una función acotada, es decir, existe una constante $b > 0$ tal que para todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad $|f(x)| \leqslant b$. Si $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, es una sucesión tal que $\lim\limits_{n \to x_0} x_n = 0$, entonces por la definición 15 de límite de una función (véase el p. 5.9) tendremos $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha(x_n) = 0$. Por cuanto para todos los $n = 1, 2, \cdots$ se cumple la desigualdad $|f(x_n)| \leqslant b$, entonces la sucesión $\{f(x_n)\}$ está acotada. Pero el producto de una sucesión infinitesimal, en el caso dado de la sucesión $\{\alpha(x_n)\}$, por una sucesión acotada, en el caso dado por $\{f(x_n)\}$, es una sucesión infinitesimal (véase la propiedad 2 ° en el p. 4.8), por eso $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)\alpha(x_n) = 0$. Por cuanto esto es cierto para cualquier sucesión $\{x_n\}$ indicada, entonces, por la definición de límite de una función, obtendremos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = 0$ y esto significa que la función $f(x)\alpha(x)$ es infinitamente pequeña cuando $x \to x_0$. □

Junto con las funciones infinitamente pequeñas, en el análisis, a menudo se encuentran las funciones infinitamente grandes. Definámoslas.

Definición 13. *La función* $f: X \to \boldsymbol{R}$ *se llama infinitamente grande (infinita) para* $x \to x_0$ *si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty. \tag{5.46}$$

Entre las funciones infinitas e infinitesimales existe una estrecha relación. Precisamente, la magnitud inversa a una función infinita es infinitesimal y viceversa. Más exactamente, son válidas las siguientes afirmaciones.

Lema 7. *Si la función* $f: X \to \boldsymbol{R}$ *es infinitamente grande para* $x \to x_0$, *entonces la función* $\dfrac{1}{f}$ *es infinitamente pequeña para* $x \to x_0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces, por la condición $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los puntos $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

y por consiguiente, la desigualdad

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, es decir, que la función $\dfrac{1}{f(x)}$ es infinitesimal.

OBSERVACIÓN 1. Como siempre, cuando se habla de un cociente de funciones con un denominador que tiene límite diferente de cero, aquí por $\dfrac{1}{f(x)}$ se entiende, en general, el cociente de la división de 1 por la restricción de la función f sobre la intersección $U(x_0) \cap X$ del entorno $U(x_0)$ del punto x_0 con el dominio X de la función f tal que para todos los puntos $x \in U(x_0) \cap X$ la función f es diferente de cero. La existencia del entorno $U(x_0)$ indicado se deriva de la propiedad 2 de los límites de las funciones (véase el p. 5.10). Es más, esto fue obtenido otra vez en el proceso de demostración del lema 9: evidentemente de la condición $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, se deduce que $f(x) \neq 0$.

OBSERVACIÓN 2. Si al contrario $\alpha(x)$ es una función infinitamente pequeña para $x \to x_0$, entonces la magnitud inversa $\dfrac{1}{\alpha(x)}$, puede resultar que no estará definida sobre un conjunto para el cual el punto x_0 será un punto de adherencia (por ejemplo, a ciencia cierta, esto ocurre cuando $\alpha(x) \equiv 0$ sobre X) por esto, el concepto de $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{\alpha(x)}$ cuando $x \in X$ no tendrá sentido. No obstante, si X_0 es un subconjunto del conjunto X sobre el cual $\alpha(x) \neq 0$:

$$X_0 = \{x: x \in X,\ \alpha(x) \neq 0\}$$

y si x_0 es un punto de adherencia del conjunto X_0, entonces la función $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ está definida sobre X_0 y sobre este conjunto

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_0}} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty.$$

Precisamente en este caso, se dice que la función inversa a una infinitamente pequeña es infinitamente grande.

El hecho de que la función inversa a una infinitamente pequeña es infinitamente grande y viceversa, hace naturales las siguientes notaciones simbólicas que se utilizan a menudo para abreviar la escritura: para cualquier número $a > 0$ se escribe

$$\frac{a}{+0} = +\infty, \quad \frac{a}{-0} = -\infty, \quad \frac{a}{0} = \infty, \quad \frac{a}{+\infty} = +0, \quad \frac{a}{-\infty} = -0, \quad \frac{a}{\infty} = 0. \qquad (5.47)$$

OBSERVACIÓN 3. Las propiedades de los límites finitos relacionadas con las operaciones aritméticas sobre los límites (véase la propiedad 6 en el p. 5.10) no se trasladan directamente a las funciones infinitamente grandes. No obstante, algunas analogías tienen lugar.

Por ejemplo, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$. No obstante, sobre la existencia de cualquier límite $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$, en general, aquí no se puede afirmar nada. Se puede mostrar que las afirmaciones positivas sobre los límites infinitos tienen lugar en los casos para los cuales fueron definidas algunas "operaciones aritméticas" con infinitos por las fórmulas (5.47) y en el p. 3.1.

5.12. DIFERENTES FORMAS DE ESCRITURA DE LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

La condición de continuidad de la función f dada sobre el conjunto X en el punto x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (5.18)$$

se puede entender tanto en el sentido de la definición de límite de una función según Heine (véase la definición 1 en el p. 5.4) como en el sentido de la definición según Cauchy (véase la definición 9 en el p. 5.7). En el primer caso esto significa que para cualquier sucesión

$$x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \qquad (5.48)$$

se cumple la condición

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0). \qquad (5.49)$$

En el segundo caso, que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos los puntos x que satisfacen la condición

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \in X \qquad (5.50)$$

se cumple la desigualdad (fig. 23).

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (5.51)$$

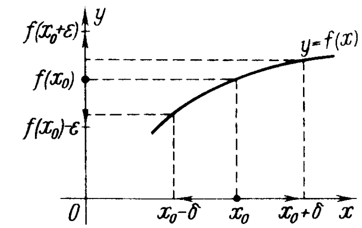


FIG. 23

El concepto de continuidad de una función enunciada en términos de sucesiones (definición (5.48) — (5.49)) representa la circunstancia que a menudo se encuentra en la práctica y que consiste en que en la medición indirecta de cierto valor y_0 de una magnitud y con ayuda del parámetro x, del cual depende continuamente esta magnitud: $y = f(x)$, se tiene la seguridad objetiva de que cuanto más exactamente obtengamos (como consecuencia de experimentos cualesquiera, mediciones o cálculos) sucesivamente los valores x_n, $n = 1, 2, \ldots$, que acercan los valores del parámetro x_0 al cual corresponde el valor y_0, más exactamente se obtendrán los valores aproximados correspondientes $y_n = f(x_n)$ de la magnitud $y_0 = f(x_0)$.

La definición (5.50) — (5.51) de continuidad de una función f en el punto x_0 se puede aún parafrasear de la forma: la función f es continua en el punto x_0 si cualquiera que sea el grado de exactitud dado $\varepsilon > 0$ para los valores de la función f, existe tal grado de exactitud $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ para el argumento, que en cuanto tomemos el valor del argumento x igual a x_0 con exactitud δ, es decir, que satisface la condición (5.50), y tomemos en él el valor de la función f, entonces obtendremos el valor $f(x_0)$ con el grado de exactitud dado, es decir, se cumplirá la desigualdad (5.51). Lo dicho, naturalmente, es una paráfrasis literaria de la definición (5.50) — (5.51), que aclara la representación intuitiva sobre una función continua.

Por cuanto la continuidad de una función en un punto es un caso particular de la existencia del límite de una función, entonces la definición de continuidad de una función en un punto se puede dar en términos de entornos, sólo hace falta agregarle a la condición (5.20) la exigencia: $x_0 \in X$. De esta forma, la función f definida sobre el conjunto X es continua en el punto si para cualquier entorno $U(y_0)$ del punto $y_0 = f(x_0)$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que se cumple la inclusión

$$f(U(x_0) \cap X) \subset U(y_0), \quad x_0 \in X. \qquad (5.52)$$

Finalmente, trasladando la constante $f(x_0)$ en la igualdad (5.18) al segundo miembro, incluyéndola bajo el signo del límite y observando que la notación $x \to x_0$ en el límite de la función es equivalente a la notación $x - x_0 \to 0$ (véase el p. 5.4), obtendremos

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \qquad (5.53)$$

La diferencia $x - x_0$ se llama *incremento del argumento* y se denota por Δx, y la diferencia $f(x) - f(x_0)$, *incremento de la función* $y = f(x)$ correspondiente al incremento dado del argumento Δx y se denota por Δy. De esta forma,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad x_0 \in X, \quad x \in X. \tag{5.54}$$

En esta notación, la igualdad (5.50) se transcribe de la forma

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{5.55}$$

es decir, dicho descriptivamente, la continuidad de una función en un punto significa que a un incremento infinitamente pequeño del argumento le corresponde un incremento infinitamente pequeño de la función.

Ejemplos. 1. La función $f(x) = c$, donde c es una constante, es continua sobre toda la recta numérica.

En realidad, para cualquier $x_0 \in \boldsymbol{R}$ tiene lugar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0). \ \square$$

2. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en cada punto $x_0 \neq 0$.

En realidad,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x_0}{(x_0 + \Delta x)x_0},$$

de donde para $x_0 \neq 0$ tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0} = -\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (x_0 + \Delta x)x_0} = \frac{0}{x_0^2} = 0.$$

Esto, por (5.52) significa la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto $x_0 \neq 0$. $\square$

3. La función $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ (véase la fig. 20) no es continua en el punto $x_0 = 0$, ya que el límite de esta función (por todo el eje numérico) en el punto $x_0 = 0$ simplemente no existe (véase el ejemplo 4 en el p. 5.4).

Ejercicios. 26. Aclárese con qué grado de exactitud es suficiente dar los valores del argumento de la función x^3 en un punto x_0 dado para obtener el valor de la función con un grado de exactitud $\varepsilon > 0$ dado.

27. Aclárese si la función

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x} & \text{para} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en el punto $x = 0$.

5.13. CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Definición 14. *Supongamos que la función f está definida en cierto entorno del punto x_0 excepto, posiblemente, del propio punto.*

El punto x_0 se llama punto de discontinuidad de la función f si la función f no está definida en el punto x_0 o si está definida en este punto pero no es continua en él.

Ejercicio 28. Enúnciese en sentido positivo la definición de punto de discontinuidad de una función.

Definición 15. *Si x_0 es un punto de discontinuidad de la función f y existen los límites unilaterales finitos* *)

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

entonces el punto x_0 se llama punto de discontinuidad de primer género.

La magnitud $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ se llama *salto de la función f* en el punto x_0. Si el salto de la función f en el punto de discontinuidad x_0 es igual a cero, es decir, $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, entonces x_0 se llama *punto de discontinuidad evitable.*

El último término está justificado con que si en este caso se define de nuevo o se define la función f (si la función f no estaba definida en el punto x_0) haciendo

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0), \tag{5.56}$$

entonces se obtendrá una función continua en el punto x_0.

En efecto, mostremos que si para la función $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ se cumple la condición (5.56), entonces es continua en el punto x_0. Hagamos $X_1 = X \setminus \{x_0\}$ y $X_2 = \{x_0\}$. Por el teorema 2 del p. 5.9 de la igualdad $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ se deduce que en el punto x_0 existe el límite de la función f por el conjunto X_1, y además, por la condición (5.56) es igual a $f(x_0)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1}} f(x) = f(x_0).$$

Por otro lado, el límite de la función f cuando $x \to x_0$ por el conjunto $X_2 = \{x_0\}$ de un solo punto, evidentemente es igual a $f(x_0)$ (el límite de una constante es igual a esta propia constante):

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in X_2} f(x) = f(x_0).$$

Por esto, por el lema 5 del p. 5.8, para $x \to x_0$ la función f tiene el límite igual a $f(x_0)$ por el conjunto $X = X_1 \cup X_2$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esto significa que la función f es continua en el punto x_0.

El punto de discontinuidad de una función que no sea punto de discontinuidad de primer género se llama punto de discontinuidad de segundo género.

Es evidente que en los puntos de discontinuidad de segundo género al menos uno de los límites $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ no existe. Aquí, por límite, como comúnmente se hace, se entiende sólo límite finito.

Ejercicio 29. Enúnciese en sentido positivo la definición de punto de discontinuidad de segundo género.

Las funciones $\operatorname{sign} x$ (véase la fig. 17 en el p. 5.2) y $|\operatorname{sign} x|$ (véase la fig. 20 en el p. 5.4) tienen en el punto $x_0 = 0$ discontinuidad de primer género y además, para la

*) Recordemos que límites unilaterales $f(x_0 - 0)$ y $f(x_0 + 0)$ se toman por el conjunto que no contiene el propio punto x_0.

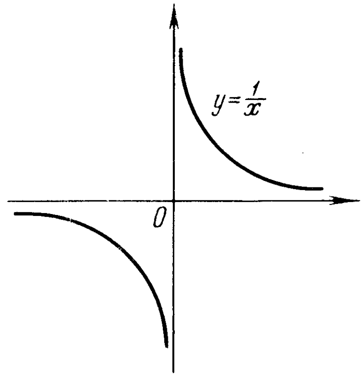


FIG. 24

función $|\operatorname{sign} x|$ es una discontinuidad evitable y las funciones $\frac{1}{x}$ (fig. 24) y sen $\frac{1}{x}$ (fig. 19 en el p. 5.4) en el punto $x_0 = 0$ tienen discontinuidad de segundo género.

5.14. LÍMITES DE LAS FUNCIONES MONÓTONAS

Definición 16. *La función $f\colon X \to \mathbf{R}$, $X \subset \mathbf{R}$ se llama creciente (decreciente) sobre el conjunto X si para cualesquiera $x_1 \in X$ y $x_2 \in X$ tales que $x_1 < x_2$, se cumple la desigualdad $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (respectivamente, la desigualdad $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).*

Las funciones crecientes (decrecientes) se llaman también no decrecientes (respectivamente no crecientes).

Si la función es creciente (decreciente) sobre el conjunto X, entonces también se dice que crece (decrece) sobre este conjunto.

Si la función f crece (decrece) sobre el conjunto X, entonces la función $-f$ obtenida de f con un cambio de signo para todos sus valores, es decir,

$$(-f)(x) \overset{\text{def}}{=} -f(x), \quad x \in X,$$

es una función decreciente (creciente) sobre el conjunto X.

Las funciones crecientes y decrecientes sobre el conjunto X se llaman monótonas sobre este conjunto.

Teorema 4. *Supongamos que la función $f\colon X \to \mathbf{R}$ crece sobre el conjunto X, $\alpha = \inf X$, $\beta = \sup X$ y además $\alpha \notin X$, $\beta \notin X$, entonces para la función f en el punto α existe el límite por la derecha y*

$$\lim_{x \to \alpha + 0} f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$$

y en el punto β, el límite por la izquierda y

$$\lim_{x \to \beta - 0} f(x) = \sup_{x \in X} f(x).$$

De esta forma, si en las condiciones del teorema la función f está acotada superiormente, entonces en el punto β para ella existe el límite finito por la izquierda, y si f no está acotada superiormente, entonces $\lim\limits_{x \to \beta - 0} f(x) = +\infty$.

Por analogía, si la función f está acotada inferiormente, entonces en el punto α para ella existe el límite finito por la derecha y si f no está acotada inferiormente, entonces $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} f(x) = -\infty$.

Afirmaciones semejantes son válidas también para las funciones decrecientes, que se pueden obtener pasando de la función f a la función $-f$.

Corolario. *Si la función f es monótona sobre el conjunto X, $x_0 \in \mathbf{R}$, los conjuntos $X_<(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in X, x < x_0\}$ y $X_>(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in X, x > x_0\}$ son no vacíos, y x_0 es un punto de adherencia de cada uno de ellos, entonces en el punto x_0 existen los límites unilaterales finitos*

$$f(x_0 - 0) = \sup_{X_>(x_0)} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0 + 0) = \inf_{X_>(x_0)} f(x), \tag{5.57}$$

además, en el caso de una función creciente

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0 + 0) \tag{5.58}$$

y en el caso de una decreciente

$$f(x_0 - 0) \geqslant f(x_0 + 0). \tag{5.59}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sea

$$b = \sup_{x \in X} f(x) \leqslant +\infty$$

y $\beta = \sup X$, $\beta \notin X$. Demos un entorno arbitrario $U(b)$ del punto b y sean η su extremo izquierdo. Evidentemente

$$\eta < b$$

y por esto, por la definición de cota superior de una función existe un punto $\xi \in X$ tal que

$$f(\xi) > \eta, \tag{5.60}$$

además, por las condiciones $\xi \in X$, $\beta = \sup X$ y $\beta \notin X$ tendremos

$$\xi < \beta.$$

Denotemos por $U(\beta)$ el entorno del punto β para el cual ξ es el extremo izquierdo (es decir, si β es un número real, entonces es el extremo izquierdo del intervalo $U(\beta, \varepsilon) = (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$, $\varepsilon = \beta - \xi$, y si $\beta = +\infty$, entonces es el extremo izquierdo del intervalo semiabierto infinito $(\xi, +\infty]$). Entonces para cualquier punto

$$x \in X \cap U(\beta) \tag{5.61}$$

tiene lugar la desigualdad (fig. 25)

$$\xi < x$$

y por consiguiente, en virtud del crecimiento de la función f, la desigualdad

$$f(\xi) \leqslant f(x).$$

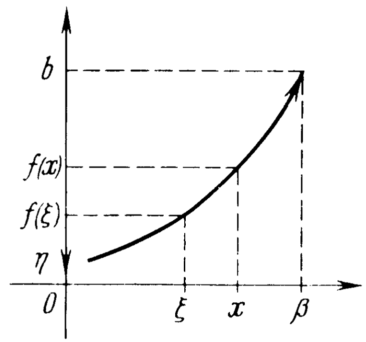


FIG. 25

Por esto, para todos los x que satisfacen la condición (5.61) tendremos (véase (5.60))

$$\eta < f(x) \leqslant \sup_X f(x) = b. \tag{5.62}$$

Recordando que el punto η es el extremo izquierdo del entorno $U(b)$ del punto b, obtendremos de (5.62) la inclusión

$$f(x) \in U(b).$$

De esta forma, para cualquier entorno $U(b)$ del punto b existe un entorno $U(\beta)$ del punto β tal que en cuanto $x \in X \cap U(\beta)$, se cumple la inclusión $f(x) \in U(\beta)$. Esto significa que

$$\lim_{x \to \beta - 0} f(x) = b = \sup_X f(x).$$

Análogamente se demuestra que $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} f(x) = \inf\limits_X f(x)$. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Supongamos, para mayor exactitud, que la función f crece sobre el conjunto X y x_0 es un punto de adherencia de los conjuntos no vacíos $X_<(x_0)$ y $X_>(x_0)$. Entonces, para cualesquiera puntos $x' \in X_<(x_0)$ y $x'' \in X_>(x_0)$ es válida la desigualdad

$$f(x') \leqslant f(x'').$$

Por esto, la función f está acotada superiormente sobre el conjunto $X_<(x_0)$ por el número $f(x'')$ y está acotada inferiormente sobre el conjunto $X_>(x_0)$ por el número $f(x')$. Por lo tanto

$$\sup_{X_<(x_0)} f(x) \leqslant f(x''), \quad \inf_{X_>(x_0)} f(x) \geqslant f(x'). \tag{5.63}$$

En particular, las cotas superiores e inferiores indicadas son finitas y además, por cuanto la primera de las desigualdades (5.63) es válida para cualquier punto $x'' \in X_>(x_0)$, entonces, pasando en su segundo miembro a la cota inferior de los valores de la función sobre el conjunto $X_>(x_0)$ obtendremos

$$\sup_{X_<(x_0)} f(x_0) \leqslant \inf_{X_>(x_0)} f(x). \tag{5.64}$$

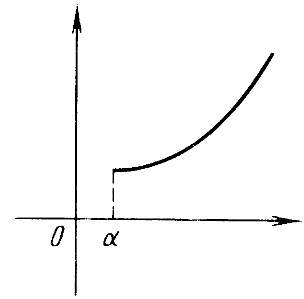


FIG. 26

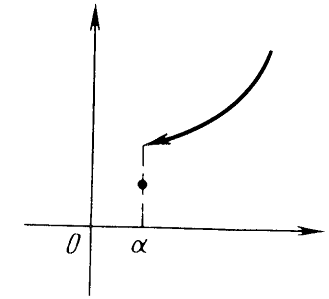


FIG. 27

Con esto culmina la demostración del corolario, ya que, por el teorema 4, los límites por la izquierda $f(x_0 - 0)$ y por la derecha $f(x_0 + 0)$ existen y además

$$f(x_0 - 0) = \sup_{X_<(x_0)} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \inf_{X_>(x_0)} f(x)$$

por lo que las desigualdades (5.58) coinciden con la desigualdad (5.64). □

OBSERVACIÓN 1. En el teorema 4 para la función creciente $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ fueron analizados los casos cuando $\inf X = \alpha \notin X$ y $\sup X = \beta \notin X$. Si por ejemplo, $\alpha \in X$, entonces, como para una función arbitraria (no monótona), aquí son posibles dos casos: el límite $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x \in X}} f(x)$ puede existir (entonces la función f es continua en el punto α) (fig. 26) o no existir (fig. 27). Una situación análoga tiene lugar para el punto β.

OBSERVACIÓN 2. De la matemática elemental es conocido que la función

$$f(r) = a^r, \quad a > 0, \tag{5.65}$$

donde r es un número racional: $r \in \boldsymbol{Q}$, es monótona sobre el conjunto de todos los números racionales $\boldsymbol{Q}$ (véase también el p. 2.6*). Por cuanto cualquier número real x es límite de números racionales (véase el corolario del lema 1 en el p. 4.10), entonces por el teorema 4 para cualquier $x \in \boldsymbol{R}$ existen los límites $f(x - 0)$ y $f(x + 0)$ (por el conjunto de los números racionales ya que sólo por ellos está definida la función f aquí analizada). En el futuro (véase el p. 7.2) será mostrado que en el caso de la función (5.65) tiene lugar la igualdad

$$f(x - 0) = f(x + 0).$$

Este valor común de los límites unilaterales de la función (5.65) en el punto x se denota por a^x.

Este ejemplo muestra que el concepto de límite por los conjuntos se encuentra ya en las situaciones más simples.

OBSERVACIÓN 3*. Del teorema 4 se deduce que cualquier función monótona sobre un intervalo finito o infinito puede tener sólo puntos de discontinuidad de primer género, el conjunto de los cuales puede ser, a lo sumo, numerable (es decir, finito o numerable).

En realidad, supongamos para mayor exactitud, que la función f: $(a, b) \to R$ crece sobre el intervalo (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Ante todo, por el corolario del teorema 4, la función f en cada punto $x_0 \in (a, b)$ tiene límites finitos por la izquierda $f(x_0 - 0)$ y por la derecha $f(x_0 + 0)$ y por consiguiente puede tener sólo discontinuidades de primer género (véase la definición de punto de discontinuidad de primer género en el p. 5.13) y además no puede tener puntos de discontinuidad evitable. En efecto, si $x_0 \in (a, b)$, entonces para todos los $x' \in (a, x_0)$ y $x'' \in (x_0, b)$ por el crecimiento de la función f es válida la desigualdad

$$f(x') \leqslant f(x_0) \leqslant f(x''),$$

de donde

$$\sup_{(a, x_0)} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \inf_{(x_0, b)} f(x). \tag{5.66}$$

Por cuanto aquí $(a, x_0) = \{x \in (a, b) : x < x_0\}$ y $(x_0, b) = \{x \in (a, b) : x > x_0\}$, entonces por (5.57) la desigualdad (5.66) se puede escribir en la forma

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0). \tag{5.67}$$

Si x_0 fuera un punto de discontinuidad evitable, es decir, tuviera lugar la igualdad $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, entonces por (5.67) se cumpliría la condición

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$$

que significa (véase el p. 5.9) que f es continua en el punto x_0.

Así pues, si x_0 es un punto de discontinuidad de la función f, entonces

$$f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0).$$

Hagámosle corresponder a cada punto de discontinuidad x_0 de la función f el intervalo $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ y mostremos que estos intervalos no se intersecan. En realidad, si x_1 y x_2 son dos puntos de discontinuidad de la función f y por ejemplo, $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1 + 0) \leqslant f(x_2 - 0)$. Demostremos esto. Por el crecimiento de la función f para cualesquiera puntos x' y x'' tales que $x_1 < x' < x'' < x_2$ es válida la desigualdad $f(x') \leqslant f(x'')$. Pasando en esta desigualdad al límite cuando $x' \to x_1 + 0$, obtendremos $f(x_1 + 0) \leqslant f(x'')$. Haciendo tender x'' a x_2 por la izquierda: $x'' \to x_2 - 0$, tendremos

$$f(x_1 + 0) = f(x_2 - 0),$$

es decir, el extremo derecho del intervalo $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0))$ no es mayor que el extremo izquierdo del intervalo $(f(x_2 - 0), f(x_2 + 0))$. De aquí evidentemente se deduce que los intervalos indicados no se intersecan.

Así pues, a los puntos de discontinuidad de una función monótona f: $(a, b) \to R$ se puede poner en correspondencia biunívoca cierto sistema de intervalos que no se intersecan dos a dos. En cada uno de estos intervalos escojamos un número racional (tales números siempre existen en virtud de que el conjunto de los números racionales es siempre denso en el eje numérico, véase la observación en el p. 4.11*). Como resultado se obtendrá ua correspondencia biunívoca entre lol intervalos del sistema indicado y por consiguiente entre los puntos de discontinuidad de la función f y cierto subconjunto del conjunto de los números racionales. Pero cualquier subconjunto de un conjunto numerable (como es el conjunto de los números racionales, véase el p. 4.11*) es finito o numerable, por consiguiente, el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función monótona es finito o numerable.

5.15. CRITERIO DE CAUCHY DE EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

En el presente punto por analogía con el caso de las sucesiones será obtenida la condición necesaria y suficiente para que la función tenga límite finito en un punto x_0 dado y además, esta condición será enunciada sólo en términos de los valores de la propia función por lo que el propio valor del límite indicado, en esta condición no participa.

Como antes, por punto x_0 se entiende un número real o uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$ y el punto x_0 es punto de adherencia del conjunto de definición de la función analizada.

Teorema 5 (criterio de Cauchy). *Para que la función f: $X \to R$ tenga límite finito en el punto x_0 es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para cualesquiera $x' \in U(x_0) \cap X$ y $x'' \in U(x_0) \cap X$ se cumpla la desigualdad*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sean f: $X \to R$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in R$. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 que para cada $x \in U(x_0) \cap X$ es válida la desigualdad

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.68}$$

Sean $x' \in U(x_0) \cap X$ y $x'' \in U(x_0) \cap X$, entonces por (5.68) tendremos

$$|f(x'') - f(x')| = |[f(x'') - a] + [a - f(x')]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'') - a| + |a - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \square$$

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea f: $X \to R$ una función tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los

$$x' \in U(x_0) \cap X, \ x'' \in U(x_0) \cap X \tag{5.69}$$

se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon. \tag{5.70}$$

Mostremos que de aquí se deduce la existencia para f del límite finito en el punto x_0. Tomemos cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{5.71}$$

y demos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para este ε, por la suposición hecha, existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 que satisface las condiciones (5.69) — (5.70). Por la condición

(5.71) para este entorno $U(x_0)$ existe un $n_0 \in N$ tal que para todos los $n > n_0$, $n \in N$, tiene lugar $x_n \in U(x_0)$ y ya que $x_n \in X$, entonces $x_n \in U(x_0) \cap X$, $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$. De aquí, recordando las suposiciones (5.69) — (5.70) obtendremos que para todos los $n > n_0$ y todos los $m > n_0$ se cumple la desigualdad

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

es decir, la sucesión $\{f(x_n)\}$ satisface las condiciones del criterio de Cauchy para las sucesiones numéricas (véase el p. 4.7) y por consiguiente converge.

De esta forma, para cada sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge. De aquí, como es conocido (véase el lema 4 en el p. 5.6), se deduce la existencia del límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. □

En el caso cuando x_0 es un número la condición de Cauchy se puede enunciar de la siguiente forma.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$, que satisfacen las condiciones $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

En el caso cuando $x_0 = \infty$ la condición de Cauchy se puede dar de la siguiente forma.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$ que satisfacen las condiciones $|x'| > \delta$, $|x''| > \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Para el caso de los límites unilaterales la condición de Cauchy se puede parafrasear sin el término de entorno, de la siguiente forma: para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un η ($\eta < x_0$ cuando se analiza el límite por la izquierda y $\eta > x_0$ cuando el límite por la derecha), tal que para cualesquiera $x' \in X$ y $x'' \in X$ que satisfacen la condición $\eta < x' \leqslant x_0$, $\eta < x'' \leqslant x_0$ ó, respectivamente, $x_0 \leqslant x' < \eta$, $x_0 \leqslant x'' < \eta$ se cumple la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Señalemos que todos estos criterios de existencia del límite de una función, relacionados con diferentes casos y que tienen diferentes enunciados, gracias a la terminología acertadamente escogida (el concepto de entorno) obtuvieron una demostración única.

5.16. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Analicemos la cuestión sobre la existencia de los límites finitos e infinitos de las composiciones de funciones, cada una de las cuales tiene el límite correspondiente.

Si f: $X \to \boldsymbol{R}$, g: $X \to \boldsymbol{R}$ y se cumple la condición $f(X) \subset Y$, entonces sobre el conjunto X está definida la composición $g_0 f$ de las funciones f y g o como se dice, la función compuesta $g[f(x)]$. Se analizarán los límites finitos o infinitos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ donde x_0 e y_0 se supondrán puntos de adherencia finitos o infinitamente alejados (véase el p. 5.4) de los conjuntos (X) y $f(X)$, respectivamente.

Teorema 6. *Supongamos que f: $X \to \boldsymbol{R}$, g: $Y \to \boldsymbol{R}$, $f(X) \subset Y$ y existen los límites finitos o infinitos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \tag{5.72}$$

$$\lim_{y \to y_0} g(y), \tag{5.73}$$

entonces, cuando $x \to x_0$ existe también el límite (finito o infinito) de la función compuesta $g[f(x)]$ y además

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Corolario. *Si f: $X \to \boldsymbol{R}$, g: $Y \to \boldsymbol{R}$, $f(X) \subset Y$ y la función f es continua en el punto $x_0 \in X$ y la función g es continua en el punto $y_0 = f(x_0)$, entonces la función $g[f(x)]$ es continua en el punto x_0.*

Más brevemente, pero menos exacto la función continua de una función continua es continua.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Denotemos el valor del límite (5.73) por z_0:

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0$$

(z_0 es un número o uno de los infinitos) y fijemos de forma arbitraria un entorno $U = U(z_0)$ del punto z_0. Entonces, por la definición de límite, existe un entorno $V = V(y_0)$ del punto y_0 que si

$$y \in Y \cap V(y_0), \tag{5.74}$$

entonces

$$g(y) \in U(z_0). \tag{5.75}$$

Más adelante, para el entorno $V(y_0)$ obtenido, por la existencia del límite (5.72) se encuentra un entorno $W = W(x_0)$ tal que si

$$x \in X \cap W(x_0), \tag{5.76}$$

entonces

$$f(x) \in V(y_0)$$

y ya que $f(x) \in Y$, entonces

$$f(x) \in Y \cap V(y_0). \tag{5.77}$$

Del cumplimiento de las condiciones (5.76) — (5.77) por (5.74) — (5.75) para $y = f(x)$ tenemos: si se cumple la inclusión (5.76), entonces

$$g[f(x)] \in U(z_0)$$

(véase la fig. 28). Por cuanto el entorno $U(z_0)$ del punto z_0 era arbitrario, esto significa que cuando $x \to x_0$ para la función $g[f(x)]$ existe el límite igual a z_0:

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = z_0 = \lim_{y \to y_0} g(y). \ \square$$

La afirmación del corolario es un caso particular del teorema cuando $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$ (en estas suposiciones los puntos x_0 e

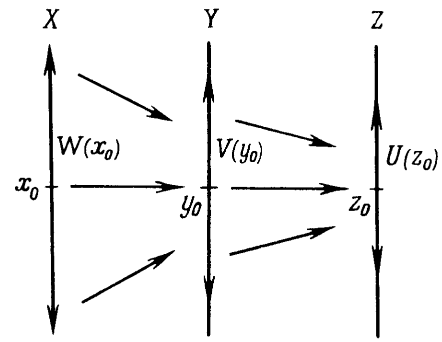


FIG. 28

y_0 perteneciendo a los conjuntos X y Y, respectivamente, siempre son sus puntos de adherencia):
$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g[f(x_0)].$$

OBSERVACIÓN 1. Si $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $g\colon Y \to \boldsymbol{R}$, existe el límite (5.72) y el conjunto Y contiene cierto entorno $V(y_0)$ del punto y_0:
$$V(y_0) \subset Y, \tag{5.78}$$
entonces, por la existencia del límite (5.72) se encuentra un entorno $W = W(x_0)$ del punto x_0 tal que
$$f(X \cap W) \subset V(y_0) \subset Y$$
y por consiguiente para la restricción f_0 de la función f sobre el conjunto $X \cap W$ se cumple la inclusión
$$f_0(X \cap W) \subset Y. \tag{5.79}$$

De esta forma, si pasamos a la restricción f_0 de la función f, entonces en la suposición complementaria indicada (5.78), en las condiciones del teorema 7 se puede no exigir la existencia de la composición de las funciones g y f_0, es decir, el cumplimiento de la condición $f(X) \subset Y$, pues en el sentido indicado anteriormente ella se cumple automáticamente, precisamente tiene lugar la inclusión (5.79) y por esto existe la composición $g_0 f_0$.

OBSERVACIÓN 2. La afirmación del corolario del teorema 7 se puede escribir en forma de fórmula
$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g[\lim_{x \to x_0} f(x)] \tag{5.80}$$
de la cual se ve que, dicho en sentido figurado, *la operación del paso límite es permutable con la operación de composición con una función continua.*

En realidad, la parte izquierda de la igualdad (5.80) por la continuidad de la función $g[f(x)]$ en el punto x_0 (véase el corolario del teorema 6) es igual a $g[f(x_0)]$. A este mismo valor $g[f(x_0)]$ es igual la parte derecha de la igualdad, pero ya por la continuidad de la función f en el mismo punto x_0.

OBSERVACIÓN 3. La fórmula demostrada en el teorema 7
$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y), \tag{5.81}$$

donde $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ se puede analizar como *la regla del cambio de variable para el cálculo de los límites de las funciones compuestas.*

Utilizando la notación de la composición de funciones $g_0 f$ la igualdad (5.81) se puede escribir en la forma
$$\lim_{x \to x_0} (g_0 f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

OBSERVACIÓN 4. Sean $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $g\colon Y \to \boldsymbol{R}$ y $f(X) \subset Y$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$. En este caso, por el teorema 6, de la existencia del límite (finito o infinito), que aparece en el segundo miembro de la igualdad (5.81), se deduce la existencia del límite correspondiente en el primer miembro y la igualdad de estos límites. Si además, la aplicación $f\colon X \to Y$ es una aplicación biunívoca del conjunto X *sobre el conjunto* Y, es decir, sobre Y existe la función inversa unívoca f^{-1} y si $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0$, entonces viceversa, de la existencia del límite finito o infinito que aparece en el primer miembro de la igualdad (5.81) se deduce la existencia del límite correspondiente que aparece en el primer miembro.

De esta forma, *según las suposiciones hechas, el límite (finito o infinito)* $\lim\limits_{x \to x_0} g[f(x)]$ *existe si y sólo si existe el límite* $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ *(respectivamente, finito o infinito) y además, en el caso de que existan son iguales.*

En un sentido esta afirmación es el contenido del teorema 6. En el otro, también se deduce de este teorema si lo aplicamos a la composición $(g_0 f) \circ f^{-1}$ de las funciones f^{-1} y $g \circ f$. Por el teorema 6, de la existencia de los límites $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0$ y $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$ se deduce que existe el límite
$$\lim_{y \to y_0} ((g \circ f) \circ f^{-1})(y) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x),$$
pero $(g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g$. De esta forma, existe el límite $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ y $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = \lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$.

§ 6. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS SOBRE LOS INTERVALOS

6.1. ACOTACIÓN DE LAS FUNCIONES CONTINUAS. VALORES EXTREMALES

En el presente párrafo será estudiada una serie de propiedades importantes de las funciones continuas y que encuentran muchas aplicaciones.

Definición 1. *La función* $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$ *se llama continua sobre el conjunto* X, *si es continua por* X *en cada uno de sus puntos* (véase las definiciones 5 y 8 en el p. 5.6).

Una clase importante de funciones continuas es la clase de funciones continuas sobre los intervalos del eje numérico. Comencemos su estudio por las funciones continuas sobre los segmentos. Si la función f es continua sobre el segmento $[a, b]$

entonces su continuidad en el punto $x = a$ es equivalente a la continuidad por la derecha y su continuidad en el punto $x = b$, a la continuidad por la izquierda en este punto.

Diremos que la función $f: X \to \boldsymbol{R}$ alcanza sobre el conjunto X su cota superior (inferior) $\beta = \sup\limits_X f$ ($\alpha = \inf\limits_X f$) si existe un punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \beta$ (respectivamente, $f(x_0) = \alpha$).

Teorema 1 (de Weierstrass). *Cualquier función continua sobre un segmento está acotada y alcanza sobre él su cota superior y su cota inferior.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f continua sobre el segmento $[a, b]$ y sea

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x);$$

M, como cualquier cota superior de un conjunto no vacío de números, puede ser finita o infinita, igual a $+\infty$. Mostremos que $M < +\infty$ y que existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = M$.

Escojamos cualquier sucesión de números a_n, $n = 1, 2, \ldots$, tales que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = M, \quad a_n < M, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6.1}$$

Por la definición de cota superior de una función, para cada a_n, $n = 1, 2, \ldots$, existe un punto $x_n \in [a, b]$ tal que

$$f(x_n) > a_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6.2}$$

Por otro lado, por cuanto M es la cota superior de la función f, entonces para todos los puntos $x \in [a, b]$ es válida la desigualdad

$$f(x) \leqslant M. \tag{6.3}$$

La sucesión $\{x_n\}$ está acotada: $a \leqslant x_n \leqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$, por lo que por el teorema de Bolzano — Weierstrass (véase el p. 4.6) de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0. \tag{6.4}$$

Por cuanto $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces (¿por qué?), también $a \leqslant x_0 \leqslant b$.

De las desigualdades (6.2) y (6.3) se deduce que para todos los $k = 1, 2, \ldots$, son válidas las desigualdades

$$a_{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M. \tag{6.5}$$

El límite de cualquier subsucesión de una sucesión que tiene límite finito o infinito es igual al límite de toda la sucesión, por lo que de (6.1) tenemos $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = M$. Pasando en (6.5) al límite cuando $k \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M. \tag{6.6}$$

Por otro lado, por la continuidad de la función f sobre el segmento $[a, b]$, ella es

continua en el punto x_0 de este segmento, y por consiguiente, de (6.4) se deduce que

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \tag{6.7}$$

De (6.6) y (6.7) obtenemos $M = f(x_0)$.

De esta forma está demostrado que la cota superior M de la función f coincide con el valor de la función en el punto x_0 y por consiguiente es finita. Por eso, la función f está acotada superiormente y su cota superior se alcanza en el punto $x_0 \in [a, b]$.

Análogamente se demuestra que una función continua sobre un segmento está acotada inferiormente y que alcanza sobre él su cota inferior. □

El teorema análogo al teorema 1 no es válido para los intervalos que no son segmentos, de esto es fácil convencerse construyendo los ejemplos correspondientes. Por ejemplo, la función $y = \frac{1}{x}$ es continua en cada punto del intervalo $(0; 1)$ y junto con esto no está acotada sobre él; la función $y = x$ es continua sobre todo el eje numérico y no está acotada sobre él.

Señalemos además, que si la función f es continua no sobre un segmento, sino sobre un intervalo de otro tipo e incluso, además está acotada sobre él, en general, no tiene valor máximo y mínimo. Por ejemplo, las funciones $y = x$ sobre el intervalo $(0; 1)$ e $y = \operatorname{arctg} x$ sobre toda la recta numérica, aunque son continuas (la continuidad de la función $y = \operatorname{arctg} x$ será demostrada en el p. 7.3) y están acotadas en los intervalos indicados, no alcanzan sus cotas superiores e inferiores.

Ejercicio 1. Sea la función f definida y continua sobre el segmento $[a, b]$ y $f(x) > 0$ para todos los $x \in [a, b]$. Entonces existe $c > 0$ tal que $f(x) > c$ para todos los $x \in [a, b]$.

6.2. VALORES INTERMEDIOS DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Teorema 2 (de Bolzano — Cauchy). *Si la función f es continua sobre el segmento $[a, b]$ y $f(a) = A$, $f(b) = B$, entoces para cualquier C incluida entre A y B existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = C$.*

Dicho de otro modo, *una función continua sobre un segmento, tomando dos valores cualesquiera, toma cualquier valor que se encuentre entre ellos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea para mayor exactitud $f(a) = A < B = f(b)$, $A < C < B$. Dividamos al segmento $[a, b]$ con el punto x_0 en dos segmentos iguales por longitud, entonces o bien $f(x_0) = C$ y el punto buscado $\xi = x_0$ se ha encontrado, o bien $f(x_0) \neq C$ y entonces sobre los extremos de uno de los segmentos obtenidos la función f toma valores que están por lados diferentes del número C, más exacto, en el extremo izquierdo el valor es menor que C y en el derecho, mayor.

Denotemos este segmento por $[a_1, b_1]$ y dividámoslo de nuevo en dos segmentos iguales por longitud, etc. Como resultado después de un número finito de pasos o bien llegamos al punto ξ buscado, en el cual $f(\xi) = C$ o bien obtendremos una sucesión de segmentos encajados $[a_n, b_n]$ que tienden a cero por su longitud y tales que

$$f(a_n) < C < f(b_n). \tag{6.8}$$

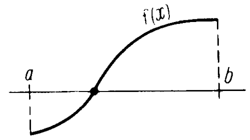


FIG. 29

Sea ξ el punto común de todos los segmento $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (véase el p. 3.6). Como sabemos (véase (4.9)), $\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Por esto, por la continuidad de la función f

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{6.9}$$

De (6.8) obtendremos (véase el p. 4.3)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant C \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{6.10}$$

De (6.9) y (6.10) se deduce que $f(\xi) = C$. □

Corolario 1. *Si una función es continua sobre un segmento y en sus extremos toma valores de diferente signo, entonces en este segmento existe al menos un punto en el cual la función se iguala a cero.*

Este corolario es un caso particular del teorema (fig. 29).

Corolario 2. *Sea f una función continua sobre el segmento $[a, b]$ y $M = \sup f$, $m = \inf f$. Entonces la función f toma todos los valores del segmento $[m, M]$ y sólo estos valores.*

Para la demostración observemos que si $M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$, entonces $m \leqslant f(x) \leqslant M$ y por el teorema 1, existen los puntos $\alpha \in [a, b]$ y $\beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Ahora el corolario analizado se deduce directamente del teorema 2 aplicándolo al segmento $[\alpha, \beta]$ si $\alpha \leqslant \beta$ o, respectivamente, al segmento $[\beta, \alpha]$ si $\beta < \alpha$.

De esta forma, *el conjunto de todos los valores de la función dada, continua sobre cierto segmento es también un segmento.*

Señalemos que la propiedad de las funciones continuas de tomar todos los valores intermedios es válida para cualquier intervalo (finito o infinito). Precisamente: si una función continua sobre cierto intervalo toma en dos de sus puntos a y b, y además $a < b$, dos valores cualesquiera, entonces toma cualquier valor intermedio. En realidad, por el teorema 2, la función analizada, a ciencia cierta, toma el valor indicado en algún punto del segmento $[a, b]$ que es una parte del intervalo inicial.

OBSERVACIÓN. Tanto en el teorema 1 como en el teorema 2 fue demostrada la existencia del punto sobre el segmento dado, en el cual el valor de la función continua analizada posee determinada propiedad (en el primer teorema en este punto se alcanza el valor extremal, en el segundo se toma el valor intermedio dado). No obstante, entre los métodos aplicados para la demostración de estas afirmaciones se tiene una diferencia sustancial. El método de demostración del teorema 2 da la posibilidad no sólo de demostrar en el caso general la existencia del punto indicado, sino en realidad hallarlo con cualquier grado de exactitud dado, para cada función

concreta: es necesario dividir el segmento en el cual se busca el punto, un número suficiente de veces por la mitad, eligiendo cada vez una mitad según la regla indicada en la demostración; los extremos del segmento obtenido serán los valores aproximados del punto indicado.

El método de demostración del teorema 1 no permite indicar un medio con ayuda del cual para cada función continua sobre el segmento sea posible hallar lós puntos en los cuales ésta toma sus valores extremales. Esto está condicionado por que la demostración de este teorema está basada en el teorema de Bolzano — Weierstrass que afirma sólo la posibilidad de extraer de cada sucesión acotada una subsucesión convergente. Un método concreto, o como se acostumbra decir, un *algoritmo* para la extracción de cualquier sucesión acotada una subsucesión convergente, no existe.

Observemos además, que en la utilización de cualquier algoritmo en la práctica es importante con qué rapidez éste nos lleva al objetivo. Desde este punto de vista, en la resolución aproximada de la ecuación $f(x) = 0$ comúnmente se aplica no el método de la división sucesiva del segmento por la mitad, sino otros algoritmos que nos llevan al objetivo más rápidamente (véase el Complemento al final del segundo tomo, § 60).

Problema 6. Demuéstrese que una función continua y periódica sobre todo el eje numérico diferente de una constante tiene un período mínimo. Cítese un ejemplo de función periódica definida sobre todo el eje numérico y diferente de una constante, que no tenga período mínimo.

6.3. FUNCIONES INVERSAS

Definición 2. *La función f definida sobre un conjunto numérico X se llama estrictamente creciente (estrictamente decreciente) si para dos números cualesquiera $x_1 \in X$ y $x_2 \in X$ tales que $x_1 < x_2$ se cumple la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) > f(x_2)$).*

Una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente se llama estrictamente monótona.

Si una función es estrictamente creciente (decreciente) sobre el conjunto X, entonces diremos también que crece (decrece) estrictamente sobre este conjunto.

Es evidente que una función estrictamente monótona (creciente, decreciente) es también simplemente monótona (respectivamente, creciente, decreciente), en el sentido de la definición 16 del p. 5.14.

Lema 1. *Supongamos que la función f crece (decrece) estrictamente sobre cierto conjunto $X \in R$ y sea Y el conjunto de sus valores. Entonces la función inversa f^{-1} (véase el p. 1.2*) es una función unívoca, estrictamente creciente (decreciente) sobre el conjunto Y.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para mayor exactitud, que la función f crece monótonamente sobre el conjunto X. Demostremos que la función inversa es unívoca.

Supongamos lo contrario. Supongamos que existe un punto $y \in Y$ tal que el conjunto $f^{-1}(y)$ contiene al menos dos puntos diferentes x_1 y x_2:

$$x_1 \in f^{-1}(y) \quad \text{y} \quad x_2 \in f^{-1}(y), \quad x_1 \neq x_2,$$

por consiguiente

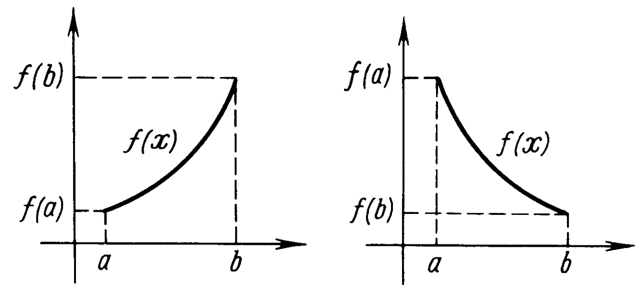


FIG. 30

$$f(x_1) = f(x_2). \tag{6.11}$$

Para dos números x_1 y x_2, $x_1 \neq x_2$ es válida una de las desigualdades: $x_1 < x_2$ ó $x_1 > x_2$; en el primer caso, por el crecimiento monótono estricto de la función f tenemos $f(x_1) < f(x_2)$ y en el segundo $f(x_1) > f(x_2)$, es decir, en ambos casos la igualdad (6.11) no se cumple. De esta forma, para cada $y \in Y$ el conjunto $f^{-1}(y)$ está compuesto exactamente por un punto, es decir, la función f^{-1} es unívoca.

Demostremos ahora que la función f^{-1} crece estrictamente sobre el conjunto Y. Sea

$$y_1 < y_2, \quad y_1 \in Y, \quad y_2 \in Y \tag{6.12}$$

y sean $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Por consiguiente $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Para dos números cualesquiera x_1 y x_2 es válida una de las tres relaciones: o bien $x_1 > x_2$, o bien $x_1 = x_2$, o bien $x_1 < x_2$. Si $x_1 > x_2$ ó $x_1 = x_2$, entonces respectivamente sería $y_1 > y_2$ (por el crecimiento mónotono estricto de la función f) o $y_1 = y_2$ (por la univocidad), lo cual estaría en contradicción con la desigualdad (6.12). De esta forma, de la desigualdad (6.12) se deduce que $x_1 < x_2$ y esto significa el crecimiento estricto de la función f^{-1} sobre el conjunto Y.

En el caso del decrecimiento estricto de la función f sobre el conjunto, la demostración se puede o bien realizar de forma análoga, o bien llevarla al caso ya analizado con el análisis de la función $-f$, ya que cuando la función f decrece estrictamente sobre el conjunto x, la función $-f$ crece estrictamente sobre este conjunto. □

Teorema 3. *Supongamos que la función f está definida, crece* (*decrece*) *estrictamente y es continua sobre el segmento* $[a, b]$, *entonces la función inversa* f^{-1} *está definida*, es unívoca, *crece* (*decrece*) *estrictamente y es continua sobre el segmento con extremos en los puntos* $f(a)$ *y* $f(b)$ (fig. 30).

DEMOSTRACIÓN. Realicemos la demostración del teorema para las funciones estrictamente crecientes. Sean $c = f(a)$, $d = f(b)$.

Mostremos que el dominio de la función inversa f^{-1} es el segmento $[c, d]$ o lo que es lo mismo, que $[c, d]$ es el conjunto de valores de la función f. En realidad, del crecimiento monótono de la función f se deduce que $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, es decir, que $f(x) \in [c, d]$ para cualquier $x \in [a, b]$. Por otro lado, cualquiera que sea $y \in [c, d]$, es decir, $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, por el teorema 2 existe un punto $x \in [a, b]$ tal que

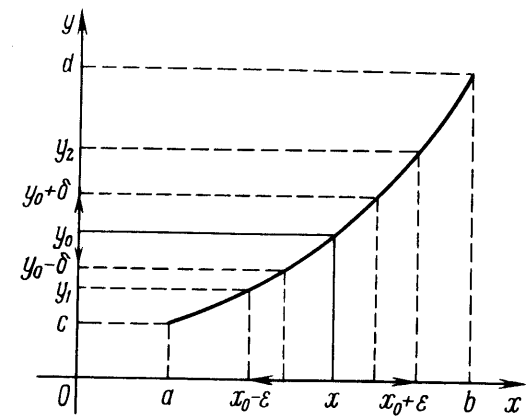


FIG. 31

$f(x) = y$. De esta forma, todos los valores de la función f dada están sobre el segmento $[c, d]$ y cada punto de este segmento es valor de la función f en cierto punto. Esto significa que el segmento $[c, d]$ es el conjunto de valores de la función f.

Señalemos que esta afirmación se deduce también del corolario 2 del teorema 2 si observamos que en el caso dado

$$c = \min_{[a,\, b]} f(x), \; d = \max_{[a,\, b]} f(x).$$

En virtud del lema, la función f^{-1} es unívoca y crece estrictamente sobre el segmento $[c, d]$.

Mostremos, finalmente, que la función f^{-1} es continua sobre $[c, d]$. Sean $y_0 \in [c, d]$ y $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Sea $c < y_0 < d$, es decir, y_0 es un punto interior del segmento $[c, d]$, entonces por el crecimiento estricto de la función f^{-1} también $a < x_0 < b$. Fijemos cierto $\varepsilon > 0$. Sin perder generalidad en los razonamientos futuros se puede considerar (¿por qué?), que ε es tal que

$$a \leqslant x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leqslant b. \tag{6.13}$$

Sean $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Entonces de la condición (6.13) por el crecimiento estricto de la función f se deduce que

$$c \leqslant y_1 < y_0 < y_2 \leqslant d.$$

Tomemos $\delta > 0$ de forma tal que $y_1 \leqslant y_0 - \delta < y_0 + \delta \leqslant y_2$ (fig. 31). Si ahora escogemos y de forma tal que $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, entonces con más razón

$$y_1 < y < y_2,$$

y por consiguiente, por el crecimiento estricto de la función f^{-1} es válida la desigualdad

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon.$$

10—6179

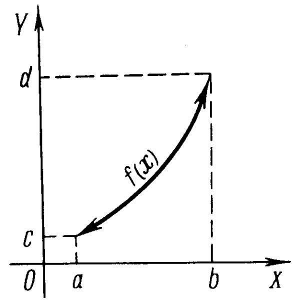


FIG. 32

De esta forma, para $\varepsilon > 0$ está indicado $\delta > 0$ tal que para todos los $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ se cumple la desigualdad

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

es decir, la función f^{-1} es continua en el punto y_0. Si ahora $y_0 = c$ o $y_0 = d$, entonces con razonamientos análogos se demuestra que la función f^{-1} es continua por la derecha en el punto c y continua por la izquierda en el punto d.

El teorema para las funciones estrictamente crecientes está demostrado completamente.

Recordemos que la función f decrece estrictamente si y sólo si la función $-f$ crece estrictamente, por lo que la validez del teorema para las funciones estrictamente decrecientes se deduce del caso analizado. □

Analicemos ahora el caso de una función definida sobre un intervalo.

Teorema 4. *Supongamos que la función f está definida, crece (decrece) estrictamente y es continua sobre el intervalo (a, b) (finito o infinito) y sean*

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Entonces la función inversa f^{-1} está definida, es unívoca, crece (decrece) estrictamente y es continua sobre el intervalo (finito o infinito) con extremos c y d (fig. 32).

Además, en el caso cuando $a = -\infty$ por $\lim\limits_{x \to -\infty+0} f(x)$ se entiende $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y en el caso $b = +\infty$ por el límite $\lim\limits_{x \to +\infty-0} f(x)$ el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos para mayor exactitud, que la función f crece estrictamente en el intervalo (a, b). Mostremos que en este caso el conjunto de sus valores es el intervalo (c, d). En efecto, por el teorema sobre los límites de las funciones monótonas (véase el p. 5.14) tenemos: $c = \inf\limits_{(a,b)} f$, $d = \sup\limits_{(a,b)} f$ y por consiguiente para cualquier $x \in (a, b)$ es válida la desigualdad $c \leqslant f(x) \leqslant d$. Es más para todos los $x \in (a, b)$ se cumplen también las desigualdades $f(x) \neq c$, $f(x) \neq d$. En realidad, si por ejemplo, existiera un x_0 tal que $a < x_0 < b$ y $f(x_0) = c$ (esto, evidentemente, es posible sólo cuando la cota inferior c es finita), entonces para $a < x < x_0$ se cumpliría la desigualdad $f(x) < f(x_0) = c$, lo cual estaría en contra-

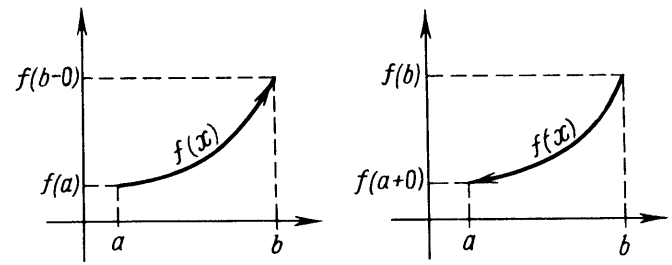


FIG. 33

dicción con que $c = \inf f$. Así pues, para todos los $x \in (a, b)$ se cumplen las desigualdades $c < f(x) < d$. Por otro lado, por cuanto $c = \inf\limits_{(a,b)} f$, $d = \sup\limits_{(a,b)} f$ entonces para cualquier y, $c < y < d$, existen $x_1 \in (a, b)$ y $x_2 \in (a, b)$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$ satisfacen las desigualdades

$$c < y_1 < y < y_2 < d.$$

De aquí se deduce que $x_1 < x_2$*) y por cuanto $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces según el teorema de Bolzano — Cauchy sobre los valores intermedios de las funciones continuas existe un punto $x \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x) = y$. De esta forma, para cualquier punto $y \in (c, d)$ existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$.

Por lo mismo, está demostrado que efectivamente, el conjunto de valores de la función f, o lo que es lo mismo, el conjunto de definición de la función inversa f^{-1} es el intervalo (c, d). El hecho de que la función f^{-1} es unívoca y crece estrictamente en el intervalo (c, d) se deduce del lema. Su continuidad se demuestra repitiendo al pie de la letra la demostración de la continuidad de la función inversa en el teorema anterior. Finalmente, como antes, el teorema para una función monótona estrictamente decreciente se deriva del teorema ya demostrado sobre la función monótona estrictamente creciente con ayuda del análisis de la función $-f$. □

OBSERVACIÓN. **De forma análoga se demuestra que si una función crece estrictamente** y es continua sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, o sobre $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, entonces la función inversa está definida, crece estrictamente y es continua sobre el intervalo semiabierto $[c, d)$, donde $c = f(a)$, $d = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ y respectivamente sobre $(c, d]$, donde $c = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $d = f(b)$ (fig. 33).

El caso de una función $f(x)$ estrictamente decreciente sobre un intervalo semiabierto se puede reducir al caso de una función estrictamente creciente analizando la función $-f(x)$.

Ejemplo. Para cualquier entero positivo n, la función potencial $y = x^n$ crece estrictamente y es continua en el semieje positivo $x \geqslant 0$.

---

*) El caso $x_1 \geqslant x_2$ no es posible, ya que entonces en virtud del crecimiento de la función f se cumpliría la desigualdad $y_1 \geqslant y_2$.

En efecto, si $0 \leqslant x_1 < x_2$, entonces, multiplicando n veces estas desigualdades, obtendremos $x_1^n < x_2^n$, es decir la función $y = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, crece monótona y estrictamente. Para la demostración de la continuidad de la función $y = x^n$ observemos que la función $y = f(x) = x$ es continua en cualquier punto $x_0 \in \boldsymbol{R}$. En efecto, en este caso $y_0 = f(x_0) = x_0$ por lo que $\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x$. Por consiguiente, si está dado $\varepsilon > 0$, entonces tomando $\delta = \varepsilon$ obtendremos que de la condición $|\Delta x| < \delta$ se deduce $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \varepsilon$. Esto significa la continuidad de la función $y = x$ en el punto $x = x_0$. La función $y = x^n$ es el producto de n funciones iguales $f(x) = x$ y por esto (véase el p. 5.10) también es continua en todos los puntos $x \in \boldsymbol{R}$.

De que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, evidentemente se deduce que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$ Además, en el cero la función $y = x^n$ es igual a cero. Por esto, de acuerdo con la observación al teorema 4, el conjunto de valores de la función potencial $y = x^n$ cuando $x \geqslant 0$ es el eje no negativo $y \geqslant 0$.

La función inversa a la función $y^n = x$ es la raíz de n-ésimo grado $\sqrt[n]{y}$, $n = 1, 2, \ldots$. Según el teorema 4, por las propiedades demostradas de la función potencial $y = x^n$, la raíz de n-ésimo grado $\sqrt[n]{y}$, $n = 1, 2, \ldots$, está definida para cualquier y no negativo.

Así pues, de los teoremas demostrados se deduce, en particular, *la existencia y la unicidad de la raíz positiva de n-ésimo grado de cualquier número positivo.*

OBSERVACIÓN. Del ejemplo analizado se deduce de nuevo que cualquier intervalo contiene números irracionales (véase el corolario 2 del teorema 8 en el p. 4.11*). Mostremos inicialmente que el número $\sqrt{2}$ (cuya existencia se deduce del ejemplo analizado anteriormente) es irracional. Supongamos lo contrario: supongamos que existe un número racional igual a la raíz cuadrada del dos. Escribamos este número en forma de fracción irreducible p/q (p y q son números naturales primos entre sí):

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Entonces $p^2 = 2q^2$ y por consiguiente el número p se divide por 2. En efecto, si p fuera impar, es decir, $p = 2k + 1$, $k \in N$, entonces $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2k + 1$ también sería impar y la igualdad $p^2 = 2q^2$ no tendría lugar. Así pues, $p = 2k$ pero entonces $4k^2 = 2q^2$, $q^2 = 2k^2$. De aquí, como antes se deduce que q es un número par. La paridad de los números $p = q$ contradice la suposición de que la fracción p/q es irreducible.

De lo demostrado, evidentemente se deduce que cualquier número del tipo $m\sqrt{2}/n$, donde m y n son números naturales, también es irracional. En realidad, si fuera racional $\frac{m\sqrt{2}}{n} = \frac{p}{q}$, entonces $\sqrt{2}$ resultaría ser un número racional: $\sqrt{2} = \frac{np}{mq}$. De aquí, a su vez, se deduce que cualquier intervalo contiene un número irracional (compárese con el p. 4.11*) y además, del tipo $m\sqrt{2}/n$, donde m y n son enteros.

En efecto, sea $0 \leqslant a < b$. Elijamos el natural n de forma tal que

$$\sqrt{2}/n < b - a$$

y después el natural m de forma tal que

$$\frac{(m-1)\sqrt{2}}{n} \leqslant a < \frac{m\sqrt{2}}{n}.$$

Entonces $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. Si $a < b \leqslant 0$, entonces por lo demostrado existen los enteros m y n tales que

$$0 \leqslant -b < \frac{m\sqrt{2}}{n} < -a;$$

y por esto

$$a < -\frac{m\sqrt{2}}{n} < b.$$

En el caso $a < 0 < b$, por lo demostrado existen los enteros m y n tales que $a < 0 < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. □

§ 7. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

7.1. POLINOMIOS Y FUNCIONES RACIONALES FRACCIONALES

Teorema 1. *Cualquier polinomio es continuo en cada punto.*

En realidad, la función $y = c$, donde c es una constante, es continua sobre todo el eje numérico, lo cual fue mostrado en el ejemplo 1 del p. 5.12.

Las funciones del tipo $y = x^n$ también son continuas para cada $n \in N$ dado, en cualquier punto $x \in \boldsymbol{R}$. Esto fue mostrado en el p. 6.3 (véase el ejemplo allí dado).

Cualquier polinomio se obtiene de las funciones del tipo $y = c$ e $y = x^n$ con ayuda de la suma y multiplicación y por esto es una función continua en cada punto (véase el p. 5.10).

Teorema 2. *Cualquier función racional $P(x)/Q(x)$ ($P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios) es continua en todos los puntos del eje numérico $\boldsymbol{R}$, en los cuales su denominador $Q(x)$ no se anula.*

Esto se deduce directamente de que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son continuos en cada punto $x \in \boldsymbol{R}$ y el cociente de funciones continuas también es continuo en todos los puntos del eje numérico en los cuales el denominador no se anula (véase el p. 5.10).

Este teorema es muy cómodo utilizarlo hallando los límites de las funciones racionales. Supongamos que se exige hallar $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$. Para esto es necesario inicialmente realizar, si por supuesto, esto es posible, la reducción de la función $P(x)/Q(x)$ por el factor $(x - x_0)^n$ con el mayor exponente posible $n \geqslant 1$. Si denotamos por $P_1(x)/Q_1(x)$ la fracción racional obtenida, entonces (véase el p. 5.4)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Si $Q_1(x_0) \neq 0$, entonces por el teorema 2, este límite es simplemente igual a $P_1(x_0)/Q_1(x_0)$; si $Q_1(x_0) = 0$ (y por lo tanto $P_1(x_0) \neq 0$, ya que en el caso contrario la fracción $P_1(x)/Q_1(x)$ seriá reducible por $(x - x_0)$), entonces este límite es igual a ∞.

Ejemplos. 1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x + 1} = -\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x - 1} = \infty$.

7.2. FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y POTENCIALES

Recordemos las propiedades de la potencia a^r, donde $a > 0$, r es número racional: $r = p/q$, p y q son enteros, $q \neq 0$.

1 °. Sea $r_1 < r_2$. Si $a > 1$, entonces $a^{r_1} < a^{r_2}$ y si $a < 1$ entonces $a^{r_1} > a^{r_2}$.

2 °. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.

3 °. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

4 °. $(ab)^r = a^r b^r$.

Aquí en todos casos r, r_1 y r_2 son números racionales. Recordemos además, que $a^0 = 1$. De la propiedad 2 ° se deduce que $a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1$, de donde

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \tag{7.1}$$

A continuación, de la propiedad 1° y de (7.1) se deduce que $a^r > 0$ para cualquier racional r. En efecto, si $r > 0$ y $a \geqslant 1$, entonces por 1° $a^r \geqslant a^0 = 1 > 0$. De aquí, por (7.1) tenemos

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0.$$

De forma análoga se demuestra la desigualdad $a^r > 0$ cuando $a < 1$.

Señalemos además, que para cualesquiera $a > 0$, $b > 0$ y $r \in Q$ tiene lugar

$$(ab)^r = a^r b^r.$$

Recordemos que (véase el ejemplo 3 en el p. 4.9)

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1, \quad a > 0, \tag{7.2}$$

y con ayuda de esto demostremos el siguiente lema.

Lema 1. *Para cualquier $a > 0$ tiene lugar la igualdad*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} a^x = 1. \tag{7.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a > 1$, para mayor exactitud. Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por (7.2) se encuentra un $n_0 \in N$ tal que

$$\left| a^{\frac{1}{n_0}} - 1 \right| < \varepsilon, \left| a^{-\frac{1}{n_0}} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Por consiguiente (véase la propiedad 1 ° de la potencia con exponentes racionales)

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon.$$

Si x es un número racional y $|x| < \dfrac{1}{n_0}$, es decir

$$-\frac{1}{n_0} < x < \frac{1}{n_0},$$

entonces por la misma propiedad 1 ° se cumplirá la desigualdad

$$a^{-\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n_0}}$$

y por esto, la desigualdad

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon.$$

De esta forma, si x es un número racional y $|x| < \delta$ donde $\delta = \dfrac{1}{n_0}$, entonces

$$|a^x - 1| < \varepsilon.$$

Esto significa la validez de la igualdad (7.3).

Si $0 < a < 1$, entonces el lema se demuestra análogamente, sólo es necesario utilizar que la función a^x, $0 < a < 1$, decrece estrictamente sobre el conjunto de los números racionales Q. En el caso $a = 1$ el lema es evidente. □

Definamos ahora la potencia a^x para cualquier real x y $a > 0$.

Definición 1. *Sean $a > 0$, x un número real arbitrario y Q el conjunto de todos los números racionales. Hagamos*

$$a^x = \lim_{\substack{r \to x \\ r \in Q}} a^r. \tag{7.5}$$

Esta definición tiene sentido, ya que cada punto del eje numérico es un punto de adherencia del conjunto de todos los números racionales (véase el corolario del lema 1 en el p. 4.9). Ella es correcta en el sentido de que el límite señalado existe, como esto será demostrado, para cualquier número real $x \in R$. En la demostración utilizaremos la definición del límite de una función según Heine (véase la definición 1 en el p. 5.4).

Sea $a > 0$, $x \in R$, $r_n \in Q$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = x$. Mostremos que la sucesión $\{a^{r_n}\}$ satisface las condiciones del criterio de Cauchy (véase el p. 3.7) y por lo tanto es una sucesión convergente. Para esto es necesario estimar la diferencia

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m} |a^{r_n - r_m} - 1|, \quad n \in N, \quad m \in N. \tag{7.6}$$

La sucesión $\{r_n\}$ converge y por consiguiente está acotada (véase el p. 3.4), por esto existe un número A que sin perder generalidad podemos considerar racional (¿por qué?), tal que $-A < r_n < A$. De aquí, en el caso $a \geqslant 1$ tenemos $a^{-A} \leqslant a^{r_n} \leqslant a^A$, y en el caso $a < 1$, respectivamente, $a^{-A} > a^{r_n} > a^A$, $n = 1, 2, \ldots$, por lo que para cualquier $a > 0$ existe un número B tal que

$$a^{r_n} \leqslant B, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.7}$$

($B = a^A$ cuando $a \geqslant 1$ y $B = a^{-A}$ cuando $a < 1$), es decir, la sucesión $\{a^{r_n}\}$ está acotada superiormente por el número B.

A continuación, por el lema, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para todos los racionales r que satisfacen la condición $|r| < \delta$ se sumple la desigualdad

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.8}$$

De la convergencia de la sucesión $\{r_n\}$, por el criterio de Cauchy (véase el p. 3.7), se deduce que para el $\delta > 0$ hallado existe un número n_δ tal que para todos los $n > n_\delta$ y $m > n_\delta$ se cumple la desigualdad $|r_n - r_m| < \delta$ y esto quiere decir, que por (7.8) se cumple la desigualdad

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{B}. \tag{7.9}$$

De (7.6), (7.7) y (7.9) se deriva que para todos los $n \geqslant n_\delta$ y $m \geqslant n_\delta$ es válida la desigualdad $|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon$, de donde, por el criterio de Cauchy, se deduce que la sucesión $\{a^{r_n}\}$ converge.

Así pues, para cualquier sucesión de números racionales r_n, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, la sucesión a^{r_n} converge. De aquí, por el lema 4 del p. 5.6, directamente se deduce la existencia del límite (7.5) de la función a^r, $r \in \boldsymbol{Q}$, en el punto $x \in \boldsymbol{R}$.

El hecho de que la definición de a^x es correcta está demostrado. □

La definición 1 es natural en el sentido de que en el caso cuando x es un número racional r, entonces la potencia a^x coincide con el valor a^r en el sentido anteriormente conocido. En realidad, si $x = r$ es un número racional, entonces en calidad de sucesión de los números racionales r_n, $n = 1, 2, \ldots$, convergente a $x = r$, se puede tomar $r_n = r$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces, por la definición 1

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^r = a^r. \tag{7.10}$$

Definición 2. *Sea dado cierto número $a > 0$. La función a^x definida para todos $x \in \boldsymbol{R}$ se llama función exponencial con base a.*

Por definición $1^x = 1$ para todos los reales x. Por esto el caso $a = 1$ no brinda ningún interés para su estudio y en el futuro no lo analizaremos.

Teorema 3. *La función exponencial a^x ($a > 0$) posee las siguientes propiedades.*

1°. *Cuando $a > 1$, crece estrictamente y cuando $a < 1$ decrece estrictamente sobre todo el eje numérico.*

Para cualesquiera reales x e y son válidas las igualdades:

2°. $a^x a^y = a^{x+y}$.

3°. $(a^x)^y = a^{xy}$.

4°. *La función a^x es continua sobre todo el eje numérico.*

5°. *El conjunto de los valores de la función a^x, $a > 0$, $a \neq 1$ es el conjunto de todos los números positivos.*

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 1°. Sean para mayor exactitud $a > 1$ y $x < y$. Existen (¿por qué?) los números racionales r' y r'' tales que $x < r' < r'' < y$. Escojamos cualesquiera sucesiones de números racionales $\{r_n'\}$ y $\{r_n''\}$ de forma tal que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n'' = y$ y $r_n' < r' < r'' < r_n''$ para todos los $n = 1, 2, \ldots$. Entonces

$$a^{r_n'} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r_n''}; \tag{7.11}$$

pasando al límite cuando $n \to \infty$ obtendremos

$$a^x \leqslant a^{r'} < a^{r''} \leqslant a^y. \tag{7.12}$$

De esta forma, si $x < y$, entonces $a^x < a^y$, lo que significa el crecimiento estricto de la función a^x cuando $a > 1$.

El caso $a < 1$ se analiza de forma análoga.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 2°. Sean $\{r_n'\}$ y $\{r_n''\}$ sucesiones de números racionales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n'' = y$ y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n' + r_n'') = x + y$ (véase el p. 3.9). Entonces, por la definición de función exponencial:

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n' + r_n''} = \lim_{n\to\infty}(a^{r_n'} a^{r_n''}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n'} \lim_{n\to\infty} a^{r_n''} = a^x a^y.$$

Antes de pasar a la demostración de las propiedades siguientes, observemos que de la propiedad 2° se deduce que para cualquier real x es válida la igualdad $a^x a^{-x} = a^0 = 1$, por eso $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 4° *). Ante todo señalemos que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in \boldsymbol{R}}} a^x = 1.$$

Esta igualdad, por la monotonía estricta ya establecida sobre todo el eje numérico, de la función a^x (propiedad 1°), se demuestra al pie de la letra como la igualdad (7.3) (véase el lema), sólo no se debe suponer que $x \in \boldsymbol{Q}$, sino analizar cualesquiera $x \in \boldsymbol{R}$.

Sea x dado, $x \in \boldsymbol{R}$, $y = a^x$ y

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Entonces, por lo dicho

$$\lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x} = 1$$

y por esto

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = a^x \lim_{\Delta x\to 0}(a^{\Delta x} - 1) = 0,$$

esto significa la continuidad de la función a^x en el punto x. □

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 3°. Sea inicialmente $y = p$ un número entero positivo, entonces aplicando p veces la propiedad 2° obtendremos

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdots a^x}_{p \text{ veces}} = a^{\overbrace{x + x + \cdots + x}^{p \text{ veces}}} = a^{xp}. \tag{7.13}$$

Sea a continuación $y = \dfrac{1}{q}$, donde q es un número entero positivo. Mostremos que $(a^x)^{1/q} = a^{x/q}$, es decir, que $a^{x/q}$ es la raíz de grado q-ésimo del número a^x. Pa-

*) La propiedad 3° será demostrada después de la demostración de la propiedad 4°.

ra esto, por la definición de raíz, es necesario demostrar que $(a^{\frac{x}{q}})^q = a^x$; esto se deduce de la igualdad (7.13).

Sea ahora $y = \frac{p}{q}$, p y q son naturales, entonces, por lo ya demostrado

$$(a^x)^{p/q} = [(a^x)^p]^{1/q} = (a^{xp})^{1/q} = a^{xp/q}.$$

Si $y = -\frac{p}{q}$, entonces

$$(a^x)^{-p/q} = \frac{1}{(a^x)^{p/q}} = \frac{1}{a^{xp/q}} = a^{-xp/q}.$$

Finalmente, es evidente que $(a^x)^0 = 1 = a^0$. De esta forma está demostrado que para cualquier real x y cualquier racional r

$$(a^x)^r = a^{xr}. \tag{7.14}$$

Supongamos ahora dado aún otro número real y. Analicemos una sucesión arbitraria $\{r_n\}$ de números racionales convergente a y. Entonces, por (7.14), para todos los $n = 1, 2, \dots$ tendremos

$$(a^x)^{r_n} = a^{xr_n}. \tag{7.15}$$

Por cuanto $\lim\limits_{n\to\infty} xr_n = xy$, entonces por la continuidad de la función a^x demostrada anteriormente

$$\lim_{n\to\infty} a^{xr_n} = a^{xy}. \tag{7.16}$$

Por otro lado, por la definición de la función exponencial

$$\lim_{n\to\infty} (a^x)^{r_n} = (a^x)^y. \tag{7.17}$$

Pasando al límite en la igualdad (7.15) cuando $n \to \infty$, de (7.16) y (7.17) obtendremos la propiedad analizada para cualesquiera $x, y \in \boldsymbol{R}$. □

De las propiedades 2° y 3° se deduce que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}, \quad a > 0, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

En efecto

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = (a^{-1})^x = a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \ \square$$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 5°. Sea de nuevo para mayor exactitud $a > 1$. Para demostrar que el conjunto de los valores de la función a^x es el conjunto de todos los números positivos, es decir, el intervalo infinito $(0, +\infty)$, en virtud de su continuidad y crecimiento estricto sobre todo el eje numérico, por el teorema 4 del p. 6.3, es suficiente mostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0. \tag{7.18}$$

Por cuanto, en virtud de la monotonía de la función a^x los límites (finitos o infinitos) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$ existen, entonces es suficiente demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a^{x'_n} = 0$$

para cualesquiera sucesiones dadas $x_n \to +\infty$, $x'_n \to -\infty$, por ejemplo, para las sucesiones $x_n = n$, $x'_n = -n$, $n = 1, 2, \dots$

Por suposición $a > 1$, es decir, $a = 1 + \alpha$, donde $\alpha > 0$. Por esto, de acuerdo con la desigualdad de Bernoulli (véase el lema en el p. 4.9)

$$a^n = (1 + \alpha)^n > n\alpha,$$

y ya que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha = +\infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

De aquí

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^n} = 0.$$

Con esto, la igualdad (7.18) cuando $a > 1$ está demostrada.

Si ahora $0 < a < 1$, entonces $b = \frac{1}{a} > 1$ y

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} b^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty} b^x} = +\infty.$$

OBSERVACIÓN 1. Por cuanto de todos los valores el conjunto de la función a^x, $a > 0$, $a \neq 1$, constituye el conjunto de todos los números reales positivos, entonces, en particular, para cualquier $x \in \boldsymbol{R}$ tiene lugar la desigualdad

$$a^x > 0.$$

OBSERVACIÓN 2. Si $a > 0$, $b > 0$, entonces para cualquier $x \in \boldsymbol{R}$ es válida la igualdad

$$(ab)^x = a^x b^x.$$

En efecto, si $r_n \to x$, $r_n \in \boldsymbol{Q}$, $n = 1, 2, \dots$, entonces

$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty} (ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} b^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^x b^x. \ \square$$

Ejercicio. Sean $a > 0$, $b > 0$. Demuéstrese que para cualquier $x \in \boldsymbol{R}$ tiene lugar la igualdad $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

OBSERVACIÓN 3. Si r es un número racional y $r > 0$, entonces $0^r = 0$ y por consiguiente, para cualquier número real $x > 0$ existe el límite

$$\lim_{\substack{r\to x\\ r\in \boldsymbol{Q}}} 0^r = 0.$$

Por esto, para $x > 0$ la definición (7.5) se puede extender al caso $a = 0$ y además tendrá lugar la igualdad

$$0^x = 0, \ x > 0.$$

Sea a un número positivo distinto de la unidad. De la matemática elemental es conocido que la operación inversa a la elevación a una potencia y que pone en correspondencia a un número dado $x > 0$ el número y tal que $a^y = x$ (claramente, si el y indicado existe), se llama determinación por logaritmos con base a. El número y se llama logaritmo de base a del número x y se denota por $\log_a x$. De esta forma, por definición

$$a^{\log_a x} = x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Cuando $a = e$ el logaritmo del número x se denota por $\ln x$ y se llama logaritmo natural del número x.

Definición 3. *La función que pone en correspondencia a cada número x su logaritmo $\log_a x$ con base a ($a > 0$, $a \neq 1$) si este logaritmo existe, se llama función logarítmica $y = \log_a x$.*

Teorema 4. *La función $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ está definida para todos los $x > 0$ y sobre este conjunto es una función estrictamente monótona (creciente cuando $a > 1$ y decreciente cuando $a < 1$) y continua. Ella tiene las siguientes propiedades*:

1 °) $\log_a x_1x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$;

2 °) $\log_a x^\alpha = \alpha\log_a x$, $x > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto el conjunto de los valores de la función a^x, $a > 0$, $a \neq 1$ es el conjunto de todos los números positivos $(0, +\infty)$, entonces este conjunto es el conjunto de definición de la función inversa, es decir, de la función $\log_a x$.

Con esto, en particular, está demostrada la existencia del logaritmo de cualquier número positivo. Las afirmaciones restantes del teorema 4 se deducen directamente del teorema 4 del p. 6.3 y del teorema 3 del presente párrafo.

Por ejemplo, mostremos cómo la propiedad 1 ° se deriva de las propiedades de la función exponencial indicadas en el teorema 3. Hagamos

$$y_1 = \log_a x_1, \quad y_2 = \log_a x_2,$$

por la definición de logaritmo esto significa que

$$x_1 = a^{y_1}, x_2 = a^{y_2}.$$

De aquí (véase la propiedad 1 ° de la función exponencial en el teorema 3), tenemos

$$x_1x_2 = a^{y_1}a^{y_2} = a^{y_1 + y_2},$$

y por consiguiente, de nuevo, por la definición de logaritmo

$$\log_a x_1x_2 = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2. \ \square$$

Definición 4. *Sea dado un número real α. La función x^α definida para todos los $x > 0$ se llama función potencial con exponente α.*

Teorema 5. *La función potencial a^α es continua para todos los $x > 0$.*

En efecto, de la definición de logaritmo tenemos $x = e^{\ln x}$, y por esto $x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$, es decir, x^α es la composición de la función exponencial e^u y la función logarítmica multiplicada por una constante: $u = \alpha\ln x$. Las funciones exponencial y logarítmica son continuas (véase los teoremas 3 y 4), por lo que en virtud del teorema de la continuidad de la composición de funciones continuas (véase el p. 5.2), la función x^α también es continua. $\square$

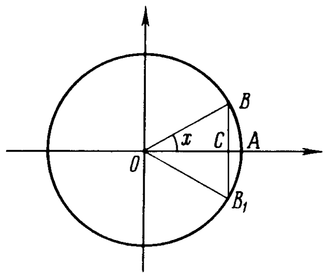


FIG. 34

En el análisis de la función $y = x^\alpha$ se suponía que $x > 0$, ya que cuando $x \leqslant 0$ la expresión x^α tiene sentido en la región de los números reales no para todos los α.

No obstante, si α es racional y x^α tiene sentido cuando $x < 0$ (por ejemplo, x^2, $\frac{1}{x^3}$, $\sqrt[5]{x}$), entonces la función $y = x^\alpha$ será para $\alpha > 0$ continua sobre todo el eje real y para $\alpha < 0$ sobre todo el eje real menos el punto $x = 0$.

En estos casos la función $y = x^\alpha$ también se llama potencial.

Cuando $x \neq 0$ esto se deduce directamente del teorema 5, ya que la función $y = x^\alpha$, si está definida también para todos los $x < 0$, será siempre par o impar y si una función par o impar es continua para $x > 0$, entonces es continua también para $x < 0$ (¿por qué?). Si en el punto $x = 0$ una función par o impar es continua por la derecha e igual a cero, entonces simplemente es continua en este punto (¿por qué?). Este caso tiene lugar cuando $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +0} x^\alpha = 0 = 0^\alpha,$$

ya que $x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$ y (véase el teorema 4) $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$ por lo que en este caso la función x^α es continua también cuando $x = 0$.

7.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Pasemos a la cuestión sobre la continuidad de las funciones trigonométricas. En este caso no daremos las definiciones analíticas estrictas de estas funciones (como fue hecho anteriormente con la función exponencial), sino que utilizamos su definición geométrica, conocida de la matemática elemental. En el futuro x siempre es un número real y por $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ sobrentenderemos las funciones trigonométricas correspondientes del ángulo cuya medida radial es igual a x.

Lema 2. *Para cualquier real x es válida la desigualdad*

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x|.$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos una circunferencia de radio R con centro en el punto O. Supongamos que el radio OB forma el ángulo x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, con el radio OA, y el radio OB_1 es simétrico al radio OB con respecto a OA (fig. 34).

Bajemos desde el punto B la perpendicular BC al radio OA. Entonces, $BC = R\,\text{sen}\,x$ y ya que $BC = CB_1$, tendremos $BB_1 = 2R\,\text{sen}\,x$. Como es conocido, la longitud del arco BAB_1 es igual a $2Rx$. La longitud del segmento que une dos puntos no sobrepasa la longitud del arco de circunferencia que une esos mismos puntos lo que significa $2R\,\text{sen}\,x \leqslant 2Rx$, es decir, $\text{sen}\,x \leqslant x$.

Si ahora $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$, entonces $0 < -x \leqslant \frac{\pi}{2}$ y por esto, según lo demostrado, $\text{sen}(-x) \leqslant -x$, pero en este caso $\text{sen}(-x) = |\text{sen}\,x|$ y $-x = |x|$, por consiguiente $|\text{sen}\,x| \leqslant |x|$. De esta forma, si $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, entonces $|\text{sen}\,x| \leqslant |x|$. Si $|x| > \frac{\pi}{2}$, entonces $|\text{sen}\,x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} < |x|$. □

Teorema 6. *Las funciones* $y = \text{sen}\,x$, $y = \cos x$ *son continuas sobre todo el eje numérico.*

Corolario. *Las funciones* $y = \text{tg}\,x$ *e* $y = \text{ctg}\,x$ *son continuas para todos los* x, *para los cuales* $\cos x$, *respectivamente* $\text{sen}\,x$, *no se anulan.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que $|\text{sen}\,\alpha| \leqslant 1$, $|\cos\alpha| \leqslant 1$, para cualquier α y por el lema $\left|\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|\Delta x|$, entonces

$$|\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}\,x| \leqslant 2\left|\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2}\right| \left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|,$$

$$|\cos(x + \Delta x) - \cos x| \leqslant 2\left|\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2}\right| \left|\text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant |\Delta x|.$$

De aquí se deduce que cuando $\Delta x \to 0$ los primeros miembros de la desigualdad también tienden a cero. Esto significa la continuidad de las funciones $\text{sen}\,x$ y $\cos x$.

La continuidad de $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$ y $\text{ctg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$ en los puntos en los cuales los denominadores no se anulan, se deduce de la continuidad de $\text{sen}\,x$ y $\cos x$ y del teorema sobre el cociente de funciones continuas (véase el p. 5.2).

Teorema 7. *Las funciones trigonométricas inversas* $\text{arcsen}\,x$, $\arccos x$, $\text{arctg}\,x$ *y* $\text{arcctg}\,x$ *son continuas en sus dominios.*

Esto se deduce directamente de los teoremas 3 y 4 del § 6 y de la continuidad y monotonía estricta de las funciones $\text{sen}\,x$ sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos(x)$ sobre el segmento $[0, \pi]$, $\text{tg}\,x$ sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y $\text{ctg}\,x$ sobre el intervalo $(0, \pi)$.

7.4. CONTINUIDAD DE FUNCIONES ELEMENTALES

La continuidad de las principales funciones elementales demostrada en este párrafo permite obtener también un teorema sobre la continuidad de funciones elementales arbitrarias.

Teorema 8. *Cualquier función elemental es continua en todos los puntos de su conjunto de definición.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición cualquier función elemental se obtiene de las principales funciones elementales con ayuda de un número finito de operaciones aritméticas y composiciones (véase el p. 5.3), por esto su continuidad sobre el conjunto de definición se deduce inmediatamente de la continuidad de las principales funciones elementales sobre los conjuntos de su definición (teoremas 1 — 7), de las propiedades de los límites de funciones, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las funciones (véase el p. 5.10) y de la continuidad de la composición de funciones continuas (véase el p. 5.16).

§ 8. COMPARACIÓN DE FUNCIONES. CÁLCULO DE LOS LÍMITES

8.1. ALGUNOS LÍMITES NOTABLES

En este punto se calcularán límites que en el futuro se encontrarán en repetidas ocasiones.

Lema 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1. \tag{8.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos el círculo de radio R con centro en el punto O. Supongamos que el radio OB forma el ángulo x, $0 < x < \pi/2$, con el radio OA. Unamos el punto A y el punto B con un segmento y bajemos una perpendicular desde el punto A hacia el radio OA hasta su intersección en el punto C con la prolongación del radio OB (fig. 35). Entonces el área del triángulo AOB es igual a $\frac{1}{2}R^2\,\text{sen}\,x$, el área del sector AOB es igual a $\frac{1}{2}R^2x$ y el área del triángulo AOC es igual a $\frac{1}{2}R^2\,\text{tg}\,x$. El triángulo AOB es una parte del sector AOB, el que a su vez es una parte del triángulo AOC; por esto,

$$\frac{1}{2}R^2\,\text{sen}\,x < \frac{1}{2}R^2x < \frac{1}{2}R^2\,\text{tg}\,x,$$

de donde

$$\text{sen}\,x < x < \text{tg}\,x,$$

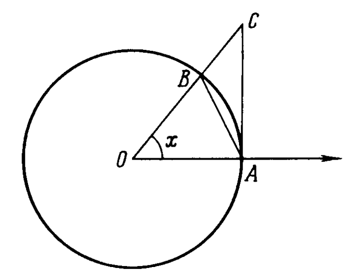


FIG. 35

por lo tanto,

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

o, sustituyendo las magnitudes por sus inversas

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \tag{8.2}$$

Observemos que por la paridad de las funciones $\cos x$ y $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ la desigualdad (8.2) es válida también cuando $\pi/2 < x < 0$.

Ya que la función $\cos x$ es continua y $\cos 0 = 1$, entonces de (8.2) cuando $x \to 0$ se deduce (véase el p. 5.10) la igualdad (8.1). □

Corolario 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \tag{8.3}$$

En realidad,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Corolario 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1. \tag{8.4}$$

La función $y = \operatorname{sen} x$ es estrictamente monótona y continua sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$, por esto, la función inversa $x = \operatorname{arcsen} y$ también es estrictamente monótona y continua sobre el segmento $[-1, 1]$. Ya que $\operatorname{sen} 0 = 0$ entonces

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y \to 0} x = \lim_{y \to 0} \operatorname{arcsen} x = 0.$$

Para calcular el límite (8.4), apliquemos la regla de cambio de variables para los límites de las funciones continuas (véase el teorema 6 en p. 5.16). Haciendo $x = \operatorname{sen} y$, tenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} y)}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{sen} y} = 1.$$

Corolario 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \tag{8.5}$$

Esta igualdad se obtiene de (8.3) análogamente a la anterior.

Lema 2.

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{8.6}$$

Anteriormente (véase el p. 4.5) fue demostrado que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{8.7}$$

donde $n = 1, 2, \ldots$.

De aquí, por el lema del p. 4.3 se deduce que para cualquier sucesión $\{n_k\}$ de números naturales, tal que

$$\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty \tag{8.8}$$

tenemos

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{8.9}$$

Sea ahora la sucesión $\{x_k\}$ tal que $\lim_{k \to \infty} x_k = +0$, es decir,

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0 \quad \text{y} \quad x_k > 0. \tag{8.10}$$

Mostremos que $\lim_{k \to \infty} (1 + x_k)^{1/x_k} = e$. En este caso, sin perder generalidad se puede considerar que $x_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$ (¿por qué?). Para cualquier x_k se encuentra un natural n_k tal que $n_k + 1 > \frac{1}{x_k} \geqslant n_k$, y por lo tanto $\frac{1}{n_k + 1} < x_k \leqslant \frac{1}{n_k}$, además por (8.10) $\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty$. Por esto tenemos:

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < (1 + x_k)^{1/x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}. \tag{8.11}$$

Notando que por (8.9)

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)} = \frac{\lim\limits_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{\lim\limits_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)} = e$$

y

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) = e$$

y al pasar al límite en la desigualdad (8.11), cuando $k \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{k \to \infty} (1 + x_k)^{1/x_k} = e. \tag{8.12}$$

Por cuanto $\{x_k\}$ es una sucesión arbitraria, que satisface las condiciones (8.10), entonces con esto está demostrado que

$$\lim_{x \to +0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{8.13}$$

Sea ahora la sucesión $\{x_k\}$ tal que $\lim_{k \to \infty} x_k = -0$, es decir,

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0, \quad x_k < 0. \tag{8.14}$$

Pongamos $y_k = -x_k$, entonces $y_k > 0$ y $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$, y sin perder generalidad se puede considerar que $y_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Entonces

$$\lim_{k\to\infty}(1 + x_k)^{1/x_k} = \lim_{k\to\infty}(1 - y_k)^{-1/y_k} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1 - y_k}\right)^{1/y_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{y_k}{1 - y_k}\right)^{1/y_k} = \lim_{k\to\infty}(1 + z_k)^{1/z_k + 1},$$

donde

$$z_k = \frac{y_k}{1 - y_k} > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} z_k = 0$$

y por la igualdad (8.13) ya demostrada

$$\lim_{k\to\infty}(1 + x_k)^{1/x_k} = \lim_{k\to\infty}(1 + z_k)^{1/z_k}\cdot \lim_{k\to\infty}(1 + z_k) = e.$$

Pero $\{x_k\}$ era una sucesión arbitraria que satisfacía las condiciones (8.14), por eso

$$\lim_{x\to -0}(1 + x)^{1/x} = e. \tag{8.15}$$

De esta manera, la función $(1 + x)^{1/x}$, $x \neq 0$, tiene en el punto 0 límites por la derecha y por la izquierda iguales al mismo número e. Por eso, existe su límite por ambos lados cuando $x \to 0$ también igual a e (véase el p. 5.9). □

Corolario 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1 + x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \tag{8.16}$$

y, en particular, cuando $a = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

En realidad, utilizando la continuidad de la función logarítmica (véase el teorema 4 del § 7), la continuidad de la composición de funciones (véase p. 5.16) y la igualdad (8.6) obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1 + x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1 + x)^{1/x} = \log_a \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Corolario 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \tag{8.17}$$

En particular, si $a = e$ entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{8.18}$$

La función $y = a^x - 1$ es estrictamente monótona y continua en todo el eje real, por eso la función inversa $x = \dfrac{\ln(1 + y)}{\ln a}$ es también estrictamente monótona y

continua cuando $y > -1$. Por cuanto, para $x = 0$ tenemos también $y = 0$, entonces las notaciones $x \to 0$ e $y \to 0$ son equivalentes (véase la observación 4 al final del p. 5.16). Utilizaremos para el cálculo del límite (8.17) la regla del cambio de variables (véase el teorema 6 en el p. 5.16). Poniendo $x = \dfrac{\ln(1 + y)}{\ln a}$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1 + y)} = \ln a\,\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1 + y)}{y}} = \ln a.$$

8.2. COMPARACIÓN DE FUNCIONES

Como ya sabemos, la suma, la diferencia y el producto de funciones infinitamente pequeñas son también funciones infinitamente pequeñas: no podemos, sin embargo, decir esto de su cociente; la división de un infinitésimo por otro puede llevarnos a los casos más diversos, como se muestra en los ejemplos dados a continuación de las funciones infinitamente pequeñas $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ para $x \to 0$.

Sean, por ejemplo, $\alpha(x) = x$ y $\beta(x) = x^2$, entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty.$$

Si $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 2$, y si $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}$, entonces el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ no existe.

Todas las funciones que se analizarán en el futuro en este párrafo se suponen definidas sobre cierto conjunto $X \subset \boldsymbol{R}$, por x_0 se entiende o bien un número: $x_0 \in \boldsymbol{R}$ o bien uno de los infinitos ∞, $+\infty$ o $-\infty$. En el caso cuando x_0 es un número, entonces x_0 es un punto adherente del conjunto X y, además, tiene sentido sólo en el caso cuando x_0 sea un punto de acumulación del conjunto X. Además, puede ocurrir que $x_0 \in X$ o $x_0 \notin X$. Lo último, a ciencia cierta, tendrá lugar si la función analizada tiene algún límite infinito en el punto x_0. Si el punto x_0 es uno de los infinitos ∞, $+\infty$, $-\infty$, entonces, el conjunto X se supone no acotado, superior o inferiormente respectivamente.

Nos ocuparemos de la cuestión de la comparación de funciones en un entorno del punto x_0, en particular, de la comparación de las funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, estos casos son fundamentales.

Definición 1. *Si para las funciones $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ y $g\colon X \to \boldsymbol{R}$ existen un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 y la constante $x > 0$ tales que para todas las $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad*

$$|f(x)| \leqslant c\,|g(x)|,$$

entonces la función f se llama acotada en comparación con la función g sobre $U(x_0) \cap X$ y en este caso se escribe

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0$$

(se lee: $f(x)$ es O grande de $g(x)$ cuando x tiende a x_0).

Subrayemos que la escritura $x \to x_0$ tiene aquí otro sentido que el usual: sólo señala que la propiedad analizada tiene lugar únicamente en un entorno del punto x_0; aquí no se habla de ningún límite.

Lema 3. *Si* $f(x) = \varphi(x)g(x)$, $x \in X$, *y existe el límite finito*

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = k,$$

entonces

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0.$$

DEMOSTRACIÓN. De la existencia del límite finito $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = k$ por la propiedad 1 ° de límites de funciones del p. 5.10 se deduce la existencia de un entorno $U(x_0)$ del punto x_0, tal que la función φ es acotada sobre $U(x_0) \cap X$, es decir, se tiene una constante $c > 0$ tal que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad $|\varphi(x)| \leqslant c$ y, por consiguiente, la desigualdad $|f(x)| = |\varphi(x)|\,|g(x)| \leqslant c\,|g(x)|$. Esto significa que $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$. □

Ejemplos. 1. $\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ cuando $x \to 0$, ya que $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ cuando $|x| \leqslant 1$.

2. $\frac{1}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\frac{1}{x^2} \leqslant \left|\frac{1}{x}\right|$ cuando $|x| \geqslant 1$.

La escritura

$$f(x) = O(1),\quad x \to x_0$$

significa que la función f está acotada en cierto entorno del punto x_0, por ejemplo, $\frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = O(1)$ cuando $x \to 0$, ya que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = 2$ y, por lo tanto, la función $\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ está acotada en un entorno del punto $x = 0$.

Definición 2. *Si las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *son tales que* $f = O(g)$ *y* $g = O(f)$ *cuando* $x \to x_0$, *entonces se llaman funciones de un mismo grado cuando* $x \to x_0$; *esto se escribe de la forma*

$$f(x) \asymp g(x),\quad x \to x_0.$$

Este concepto tiene mayor contenido en el caso cuando las funciones f y g son o bien infinitamente pequeñas o bien infinitamente grandes cuando $x \to x_0$. Por ejemplo, las funciones $\alpha = x$ y $\beta = x\,(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x})$ son infinitesimales del mismo orden cuando $x \to 0$, ya que

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{1}{\left|2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|} \leqslant \frac{1}{2 - \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|} \leqslant 1,$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leqslant 2 + \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leqslant 3.$$

Lema 4. *Si existe el límite finito* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, *entonces* $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$.

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto, cuando $x \to x_0$, está definido el límite de la fracción $\frac{f(x)}{g(x)}$, entonces existe un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los puntos $x \in U(x_0) \cap X$ se cumple la desigualdad $g(x) \neq 0$. Para estos x pongamos

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Entonces $f(x) = \varphi(x)\,g(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = k$. Por consiguiente, según el lema 3, $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

Por cuanto $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, entonces existe también un entorno $U(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ tendremos $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ (véase la propiedad 2 ° de los límites de las funciones en el p. 5.10), y por consiguiente $f(x) \neq 0$. Para $x \in U(x_0) \cap X$ pongamos $\psi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, entonces $g(x) = \psi(x)f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \frac{1}{k}$. Por ésto, da nuevo, poe el lema 3, $g(x) = O(f(x))$, $x \to x_0$. □

En calidad de ejemplo tomemos las funciones $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = \operatorname{sen} x^2$. Tenemos $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{3} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = \frac{1}{3}$ (véase (8.1)), por eso según el lema 4, las funciones $3x^2$ y $\operatorname{sen} x^2$ son de un mismo orden cuando $x \to 0$.

Definición 3. *Las funciones* $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ *y* $g\colon X \to \boldsymbol{R}$ *se llaman equivalentes cuando* $x \to x_0$ *si existe un entorno* $U = U(x_0)$ *del punto* x_0 *y la función* $\varphi\colon U \cap X \to \boldsymbol{R}$ *tales que para todos los* $x \in U \cap X$ *tiene lugar la igualdad*

$$f(x) = \varphi(x)g(x) \tag{8.20}$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{8.21}$$

Si se cumple la propiedad (8.21), entonces se encuentra un entorno $U' = U(x_0)$ del punto x_0 tal que para $x \in U' \cap X$ se cumple la desigualdad $\varphi(x) \neq 0$ (véase la propiedad 2 de los límites de las funciones en el p. 5.10). Suponiendo $\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, $x \in U' \cap X$ vemos que las condiciones (8.20) y (8.21) son equivalentes a las condiciones

$$g(x) = \psi(x)f(x),\quad x \in U' \cap X, \tag{8.20'}$$

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1. \tag{8.21'}$$

De esta forma, si las funciones f y g son equivalentes cuando $x \to x_0$, entonces las funciones g y f también son equivalentes cuando $x \to x_0$, es decir, la equivalencia de dos funciones posee la propiedad de simetría.

Señalemos que, como fácilmente se ve, la propiedad de las funciones de ser funciones de un mismo orden también es una propiedad simétrica, y la propiedad de una función de ser "O grande" con respecto a otra ya no es simétrica.

Ejemplos. 1. $\dfrac{x^2}{1+x^4} \sim x^2$ cuando $x \to 0$. En realidad, suponiendo $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ obtenemos

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \varphi(x)x^2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^4} = 1.$$

2. $\dfrac{x^6}{1+x^4} \sim x^2$ cuando $x \to \infty$. En realidad, si $\varphi(x) = \dfrac{x^4}{1+x^4}$, entonces

$$\frac{x^6}{1+x^4} = \varphi(x)x^2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1.$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ equivalentes cuando $x \to x_0$ se llaman también *asintóticamente iguales* cuando $x \to x_0$. La *igualdad asintótica* (equivalencia) de las funciones, se denota por el símbolo $\sim$:

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0. \tag{8.22}$$

De lo dicho anteriormente se deduce que si $f \sim g$ cuando $x \to x_0$, entonces $g \sim f$ cuando $x \to x_0$.

Supongamos que existe un entorno punzado $\mathring{U}(x_0)$ del punto x_0 tal que para todos los $x \in \mathring{U}(x_0) \cap X$ se cumplen las desigualdades $f(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ y en el caso de $x_0 \in X$ las funciones f y g, además, son continuas en el punto x_0. Entonces, las condiciones (8.20) y (8.21) son equivalentes a la relación

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in \mathring{U}(x_0)\cap X}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

y, por consiguiente, a la relación

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

En efecto, está claro que estas relaciones, suponiendo que las funciones f y g no se anulan, se deducen inmediatamente de las condiciones (8.20) y (8.21). Viceversa, si ellas se cumplen, entonces es suficiente hacer $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \mathring{U}(x_0) \cap X$ y si $x_0 \in X$, entonces también $\varphi(x_0) = 1$; entonces, evidentemente, para la función φ se cumplen las condiciones (8.20) y (8.21).

Si

$$f \sim g \text{ y } g \sim h \quad \text{cuando} \quad x \to x_0, \tag{8.23}$$

entonces

$$f \sim h \quad \text{cuando} \quad x \to x_0. \tag{8.24}$$

En realidad, de las condiciones (8.23) se deduce que existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto x_0 y las funciones $\varphi\colon U \cap X \to \boldsymbol{R}$ y $\psi\colon U \cap X \to \boldsymbol{R}$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ tienen lugar las igualdades

$$f(x) = \varphi(x)g(x),\ g(x) = \varphi(x)h(x)$$

y

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \psi(x) = 1,$$

por esto

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x)h(x),$$

donde $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)\psi(x) = 1$, es decir, se cumple la igualdad asintótica (8.24).

De los resultados del p. 8.1 se deduce que cuando $x \to 0$ es válida la siguiente equivalencia de infinitésimos:

$$x \sim \operatorname{sen} x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

De esta equivalencia se deducen también relaciones más generales que enunciaremos en forma de lema independiente.

Lema 4. *Si la función $u(x)$ es tal que*

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0, \tag{8.25}$$

entonces, cuando $x \to x_0$

$$u(x) \sim \operatorname{sen} u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim$$
$$\sim \ln[1+u(x)] \sim e^{u(x)} - 1. \tag{8.26}$$

DEMOSTRACIÓN. Mostremos, por ejemplo, que

$$\operatorname{sen} u(x) \sim u(x) \quad \text{para} \quad x \to x_0, \tag{8.27}$$

donde $u\colon X \to \boldsymbol{R}$ y $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$. Definamos para todos los $x \in X$ la función $\varphi\colon X \to \boldsymbol{R}$ de la siguiente forma

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)} & \text{si} \quad u(x) \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad u(x) = 0 \end{cases} \tag{8.28}$$

y mostremos que

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{8.29}$$

Para esto, dividamos el conjunto X en dos subconjuntos

$$X_1 = \{x \in X\colon u(x) \neq 0\} \quad \text{y} \quad X_2 = \{x \in X\colon u(x) = 0\}. \tag{8.30}$$

Sean inicialmente los conjuntos X_1 y X_2 no vacíos y x_0 un punto de adherencia finito o infinitamente alejado de cada uno de ellos.

La función $\dfrac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)}$ está definida sobre el conjunto X_1 y por el teorema sobre el límite de la función compuesta (véase el teorema 7 en el p. 5.17) tenemos

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in X_1}} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} u(x)}{u(x)} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

Aquí fue utilizada una de las propiedades de los límites de las funciones: si la función $\left(\text{en el caso dado } \frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)$ tiene límite para $u \to u_0$ por algún conjunto (en el caso dado para $u \to 0$ por el eje numérico reducido en el punto $u = 0$), entonces tiene ese mismo límite para $u = u_0$ por cualquier subconjunto (véase el lema 6 en el p. 5.9).

Sobre el conjunto X_2 la función φ es idénticamente igual a 1, por lo que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} 1 = 1.$$

De esta forma, sobre cada uno de los conjuntos X_1 y X_2 la función φ cuando $x \to x_0$ tiene un mismo límite igual a 1, y ya que

$$X = X_1 \cup X_2,$$

entonces, cuando $x \to x_0$ tiene ese mismo límite por todo el conjunto X (véase el lema 7 en el p. 5.9), es decir, en el caso analizado la igualdad (8.29) está demostrada.

Si uno de los conjuntos X_1 o X_2 resulta ser vacío o el punto x_0 no es punto de adherencia (finito o infinitamente alejado) de uno de ellos, entonces la igualdad (8.29) también tendrá lugar ya que en estos casos el límite de la función φ cuando $x \to x_0$ por el conjunto X, se reduce al límite por uno de los conjuntos X_1 o X_2, para los cuales la igualdad del límite analizado a la unidad por ellos ya está establecida.

Así pues, la igualdad (8.29) está demostrada y ya que de (8.28) se deduce que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ tiene lugar la relación $\operatorname{sen} u(x) = \varphi(x)u(x)$, entonces está demostrada la validez de la igualdad asintótica (8.27).

Análogamente se demuestran las fórmulas asintóticas restantes de (8.26). □

Definición 4. *Sea $f: X \to \mathbf{R}$ y $\alpha: X \to \mathbf{R}$. La función α* se llama infinitesimal *cuando $x \to x_0$ en comparación con la función f si existen el entorno $U(x_0)$ del punto x_0 y la función infinitesimal para $x \to x_0$, $\varepsilon: X \to \mathbf{R}$:*

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0, \tag{8.31}$$

que para todos los $x \in U(x_0) \cap X$ tiene lugar

$$\alpha(x) = \varepsilon(x)f(x). \tag{8.32}$$

Si la función α es infinitesimal para $x \to x_0$ en comparación con la función f, entonces se escribe

$$\alpha(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0$$

(se lee "$\alpha(x)$ es o pequeña de la función $f(x)$ cuando $x \to x_0$").

Según esta definición, por ejemplo, la escritura "$\alpha(x) = o(1), x \to x_0$" significa simplemente que la función α es infinitesimal cuando $x \to x_0$.

Si existe tal entorno reducido $\mathring{U} = \mathring{U}(x_0)$ del punto x_0, que para todos los puntos $x \in \mathring{U} \cap X$ se cumple la desigualdad $f(x) \neq 0$, y en el caso de $x_0 \in X$ las funciones α y f además son continuas en el punto x_0, entonces las condiciones (8.31) — (8.32) son equivalentes a la condición

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathring{U} \cap X}} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = 0. \tag{8.33}$$

En realidad, al suponer que la función f es diferente de cero, la condición (8.33) se deriva directamente de (8.31) — (8.32). Viceversa, si se cumple (8.33), entonces es suficiente hacer

$$\varepsilon(x) = \frac{\alpha(x)}{f(x)}, \quad x \in \mathring{U} \cap X$$

y si $x_0 \in X$, entonces, además, $\varepsilon(o) = 0$, para que se cumplan condiciones (8.31) — (8.32).

En el caso, cuando $f(x)$ es infinitesimal para $x \to x_0$, entonces se dice que $\alpha = o(f)$ para $x \to x_0$ es *infinitesimal de orden superior que f.*

Por ejemplo, $x^3 = o(\operatorname{sen} x^2)$ cuando $x \to 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x^2} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

De igual forma, $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ y $x = o(x^2)$ cuando $x \to \infty$.

Señalemos que si $f = o(g)$ para $x \to x_0$, entonces, como antes, $f = O(g)$ para $x \to x_0$. En realidad, sea $f = \varepsilon g$ donde $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon = 0$. Entonces, la función $\varepsilon = \varepsilon(x)$ está acotada sobre la intersección del conjunto X con cierto entorno $U(x_0)$ del punto x_0 (véase el p. 5.10): $|\varepsilon(x)| \leqslant c$ y, por consiguiente, $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$, $x \in X \cap U(x_0)$. Esto significa que $f = O(g)$, $x \to x_0$.

Reuniendo los conceptos fundamentales introducidos en este punto obtendremos: supongamos que existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto x_0 y una función $\varphi: U \cap X \to \mathbf{R}$ tales que

$$f(x) = \varphi(x)g(x),$$

entonces

si la función $\varphi(x)$ está acotada sobre U, entonces $f(x) = O(g(x))$;

si $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, entonces $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$;

si $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, entonces $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$;

Ejercicio 1. Sea $\beta = O(\alpha^2)$ cuando $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$. Demuéstrese que entonces, $\beta = o(\alpha)$ cuando $x \to x_0$.

Utilizando las igualdades con los símbolos O y o se debe tener en cuenta que éstas no son igualdades en el sentido común de la palabra. Así pues, si

$$\alpha_1 = o(\beta) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0, \quad \alpha_2 = o(\beta) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0,$$

entonces sería erróneo hacer de aquí la conclusión de que $\alpha_1 = \alpha_2$ como en las igualdades comunes. Por ejemplo, $x^3 = o(x)$ y $x^2 = o(x)$, cuando $x \to 0$, pero $x^2 \neq x^3$.

De forma análoga, si

$$f + O(f) = g + O(f) \quad \text{cuando} \quad x \to x_0,$$

entonces sería erróneo hacer la conclusión de que $f = g$.

Es que un mismo símbolo $O(f)$ o $o(f)$ puede denotar distintas funciones concretas. Esta circunstancia está relacionada con que al definir los símbolos $O(f)$ y $o(f)$ introducimos clases completas de funciones, que presentan determinadas propiedades (la clase de funciones acotadas en un entorno del punto x_0 en comparación con la función f y la clase de funciones infinitamente pequeñas en comparación con $f(x)$ cuando $x \to x_0$) y sería correcto escribir no $\alpha = O(f)$ y $\alpha = o(f)$ sino $\alpha \in O(f)$ y $\alpha \in o(f)$. Sin embargo, esto nos llevaría a una mayor complicación del cálculo con las fórmulas, en las cuales se encuentran los símbolos O y o. Por eso, conservaremos la notación anterior $\alpha = O(f)$ y $\alpha = o(f)$ pero vamos a leer siempre estas igualdades en correspondencia con las definiciones dadas anteriormente, sólo en un sentido, de izquierda a derecha (si, claro está, no se acuerda otra cosa). Por ejemplo, la notación

$$\alpha = o(f), \quad x \to x_0$$

significa que la función α es infinitesimal en comparación con la función f cuando $x \to x_0$, pero de ningún modo que cualquier infinitésimo en comparación con f es igual a α.

En calidad de ejemplo para la utilización de estos símbolos demostremos la igualdad

$$o(cf) = o(f), \tag{8.34}$$

donde c es una constante.

Por lo dicho, es necesario mostrar que si $g = o(cf)$, entonces $g = o(f)$. Efectivamente, si $g = o(cf)$, entonces $g = \varepsilon cf$ donde $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Hagamos $\varepsilon_1 = c\varepsilon$, entonces $g = \varepsilon_1 f$, donde, evidentemente, $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ y esto significa que $g = o(f)$. □

En conclusión señalemos que lo dicho sobre la utilización de los símbolos o y O no excluye, claro está, que fórmulas aisladas con estos símbolos puedan resultar válidas no sólo cuando se les lee de izquierda a derecha sino también de derecha a izquierda, así que la fórmula (8.34) para $c \neq 0$ es válida cuando se lee de derecha a izquierda.

Ejercicios. Demuéstrese que si α es infinitesimal para $x \to x_0$, entonces para $x \to x_0$:

2. $o(\alpha^2) = o(\alpha)$,
3. $o(\alpha)\cdot O(\alpha) = o(\alpha^2)$,
4. $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$,
5. $\alpha\cdot o(\alpha) = o(\alpha^2)$,
6. $o(\alpha + \alpha^2) = o(\alpha)$,
7. $o^2(\alpha) = o(\alpha^2)$,
8. $cO(\alpha) + o(\alpha) = O(\alpha)$ (c es una constante),
9. $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$,
10. $O(O(\alpha)) = O(\alpha)$,
11. Si $|\beta| \leqslant o(\alpha)$ entonces $\beta = o(\alpha)$.
12. Sean $\lim\limits_{t \to b} f(t) = a$ y $f(t) \neq a$ para $t \neq b$ en un entorno del punto $t = b$. Demuéstrese que entonces, si $\varphi(x) = o[\psi(x)]$ cuando $x \to a$, entonces $\varphi[f(t)] = o\{\psi[f(t)]\}$ cuando $t \to b$; y si $\varphi(x) = O[\psi(x)]$ cuando $x \to a$, entonces $\varphi[f(t)] = O\{\psi[f(t)]\}$ cuando $t \to b$.

8.3. FUNCIONES EQUIVALENTES

Si la función $f(x)$ se sustituye con algún objetivo por $g(x)$, entonces la diferencia $f(x) - g(x)$ se llama *error absoluto* y la razón $\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x)}$, *error relativo* de la sustitución dada. Si se estudia el comportamiento de la función $f(x)$ cuando $x \to x_0$, entonces a menudo es conveniente sustituirla por una función $g(x)$ tal que 1) la función $g(x)$ en un sentido determinado es más sencilla que la función $f(x)$; 2) el error absoluto tiende a cero cuando $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0.$$

En este caso se dice que $g(x)$ aproxima la función $f(x)$ en las cercanías del punto x_0. Por ejemplo, todas las funciones infinitamente pequeñas f y g para $x \to x_0$ tienen esta propiedad.

Más adelante será demostrado que entre todas ellas sólo las que son equivalentes entre sí

$$g(x) \sim f(x), \quad x \to x_0,$$

tienen la propiedad de que no sólo el error absoluto $f(x) - g(x)$, sino también el relativo $\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x)}$, tiende a cero, cuando $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0.$$

En este sentido, las funciones equivalentes a la función dada la aproximan mejor que otras funciones.

Por ejemplo, las funciones x, $\dfrac{1}{2}x$, $2x$, $10x$ son infinitesimales cuando $x \to 0$ al igual que $\operatorname{sen} x$ y, por eso, los errores absolutos, cuando se cambia $\operatorname{sen} x$ de cada una de ellas, tienden a cero cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x - x) = \lim_{x \to 0} \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x - 2x) = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x - 10x) = 0.$$

Pero sólo una de todas las funciones mencionadas anteriormente, precisamente $g(x) = x$ tiene la propiedad de que el error relativo en la sustitución $\operatorname{sen} x$ de esta función tiende a cero cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = 0.$$

La tendencia del error relativo $\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ a cero cuando $x \to x_0$, se puede escribir usando el símbolo "o pequeña"

$$f(x) - g(x) = o(f(x)), \quad x \to x_0.$$

Enunciemos la propiedad característica mencionada de las funciones equivalentes en forma de teorema.

Teorema 1. *Para que las funciones $f: X \to R$ y $g: X \to R$ sean equivalentes cuando $x \to x_0$, es necesario y suficiente que para $x \to x_0$ se cumpla la condición*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)). \tag{8.35}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $f \sim g$ cuando $x \to x_0$, entonces por la definición 3, existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto x_0 y una función $\varphi: U \cap X \to R$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ se cumplen las condiciones

$$f(x) = \varphi(x)g(x)$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1.$$

Entonces

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = [\varphi(x) - 1]g(x) = \varepsilon(x)g(x),$$

donde $\varepsilon(x) = \varphi(x) - 1$, $x \in U \cap X$, y por esto $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Esto significa que $\varepsilon(x)g(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, es decir, tiene lugar (8.35). □

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Si se cumple la condición (8.35), entonces, por la definición 4, existen un entorno $U = U(x_0)$ del punto x_0 y una función $\varepsilon: U \cap X \to R$ tales que para todos los $x \in U \cap X$ se cumplen las condiciones

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x0} \varepsilon(x) = 0;$$

entonces $f(x) = [1 + \varepsilon(x)]\,g(x) = \varphi(x)g(x)$, donde $\varphi(x) = 1 + \varepsilon(x)$, $x \in U \cap X$, y por esto $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$. Esto significa que $f \sim g$, $x \to x_0$. □

Ejemplo. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \to 0$.

En efecto, por el teorema 1, es suficiente mostrar que $\operatorname{ctg} x \sim \dfrac{1}{x}$, $x \to 0$. Esto se deduce inmediatamente de (8.3):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

En el caso cuando existe un entorno reducido $\mathring{U}(x_0)$ del punto x_0 tal que las funciones $f: X \to R$ y $g: X \to R$ no se anulan sobre la intersección $\mathring{U}(x_0) \cap X$, el teorema 1 es equivalente a la afirmación de que las funciones f y g son equivalentes cuando $x \to x_0$ si y sólo si el error relativo $\dfrac{f(x) - g(x)}{f(x)}$ $\left(\text{o por la simetría del concepto de equivalencia de las funciones, la relación } \dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)}\right)$ tiende a cero cuando $x \to x_0$.

Corolario. *Sea* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$. *Entonces* $g \sim cf$ y $g(x) = cf(x) + o(f(x))$ *cuando* $x \to x_0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = c \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{cf(x)} = 1$, y por tanto $g \sim cf$ cuando $x \to x_0$. De aquí, por el teorema 1 tenemos $g(x) = cf(x) + o(cf(x))$, de donde (véase el final del p. 8.2) $g(x) = cf(x) + o(f(x))$, $x \to x_0$. □

Teorema 2. *Sean $f(x) \sim f_1(x)$ y $g(x) \sim g_1(x)$ cuando $x \to x_0$. Entonces, si existe*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \tag{8.36}$$

entonces existe también $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *y además*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{8.37}$$

DEMOSTRACIÓN. Las condiciones $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$ cuando $x \to x_0$ significan que existen un entorno $U = U(x_0)$ y las funciones $\varphi: U \cap X \to R$ y $\psi: U \cap X \to R$ tales que cuando $x \in U \cap X$ tienen lugar las igualdades

$$f(x) = \varphi(x)f_1(x),$$
$$g(x) = \psi(x)g_1(x)$$

y

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1.$$

Además, por cuanto existe el límite (8.36), entonces se encuentra un entorno $U_1 = U(x_0)$ del punto x_0 tal que la función $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ estará definida sobre el conjunto $U_1 \cap X$ y, por consiguiente, por doquier, sobre este conjunto se cumplirá la desigualdad $g_1(x) \neq 0$. Por cuando $g(x) = \psi(x)g_1(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = 1$, entonces se encuentra un entorno $U_2 = U(x_0) \subset U_1$ del punto x_0 tal que para todos los $x \in U_2 \cap X$ se cumplirá la desigualdad $\psi(x) \neq 0$ (véase la propiedad 2 de los límites de las funciones en el p. 5.10), y por lo tanto, la desigualdad $g(x) \neq 0$. Por esto, la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ está definida sobre el conjunto $U_2 \cap X$ y tiene sentido hablar de su límite en el punto x_0.

Ahora tenemos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)f_1(x)}{\psi(x)g_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \ \square$$

Por cuanto ambos miembros de la igualdad (8.37) son equivalentes, entonces, del teorema demostrado se deduce que el límite del primer miembro existe si y sólo si existe el límite de segundo miembro y en el caso de que existan ambos, coinciden. Esto hace muy cómodo la utilización del teorema 2 en la práctica: se le puede utilizar para el cálculo de límites, sin saber a priori si existe o no el límite en cuestión.

Ejercicio 13. Demuéstrese la igualdad (8.34) en el caso, cuando el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es igual a ∞, $+\infty$ o $-\infty$.

8.4. MÉTODO DE EXTRACCIÓN DE LA PARTE PRINCIPAL DE LA FUNCIÓN Y SU APLICACIÓN EN EL CÁLCULO DE LÍMITES

Sean dadas las funciones $\alpha: X \to R$ y $\beta: X \to R$. Si la función β para todos los $x \in X$ es representable en la forma

$$\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)), \quad x \to x_0$$

entonces, la función α se llama *parte principal* de la función β cuando $x \to x_0$.

Ejemplos. 1. La parte principal de la función $\operatorname{sen} x$ cuando $x \to 0$ es igual a x, ya que $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ cuando $x \to 0$.

2. Si $P_n(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$, entonces la función a_nx^n es la parte principal del polinomio $P_n(x)$ cuando $x \to \infty$, ya que $P_n(x) = a_nx^n + o(x^n)$ cuando $x \to \infty$.

Si está dada la función $\beta: X \to R$, entonces su parte principal cuando $x \to x_0$ no se define unívocamente: según el teorema 1, cualquier función α equivalente a β cuando $x \to x_0$ es su parte principal cuando $x \to x_0$. Por ejemplo, sea $\beta = x + x^2 + x^3$. Por cuanto, por un lado $x^2 + x^3 = o(x)$ cuando $x \to 0$, entonces $\beta = x + o(x)$ cuando $x \to 0$, y por otro lado, $x^3 = o(x + x^2)$, cuando $x \to 0$, entonces $\beta = x + x^2 + o(x + x^2)$ cuando $x \to 0$. En el primer caso como parte principal puede considerarse $\alpha = x$, en el segundo $\alpha = x + x^2$. No obstante, si nos planteamos un tipo determinado de parte principal, entonces, si se elige acertadamente, se puede lograr que la parte principal del tipo señalado quedará definida unívocamente.

En particular, es válido el siguiente lema.

Lema 5. *Sean $X \subset R$, $x_0 \in R$ y x_0 un punto de acumulación del conjunto X. Si la función $\beta: X \to R$ posee para $x \to x_0$ una parte principal del tipo $A(x - x_0)^k$, $A \neq 0$, donde A y k son constantes, entonces entre todas sus partes principales de tal tipo ella está definida de modo único.*

En realidad, sean para $x \to x_0$

$$\beta(x) = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), \quad A \neq 0,$$
y
$$\beta(x) = A_1(x - x_0)^{k_1} + o((x - x_0)^{k_1}), \quad A \neq 0.$$

Entonces $\beta(x) = A(x - x_0)^k$, $\beta(x) \sim A_1(x - x_0)^{k_1}$ cuando $x \to x_0$, $x \in X$. Por esto $A(x - x_0)^k \sim A_1(x - x_0)^{k_1}$, $x \to x_0$, $x \in X$, es decir

$$1 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \frac{A(x - x_0)^k}{A_1(x - x_0)^{k_1}} = \frac{A}{A_1} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} (x - x_0)^{k - k_1}$$

que es válido sólo en el caso de $A = A_1$ y $k = k_1$. □

El concepto de parte principal de una función es útil, en el estudio de infinitésimos e infinitos y con mucho éxito se utiliza en la resolución de variados problemas del análisis matemático. A menudo se logra sustituir un infinitésimo de tipo complejo analítico por una función más sencilla (en cierto sentido), en el entorno del punto dado, salvo los infinitésimos de orden superior. Por ejemplo, si $\beta(x)$ se logra presentar de la forma $\beta(x) = A(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, esto significa, que salvo los infinitésimos de orden superior que $(x - x_0)^k$ cuando $x \to x_0$ el infinitésimo $\beta(x)$ se comporta en el entorno del punto x_0 como la función potencial $A(x - x_0)^k$.

Mostremos en los ejemplos. cómo el método de extracción de la parte principal de los infinitésimos se aplica en el cálculo de los límites de las funciones. En este proceso serán ampliamente utilizadas las relaciones de equivalencia obtenidas en (8.26).

Supongamos es exige hallar el límite (significa demostrar también que existe)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \operatorname{arcsen} 3x - 5x^3}{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5}.$$

Utilizando la equivalencia demostrada anteriormente (véase (8.26)) $\ln(1 + u) \sim u$ cuando $u \to 0$ tenemos $\ln(1 + x + x^2) \sim x + x^2$ cuando $x \to 0$, por eso (véase el teorema 1) $\ln(1 + x + x^2) = x + x^2 + o(x + x^2)$. Sin embargo, $o(x + x^2) = o(x)$ (¿por qué?) y $x^2 = o(x)$ cuando $x \to 0$, por lo tanto

$$\ln(1 + x + x^2) = x + o(x) \text{ cuando } x \to 0.$$

Más adelante, $\operatorname{arcsen} 3x \sim 3x$ y como consecuencia de esto

$$\operatorname{arcsen} 3x = 3x + o(3x) = 3x + o(x).$$

Es evidente también que

$$5x^3 = o(x).$$

De la igualdad asintótica $\operatorname{sen} 2x \sim 2x$ obtenemos

$$\operatorname{sen} 2x = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$$

de $\operatorname{tg}^2 x \sim x^2$ tendremos

$$\operatorname{tg}^2 x = x^2 + o(x^2) = o(x)$$

y de $(e^x - 1)^5 \sim x^5$ de forma análoga

$$(e^x - 1)^5 = x^5 + o(x^5) = o(x).$$

Todas estas relaciones se cumplen cuando $x \to 0$. Ahora tenemos

$$\ln(1 + x + x^2) + \operatorname{arcsen} 3x - 5x^3 =$$
$$= x + o(x) + 3x + o(x) - o(x) = 4x + o(x),$$
$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5 = 2x + o(x) + o(x) = 2x + o(x),$$

por eso

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) + \operatorname{arcsen} 3x - 5x^3}{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^5} = \lim_{x \to 0} \frac{4x + o(x)}{2x + o(x)}.$$

Pero $4x + o(x) \sim 4x$ y $2x + o(x) \sim 2x$ cuando $x \to 0$ y por lo tanto, por el teorema 2,

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x + o(x)}{2x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{2x} = 2.$$

De esta manera, el límite buscado existe y es igual a 2.

En el cálculo de límite de funciones con ayuda del método de extracción de la parte principal se debe tener en cuenta que en los casos no estudiados en el p. 8.3, no se pueden sustituir en general, los infinitésimos por sus equivalentes. Así, por ejemplo, al buscar el límite de la expresión $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$ sería un error sustituir la función $\operatorname{sen} x$ por la función x equivalente cuando $x \to 0$. El método natural de resolución de problemas semejantes será dado en 13.4.

Para la búsqueda de límites del tipo $u(x)^{v(x)}$ es conveniente hallar el límite de sus logaritmos. Veamos un ejemplo semejante. Hallemos el límite $\lim\limits_{x \to 0} \cos^{1/x^2} 2x$. Observando que

$$\cos^{1/x^2} 2x = e^{\ln \cos^{1/x^2} 2x} \tag{8.38}$$

vemos que debemos calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - \operatorname{sen}^2 2x)}{x^2}.$$

Ya que

$$\ln(1 - \operatorname{sen}^2 2x) \sim -\operatorname{sen}^2 2x \sim -(2x)^2 = -4x^2,$$

entonces de aquí, por el teorema 2 de este párrafo, tenemos

$$\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - \operatorname{sen}^2 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{x^2} = -2;$$

de esta forma

$$\lim_{x \to 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x = -2.$$

Por la continuidad de la función exponencial de (8.38) tenemos

$$\lim_{x \to 0} \cos^{1/x^2} 2x = e^{\lim\limits_{x \to 0} \ln \cos^{1/x^2} 2x} = \frac{1}{e^2}.$$

El método de cálculo de los límites con ayuda de la extracción de la parte principal de una función es muy cómodo, sencillo y, además, un método bastante general. Algunas dificultades en su aplicación están relacionadas, por ahora, con que todavía no hay un método suficientemente general de extracción de la parte principal de la función. Esta dificultad será eliminada más adelante (véase el § 13).

Ejercicios. Calcúlense los límites:

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsen 2x - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 + \ln(1 + 3x)}$.

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)}$.

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $(a, b > 0;\ a, b \neq 1)$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1 + e^{\alpha x})}{\ln(1 + e^{\beta x})}$. $(\alpha > 0, \beta > 0)$.

19. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$. *Indicación*. Es útil hacer la sustitución $x = \dfrac{\pi}{4} - y$.

20. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^x$.

22. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{ctg}^2 x$.

23. $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} a}\right)^{1/(x - a)}$.

§ 9. DERIVADA Y DIFERENCIAL

9.1. DEFINICIÓN DE DERIVADA

Definición 4. *Sea la función $y = f(x)$ definida en cierto entorno del punto $x_0 \in \mathbf{R}$ y sea x un punto arbitrario de este entorno. Si la relación*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tiene límite cuando $x \to x_0$, entonces este límite se llama derivada de la función f en el punto x_0 o, lo que es lo mismo, para $x = x_0$ y se denota por $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{9.1}$$

Si introducimos la notación $x - x_0 = \Delta x$, entonces la definición (9.1) se escribe en la forma

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Suponiendo $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, omitiendo las notaciones del argumento y denotando la derivada sencillamente por y' obtenemos otra notación de la definición de derivada:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Si para algún valor de x_0 existen los límites

$$\text{o bien } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty, \text{ o bien } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty,$$
$$\text{o bien } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

entonces se dice que cuando $x = x_0$ existe la *derivada infinita*, respectivamente, *derivada infinita de signo determinado* igual a $+\infty$ o $-\infty$.

En el futuro, por la expresión "la función tiene derivada" entenderemos siempre la existencia de derivada finita, si no se acuerda lo contrario.

Definición 2. *Si la función f está definida en algún entorno a la derecha (o a la izquierda) del punto x_0 y existe el límite finito o infinito (de determinado signo)*

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

entonces se denomina respectivamente derivada finita o infinita a la derecha (izquierda) de la función f en el punto x_0 y se denota por $f'_+(x_0)$ (o $f'_-(x_0)$).

Las derivadas a la derecha y a la izquierda se llaman derivadas unilaterales.

Del teorema sobre los límites unilaterales (véase el p. 4.5) se deduce que la función $f(x)$, definida en un entorno del punto x_0 tiene derivada $f'(x_0)$ si y sólo si $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ existen y $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. En este caso, $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Si la función $f(x)$ está definida sobre cierto intervalo, y en cada uno de sus puntos existe la derivada (por derivada en un extremo, que pertenece al intervalo, naturalmente se entiende la derivada utilateral correspondiente), entonces la derivada, evidentemente, es también una función definida sobre el intervalo dado, y se le denota por $f'(x)$. Si $y = f(x)$, entonces en lugar de $f'(x_0)$ se escribe también $y'|_{x = x_0}$.

El cálculo de la derivada de una función se llama *derivación*.

Ejemplos. 1. $y = c$ (c es una constante).

Ya que $\Delta y = c - c = 0$, entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ y de esta forma

$$c' = 0.$$

2. $y = \operatorname{sen} x$. Tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2},$$

por eso

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

De esta forma

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

3. $y = \cos x$. Ya que

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2},$$

entonces tendremos

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\operatorname{sen} x.$$

De esta forma

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

4. $y = a^x$. Tenemos $\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x(a^x - 1)$ y por eso

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

de aquí, por la fórmula (8.17) obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

De esta forma $(a^x)' = a^x \ln a$ y, en particular,

$$(e^x)' = e^x.$$

La última igualdad demuestra que el número e tiene una notable propiedad: *la función exponencial con base e tiene derivada que coincide con la misma función.* Con esto se explica que en el análisis matemático en calidad de base de las potencias y de base de los logaritmos se utiliza preferentemente el número e. Esto es muy cómodo, ya que simplifica los cálculos.

5. $y = x^n$, n es un número natural. Utilizando la regla de elevación del binomio a una potencia, hallamos

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n,$$

de donde, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}.$$

Ya que cuando $\Delta x \to 0$ todos los sumandos de la parte derecha que contienen al factor Δx a una potencia con exponente natural, tienden a cero, entonces $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$; de esta forma

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Más adelante veremos que esta fórmula es válida cuando n es un número real arbitrario.

9.2. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

Definición 3. *La función $y = f(x)$, definida en cierto entorno $U(x_0)$ del punto $x_0 \in R$ se llama diferenciable cuando $x = x_0$, si su incremento en este punto, es decir,*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad x_0 + \Delta x \in U(x_0),$$

es representable en la forma

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \tag{9.2}$$

donde A es una constante), y*

$$\alpha(\Delta x) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

La función lineal $A\Delta x$ (de la variable Δx) se llama diferencial de la función f en el punto x_0 y se designa por $df(x_0)$, o, más brevemente, por dy.

De esta forma

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{9.3}$$

$$dy = A\Delta x. \tag{9.4}$$

Dicho de otra forma, la diferenciabilidad de la función f en el punto x_0 significa que la función

*) Para un x_0 dado la constante A es cierto número, que no depende de Δx; naturalmente, cuando varía el punto x_0, el número A en general varía.

$$\alpha(\Delta x) = \Delta y - A\Delta x, \quad x_0 + \Delta x \in U(x_0),$$

es tal que

$$\alpha(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0;$$

además, ya que $\alpha(0) = 0$, entonces el valor de la función $\varepsilon(\Delta x)$ para $\Delta x = 0$ no se determina a base de la igualdad $\alpha(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, es decir, la función $\varepsilon(\Delta x)$ está definida sólo en el entorno reducido $\overset{\circ}{U}(x_0)$ del punto x_0, y, por lo tanto, el límite $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x)$ se entiende en el sentido del límite por este entorno reducido $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

Es evidente, que es válida también la afirmación inversa, si para $\Delta x \neq 0$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, el incremento Δy de la función f en el punto x_0 es representable en la forma

$$\Delta y = A\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0,$$

entonces la función f será diferenciable en el punto x_0. En realidad, si en este caso hacemos

$$\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \varepsilon(\Delta x)\Delta x & \text{cuando} \quad \Delta x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad \Delta x = 0, \end{cases}$$

entonces es evidente que la igualdad (9.2) se cumplirá para todos los Δx tales que $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$.

Señalemos que la diferencial $dy = A\Delta x$ como cualquier función lineal, está definida para cualquier valor Δx: $-\infty < \Delta x < +\infty$, mientras que el incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, naturalmente, se puede analizar sólo para tales Δx para los cuales $x_0 + \Delta x$ pertenece al dominio de la función f.

Si $A \neq 0$, es decir, si $dy \not\equiv 0$, entonces la diferenciabilidad de la función en el punto x_0 significa que salvo los infnitésimos de orden superior que el incremento del argumento Δx, el incremento de la función Δy es una función lineal de Δx. Utilizando la terminología del p. 8.4, se puede decir que la parte principal del incremento de la función Δy en el punto x_0 es una función lineal con respecto a Δx; además, el incremento Δy y la diferencial dy son infinitésimos equivalentes cuando $\Delta x \to 0$ (véase el p. 8.3).

Si, además, $A = 0$, es decir, $dy \equiv 0$, entonces $\Delta y = o(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$. De esta forma, cuando $A = 0$, el incremento Δy es un infinitésimo de orden superior a Δx cuando $\Delta x \to 0$.

Para mayor simetría de la notación de la diferencial, el incremento Δx lo denotan por dx y lo llaman diferencial de la variable independiente. De esta forma, la diferencial se puede escribir en la forma

$$dy = Adx.$$

Ejemplo. Hallemos la diferencial de la función $y = x^3$. En este caso,

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la parte principal lineal de la expresión que está a la derecha, es igual a $3x^2\Delta x$, por lo que $dy = 3x^2dx$.

Sea $f(x_0) = y_0$. Sustituyendo en (9.3) los valores $\Delta y = f(x) - y_0$, $\Delta x = x - x_0$, $dy = A(x - x_0)$ obtenemos

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0. \tag{9.5}$$

Así, si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto x_0, entonces salvo los infinitésimos de orden superior a $x - x_0$ en la cercanía de x_0, es igual a la función lineal; dicho de otro modo, en este caso, la función f en el entorno del punto x_0 se comporta "casi como una función lineal"

$$y_0 + A(x - x_0),$$

con la particularidad de que el error en la sustitución de la función f por esta función lineal será tanto menor, cuanto menor sea la diferencia $x - x_0$ y más aún, la relación de este error por la diferencia $x - x_0$ tiende a cero cuando $x \to x_0$.

Si la función f es diferenciable en cada punto de un intervalo, su diferencial es una función de dos variables: la variable del punto x y la variable dx:

$$dy = A(x)dx.$$

Aclaremos, ahora, la relación entre diferenciabilidad en el punto y existencia de la derivada en el mismo punto.

Teorema 1. *Para que la función f sea diferenciable en un punto x_0, es necesario y suficiente que tenga en este punto derivada y, además,*

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{9.6}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea la función f diferenciable en el punto x_0, es decir, $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. Entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Por eso la derivada $f'(x_0)$ existe y es igual a A. De aquí $dy = f'(x_0)dx$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que existe la derivada $f'(x_0)$, es decir, existe el límite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$$

donde $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$ y para $\Delta x \neq 0$.

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x. \tag{9.7}$$

Ya que $\varepsilon(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$ el hecho de que se cumpla la igualdad (9.7) significa la diferenciabilidad de la función f en el punto x_0. □

Subrayemos que en el teorema 1 se habla de la derivada finita.

De esta forma *la diferenciabilidad* de la función $f(x)$ en el punto x_0 *es equivalente a la existencia* en este punto *de la derivada finita* $f'(x_0)$.

De lo demostrado se deduce que el coeficiente A, que aparece en la definición de la diferencial (véase (9.4)), se determina unívocamente, precisamente $A = f'(x_0)$; de esta forma también *la diferencial de la función en el punto dado se determina unívocamente*. Esto, además, se deriva también del lema del p. 8.4 sobre la unicidad de la parte principal del tipo $A(x - x_0)^k$ de una función infinitesimal.

De la fórmula (9.6) hallamos $y' = \dfrac{dy}{dx}$. El segundo miembro es una fracción, cuyo numerador es la diferencial de la función y el denominador, la diferencial del argumento.

La fórmula (9.6) permite hallar las diferenciales de las funciones, si sus derivadas son conocidas. Así, por ejemplo, utilizando las derivadas halladas en el p. 9.1, obtenemos:

$$dc = 0 \quad (c \text{ es una constante}), \quad d\cos x = -\operatorname{sen} x\,dx,$$
$$d\operatorname{sen} x = \cos x\,dx, \quad da^x = a^x \ln a\,dx,$$

en particular, $de^x = e^x dx$

$$dx^n = nx^{n-1}dx \quad (n \text{ es un número natural}).$$

Como conclusión aclaremos la relación entre la diferenciabilidad y la continuidad en un punto dado.

Teorema 2. *Si la función f es diferenciable en un punto, entonces es continua en este punto.*

Corolario. *Si la función en algún punto tiene derivada, entonces es continua en este punto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f diferenciable en el punto x_0, es decir, en este punto $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ cuando $\Delta x \to 0$. Entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$$

lo que significa la continuidad de la función f cuando $x = x_0$. □

El corolario se deriva directamente de los teoremas 1 y 2.

Prestemos atención a que si la función tiene en el punto derivada infinita, entonces puede ser discontinua en ese punto.

Ejercicio 1. Constrúyase un ejemplo de función que tenga en algún punto derivada infinita y sea discontinua en ese punto.

Observemos que la afirmación inversa al teorema 2, no es cierta, es decir, de la continuidad de la función f en el punto dado no se deduce su diferenciabilidad, o, lo que es equivalente (véase el teorema 1), la existencia de la derivada en este punto.

Citemos ejemplos que reafirmen esto.

1. La función $f(x) = |x|$, evidentemente es continua en el punto $x = 0$ (como en todos los demás), pero no tiene derivada en este punto.

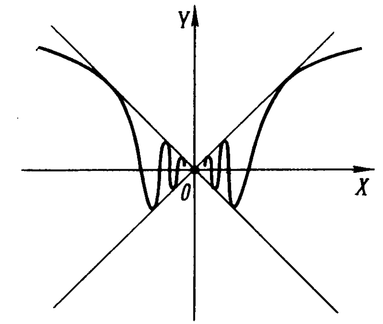


FIG. 36

En realidad, cuando $x \geq 0$ tenemos $y = |x| = x$, por eso para el punto $x_0 = 0$ obtendremos $\Delta y = \Delta x$. Por lo tanto

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

De forma análoga, cuando $x \leq 0$ tenemos $y = |x| = -x$, por eso para el punto $x_0 = 0$ en este caso obtendremos $\Delta y = -\Delta x$. Por lo tanto

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Con esto queda demostrado que la función $f(x) = |x|$ no tiene derivada cuando $x = 0$, sin embargo, en este punto existen las derivadas tanto por la derecha como por la izquierda.

Señalemos, además, que cuando $x > 0$, tiene lugar la igualdad $(|x|)' = x' = 1$, y cuando $x < 0$, respectivamente, $(|x|)' = (-x)' = -1$; por eso, para cualquier $x \neq 0$ es válida la fórmula

$$|x|' = \operatorname{sign} x.$$

El ejemplo siguiente muestra que una función puede no tener ninguna derivada unilateral en un punto de continuidad.

2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{cuando} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = 0. \end{cases}$$

(fig. 36). Entonces, en el punto $x = 0$ tenemos $\Delta y = \Delta x \operatorname{sen} \dfrac{1}{\Delta x}$ de donde $|\Delta y| \leq |\Delta x|$ y, por eso, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, es decir, la función analizada es continua cuando $x = 0$. Simultáneamente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{sen} \dfrac{1}{\Delta x}$, y por cuanto $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ no tiene en el punto $x = 0$ límite por la derecha, ni por la izquierda (véase el ejemplo 2 en el p. 4.4), entonces para la función $f(x)$ no existen las derivadas unilaterales cuando $x = 0$.

Ejercicio 2. Introdúzcase el concepto de diferenciabilidad de una función por la derecha (por la izquierda) en un punto dado y demuéstrese que la diferenciabilidad por la derecha (por la izquierda) en un punto dado es equivalente a la existencia, en este punto, de la derivada por la derecha (por la izquierda).

Si la función f tiene derivada en cada punto de cierto intervalo (es diferenciable en cada punto de ese intervalo), entonces se dice que la función f *tiene derivada*, o que ella es *diferenciable sobre el intervalo* indicado.

9.3. SENTIDO GEOMÉTRICO DE LA DERIVADA Y LA DIFERENCIAL

Los conceptos de derivada y de diferencial de una función en un punto dado están relacionados con el concepto de la tangente a la gráfica de la función en este punto. Para aclarar esta relación, definiremos ante todo la tangente.

Sea la función $y = f(x)$ definida sobre el intervalo (a, b) y continua en el punto $x_0 \in (a, b)$. Sean $y_0 = f(x_0)$, $M_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Tracemos la secante M_0M (fig. 37). Ella tiene la ecuación

$$y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0, \tag{9.8}$$

donde

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.9}$$

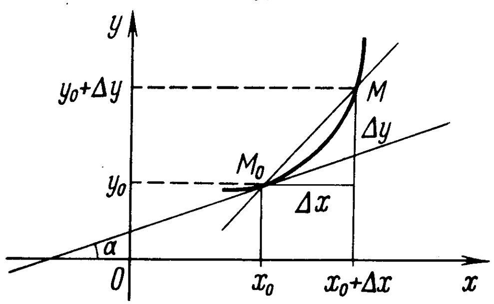
Mostremos que cuando $\Delta x \to 0$ la distancia $|M_0M|$ desde el punto M_0 hasta el punto M tiende a cero (en este caso se dice que el punto M tiende al punto M_0 y se escribe $M \to M_0$). En realidad, por la continuidad de la función f, cuando $x = x_0$, tenemos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Por lo tanto, cuando $\Delta x \to 0$

$$|M_0M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0.$$

Definición 4. *Si existe el límite finito* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = k_0$, *entonces la recta, cuya ecuación*

$$y = k_0(x - x_0) + y_0, \tag{9.10}$$

FIG. 37



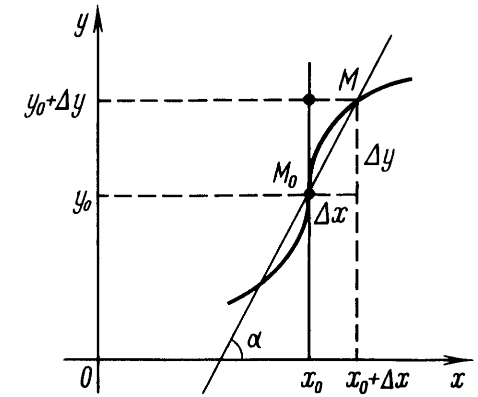


FIG. 38

se obtiene de la ecuación $y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0$ *cuando* $\Delta x \to t$ *(fig. 37), se llama tangente (oblicua) a la gráfica de la función f en el punto* (x_0, y_0).

Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$, *entonces la recta (fig. 38) cuya ecuación*

$$x = x_0 \tag{9.11}$$

se obtiene para $\Delta x \to 0$ *de la ecuación de la secante escrita de la forma* $\frac{y}{k(\Delta x)} = x - x_0 + \frac{y_0}{k(\Delta x)}$, *se llama tangente (vertical) a la gráfica de la función f en el punto* (x_0, y_0).

Las rectas (9.10) en el caso del límite finito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x)$ y (9.11) en el caso, cuando este límite es infinito, se llaman *posiciones límite de la recta* (9.8). Por esto, la definición de tangente dada anteriormente con relación a la gráfica de la función se puede parafrasear de la siguiente forma.

La posición límite de la secante M_0M *cuando* $\Delta x \to 0$ *o, lo que es lo mismo, cuando* $M \to M_0$, *se denomina tangente a la gráfica de la función f en el punto* M_0.

Observemos ahora que en virtud de la igualdad (9.9) la existencia del límite finito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ significa la existencia de la derivada finita $f'(x_0) = k$. Por lo tanto, si la función f en el punto x_0 tiene la derivada, entonces la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene la forma

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \tag{9.12}$$

donde $y_0 = f(x_0)$. Si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, es decir, $f'(x_0) = \infty$, entonces por (9.9) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$ y, por lo tanto, (véase (9.11)), la ecuación de la tangente será

$$x = x_0.$$

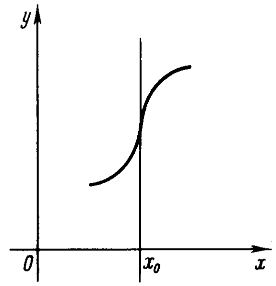


FIG. 39

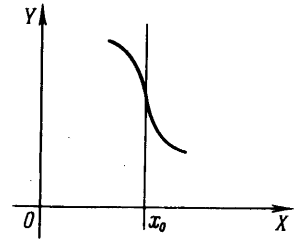


FIG. 40

Como es conocido de la geometría analítica, el coeficiente $f'(x_0)$ en la ecuación (9.12) es igual a la tangente del ángulo (véase la fig. 37) que la recta analizada forma con el sentido positivo del eje Ox:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

es decir, la derivada de la función en un punto es igual a la tangente del ángulo entre la tangente en el punto correspondiente de la gráfica de la función y el eje de las abscisas.

El primer sumando del primer miembro de la ecuación (9.12), es decir, la expresión $f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x$, $\Delta x = x - x_0$, es la diferencial dy de la función f en el punto x_0. Por lo tanto, según la igualdad (9.12)

$$y - y_0 = dy,$$

donde y es ordenada variable de la tangente. De esta forma la diferencial de la función en un punto dado, es igual *al incremento de la ordenada de la tangente* en el punto correspondiente de la gráfica de la función.

OBSERVACIÓN. Si en el punto x_0 existe el límite infinito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, entonces puede ser igual a $+\infty$ o $-\infty$. En este caso, cuando $x = x_0$, existe la derivada infinita $y' = +\infty$ o $y' = -\infty$ y la gráfica de la función $y = f(x)$ en el entorno del punto x_0 tiene la forma esquemáticamente representada en las figs. 39 y 40.

Es posible también el caso, cuando el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ no es infinito de un signo determinado y, por lo tanto, en este punto no existe derivada finita ni infinita de signo determinado, sino sólo $f'(x_0) = \infty$. Esto, por ejemplo, puede ocurrir, si en el punto x_0 existen derivadas unilaterales infinitas de diferentes signos. Entonces, en el entorno del punto x_0, la gráfica de la función tiene la forma esquemáticamente representada en las figs. 41 y 42.

Ejemplo. Hallemos la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1; 1).

De acuerdo con el p. 9.1 (véase el ejemplo 5) $y' = 2x$, por eso $y'|_{x=1} = 2$. Según la fórmula (9.12), la tangente buscada tiene la ecuación $y = 2(x - 1) + 1$, es decir, $y = 2x - 1$.

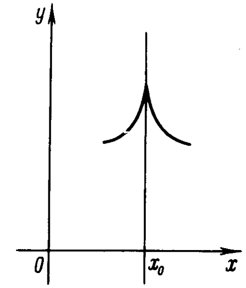


FIG. 41

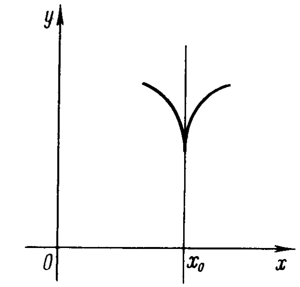


FIG. 42

Si la función f es diferenciable en el punto x_0, entonces, sustituyendo en la fórmula (9.5) $A = f'(x_0)$ (véase el teorema 1 del presente párrafo), tenemos

$$f(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

y según (9.12) ($y_{\text{tang}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$) obtenemos

$$f(x) - y_{\text{tang}} = o(x - x), \quad x \to x_0.$$

De esta forma, la tangente oblicua a la gráfica de la función tiene la propiedad de que la diferencia de las ordenadas de la gráfica y esta tangente es un infinitésimo de orden superior para $x \to x_0$ en comparación con el incremento del argumento.

Al contrario, si existe una recta no vertical

$$y_{\text{rec}} = A(x - x_0) + y_0, \tag{9.13}$$

que pasa por el punto (x_0, y_0), y tal que

$$f(x) - y_{\text{rec}} = o(x - x_0), \quad x \to x_0, \tag{9.14}$$

entonces, esta recta es la tangente a la gráfica de la función en el punto (x_0, y_0). En realidad, en este caso,

$$f(x) - [A(x - x_0) + y_0] = o(x - x_0),$$

es decir,

$$\Delta y = f(x) - y_0 = A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

por lo tanto, la función f es diferenciable en el punto x_0 (véase (9.2)) y $A = f'(x_0)$ (véase el teorema 1), es decir, la recta indicada coincide con la tangente (9.12).

De esta forma, *la condición* (9.14) *es necesaria y suficiente para que la recta* (9.13) *sea la tangente oblicua a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto (x_0, y_0)*. De aquí, en particular, se deduce que si existe la recta (9.13) con la propiedad (9.14), entonces ella es única (lo último se deriva, por ejemplo, de que la diferencial de la función es única, o de que la tangente a la gráfica de la función en el punto dado es única).

9.4. SENTIDO FÍSICO DE LA DERIVADA Y DE LA DIFERENCIAL

Sea la función $f(x)$ definida en un entorno del punto x_0. Utilizaremos, como anteriormente, las notaciones $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$. Sea, para mayor exactitud, $\Delta x > 0$. La relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, igual a la variación de la variable y sobre el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ con respecto a la unidad de medición de la variable x, naturalmente, se denomina *magnitud de la velocidad media* de la variación de y sobre el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ con respecto a x. Cuando Δx tiende a cero, es decir, cuando se contrae el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ hacia el punto x_0, la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ da la magnitud de la velocidad media de la variación y con relación a x en un segmento cada vez menor, que contiene el punto x_0. Todo lo dicho, naturalmente, es válido también cuando $\Delta x < 0$ para el segmento $[x_0 + \Delta x, x_0]$.

Por esto, al límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, si él existe, es decir, a la derivada $f'(x_0)$, es natural llamarlo *magnitud de la velocidad* de la variación de la variable y con respecto a la variable x en el punto x_0.

Señalemos que si en el punto x_0 existe la derivada $f'(x_0)$, entonces, analizando el límite de las velocidades medias de variación de y con respecto a x sobre los segmentos $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$, $(\Delta x > 0)$, que contienen el punto x_0 en su interior en calidad de centro, cuando se contraen hacia el punto x_0 (para $\Delta x \to 0$) llegaremos en el límite al mismo valor de la magnitud de la velocidad de variación de y con respecto a x, en el punto x_0, es decir, a $f'(x_0)$. En realidad, la magnitud de la velocidad media de la variación de y con respecto a x sobre el segmento $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ es igual a $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$ (al cociente de la división de la variación de la función por la longitud del segmento, sobre el cual ocurrió esta variación); de aquí

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}\right] = f'(x_0).$$

Es interesante observar que la relación de diferencias $\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$, en el sentido conocido, aproxima mejor el valor de la derivada f' en el punto x que $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (véase sobre esto en el p. 60.6).

Sobre la interpretación de la derivada como el valor de la velocidad de variación de una magnitud con respecto a otra está basada la aplicación de la derivada al estudio de los fenómenos físicos.

La aplicación de la diferencial está basada en que la sustitución del incremento de la función por su diferencial permite sustituir *cualquier* función diferenciable en el punto x_0, por una función lineal en un entorno suficientemente pequeño del punto x_0, es decir, considerar que el proceso de variación de la variable dependiente "en un entorno pequeño" ocurre linealmente con respecto al argumento. Dicho de otra forma, se puede considerar que la variación de la función es directamente proporcional a la variacion del argumento, o como se dice, que el proceso mencionado en este "pequeño entorno" ocurre uniformemente. Con esta sustitución, el error obtenido es un infinitésimo de orden superior que el incremento del argumento.

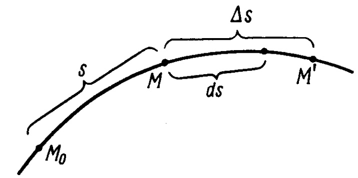


FIG. 43

Ejemplos 1. Sea $s = s(t)$ la ley del movimiento de un punto material [*] (fig. 43); s, la longitud del recorrido calculado a lo largo de la trayectoria desde un punto inicial M_0; t, el tiempo. Sea M la posición del punto en el instante t y M', en el instante $t + \Delta t$ y Δs la longitud del recorrido desde M hasta M', es decir, $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

La relación $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ se denomina en mecánica *magnitud de la velocidad media* del movimiento en el tramo desde M hasta M' y $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$, magnitud de la velocidad en el punto M o *magnitud de la velocidad instantánea* en el instante t; de este modo $v = \frac{ds}{dt}$.

Por la definición de diferencial $ds = v dt$; por lo tanto, la diferencial del recorrido es igual a la distancia que recorrería el punto en un intervalo de tiempo desde el momento t hasta $t + \Delta t$, si este punto se moviera uniformemente con velocidad igual a la velocidad instantánea del punto en el instante t. La magnitud Δs de la traslación real del punto es igual a $\Delta s = ds + o(\Delta t)$.

Vemos que desde el punto de vista de la mecánica, la sustitución de Δs por ds significa que consideramos el movimiento uniforme en el tramo dado (en el sentido de la magnitud de la velocidad [**]).

2. Sea $q = q(t)$ la cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal de un conductor; t, el tiempo; Δt, un intervalo de tiempo; $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ la cantidad de electricidad que pasa a través de la sección dada en el intervalo de tiempo desde el momento t hasta el momento $t + \Delta t$. Entonces $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ se llama la *intensidad media de la corriente* en el intervalo de tiempo Δt y se denota por I_{med} y el límite

[*] No se debe confundir la ley del movimiento del punto con la ecuación de su trayectoria que tiene el tipo $r = r(t)$, donde r es el radio vector del punto que se mueve.

[**] Es necesario tener en cuenta, que la velocidad es un vector y por eso, se caracteriza no sólo por su magnitud sino también por su dirección.

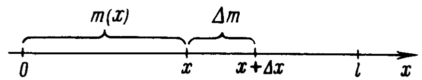


FIG. 44

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} I_{med} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ se llama *intensidad de la corriente en el instante t dado* o *corriente instantánea* y se denota por I. De esta forma, $I = \dfrac{dq}{dt}$. La diferencial $dq = I\Delta t$ es igual a la cantidad de corriente que pasa a través de la sección transversal del conductor en el intervalo de tiempo Δt, si la intensidad de la corriente fuera constante e igual a la intensidad de la corriente en el instante t. Como siempre, $\Delta q - dq = o(\Delta t)$.

3. Supongamos que está dada una barra no homogénea*) de longitud l y que $m = m(x)$ es la masa de la parte de la barra de longitud x, $0 \leqslant x \leqslant l$, medida desde un extremo fijo (fig. 44). Entonces $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$ es la masa de la parte de la barra limitada por los puntos situados respectivamente a las distancias x y $x + \Delta x$ del extremo señalado. La magnitud $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ se llama *densidad lineal media* de la barra en el tramo señalado y se denota por ρ_{med}. El límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \rho_{med} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ se llama *densidad lineal* de la barra en el punto dado y se denota por ρ. De esta forma

$$\rho = \frac{dm}{dx}.$$

Si la densidad ρ es constante, entonces la barra será homogénea.

Para una barra no homogénea arbitraria, en general, la diferencial $dm = \rho\Delta x$ es igual a la masa de la barra homogénea de longitud Δx con densidad constante ρ, igual a la densidad de la barra analizada en el punto dado.

En este ejemplo vemos que interpretando la derivada como magnitud de la velocidad, debemos comprender esto en el sentido más amplio de la palabra. Por ejemplo, la densidad de la barra es también "velocidad", precisamente, la velocidad de variación de la masa con la variación de la longitud.

9.5. REGLAS DEL CÁLCULO DE LAS DERIVADAS, RELACIONADAS CON LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS SOBRE LAS FUNCIONES

Obtengamos ahora las fórmulas para las derivadas de la suma, el producto y el cociente de funciones.

Teorema 3. *Sean las funciones* $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ *definidas en un entorno del punto* $x_0 \in \boldsymbol{R}$ *y que tengan en el propio* x_0 derivadas, *entonces las funciones*

*) Una barra se llama homogénea si cualesquiera dos tramos de igual longitud tienen igual masa y no homogénea en el caso contrario.

$f_1(x) + f_2(x), f_1(x)f_2(x)$, *y si* $f_2(x_0) \neq 0$, *entonces también la función* $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, *tienen en el punto* x_0 *derivadas y además*

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2', \tag{9.15}$$

$$(y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2', \tag{9.16}$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} \tag{9.17}$$

(*en todas las fórmulas* (9.15), (9.16) *y* (9.17) $x = x_0$).

Corolario 1. *Si la función* $y = f(x)$ *tiene derivada en el punto* x_0 *y* $c \in \boldsymbol{R}$, *entonces la función* $cf(x)$ *también tiene derivada en este punto y además*

$$(cy)' = cy' \quad (x = x_0). \tag{9.18}$$

Corolario 2. *Si las funciones* $y_k = f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *tienen derivadas en el punto* x_0, *entonces cualquier combinación lineal de éstas también tiene derivada en este punto, y además*

$$(c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n)' = c_1 y_1' + \ldots + c_n y_n', \; c_k \in \boldsymbol{R}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.19}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sean $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ funciones definidas en un entorno $U(x_0)$ del punto x_0, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ y

$$\Delta y_1 = f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0), \quad \Delta y_2 = f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0).$$

Para simplificar la escritura, a veces omitiremos la notación del argumento, analizando los incrementos de las funciones sólo en el punto x_0.

Si

$$y = y_1 + y_2$$

entonces

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1 + y_2 + \Delta y_2) - (y_1 + y_2) = \Delta y_1 + \Delta y_2,$$

de donde, para $\Delta x \neq 0$ obtendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}.$$

Pasando aquí al límite, cuando $\Delta x \to 0$ y observando que en virtud de la existencia de las derivadas de las funciones f_1 y f_2 en el punto x_0, el límite del segundo miembro de esta igualdad existe y es igual a $y_1' + y_2'$, obtendremos que existe también el límite de su primer miembro, es decir, existe la derivada y' y además

$$y' = y_1' + y_2',$$

es decir, la fórmula (9.15) está demostrada.

Si $y = y_1 y_2$, entonces de forma análoga sucesivamente tendremos

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1)(y_2 + \Delta y_2) - y_1 y_2 = \Delta y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot \Delta y_2 + \Delta y_1 \cdot \Delta y_2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 + y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2.$$

De la existencia de la derivada $f_2'(x_0)$ se deduce la continuidad de la función f_2 en el punto x_0: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y_2 = 0$; además $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_1'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y_2}{\Delta x} = y_2'$. Por esto, pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, de la igualdad obtenida obtendremos

$$y' = y_1'y_2 + y_1y_2',$$

es decir, la fórmula (9.16) queda demostrada.

Por último, si $y = \frac{y_1}{y_2}$ y $f_2(x_0) \neq 0$, entonces

$$\Delta y = \frac{y_1 + \Delta y_1}{y_2 + \Delta y_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{\Delta y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot \Delta y_2}{(y_2 + \Delta y_2)y_2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 - y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x}}{(y_2 + \Delta y_2)y_2}.$$

De aquí, recordando de nuevo que de la existencia de la derivada se deduce la continuidad de la función y, por consiguiente, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y_2 = 0$, obtendremos

$$y' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2^2},$$

es decir, la fórmula (9.17) también queda demostrada.

El corolario 1 se deriva inmediatamente de (9.16) si recordamos que $c' = 0$ (véase el ejemplo 1 en el p. 9.1) y el corolario 2 se obtiene inmediatamente de las fórmulas (9.15) y (9.18) por el método de inducción matemática.

OBSERVACIÓN. Utilizando las propiedades de los límites infinitos, relacionadas con las operaciones aritméticas sobre las funciones (véase el p. 4.7) se pueden establecer las propiedades correspondientes de las derivadas infinitas. Por ejemplo, si existe la derivada finita $y_1'(x_0)$ y la derivada infinita $y_2'(x_0)$ (de signo determinado), entonces la función $y(x) \overset{\text{def}}{=} y_1(x) + y_2(x)$, en el punto x_0, tiene la derivada infinita del mismo signo. Por ejemplo, si $y_2'(x_0) = +\infty$, entonces $y'(x_0) = +\infty$. En realidad, $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$. Por eso, si existe el límite finito $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = +\infty$, entonces

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = +\infty,$$

es decir $y'(x_0) = +\infty$.

Ejemplos. 1. Sea $y = e^x \operatorname{sen} x - 2x^2 \cos x$, según las fórmulas (9.15), (9.17) y (9.19) tenemos

$$y' = (e^x \operatorname{sen} x)' - 2(x^2 \cos x)' = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - 2(2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x).$$

2. Sea $y = tg x$; ya que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces, por la fórmula (9.18) obtenemos

$$y' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

de esta forma,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. De forma análoga, para $y = \operatorname{ctg} x$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

es decir,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Las propiedades 1° y 2° se trasladan a las diferenciales de las funciones. Teniendo en cuenta las mismas suposiciones con respecto a la diferenciabilidad en el punto x_0 tenemos

$$d(y_1 + y_2) = dy_1 + dy_2; \qquad d(y_1y_2) = y_2dy_1 + y_1dy_2 \quad ;$$

$$d(cy) = cdy; \qquad d\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_2dy_1 - y_1dy_2}{y_2^2}.$$

Calculemos por ejemplo, la diferencial del producto $y = y_1y_2$:

$$dy = y'dx = (y_1y_2)'dx = y_1'y_2dx + y_1y_2'dx = y_2dy_1 + y_1dy_2,$$

ya que $y_1'dx = dy_1$, $y_2'dx = dy_2$.

De forma análoga se demuestran también las fórmulas restantes.

9.6. DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Teorema 3. *Sea la función $y = f(x)$ continua y estrictamente monótona en un entorno del punto x_0 y supongamos que cuando $x = x_0$ existe la derivada $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$; entonces la función inversa $x = f^{-1}(y)$ también tiene derivada en el punto $y_0 = f(x_0)$ y además*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dy}}, \tag{9.20}$$

es decir, la derivada de la función inversa es igual a la magnitud inversa de la derivada de la función dada.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un entorno del punto x_0, sobre el cual la función f está definida, es continua y estrictamente monótona y analizaremos f sólo en este entorno. Entonces, como demostramos anteriormente (véase el p. 6.3), la función inversa está definida y es continua sobre un intervalo que contiene el punto y_0 y que es la imagen del entorno del punto x_0, señalado anteriormente. Por eso, si $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $y = f(x)$, entonces $\Delta x \to 0$ es equivalente a $\Delta y \to 0$ en el sentido de que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (para la función f) y $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ (para la función f^{-1}).

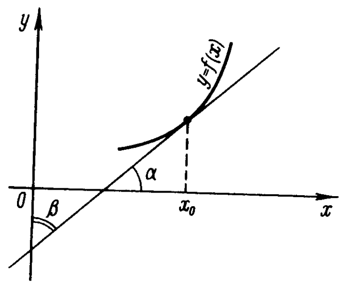


FIG. 45

Para cualesquiera $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ tenemos

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Cuando $\Delta x \to 0$ (o, lo que es lo mismo según lo dicho anteriormente, cuando $\Delta y \to 0$) el límite del segundo miembro existe, es decir, existe también el límite del primer miembro, y además

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

Pero $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{df^{-1}(y_0)}{dy}$, por eso $\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}$. □

Este teorema permite una interpretación geométrica evidente (fig. 45). Como es conocido, $\dfrac{df(x_0)}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, donde α es el valor del ángulo formado por la tangente a la gráfica de la función f en el punto (x_0, y_0) con el sentido positivo del eje Ox, y $\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dx} = \operatorname{tg}\beta$, donde β es el valor del ángulo formado por la misma tangente con el eje Oy.

Es evidente que $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, y por esto $\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}$.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si la función $y = f(x)$ es continua y estrictamente monótona en un entorno del punto x_0, si en este punto existe la derivada y $\dfrac{df(x_0)}{dx} = 0$, entonces la

función inversa $f^{-1}(y)$ tiene en el punto $y_0 = f(x_0)$ derivada infinita; por lo tanto, si consideramos convencionalmente que $\dfrac{1}{0} = \infty$, entonces la fórmula (9.20) también es válida en este caso.

2. Enúnciese y demuéstrese el análogo del teorema 3 para las derivadas unilaterales (finitas e infinitas).

Ejemplos. 1. $y = \arcsen x$, $x = \operatorname{sen} y$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Aplicando la fórmula (9.20) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}.$$

Ya que $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, entonces $\cos y > 0$, por esto $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. De este modo

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. $y = \operatorname{arcsen} x$, $x = \cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

De forma análoga al ejemplo anterior tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = (\arccos x)' = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

es decir,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} y$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$, $-\infty < x < +\infty$, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2};$$

así pues

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{ctg} y$, $0 < y < \pi$, $-\infty < x < \infty$. En este caso

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = -\operatorname{sen}^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2},$$

es decir,

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

5. Si $y = \log_a x$, $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $-\infty < y < +\infty$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = (\log_a x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

es decir,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

en particular, cuando $a = e$ tenemos

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

9.7. DERIVADA Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Teorema 4. *Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0 y la función $z = F(y)$ tiene derivada en el punto $y_0 = f(x_0)$. Entonces la función compuesta $\Phi(x) = F[f(x)]$ también tiene derivada cuando $x = x_0$ y además*

$$\Phi'(x_0) = F'(y_0) f'(x_0). \tag{9.21}$$

Si la función compuesta Φ la denotamos por el símbolo $\Phi = F \circ f$ (véase el p. 4.2) entonces la fórmula (9.21) se puede escribir de la forma

$$(F \circ f)'(x_0) = F'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Es necesario prestar atención a que la afirmación sobre la existencia en el punto x_0 de la derivada de la función compuesta $F[f(x)]$ contiene en sí la suposición de que la función compuesta analizada tiene sentido, es decir, está definida en un entorno del punto x^0.

Omitiendo el valor del argumento y utilizando la notación de la derivada con ayuda de las diferenciales, la igualdad (9.21) se puede transcribir de la forma

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 2 del presente párrafo, las funciones $y = f(x)$ y $z = F(y)$ son continuas respectivamente en los puntos x_0 e y_0 y, por consiguiente, según el teorema 2 del p. 5.2 en un entorno del punto x_0 está definida la función compuesta $\Phi(x) = F[f(x)]$.

Hagamos como siempre $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$. La función F tiene en el punto y_0 derivada y, por eso, es diferenciable en este punto (véase el p. 9.2), así pues, cuando $\Delta y \neq 0$ tiene lugar

$$\Delta z = F'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \tag{9.22}$$

donde $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$. La función $\varepsilon(\Delta y)$ no está definida cuando $\Delta y = 0$. Para el futuro es más cómodo definirla también para $\Delta y = 0$. Esto se puede hacer de forma arbitraria. Lo más sencillo es prolongarla "por continuidad", haciendo $\varepsilon(0) = 0$. La función $\varepsilon(\Delta y)$ definida de esta forma es continua cuando $\Delta y = 0$.

Por cuanto ahora la función $\varepsilon(\Delta y)$ está definida también para $\Delta y = 0$, entonces la igualdad (9.22) se puede analizar también cuando $\Delta y = 0$, y además, evidentemente, sigue siendo válida para cualquier definición complementaria de la función $\varepsilon(\Delta y)$ cuando $\Delta y = 0$, en particular, para $\varepsilon(0) = 0$.

Dividiendo ambos miembros de la igualdad (9.22) por $\Delta x \neq 0$, obtendremos

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{9.23}$$

La función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, es decir, existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{9.24}$$

De la existencia de la derivada $f'(x_0)$ se deduce la continuidad de la función $y = f(x)$ en el punto x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Cuando $\Delta x = 0$ tenemos $\Delta y = 0$. Por consiguiente, el incremento Δy analizado como función de Δx es continuo en el punto $\Delta x = 0$. Por esto, según la regla del cambio de variable en las relaciones límites que contienen funciones continuas (véase el p. 5.2)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \tag{9.25}$$

Ahora de (9.23) pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, en virtud de (9.24) y (9.25) obtendremos la fórmula (9.21). □

OBSERVACIÓN 1. En la demostración del teorema se dijo que $\varepsilon(\Delta y)$ se puede también definir arbitrariamente cuando $\Delta y = 0$. No obstante, si por ejemplo, tomamos $\varepsilon(o) = 1$, entonces, a primera vista, la fórmula (9.21) no se obtiene, y no sólo porque en este caso no se puede aplicar la regla del cambio de variables para el límite de una función continua, sino también porque si $\varepsilon(o) = 1$ y si existen $\Delta x \neq 0$ tales, para los cuales $\Delta y = 0$, entonces la igualdad (9.25) no será válida. Esto, no obstante, no influye en el resultado final. En efecto, si para $\Delta x \neq 0$ tan pequeños como se quiere existe $\Delta y = 0$, entonces de aquí fácilmente se deduce que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

y, por consiguiente, el segundo sumando en el segundo miembro de la igualdad (9.23) de todas formas tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$ (más aún, en este caso, como es fácil ver, todos los términos de la igualdad (9.23) tienden a cero). Hubiéramos podido servirnos también de que de la fórmula (9.2) se deduce que $\alpha(o) = 0$.

En el ejemplo de la demostración del teorema 4 se ve cómo la construcción bien elejida (en el caso dado, simplemente la definición complementaria en el cero de la función $\varepsilon(\Delta y)$ con el cero, que permitió utilizar la regla del cambio de variables para los límites de las funciones continuas) puede simplificar sustancialmente la demostración.

OBSERVACIÓN 2. La fórmula (9.21) para la derivada de una función compuesta sigue siendo válida en el caso cuando por derivadas se entienden las derivadas unilaterales correspondientes, si sólo exigimos preliminarmente que la función compuesta necesaria para la definición de la derivada unilateral (o bilateral) analizada, que aparece en la parte izquierda de la fórmula (9.21), tenga sentido.

Corolario (invariancia de la forma de la primera diferencial con respecto a la transformación de la variable independiente):

$$dz = F'(y_0)dy = \Phi'(x_0)dx. \tag{9.26}$$

En esta fórmula $dy = f'(x)dx$ es la diferencial de la función y dx, la diferencial de la variable independiente.

De esta forma, la diferencial de la función tiene la misma forma: el producto de la derivada respecto a cierta variable por "la diferencial de esta variable" independientemente de si esta variable es a su vez una función o una variable independiente.

Demostremos esto. De acuerdo con la fórmula (9.6) $dz = \Phi'(x_0)dx$ de donde, aplicando la fórmula (9.21) para la derivada de una función compuesta, obtendremos $dz = F'(y_0)f'(x_0)dx$, pero $f'(x_0)dx = dy$ y por esto $dz = F'(y_0)dy$, lo que se exigía demostrar.

La fórmula (9.26) se puede interpretar de una forma algo diferente si recordamos que la diferencial de una función en un punto es una función lineal con respecto a la diferencial de la variable independiente. Según (9.21) la diferencial de la función $\Phi(x) = F[f(x)]$ tiene la forma $d\Phi = F'(y_0)f'(x_0)dx$, es decir, es el resultado de la sustitución de la función lineal $dy = f(x_0)dx$ por medio de la cual está dada la diferencial df (donde $y = f(x)$) en la función lineal $dz = F'(y_0)dy$, que define la diferencial dF (donde $z = F(y)$). Dicho de otro modo, la diferencial de la composición $\Phi = F \circ f$ es la composición de las diferenciales dF y df:

$$d(F \circ f) = dF \circ df.$$

Señalemos que el teorema 4 por inducción se extiende a la superposición (composición) de cualquier número finito de funciones. Por ejemplo, para la función compuesta del tipo $z(y(x(t)))$ en el caso de la diferenciabilidad de las funciones $z(y)$, $y(x)$ y $x(t)$ en los puntos correspondientes, tiene lugar la fórmula

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Si se necesita analizar la función compuesta $z = z(y)$, $y = y(x)$, entonces para la notación de la derivada de z se utiliza también el índice inferior x o y que indica respecto a la cuál de las variables se calcula la derivada, es decir, se escribe z'_x o z'_y. A menudo para mayor simplicidad la virgulilla se omite, es decir, en lugar de z'_x se escribe simplemente z_x. En estas notaciones la fórmula (9.21) tiene la forma

$$z_x = z_y y_x.$$

Ejemplos. 1. Sea $y = x^\alpha$, $x > 0$, hallemos $\frac{dy}{dx}$. Tenemos $x^\alpha = e^u$, donde $u = \alpha \ln x$. Observando que $\frac{du}{dx} = \frac{\alpha}{x}$, obtenemos

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{de^u}{dx} = \frac{de^u}{du}\cdot\frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

De esta forma,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Así, si $y = x^2$, entonces $y' = 2x$;

si $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, entonces $y' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x}2$;

si $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, entonces $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si la función $y = x^\alpha$ está definida para $x = 0$ o para $x < 0$, entonces para estos valores de x también tiene derivada $y' = \alpha x^{\alpha - 1}$. Por ejemplo, para $\alpha = 1$, es decir, para la función $y = x$ en el punto $x = 0$ como en todos los otros puntos $y' = 1$.

2. Sea $y = \ln|x|$, $x \neq 0$, entonces para $x > 0$ tenemos

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

y para $x < 0$

$$y' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

De esta forma, para todas las $x \neq 0$ es válida la fórmula

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}. \tag{9.27}$$

De aquí, por la regla de la diferenciación de una función compuesta, para cualquier función $u(x)$ en los puntos x, en los cuales existe la derivada $u'(x)$ y $u(x) \neq 0$, tiene lugar la relación

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}. \tag{9.28}$$

OBSERVACIÓN. La fórmula (9.27) puede ser obtenida inmediatamente para todas las $x \neq 0$ de la fórmula de la diferenciación de las funciones compuestas, si recordamos que para $x \neq 0$ es válida la igualdad $|x|' = \operatorname{sign} x$ (véase el ejemplo 1 al final del p. 9.21). En efecto, haciendo $u = |x|$ obtendremos para todas las $x \neq 0$:

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{d\ln u}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\operatorname{sign} x = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|} = \frac{1}{x}.$$

3. Hallemos la derivada de la función

$$y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, \quad x \neq a, \quad x \neq -a.$$

En virtud de la fórmula (9.28) tenemos

$$y' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' = \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{1}{x^2-a^2}.$$

4. Hallemos la derivada de la función $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}|$. Análogamente al ejemplo anterior obtendremos

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + A}}(x + \sqrt{x^2 + A})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + A}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + A}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}.$$

5. Sea $y = \ln^2 \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}$, $x > 1$. Hallemos la derivada y la diferencial de esta función:

$$y' = \left(\ln^2 \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)' = 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\left(\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\,\frac{1}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)' = 2\,\frac{\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= -\frac{2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}.$$

De aquí la diferencial se halla inmediatamente por la fórmula $dy = y'\,dx$; no obstante, si no tuviéramos todavía una expresión lista para la derivada, entonces fuera posible hallar la diferencial inmediatamente utilizando su invariancia con respecto a la elección de las variables:

$$d\left(\ln^2\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right) = 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\,d\left(\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right) =$$

$$= 2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\,\frac{1}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\,d\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-2\ln\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}{|x|\sqrt{x^2-1}\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}\,dx.$$

5. Introduzcamos con ayuda del teorema 4 una fórmula más que se utiliza a menudo. Sea $y = u^v$, donde $u = u(x) > 0$, $v = v(x)$. Representemos nuestra función en la forma de $y = e^{v\ln u}$ y calculemos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{v\ln u}}{dx} = e^{v\ln u}\frac{d}{dx}(v\ln u) = u^v\left(\frac{dv}{dx}\ln u + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right) =$$

$$= u^v\frac{dv}{dx}\ln u + vu^{v-1}\frac{du}{dx}. \qquad (9.29)$$

De esta forma, la derivada de la función u^v es igual a la suma de dos sumandos, de los cuales el primero coincide con la derivada de u^v suponiendo que u es una constante, y el segundo, con la derivada de u^v suponiendo que v es una constante.

Con ayuda de la regla de diferenciación de una función compuesta se pueden hallar también las *derivadas de funciones dadas implícitamente.*

6. Sea la función diferenciable $y = y(x)$ dada implícitamente con la ecuación $F(x, y) = 0$ (véase el p. 4.2). (La cuestión sobre cómo establecer que la ecuación dada en realidad define cierta función y si ésta será diferenciable, por ahora la dejamos a un lado, ella será estudiada en el futuro.) Diferenciando la identidad $F(x, y(x)) \equiv 0$ como una función compuesta se puede calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$.

En calidad de ejemplo calculemos la derivada de la función implícita $y(x)$ definida por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. En el caso concreto dado la existencia de semejante función no provoca duda ya que ésta por ejemplo, es $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y también $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Diferenciemos la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ considerando y función de x. Obtendremos $2x + 2yy' = 0$, de donde $y' = -\frac{x}{y}$.

Con problemas semejantes resulta encontrarse en la geometría. Supongamos, por ejemplo, que se exige hallar la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3; 4). La pendiente k de la tangente es igual a la derivada: $k = y'$, luego en nuestro caso $k = -\frac{x}{y}$. Para el punto analizado $k = -\frac{3}{4}$, por lo que la ecuación de la tangente buscada se puede escribir de la forma $y - 4 = -\frac{3(x-3)}{4}$, es decir, $3x + 4y - 25 = 0$.

Apliquemos el método de diferenciación de las funciones implícitas a la deducción de fórmulas obtenidas anteriormente por otro camino.

7. Analicemos de nuevo la función $y = u^v$. Hallando el logaritmo obtenemos su definición implícita $\ln y = v\ln u$. Diferenciando ambos miembros de esta ecuación tendremos $\frac{y'}{y} = v'\ln u + \frac{v}{u}u'$ (la expresión $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ se llama *derivada logarítmica* de la función $y(x)$), o $y' = y(v'\ln u + \frac{v}{y}u')$; sustituyendo aquí $y = u^v$ llegamos de nuevo a la fórmula (9.29).

Otro ejemplo. La función $y = \operatorname{arcsen} x$ se define implícitamente con la ecuación $x = \operatorname{sen} y$. Diferenciando ambos miembros respecto a x obtenemos $1 = y'\cos y$ de donde $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, es decir, lo mismo que en el p. 9.6.

8. En el caso cuando la función se da no con una fórmula, sino con varias, el cálculo de la derivada es necesario a veces realizarlo directamente partiendo de la definición de la derivada. Hallemos, por ejemplo, la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0. \end{cases}$$

Cuando $x \neq 0$ la derivada existe y se calcula por las fórmulas de diferenciación: $f'(x) = 2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. En el punto $x = 0$ la derivada se obtiene directamente por su definición

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$$

De esta forma, la función $f(x)$ es diferenciable sobre todo el eje numérico.

OBSERVACIÓN. Utilizando el teorema 4 todas las fórmulas obtenidas para las principales funciones elementales se pueden escribir en una forma algo más general: si $u = u(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u; \qquad (e^u)' = e^u u';$$

$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u; \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (u > 0);$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \qquad (\operatorname{arc sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}; \qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad (u > 0); \qquad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$

$$(a^u)' = a^u u' \ln a; \qquad (\operatorname{arctg} u) = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

De las fórmulas citadas se ve (cuando $u = x$) que las derivadas de las principales funciones elementales son funciones elementales.

Las fórmulas obtenidas en conjunto dan la posibilidad de calcular la derivada y la diferencial de cualquier función elemental en el caso cuando esta derivada existe.

Es necesario tener en cuenta, no obstante, que no cualquier función elemental tiene derivadas en todos los puntos de su dominio. Un ejemplo de función elemental diferenciable no en todos los puntos, es la función $|x| = \sqrt{x^2}$; ella, como sabemos, no tiene derivada en el punto $x = 0$ (véase el p. 9.2).

Ejercicios. 5. Respóndase a las preguntas: ¿Es posible demostrar la fórmula $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ cuando $dy \neq 0$, multiplicando y dividiendo simplemente $\frac{dz}{dx}$ por dy? ¿Se puede o no demostrar la fórmula $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ cuando $dx \neq 0$ dividiendo el numerador y el denominador de la fracción $\frac{dx}{dy}$ por dx?

6. Aclárese si la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$$

será continua en el punto $y = 0$. ¿Tendrá derivada en este punto? ¿Tendrá en él derivadas unilaterales?

9.8. FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y SUS DERIVADAS

Definición 5. *Las funciones* $(e^x + e^{-x})/2$ *y* $(e^x - e^{-x})/2$ *se llaman respectivamente coseno hiperbólico y seno hiperbólico y se denotan por* ch x *y* sh x:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Es válida la fórmula

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{9.30}$$

En efecto,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{2x} - e^{-2x} + 2 - e^{-2x}) = 1.$$

También es válida la fórmula

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

en realidad,

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x.$$

Estas fórmulas recuerdan las relaciones entre el seno y el coseno usuales (circulares, como a veces los llaman). Para sh x y ch x se tiene otra serie de relaciones, análogas a las fórmulas correspondientes para sen x y cos x. Con esto se explica el nombre de las funciones sh x y ch x. El epíteto "hiperbólico" está relacionado con el hecho de que las fórmulas

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t \tag{9.31}$$

definen paramétricamente una hipérbola, de forma semejante a como las fórmulas

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t \tag{9.32}$$

definen paramétricamente una circunferencia. En realidad, si elevamos al cuadrado las igualdades (9.31), restamos una de otra y nos servimos de la fórmula (9.30), entonces obtendremos $x^2 - y^2 = a^2$, es decir, la ecuación de una hipérbola equilátera.

De forma semejante, de la ecuación (9.32) se deriva $x^2 + y^2 = a^2$, es decir, la ecuación de una circunferencia.

Hallemos las derivadas del seno y coseno hiperbólicos.

Observando que $(e^{-x})' = -e^{-x}$, tenemos

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

De esta forma

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Los cocientes $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ y $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ por analogía con los senos y cosenos usuales, respectivamente se llaman *tangente hiperbólica y cotangente hiperbólica* y se denotan por

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x, \quad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

Ejercicios. 7. Calcúlense las derivadas de las funciones $\operatorname{th} x$ y $\operatorname{cth} x$. Constrúyanse las gráficas de las funciones $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$ e $y = \operatorname{cth} x$. Hállense las derivadas de sus funciones inversas. Exprésense las funciones inversas indicadas y sus derivadas con logaritmos (la función inversa a $\operatorname{ch} x$ se define con la condición complementaria de que sus valores sean no negativos).

Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones (en todos los puntos en los cuales esto es posible).

8. $y = x^2(x^3 - 1)^4$.
9. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.
10. $y = \sqrt[3]{x}$.
11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
12. $y = x^2 \operatorname{sen} 2x + 2x \cos 3x$.
13. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.
14. $y = \sqrt[5]{x} \operatorname{ctg} 2x - \dfrac{1}{2} \ln x \operatorname{arctg} x$.
15. $y = 2^{x^3} \ln \arccos x$.
16. $y = \arccos \dfrac{1}{x}$.
17. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$.
18. $y = x^2 |x|$.
19. $y = x^x$.
20. $y = |x| \ln |x|$.
21. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.
22. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$.
23. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x + 1}{x - 1}$.
24. $y = \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$.
25. $y = \sqrt[x]{x}$.
26. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + x^{x^x}$.
27. $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$.
28. $y = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \ln \operatorname{cth} \dfrac{x}{2}$.
29. $y = \arccos \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.
30. $y = \dfrac{b}{a} x + \dfrac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \times \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}} \operatorname{th} \dfrac{x}{2} \right) \quad (0 \leqslant b < a)$.

§ 10. DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

10.1. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES

Definición 1. *Supongamos que la función $f(x)$ está definida sobre el intervalo (a, b), tiene derivada $f'(x)$ en cada punto $x \in (a, b)$ y $x_0 \in (a, b)$. Si para $x = x_0$ existe la derivada de la función $f'(x)$, entonces ella se llama segunda derivada (o derivada de segundo orden) de la función f y se denota por $f''(x_0)$ o $f^{(2)}(x_0)$.*

De esta forma, $f''(x_0) = [f'(x)]'_{x = x_0}$ o suprimiendo la notación del argumento, $y'' = (y')'$. Análogamente se define la derivada $y^{(n)}$ de cualquier orden $n = 1, 2, \ldots$: *si existe la derivada $y^{(n-1)}$ de orden* $(n - 1)$ (aquí por derivada de orden nulo se sobreentiende la propia función: $y^{(0)} = y$ y por derivada de primer orden, y'), entonces, por definición, $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

Recordando cómo se definía la derivada (véase el p. 9.1), la definición de la derivada n-ésima en un punto x_0 se puede escribir en forma de límite

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Señalemos que de la suposición de que la función f tiene en el punto x_0 derivada de orden n se deduce, por la definición de la última, que en cierto entorno del punto x_0, la función f tiene la derivada de orden $n - 1$ y por consiguiente, para $n > 1$, todas las derivadas de orden inferior $k < n - 1$ (las cuales, además, son continuas en este entorno, por cuanto tienen derivada en todos sus puntos, véanse los teoremas 1 y 2 en el p. 9.2), en particular, la propia función está definida en cierto entorno del punto x_0.

Todo lo dicho aquí se extiende de una forma natural a las así llamadas derivadas unilaterales de orden superior, lo que el lector puede hacer por su cuenta sin gran trabajo.

Definición 2. *Una función se llama n veces continuamente diferenciable sobre un intervalo, si en todos los puntos de este intervalo tiene derivadas continuas hasta de orden n inclusive* ($n = 1, 2, \ldots$).

En este caso, en cualquiera de los extremos del intervalo analizado, cuando este extremo pertenece al intervalo, por derivada, como es usual, entenderemos las correspondientes derivadas unilaterales.

Para que la función sea n veces continuamente diferenciable sobre un intervalo, es suficiente que tenga sobre éste derivada continua de orden n. En realidad, según la definición, la existencia de la derivada de orden n sobre el intervalo analizado presupone la existencia sobre éste, de la derivada de orden $n - 1$, y por cuanto de la existencia de la derivada de orden $n - 1$, y por cuanto de la existencia de la derivada de cualquier función en un punto se deduce la continuidad de la función en este punto, entonces la derivada de orden $n - 1$ es continua sobre el intervalo dado. Análogamente, en el caso de $n > 1$ se demuestra la continuidad la derivada de orden $n - 2$, etc.

Ejemplos. 1. $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y^{(3)} = 6$, $y^{(4)} = y^{(5)} = \ldots = 0$.

2. $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$, $y^3 = a^x \ln^3 a$. En general, por inducción es fácil establecer que $y^{(n)} = a^x \ln^n a$. En particular, $(e^x)^{(n)} = e^x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. $y = \operatorname{sen} x$. Calculando sucesivamente las derivadas obtenemos $y' = \cos x$, $y'' = -\operatorname{sen} x$, $y^{(3)} = -\cos x$, $y^{(4)} = \operatorname{sen} x$, en lo adelante las derivadas se repiten en el mismo orden. Para escribir el resultado obtenido con una sola fórmula, observemos que $\cos \alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$, y por esto $y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \text{ etc.}$$

Por inducción $(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ para cualquier $n = 1, 2, \ldots$.

4. $y = \cos x$. Observando que $-\operatorname{sen} \alpha = \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$, de forma análoga al ejemplo anterior obtendremos

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \ n = 1, 2, \ldots$$

10.2. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES DE LA SUMA Y DEL PRODUCTO DE FUNCIONES

Teorema 1. *Supongamos que las funciones $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ tienen derivadas de n-ésimo orden en el punto x_0; entonces las funciones $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ e $y_1y_2 = f_1(x)f_2(x)$ también tienen derivadas de orden n en el punto x_0, además*

$$(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}, \tag{10.1}$$

$$(y_1y_2)^{(n)} = y_1^{(n)}y_2 + C_n^1 y_1^{(n-1)}y_2^{(1)} + C_n^2 y_1^{(n-2)}y_2^{(2)} + \dots + y_1y_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k)}, \tag{10.2}$$

donde, como es usual, C_n^k denota el número de combinaciones de n elementos respecto a k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

La fórmula (10.2) usualmente se llama *fórmula de Leibniz* *), *simbólicamente puede ser escrita en la forma siguiente, que es cómoda para ser recordada*

$$(y_1y_2)^{(n)} = (y_1 + y_2)^{\{n\}}.$$

El índice $\{n\}$ significa, que la expresion $(y_1 + y_2)^{\{n\}}$ se escribe de forma semejante al binomio de Newton, es decir en forma de suma con los mismos coeficientes que en la fórmula binomial, sólo que las potencias de las funciones y_1 e y_2 se sustituyen por sus derivadas del orden correspondiente (véase (10.2)).

Las fórmulas (10.1) y (10.2) se demuestran por inducción. Para $n = 1$, es decir, para las derivadas de primer orden, fueron demostradas en el p. 9.5. Supongamos ahora que estas fórmulas son válidas para las derivadas de n-ésimo orden. Demostremos su validez para las derivadas de orden $n + 1$.

En el caso de la suma de functiones tenemos:

$$(y_1 + y_2)^{(n+1)} = [(y_1 + y_2)^{(n)}]' = (y_1^{(n)} + y_2^{(n)})' = (y_1^{(n)})' + (y_2^{(n)})' = y_1^{(n+1)} + y_2^{(n+1)}.$$

La fórmula (10.2) queda demostrada.

En el caso del producto de functiones los cálculos son algo más complejos:

$$(y_1y_2)^{(n+1)} = [(y_1y_2)^{(n)}]' = \Big[\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k)}\Big]' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k [y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)} + y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)} =$$

$$= y_1^{(n+1)}y_2^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_k^n y_1^{(n+1-k)}y_2^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k y_1^{(n-k)}y_2^{(k+1)} + y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}.$$

*) G. Leibniz (1664 — 1761), filósofo y matemático alemán.

Aquí hemos utilizado el hecho de que $C_n^0 = C_n^n = 1$. Ahora, cambiemos el índice de la sumación en la segunda suma, haciendo $k = p - 1$; entonces el nuevo índice de la sumación p variará desde 1 hasta n. Después de esto en las sumas obtenidas unamos dos a dos los sumandos que contienen derivadas del mismo orden. Denotando el índice general de la sumación por p, tendremos

$$(y_1y_2)^{(n+1)} = y_1^{(n+1)}y_2^{(0)} + \sum_{p=1}^{n} (C_n^p + C_n^{p-1})y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)} + y_1^{(0)}y_2^{(n+1)}.$$

De apuí, notando que $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$ *) y que $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$, obtendremos

$$(y_1y_2)^{(n+1)} = y_1^{(n+1)}y_2^{(0)} + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)} + y_1^{(0)}y_2^{(n+1)} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p y_1^{(n+1-p)}y_2^{(p)}. \ \square$$

Corolario. *Si c es una constante e $y = f(x)$ es una función que tiene derivada de n-ésimo orden en el punto x_0, entonces la función $cf(x)$ también tiene derivada de orden n cuando $x = x_0$, además*

$$(cy)^{(n)} = cy^{(n)}. \tag{10.3}$$

En realidad, si en la fórmula (10.2) hacemos $y_1 = c$, $y_2 = y$, entonces obtenemos la fórmula (10.3). Por otra parte, se deduce de una forma completamente evidente si se aplica n veces la fórmula (9.19) a la función cy.

Analicemos un ejemplo. Sea $y = x^3 \operatorname{sen} x$. Hallemos con ayuda de la fórmula de Leibniz la derivada $y^{(10)}$:

$$(x^3 \operatorname{sen} x)^{(10)} = x^3 \operatorname{sen}\left(x + 10\frac{\pi}{2}\right) + 10 \cdot 3x^2 \operatorname{sen}\left(x + 9\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 10 \cdot 9 \cdot 3x \operatorname{sen}\left(x + 8 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 10 \cdot 9 \cdot 8 \operatorname{sen}\left(x + 7\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -x^3 \operatorname{sen} x + 30x^2 \cos x + 270x \operatorname{sen} x - 720 \cos x.$$

10.3. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS, DE LAS FUNCIONES INVERSAS Y DE LAS FUNCIONES DADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Supongamos que la función $y = y(x)$ tiene segunda derivada en el punto x_0, y $z = z(y)$ tiene segunda derivada en el punto $y_0 = y(x_0)$. Entonces la función compuesta $z\,[y(x)]$ tiene para $x = x_0$ segunda derivada, además

*) En efecto, si se fija uno de los $n + 1$ elementos que componen las combinaciones de p elementos, entonces el número de combinaciones en las cuales intervino este elemento fijado será igual a C_n^{p-1}, y el número de combinaciones de las que no intervino será igual a C_n^p, por esto $C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p$.

$$z''_{xx} = z''_{yy}\, y'^2_x + z'_y\, y''_{xx}. \tag{10.4}$$

En efecto, por cuanto existen las derivadas $y''(x_0)$ y $z''(y_0)$, entonces existen también $y'(x_0)$ y $z'(y_0)$. Por consiguiente, las funciones $y(x)$ y $z(y)$ son continuas en los puntos x_0 e y_0, respectivamente. Por esto, en cierto entorno del punto x_0 está definida la función compuesta $z = z[y(x)]$. Diferenciándola y omitiendo para simplificar la notación del argumento, tenemos $z'_x = z'_y y'_x$; diferenciando otra vez respecto a x obtendremos

$$z''_{xx} = (z'_y)'_x y'_x + z'_y y''_{xx} = z''_{yy} y'^2_x + z'_y y''_{xx}. \ \square$$

De forma análoga se calculan, en las suposiciones correspondientes, las derivadas de orden superior de la función compuesta. Este método permite también demostrar la existencia y hallar las derivadas de orden superior de una funcтión inversa.

Sea la función $y = y(x)$ continua y estrictamente monótona en cierto entorno del punto x_0 (compárese con el p. 9.6) y supongamos que cuando $x = x_0$ existen las derivadas y' e y'', y además $y'(x_0) \neq 0$; entonces la función inversa $x = x(y)$ tiene segunda derivada en el punto $y_0 = y(x_0)$ y además puede ser expresada por los valores de las derivadas y' e y'' de la función $y(x)$ cuando $x = x_0$.

En realidad, omitiendo, como anteriormente las notaciones del argumento, por el teorema 3 del § 9 (véase el p. 9.6), tenemos $x'_y = 1/y'_x$. Calculando la derivada respecto a y de ambas partes e aplicando en la parte derecha la regla de diferenciación de una función compuesta obtenemos

$$x''_{yy} = (x'_y)_y = \left|\frac{1}{y'_x}\right|_x x'_y = -\frac{y''_{xx}}{y'^2_x}\cdot\frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{y'^3}.$$

De forma análoga en las suposiciones correspondientes, se calculan *las derivadas de orden superior para la función inversa.*

De forma semejante se puede proceder en el caso de la tal llamada definición paramétrica de una función.

Definición 3. *Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funciones definidas en cierto entorno del punto t_0 y una de ellas, por ejemplo, $x = x(t)$ continua y estrictamente monótona en el entorno indicado; entonces existe la función inversa a $x(t)$, la función $t = t(x)$ y en cierto entorno del punto $x_0 = x(t_0)$ tiene sentido la composición $y(t(x))$. Esta función y de x se llama función definida paramétricamente por las fórmulas $x = x(t)$, $y = y(t)$.*

Deduzcamos las fórmulas para la diferenciación de las funciones definidas paramétricamente.

Si las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen derivadas en el punto t_0 y se x' ($t_0 \neq 0$), entonces la función $y(t(x))$ definida paramétricamente también tiene derivada en el punto $x_0 = x(t_0)$ y además

$$y'_x = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{10.5}$$

En realidad, por la regla de diferenciación de la función compuesta tenemos (omitiendo la notación del argumento)

$$y'_x = y'_t t'_x; \tag{10.6}$$

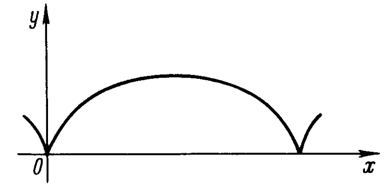


FIG. 46

por la regla de diferenciación de la función inversa

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{10.7}$$

De las fórmulas (10.6) y (10.7) se deduce la fórmula (10.5). *Si además existen $x''_{tt}(t_0)$ e $y''_{tt}(t_0)$, entonces existe también $y''_{xx}(x_0)$, además*

$$y''_{xx} = (y'_x)_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_t t'_x = \frac{y''_{yy}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}.$$

Análogamente se calculan *las derivadas de orden superior de las funciones dadas en forma paramétrica.*

Analicemos en calidad de ejemplo de función dada en forma paramétrica

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (a \neq 0, -\infty < t < +\infty). \tag{10.8}$$

Su gráfica se llama *cicloide* (fig. 46). Sea, para mayor exactitud, $a > 0$; entonces la función $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$ crece estrictamente monótona. En realidad, sea $\Delta t > 0$, entonces, notando que $0 < \operatorname{sen}\frac{\Delta t}{2} < \frac{\Delta t}{2}$, tenemos

$$x(t + \Delta t) - x(t) = a\{\Delta t - [\operatorname{sen}(t + \Delta t) - \operatorname{sen} t]\} \doteq$$
$$= a\left[\Delta t - 2\cos\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta t}{2}\right] > a\left(t\Delta - 2\cdot 1\cdot\frac{\Delta t}{2}\right) = 0,$$

lo que significa el crecimiento estrictamente monótono de la función $x(t)$. Por esto existe la función inversa unívoca $t = t(x)$.

A continuación, $x'_t = a(1 - \cos t) = 2a\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} \geqslant 0$, $y'_t = a\operatorname{sen} t$, y x'_t se anula sólo los puntos del tipo $t = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Por esto, si $t \neq 2k\pi$, entonces por la regla de diferenciación de una función definida paramétricamente tenemos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\operatorname{sen} t}{2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2};$$

$$y''_{xx} = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_x = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_x\frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 t/2}\cdot\frac{1}{2a\operatorname{sen}^2 t/2} = -\frac{1}{4a\operatorname{sen}^4\frac{t}{2}}.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que el cicloide (10.8) es la trayectoria de un punto de una circunferencia de radio a que rueda sin deslizamiento por el eje de las x.

10.4. DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

En el presente punto, para mayor comodidad, a veces, en lugar del símbolo de diferenciación d escribiremos la letra δ, es decir, en lugar de dy, dx escribiremos δy, δx.

Sea la función $y = f(x)$ diferenciable sobre cierto intervalo (a, b). Como es conocido, su diferencial.

$$dy = f'(x)dx,$$

que se llama también su primera diferencial, depende de dos variables: x y dx. Sea $f'(x)$ a su vez diferenciable en cierto punto $x_0 \in (a, b)$. Entonces la diferencial en este punto de la función dy analizada como una función sólo de x (es decir, para cierto dx dado), si para su notación utilizamos el símbolo δ, tiene la forma

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)dx]|_{x = x_0} = [f'(x)dx]'|_{x = x_0}\delta x = f''(x_0)dx\,\delta x.$$

Definición 4. *El valor de la diferencial $\delta(dy)$, es decir, de la diferencial de la primera diferencial en cierto punto x_0 cuando $dx = \delta x$, se llama segunda diferencial de la función f en este punto y se denota por d^2y, es decir,*

$$d^2y = f''(x_0)dx^2 \tag{10.9}$$

(por dx^2 y en general por dx^n, $n \in N$, se denota $(dx)^2$, respectivamente, por $(dx)^n$ y no por $d(x^n)$).

Observemos que en virtud de esta definición $d^2x = 0$ ya que en el cálculo de las diferenciales consideramos el incremento $dx = \Delta x$ constante.

De forma semejante, en el caso cuando la derivada de $(n - 1)$-ésimo orden $y^{(n-1)}$ es diferenciable en el punto x_0 o lo que es equivalente, cuando para $x = x_0$ existe la derivada de n-ésimo $y^{(n)}$, se define *la diferencial de n-ésimo orden $d^n y$* de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 como la diferencial de la diferencial de $(n - 1)$-ésimo orden $d^{n-1}y$ en la cual está tomada $\delta x = dx$:

$$d^ny = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x = dx}.$$

Mostremos que es válida la fórmula

$$d^ny = y^{(n)}dx^n, n = 1, 2, \dots \tag{10.10}$$

Su demostración la realizaremos por inducción. Para $n = 1$ y $n = 2$ está demostrada. Sea esta fórmula válida para las diferenciales de orden $n = 1$:

$$d^{n-1}y = y^{(n-1)}dx^{n-1}.$$

Entonces, por la definición dada anteriormente, para el cálculo de la diferencial de n-ésimo orden $d^{(n)}y$ es necesario calcular inicialmente la diferencial (la denotaremos por el símbolo δ) de $d^{n-1}y$:

$$\delta(d^{n-1}y) = \delta(y^{(n-1)}dx^{n-1}) = (y^{(n-1)}dx^{n-1})'\delta x = y^{(n)}\delta x\, dx^{n-1},$$

y luego poniendo $\delta x = dx$:

$$d^ny = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x = dx} = y^{(n)}dx^n. \ \square$$

De la fórmula (10.10) se deduce que

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{10.11}$$

Señalemos algunas propiedades de las diferenciales de orden superior

1°. $d^n(y_1 + y_2) = d^ny_1 + d^ny_2$.
2°. $d^n(cy) = cd^ny$, c es una constante.
3°. $d^n(y_1y_2) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k dy_1^{n-k}dy_2^k$ o utilizando

la escritura simbólica, $d^n(y_1y_2) = (dy_1 + dy_2)^{[n]}$,

donde la expresión $(dy_1 + dy_2)^{[n]}$ se escribe según la fórmula del binomio de Newton, es decir, es una suma del tipo $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}y_1 d^ky_2$; y además, para cualquier función u se considera que $d^0u = u^{(0)}dx^{(0)} = u$.

Estas propiedades se deducen directamente de las fórmulas correspondientes para las derivadas de n-ésimo orden (véase (10.1), (10.2), (10.3) y (10.10)).

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. Las fórmulas (10.10) y (10.11) son válidas en general para $n > 1$ (a diferencia del caso $n = 1$) si y sólo si x es una variable independiente. En el caso de las diferenciales de orden superior respecto a variables dependientes, todo es más complejo.

Supongamos $z = z(y)$, $y = y(x)$, que tiene sentido la composición $z[y(x)]$ y las funciones $z(y)$ e $y(x)$ son dos veces diferenciables. Entonces

$$dz = z_y'dy,$$

diferenciando otra vez y no recurriendo, para mayor sencillez, al símbolo δ, es decir, considerando la notación $d(dz)$ equivalente a la notación $\delta(dz)|_{\delta x = dx}$ (así se procede siempre en la práctica), además aquí por $\delta(dz)$ se entiende la diferencial respecto a x de la función $dz = z_y'(y)dy = z_y'[y(x)]y_x'(x)dx$, obtenemos

$$d^2z = d(dz) = d(z_y'dy) = d(z_y')dy + z_y'd(dy) = z_{yy}''dy^2 + z_y'd^2y \tag{10.12}$$

(hemos escrito $dz_y' = z_{yy}''dy$ a base de las fórmulas (9.26), es decir, utilizando la invariancia de la primera diferencial).

Comparando las fórmulas (10.9) y (10.12) vemos que se diferencian en el segundo término y ya que en general $d^2y \neq 0$, entonces son diferentes sustancialmente. Dividiendo ambos miembros de la igualdad (10.12) por dx^2 obtenemos la fórmula de la segunda derivada para una función compuesta:

$$z_{xx}'' = z_{yy}''y_x'^2 + z_y'y_{xx}'',$$

que fue obtenida por nosotros anteriormente (véase (10.4)) por otro camino.

De forma semejante, pueden ser calculadas las diferenciales y las derivadas de orden superior de una función compuesta.

Ejercicios. Calcúlense las derivadas y diferenciales:

2. $y^{(8)}$ para la función $y = \sqrt{x}$.
3. $y^{(50)}$ para la funcion
$$y = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}.$$
4. $y^{(n)}$ para la función
$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$
5. $y^{(n)}$ para la función $y = \operatorname{sen}^2 x$.
6. $y^{(n)}$ para la función $y = x \operatorname{ch} x$.
7. $d^n y$ para la función $y = x^n e^x$.
8. $d^n y$ para la función $y = \dfrac{\ln x}{x}$.
9. y''_{xx} para la función $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.
10. y'''_{xxx} para la función
$x = a(t - \operatorname{sen} t)$,
$y = a(1 - \cos t)$.
11. y'_x e y''_{xx} para la función
$x = y - a \operatorname{sen} y$.
12. y'_x e y''_{xx} para la función
$$x^2 + 2xy - y^2 = 1.$$

§ 11. TEOREMAS SOBRE EL VALOR MEDIO PARA LAS FUNCIONES DIFERENCIABLES

11.1. TEOREMA DE FERMAT

Si la función f tiene en cierto punto x_0 derivada finita o infinita, de signo determinado, entonces $f(x)$ se llama función que tiene para $x = x_0$ derivada en el sentido amplio.

Teorema 1 (de Fermat *)). *Sea la función f definida en cierto entorno del punto x_0 y que toma en este punto su valor máximo o su valor mínimo. Entonces, si para $x = x_0$ existe la derivada en el sentido amplio, ella es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f definida en el entorno $U(x_0)$ del punto x_0 y toma para mayor definición, si $x = x_0$, su valor máximo, es decir, para todos los $x \in U(x_0)$ se cumple la desigualdad $(f(x) \leqslant f(x_0)$. Entonces, si $x < x_0$, tenemos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \tag{11.1}$$

y si $x > x_0$, entonces

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0. \tag{11.2}$$

Si existe la derivada en el sentido amplio, es decir, si existe el límite, finito o infinito, de signo determinado

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

entonces, pasando al límite cuando $x \to x_0 - 0$ en la desigualdad (11.1), obtenemos $f'(x_0) \geqslant 0$; análogamente de la desigualdad (11.2) cuando $x \to x_0 + 0$ encontra-

*) P. Fermat (1601 — 1665), matemático francés.

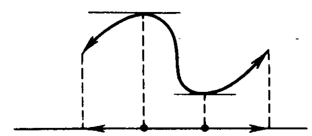


FIG. 47

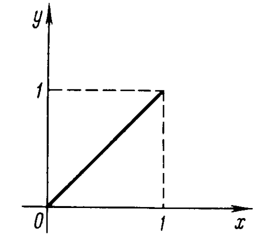


FIG. 48

mos $f'(x_0) \leqslant 0$. Estas desigualdades se cumplen simultáneamente sólo cuando $f'(x_0) = 0$. □

La interpretación geométrica del teorema de Fermat consiste en que si para $x = x_0$ la función f toma su valor máximo o mínimo sobre cierto entorno del punto x, entonces la tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$ es paralela al eje Ox (fig. 47).

OBSERVACIÓN. Si la función f toma su valor máximo o mínimo para $x_0 = x$ en comparación con sus valores en los puntos que se encuentran a un lado del punto x_0, y tiene en x_0 derivada (unilateral), entonces esta derivada puede no igualarse a cero. Así por ejemplo, la función $f(x) = x$, analizada sobre el segmento $[0, 1]$, toma para $x = 0$, su valor mínimo y para $x = 1$ su valor máximo, sin embargo, tanto en un punto como en el otro la derivada es igual a la unidad (véase la fig. 48).

11.2. TEOREMAS DE ROLLE, LAGRANGE Y CAUCHY SOBRE LOS VALORES MEDIOS

Teorema 2. (de Rolle *)). *Sea la función f*

1) *continua sobre el segmento $[a, b]$;*

2) *tenga en cada punto del intervalo (a, b) derivada finita o infinita, de signo determinado;*

3) *tome valores iguales en los extremos del segmento, es decir, $f(a) = f(b)$; entonces existe al menos un punto ξ, $a < \xi < b$, tal que $f'(\xi) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que una función, continua sobre segmento, toma sus valores máximo y mínimo en ciertos puntos de este segmento (véase el p. 6.1). Sea $M = \max f(x)$, $m = \min f(x)$; entonces para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Si $m = M$, entonces la función f es constante y, por lo tanto $f' \equiv 0$ sobre $[a, b]$. En calidad de punto ξ en este caso se puede tomar cualquier punto del intervalo (a, b).

Si $m \neq M$, entonces de la condición $f(a) = f(b)$ se deduce que, al menos uno de los valores m o M no se alcanza en los extremos del segmento $[a, b]$. Sea M este valor, es decir, existe un punto $\xi \in (a, b)$, tal que $f(\xi) = M$, y por lo tanto, en este

*) M. Rolle (1652 — 1719), matemático francés.

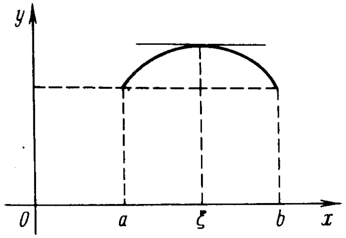


FIG. 49

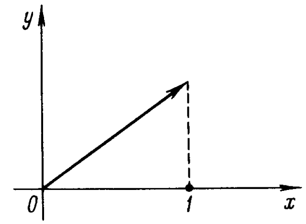


FIG. 50

punto ξ la función f alcanza su valor máximo también sobre el intervalo (a, b). Por esto del teorema de Fermat se deduce que $f'(\xi) = 0$. □

El teorema de Rolle geométricamente significa que en la gráfica de una función, continua sobre un segmento y diferenciable en él, que toma valores idénticos en sus extremos, existe un punto en el cual la tangente es paralela al eje de las abscisas (fig. 49).

Señalemos que todas las premisas del teorema de Rolle son esenciales. Para convencerse de esto, es suficiente mostrar los ejemplos de funciones, para los cuales se cumplieran dos de las tres condiciones del teorema, pero no se cumpliera la tercera y para las cuales no existiera el punto ξ tal que $f'(\xi) = 0$. (Durante esto, por la condición 3, en la que se habla sobre los valores de la función en los puntos extremos del intervalo, se debe analizar solamente las funciones, definidas sobre los segmentos.)

La función $f(x)$, definida sobre el segmento Ç0, 1] e igual a x si $0 \leqslant x < 1$, y a 0 si $x = 1$, satisface las condiciones 2 y 3, pero no satisface la condición 1 (fig. 50).

La función $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, satisface las condiciones 1 y 3, pero no satisface la condición 2 (fig. 51).

Y por último, la función $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, satisface las condiciones 1 y 2, pero no satisface la condición 3 (véase la fig. 48).

Para todas estas funciones no existe un punto en el cual sus derivadas se hagan cero.

Llamemos la atención al hecho de que, según las condiciones del teorema de Rolle, el segmento $[a, b]$ puede contener puntos en los cuales la función tiene derivada infinita, es decir, en los cuales o bien $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, o bien $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$. Esta exigencia no se puede debilitar, sustituyéndola por la condi-

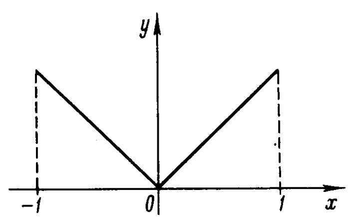


FIG. 51

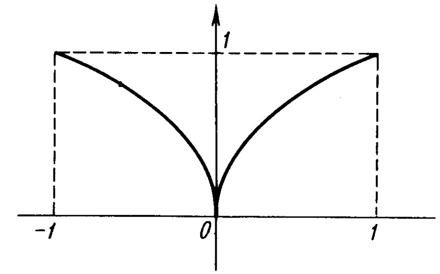


FIG. 52

ción $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$. Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (fig. 52), no existe un punto $\xi \in [-1, 1]$, en el cual la derivada de esta función se haga cero. Al mismo tiempo la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ satisface todas las condiciones del teorema de Rolle sobre el segmento $[-1, 1]$, a excepción de que en el punto $x = 0$ esta función no tiene ni derivada finita ni infinita de signo determinado.

En efecto, para este punto, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, además, este límite no es infinito de signo determinado.

Este ejemplo muestra la conveniencia de que en el p. 11.1 al concepto de derivada en el "sentido amplio", junto con las derivadas finitas, se incorporaron sólo las derivadas infinitas de *signo determinado*.

Señalemos que con la construcción de los ejemplos correspondientes (si, naturalmente, es factible), se comprueba habitualmente en matemática, la esencialidad de las condiciones de los teoremas demostrados.

En el futuro no realizaremos la comprobación de la necesidad de las condiciones de los teoremas, dejándole al lector su realización a medida de sus propias necesidades.

Si la función $f(x)$ satisface las condiciones del teorema de Rolle sobre el segmento $[a, b]$, entonces la función $F(x) = f(x) - f(a)$ es igual a cero en sus extremos y $F'(x) = f'(x)$, en particular, estas derivadas se hacen iguales a cero simultáneamente. Por esto, el teorema de Rolle es equivalente a la afirmación: si una función es continua sobre cierto segmento, se hace nula en sus extremos y es diferenciable en todos sus puntos internos, entonces existe un punto interno en el cual la derivada de la función se hace igual a cero. Dicho brevemente,

entre dos ceros de una función diferenciable se encuentra siempre al menos un cero de su derivada.

Ejercicios. 1. *Demuéstrese que si la función f* satisface las condiciones del teorema de Rolle sobre el segmento $[a, b]$ y no es constante, entonces, en este segmento existen los puntos ξ_1 y ξ_2 tales que $f'(\xi_1) > 0$ y $f'(\xi_2) < 0$.

2. Cítese un ejemplo de función que sea continua sobre el segmento $[a, b]$, que tenga derivada en cada punto del intervalo (a, b), pero que no tenga derivada (unilateral) en el punto a.

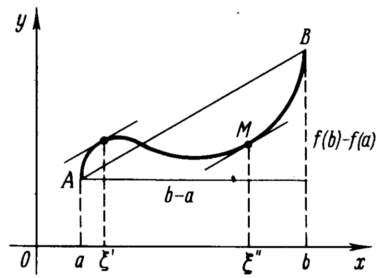


FIG. 53

Teorema 3 (de Lagrange *)). *Si la función f se continua sobre el segmento $[a, b]$ y en cada punto del intervalo (a, b) tiene derivada finita o infinita de signo determinado, entonces, en este intervalo existe al menos un punto ξ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{11.3}$$

Este teorema, evidentemente, es una generalización del teorema de Rolle.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función auxiliar

$$F(x) = f(x) - \lambda x \tag{11.4}$$

y definamos el número λ de forma tal que $F(a) = F(b)$, es decir, que $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$. Esto es equivalente a que

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{11.5}$$

Para la función F se cumplen todas las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, y la función λx, al ser lineal, es continua sobre todo el eje numérico; por esto, también la función $F(x) = f(x) - \lambda x$ será continua sobre el segmento $[a, b]$. La función f tiene en todos los puntos del intervalo (a, b) derivada finita o infinita, y la función λx derivada finita en todos los puntos del eje numérico, por esto, su diferencia, $F(x)$ también tiene en todos los puntos del intervalo (a, b) derivada finita o infinita (véase la observación en el p. 9.5). Finalmente, en los extremos del segmento $[a, b]$ por la elección de λ (véase (11.5)) la función F alcanza valores idénticos. Por esto, existe al menos un punto ξ, $(a < \xi < b)$ tal que $F'(\xi) = 0$. De (11.4) obtenemos $F'(x) = f'(x) - \lambda$, por esto $f'(\xi) - \lambda = 0$. Sustituyendo aquí λ de (11.5), obtenemos

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \ \square \tag{11.6}$$

El sentido geométrico del teorema de Lagrange consiste en lo siguiente. Sean $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ los extremos de la gráfica de la función f, y AB la cuerda que une los puntos A y B (fig. 53). Entonces la relación $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es igual a la tan-

*) J. L. Lagrange (1736 — 1813), matemático y mecánico francês.

gente del ángulo β entre la cuerda AB y el eje Ox, es decir,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \beta$$

y la derivada $f'(\xi)$, como es sabido (véase el p. 9.3), es igual a la tangente del ángulo α entre la tangente a la gráfica de la función f en el punto $(\xi, f(\xi))$ y el sentido positivo del eje Ox, es decir, $f'(\xi) = \operatorname{tg} \alpha$. Por esto, la igualdad (11.6) puede ser escrita en la forma

$$\operatorname{fg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

De esta forma, el teorema de Lagrange muestra que en el intervalo (a, b) debe encontrarse un punto ξ (quizá, no único, véase la fig. 53, donde los puntos ξ' y ξ'' satisfacen las condiciones del teorema), en el cual la tangente a la gráfica es paralela a la cuerda AB.

El teorema de Lagrange encontrará una serie de aplicaciones importantes en el futuro.

Demos otras formas, de notación de la fórmula (11.3). Sea $a < \xi < b$ y $\dfrac{\xi - a}{b - a} = \theta$. Entonces

$$\xi = a + \theta(b - a), \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.7}$$

Por el contrario, si ξ se expresa por la fórmula (11.7), entonces, como es fácil ver, $a < \xi < b$. De esta forma, en la forma (11.7) pueden ser representados todos los puntos del intervalo (a, b) y solamente ellos. Por esto, la fórmula (11.3) puede ser escrita en la forma

$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)](b - a), \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.8}$$

Hagamos ahora $a = x$, $b - a = \Delta x$, y por tanto, $b = x + \Delta x$; entonces (11.8) toma la forma

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.9}$$

La fórmula (11.9), así como las fórmulas equivalentes (11.3) y (11.8), se llaman *fórmulas de los incrementos finitos de Lagrange*, o sencillamente *fórmula de los incrementos finitos*, a diferencia de la igualdad aproximada

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \tag{11.10}$$

la que se llama a veces fórmula de los incrementos infinitesimales. Esta expresa el hecho de que el primer miembro y el segundo miembro de la igualdad aproximada (11.10) son iguales entre sí para la función f diferenciable en el punto x "salvo infinitésimos de orden superior al del incremento Δx cuando $\Delta x \to 0$".

OBSERVACIÓN. La fórmula de Lagrange (11.3) puede ser representada en la forma

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b)$$

donde $a < b$. De esta forma, es válida no sólo cuando $a < b$, sino también para $a > b$.

Señalemos tres corolarios del teorema de Lagrange, útiles en el futuro.

Corolario 1. *Sea la función f*

1) *continua sobre un intervalo (funito o infinito),*

2) *tiene derivada nula en todos los puntos de este intervalo, a excepción, puede ser, de un conjunto finito de éstos.*

Entonces la función f es constante sobre el intervalo señalado.

En efecto, supongamos que la función f satisface las condiciones enunciadas sobre el segmento Δ, $x_1 \in \Delta$, $x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$. Numeremos en orden creciente a aquellos puintos del intervalo Δ, en los cuales la derivada $f'(x)$ o bien no existe, o bien existe pero no es igual a cero: $f'(x) \neq 0$, y que se encuentran sobre el intervalo (x_1, x_2). Denotémoslos por $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sobre cada uno de los segmentos $[x_1, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{k-1}, a_k], \ldots, [a_n, x_2]$ la función f es continua y en todos sus puntos interiores tiene derivada (nula) y, por lo tanto, satisface las condiciones del teorema de Lagrange. Según este teorema aplicable a cada uno de los segmentos señalados, tendremos

$$\begin{gathered}
f(a_1) - f(x_1) = f'(\xi_1)(a_1 - x_1) = 0, \quad x_1 < \xi_1 < a_1,\\
f(a_2) - f(a_1) = f'(\xi_2)(a_2 - a_1) = 0, \quad a_1 < \xi_2 < a_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f(a_k) - f(a_{k-1}) = f'(\xi_k)(a_k - a_{k-1}) = 0 \quad a_{k-1} < \xi_k < a_k \qquad (11.11)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f(x_2) - f(a_n) = f'(\xi_{n+1})(x_2 - a_n) = 0, \quad a_n < \xi_{n+1} < x_2,
\end{gathered}$$

ya que $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \ldots = f'(\xi_{n+1}) = 0$. Sumando las igualdades (11.11), obtenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = 0,$$

es decir,

$$f(x_2) = f(x_1).$$

Por cuanto x_1 y x_2 eran puntos arbitrarios del segmento Δ analizado, esto significa que la función f es constante sobre Δ. □

El corolario 1 tiene una interpretación mecánica evidente: si la función $y = f(x)$ es la ley del movimiento de un punto material por una recta, x es el tiempo, y es la distancia (con signo) desde el punto de referencia sobre la recta, entonces la condición $f'(x) = 0$ para todos los $x \in (a, b)$, significa que la velocidad del punto analizado durante el intervalo de tiempo (a, b) siempre es igual a cero, es decir, el punto no se mueve, pero entonces, durante este tiempo la posición del punto, y por tanto el camino recorrido por éste, no varían. Esto significa que la funcíon $f(x)$ es constante sobre el intervalo (a, b).

Corolario 2. *Si las funciones f y g son continuas sobre un intervalo y en todos sus puntos, excepto un conjunto finito de éstos, tienen derivadas iguales*

$$f'(x) = g'(x),$$

entonces estas funciones se diferencian sobre el segmento analizado sólo en una constante:

$$f(x) = g(x) + c, \qquad (11.12)$$

c es una constante.

En efecto, la función $F = f - g$ satisface las condiciones del corolario 1, es decir, F es continua sobre el intervalo dado y $F' = 0$ en todos sus puntos, excepto, puede ser, un conjunto finito de éstos. Por esto $F = C$, es decir, tiene lugar la igualdad (11.12). □

Corolario 3. *Sea la función φ*

1) *continua sobre el intervalo (a, b);*

2) *diferenciable en todos los puntos del intervalo (a, b), a excepción, puede ser, de cierto punto $x_0 \in (a, b)$;*

3) *existe $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x)$; entonces existe también la derivada $\varphi'(x_0)$, además*

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varphi'(x).$$

En efecto, sea $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi'(x) = A$. Si $a < x < b$ y $x \neq x_0$ entonces por el teorema de Lagrange $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0)$ donde $\xi \in (x_0, x)$ si $x > x_0$, $\xi \in (x, x_0)$, si $x < x_0$, de donde

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(\xi).$$

Para mayor exactitud, consideremos que $x > x_0$. El punto $\xi = \xi(x)$ es una función de x y además, en general, una función multiforme. Elijamos arbitrariamente para cada $x \in (a, b)$ un valor cualquiera de ξ, entonces obtenemos una función unívoca $\xi(x)$ (como se dice, una rama unívoca de la función multiforme). Ya que $x_0 < \xi(x) < x$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} \xi(x) = x_0.$$

Aplicando la regla del cambio de variables para los límites de las funciones (véase el p. 4.8), obtenemos, que existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \varphi'(\xi) = A$$

y por tanto, existe también el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Esto significa que la derivada $\varphi'(x_0)$ existe y es igual a A. □

Ejercicio 3. Sea la función f continua sobre el intervalo (a, b) y diferenciable en todos los puntos de este intervalo, excepto, puede ser, cierto punto $x_0 \in (a, b)$. Supongamos que existen $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x)$, además, no son iguales entre sí. Demuéstrese que con estas suposiciones la derivada $f'(x)$ no existe.

En los teoremas de Rolle y Lagrange (así también como en el teorema de Cauchy, que expondremos a continuación) se habla de la existencia de cierto punto ξ, $a < \xi < b$, que puede ser llamado "punto medio", para el que se cumple una u otra de las igualdades. Con esto se explica el nombre de "teoremas sobre los valores medios" para este grupo de teoremas. Demostremos la última de las afirmaciones de este tipo que es necesaria para nosotros.

Teorema 4 (de Cauchy). *Sean las funciones f y g*

1) *continuas sobre el segmento $[a, b]$;*
2) *tienen derivadas en cada punto del intervalo (a, b);*
3) *$g' \neq 0$ en todos los puntos del intervalo (A, b).*

Entonces existe un punto ξ, $a < \xi < b$, tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{11.13}$$

Señalemos que de las hipótesis del teorema se deduce que la fórmula (11.11) tiene sentido, es decir, $g(a) \neq g(b)$. En efecto, si $g(a) = g(b)$, entonces la función g satisfaría las condiciones del teorema de Rolle y, por lo tanto, se encontraría un punto ξ tal que $g'(\xi) = 0$, $a < \xi < b$, lo que estaría en contradicción con la condición 3.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función auxiliar

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x), \tag{11.14}$$

donde el número λ lo hemos elegido de forma tal que $F(a) = F(b)$, es decir, que $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$. Para esto, es necesario tomar

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{11.15}$$

La función F satisface todas las condiciones del teorema de Rolle, por tanto, existe un punto ξ, $a < \xi < b$, tal que $F'(\xi) = 0$. Pero de (11.14) $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, y por esto

$$f'(\xi) = \lambda g'(\xi) = 0$$

de donde se deduce que

$$\lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{11.16}$$

Comparando (11.15) y (11.16), obtenemos la fórmula (11.13), usualmente llamada *fórmula de los incrementos finitos de Cauchy.* □

Señalemos que la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange es un caso particular de la fórmula de los incrementos finitos de Cauchy, en el cual $g(x) = x$. Hemos dado demostraciones independientes de estas fórmulas, en primer lugar por el important papel que desempeña la fórmula de Lagrange, en segundo lugar, para tener la posibilidad, utilizando una misma idea (la construcción de una función auxiliar, que satisfage las condiciones del teorema de Rolle), de aplicarla dos veces en las demostraciones, además, al inicio para mayor claridad, en un caso más sencillo.

La fórmula de Cauchy (11.13), al igual que la fórmula de Lagrange (11.3), es válida no sólo si $a < b$, sino también para $a > b$.

Ejercicio 4. Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Apliquémosle a esta función sobre el segmento [0, x] la fórmula de Lagrange:

$$x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = (2\xi \operatorname{sen}\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi})x,$$

donde $0 < \xi < x$. Reduzcamos ambos miembros de la igualdad en x cuando $x \neq 0$:

$$x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 2\xi \operatorname{sen}\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi}.$$

Pasando aquí al límite cuando $x \to 0$ (durante esto, evidentemente, $\xi \to 0$) obtenemos

$$\lim_{\xi \to 0} \cos\frac{1}{\xi} = 0,$$

ya que los otros dos sumandos, evidentemente, tienden hacia cero. Al mismo tiempo, el límite de la función $\cos\frac{1}{\xi}$, cuando el argumento tiende hacia cero, no existe. ¿Dónde está el error?

Problema 7 (de Darboux *)). Demúestrese que si una función es diferenciable sobre un segmento, entonces su derivada, al tomar dos valores cualesquiers, toma también cualquier valor intermedio.

§ 12. RESOLUCIÓN DE LAS INDETERMINACIONES POR LA REGLA DE L'HOSPITAL

En muchos casos la búsqueda del límite de una función, dada analíticamente, cuando el argumento tiende hacia cierto punto (hacia un número o hacia uno de los infinitos ∞, $+\infty$ ó $-\infty$), ejecutada sustituyendo formalmente el valor correspondiente en vez del argumento en la fórmula, que representa la función analizada, lleva a las expresiones de la forma

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0 \text{ ó } 1^\infty.$$

Estas se llaman *indeterminaciones*, ya que por ellas no se puede juzgar si existe o no el límite señalado, sin hablar ya sobre la determinación de su valor, si éste existe. En este caso, el cálculo del límite se llama también "*resolución de las indeterminaciones*".

Junto con el método fundamental del cálculo de los límites de las funciones -el método de selección de su parte principal- existen otros métodos de búsqueda de los límites. Algunos de estos, que tienen la denominación general de *regla de L'Hospital* **), los expondremos en este párrafo.

12.1. INDETERMINACIONES DE LA FORMA 0/0

Teorema 1. *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas sobre el segmento $[a, b]$ tales que:*

1) $f(a) = g(a) = 0$;
2) *existen las derivadas (por la derecha) $f'(a)$ y $g'(a)$, ademaś $g'(a) \neq 0$.*

Entonces existe el límite

*) G. Darboux (1872 — 1917), matemático francés.

**) L'Hospital G. (1661 — 1704), matemático francés.

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos el método de selección de la parte principal. Por la condición 2 tenemos (véase el p. 9.2).

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a),$$
$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a).$$

De aquí, por la condición 1, obtendremos que

$$f(x)=f'(a)(x-a)+o(x-a),\quad g(x)=g'(a)(x-a)+o(x-a),$$

y por esto

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(a)+\dfrac{o(x-a)}{(x-a)}}{g'(a)+\dfrac{o(x-a)}{(x-a)}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.\ \square$$

En el teorema 1 se ha supuesto la existencia de las derivadas en el punto a. Demostremos ahora un teorema próximo por su contenido al anterior, en el cual, sin embargo, no se supondrá la existencia de las derivadas $f'(a)$ y $g'(a)$.

Teorema 2. *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$:*

1) *diferenciables en el intervalo (a, b);*

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(X)=0$;

3) $g'(x)\neq 0$ *para todos los $x\in(a, b)$;*

4) *existe el límite* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *finito o infinito, igual a $+\infty$ ó $-\infty$.*

Entonces existe el límite

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por las condiciones del teorema, las funciones f y g, no están definidas en el punto a; definámoslas haciendo $f(a)=g(a)=0$. Ahora f y g son continuas en el punto a y satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy sobre el valor medio (véase el p. 11.2) sobre cualquier segmento $[a, x]$, donde $a<x<b$. Por esto, para cada x, $a<x<b$, existe un $\xi=\xi(x)\in(a, x)$, tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\tag{12.1}$$

además $\lim\limits_{x\to a+0}\xi(x)=a$.

Por esto, si existe $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'x)}=k$, entonces de la regla del cambio de variable para los límites de funciones, se deduce que también existe el $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k$.

Ahora de (12.1) obtenemos

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k.\ \square$$

Los teoremas 1 y 2 siguen siendo válidos con las transformaciones naturales, tanto en el caso del límite lateral izquierdo, como en el caso bilateral.

Teorema 3. *Sean las funciones f y g:*

1) *diferenciables cuando $x>c$;*

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

3) $g'(x)\neq 0$ *para todos los $x>c$;*

4) *existe el límite* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *finito o infinito, igual a $+\infty$ ó $-\infty$.*

Entonces existe también el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad podemos considerar que $c>0$ (si $c<0$, en calidad de nuevo valor de c tomaremos, por ejemplo, $c=1$).

Ejecutemos el cambio de variable $x=\dfrac{1}{t}$. Las funciones $\varphi(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ y $\psi(t)=g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ están definidas sobre el intervalo $(0, 1/c)$; si $x\to+\infty$, entonces $t\to+0$ y viceversa. Sobre el intervalo $(0, 1/c)$ existen las derivadas

$$\varphi'(t)=-f'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\quad\text{y}\quad\psi'(t)=-g'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2},$$

donde con virgulilla están indicadas las derivadas de las funciones f y g respecto al argumento inicial.

De lo dicho y de las condiciones del teorema se deduce que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ satisfacen sobre el intervalo $(0, 1/c)$ las condiciones 1, 2 y 3 del teorema 2. Mostremos además, que de la existencia del límite $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, el cual designaremos por k, se deduce la existencia de límite $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ y su igualdad a k, es decir, que se cumple también la condición 4 del teorema 2. En efecto, utilizando las expresiones obtenidas para las derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$, hallamos

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k.$$

Ahora, del teorema 2, aplicado a las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$, se deduce que $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)}=k$. Pero

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\frac{f(x)}{g(x)},$$

donde $x = \dfrac{1}{t}$, por esto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k. \ \square$$

Este teorema sigue siendo válido si se hace la transformación correspondiente, para $x \to -\infty$.

12.2. INDETERMINACIONES DE LA FORMA ∞/∞

Teorema 4. *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$:*
1) *diferenciables sobre el intervalo (a, b);*
2) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = \infty;$
3) $g'(x) \neq 0$ *sobre (a, b);*
4) *existe el límite finito o infinito, igual a $+\infty$ ó $-\infty$*

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{12.2}$$

Entonces existe también el límite

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos al principio que el límite (12.2) es finito; designémoslo por k:

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

Mostremos que también

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Para esto, elijamos los puntos x_0 y x tales que $a < x < x_0 < b$. Entonces, sobre el segmento $[x, x_0]$ las funciones f y g van a satisfacer las condiciones del teorema de Cauchy. Por esto, según este teorema existe un punto $\xi \in (x, x_0)$, tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

(Es evidente que el punto ξ depende de la elección de los puntos x y x_0, es decir, $\xi = \xi(x, x_0)$). Hallemos de esta fórmula la relación $f(x)/g(x)$. Transcribiéndola en la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

obtenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{12.3}$$

Como quiera que se escoja para un x_0 dado el punto tal que se cumpla la desigualdad $a < \xi = \xi(x, x_0) < x_0$, por la condición 4) del teorema tendremos

$$\lim_{x_0 \to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k,$$

y para un x_0 dado, por la condición 2) del teorema obtenemos

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ a^+}} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = 1.$$

Sin embargo, en la parte derecha de la fórmula (12.3) no se puede utilizar sencillamente el teorema sobre el límite del producto de funciones, ya que los límites de los factores que allí aparecen se toman en diferentes condiciones: en un caso, el punto x_0 tiende hacia el punto a, y en el otro el punto x_0 es fijo, y hacia el punto a tiende el punto x. No obstante, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, siempre se puede escoger x_0 tal que la relación $f'(\xi)/g'(\xi)$ sea tan cercana al número k para todos los $\xi \in (a, x_0)$, y después escoger $\delta > 0$, tal que la relación $\dfrac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}$ sea tan cercana a 1 para todos los $x \in (a, a + \delta)$, que como resultado para todos los x señalados se cumplirá la desigualdad

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon.$$

Hablando con propiedad, el teorema está demostrado para el caso de un límite finito (12.2) y en este lugar podemos poner el signo. $\square$

Para completar la exposición haremos algunas aclaraciones sobre las distintas etapas de la demostración, las que además, pueden ser fácilmente realizadas independientemente por aquellos que hayan asimilado suficientemente bien el material explicado con anterioridad.

Ante todo, se ha realizado la división por $f(x)$ y por $g(x)$. Para fundamentar esto, es necesario demostrar que para los valores correspondientes son válidas las desigualdades $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$. Naturalmente, estas desigualdades no tienen lugar, en general, para una elección cualquiera de los puntos $x \in (a, b)$, pero son válidas para todos los x suficientemente cercanos al punto a. En efecto, por la condición 2)

15—6179

del teorema existe un $\delta_1 > 0$ tal que para todos los $x \in (a, a + \delta_1)$ se cumplen las desigualdades $|f(x)| > 0$, $|g(x)| > 0$. Por esto, si escogemos x_0 tal que $a < x_0 < a + \delta_1$, entonces x también satisfará esta desigualdad, es decir, $a < x < a + \delta_1$, y por lo tanto, la división por $f(x)$ y por $g(x)$ será a ciencia cierta posible.

Después se realizó la división por $1 - f(x_0)/f(x)$. Esto también es posible para todos los x suficientemente cercanos al punto a. En efecto, por la condición $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ existe en δ_2 tal que para todos los x, que satisfacen las condiciones $a < x < a + \delta_2$, es válida la desigualdad $|f(x)| > |f(x_0)|$, y por esto, la desigualdad $1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)} \neq 0$. Durante esto, escogemos δ_2 tal que $\delta_2 < \delta_1$, esto siempre es posible.

De esta forma, la fórmula (12.3) es válida para todos los x y x_0 tales que $a < x < x_0 < a + \delta_2$.

Más adelante, para un $\varepsilon > 0$ dado por la existencia del límite finito

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k,$$

se encuentra un $\delta_3 > 0$, tal que para todos los $x \in (a, a + \delta_3)$ se cumple la desigualdad

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.4}$$

en este caso, escogemos $\delta_3$además de forma tal que $\delta_3 < \delta_1$, la elección de x_0 la sometemos a la condición $a < x_0 < a + \delta_3$.

Hagamos ahora,

$$\alpha_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - k, \quad x < \xi < x_0 \tag{12.5}$$

El punto ξ y por esto la función α_1 dependen de los puntos x_0 y x, sin embargo, durante la elección que hemos hecho, es decir, cuando

$$a < x < x_0 < a + \delta_3,$$

tendremos $a < \xi < a + \delta_3$, y por lo tanto, en virtud de la desigualdad (12.4) se cumplirá la desigualdad

$$|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.6}$$

Hagamos luego

$$\alpha_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} - 1. \tag{12.7}$$

Es evidente que por la condición 2) del teorema tenemos

$$\lim_{x \to a+0} \alpha_2(x) = 0. \tag{12.8}$$

De (12.3), (12.5) y (12.7) se deduce que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (k + \alpha_1)(1 + \alpha_2(x)) = k + \alpha_1 + (k + \alpha_1)\alpha_2(x). \tag{12.9}$$

Escojamos ahora δ_ε, $0 < \delta_\varepsilon < \delta_3$, tal que para $a < x < a + \delta_\varepsilon$ se cumpla la desigualdad

$$(|k| + |\alpha_1|)|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12.10}$$

para lo cual según (12.6) es suficiente que se cumpla la desigualdad

$$|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2(|k| + \varepsilon)}.$$

Esto es posible en virtud de (12.8).

De las desigualdades (12.6) y (12.10) se deduce que para todos los x, que satisfacen la condición $a < x < a + \delta_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|\alpha_1 + (k + \alpha_1)\alpha_2(x)| \leqslant |\alpha_1| + (|k| + |\alpha_1|)|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y por esto, de (12.9) se deduce que $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon$ cuando $a < x < a + \delta_\varepsilon$. Esto significa la existencia del límite

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Así se aclaran, en el "lenguaje de las desigualdades", las afirmaciones hechas anteriormente sobre la elección de los valores de x_0 y x suficientemente cercanos al punto a, que aseguran la cercanía necesaria de la relación $f(x)/g(x)$ al número k.

Analicemos ahora el caso del límite infinito.

Sea $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$. Entonces, en cierto entorno del punto a tenemos $f'(x) \neq 0$ (¿por que?) y $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Por esto, por lo demostrado anteriormente, $\lim\limits_{a \to a+0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$, de donde se deduce que $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Pero es necesario demostrar una afirmación más fuerte, o sea, que el límite es igual a $+\infty$. Mostremos esto. Ya que, por la suposición, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty$ cuando $x \to a + 0$, entonces existe un $\eta_1 > 0$, tal que para todos los x que satisfacen la condición $a < x < a + \eta_1$, tendremos

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 0.$$

Más adelante, fijemos x_0, $a < x_0 < \mathrm{a} + \eta_1$, ya que tendremos que utilizar otra vez la fórmula (12.3).

Por último, escojamos η_2, $0 < \eta_2 < x_0 - a$, tal que para todos los $x \in (a, a + \eta_2)$ tenga lugar la desigualdad $|f(x)| > |f(x_0)|$, $|g(x)| > |g(x_0)|$, a consecuencia de lo cual

$$1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} > 0, \quad 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} > 0. \tag{12.11}$$

Entonces, para todos los x, que satisfacen la condición $a < x < a + \eta_2$, se cumplen las desigualdades (12.11), la desigualdad

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 0 \quad \text{donde} \quad x < \xi = \xi(x) < x_0,$$

y es válida la fórmula (12.3). De ella se deduce que para todos los x señalados

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

De la afirmación demostrada anteriormente $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ se deduce ahora que $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

De forma análoga se analiza el caso

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty. \ \square$$

El teorema 4 junto con su demostración sigue vigente cuando se hacen las transformaciones naturales, y cuando $x \to a - 0$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, así como en el caso de los límites bilaterales.

Se puede mostrar, que cuando se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 que forman parte de cualquiera de los teoremas 2, 3 ó 4, no puede existir el límite $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ sin la existencia de uno de los dos "límites infinitos de signo determinado" $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ o $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Problema 8. Demostrar que si se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 del teorema 4 y $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces o bien $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, o bien $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Ejemplos. 1. Hallemos $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Observando que

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0,$$

obtenemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Esto significa que cuando $x \to +\infty$ la función $\ln x$ crece más lentamente que cualquier exponente positivo de la variable x.

A veces la regla de L'Hospital se debe aplicar varias veces.

2. Hallemos $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$, donde n es un número natural y $a > 1$. Tenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^n)'}{(a^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n x^{n-1}}{a^x \ln a} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0. \tag{12.12}$$

De esta forma, cuando $x \to +\infty$ cualquier grado de x^n crece más lentamente, que la función exponencial a^x, $a > 1$.

3. Se debe tener en cuenta que la realización de cálculos según el modelo (12.12) está justificada sólo en el caso cuando como resultado se obtiene un límite finito o infinito. Así, por ejemplo, sería erróneo escribir

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x + \operatorname{sen} x)'},$$

ya que el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x + \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

no existe.

En realidad, tomando la sucesión $x'_n = 2\pi n \to +\infty$ y $x''_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - \cos x'_n}{1 + \cos x'_n} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \cos x''_n}{1 + \cos x''_n} = 1.$$

Al mismo tiempo, la indeterminación dada de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ puede ser resuelta de forma elemental

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Ejercicio 1. Sean $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \operatorname{sen} x$. Hállese $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y demuéstrese que en este caso la regla de L'Hospital no es aplicable.

4. Puede ocurrir que la utilización de la regla de L'Hospital no simplifique el problema de determinación del límite de la función. Por ejemplo, aplicando la regla de L'Hospital para el cálculo del límite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ obtendremos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(\sqrt{1+x^2})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

es decir, se obtuvo el límite de la fracción inversa a la dada, es decir, el problema permaneció invariable. Conjuntamente con esto, el límite dado se halla fácilmente por el método elemental:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

5. Las indeterminaciones 0^0, ∞^0 ó 1^∞ se pueden resolver, tomando previamente el logaritmo de las funciones correspondientes. Por ejemplo, para hallar $\lim\limits_{x\to+0} x^x$, es conveniente hallar el límite

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Por esto, en virtud de la continuidad de la función exponencial

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = 1.$$

Las indeterminaciones de las formas $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$ se deben reducir a las formas $0/0$ ó ∞/∞. En este caso, como siempre, durante la aplicación de la regla de L'Hospital, en el cálculo se recomienda simplificar las expresiones obtenidas. Aclaremos esto en un ejemplo.

6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x}$. Señalemos que

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\operatorname{sen} x}\,\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2\operatorname{sen} x}.$$

El límite del primer factor de la parte derecha se halla directamente:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to0}\left(1 + \frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x\right) = 2,$$

y el límite del segundo, aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to0} \frac{x\operatorname{sen} x}{2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x} = \frac{1}{3}.$$

De esta forma, $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \frac{2}{3}$.

Ejercicios. Hállense los límites:

2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x - x^a}{x-a}$, $a>0$.
4. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$.
3. $\lim\limits_{x\to+0} x^\varepsilon \ln x$, $\varepsilon>0$.
5. $\lim\limits_{x\to0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

§ 13. FÓRMULA DE TAYLOR

13.1. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

Si la función $y = f(x)$ tiene en el punto x_0 derivada, entonces el incremento de esta función puede representarse en la forma

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

donde $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - y_0$, $y_0 = f(x_0)$ y $A = f'(x_0)$, es decir, $f(x) = y_0 + A(x-x_0) + o(x-x_0)$. Dicho de otra forma, existe la función lineal

$$P_1(x) = y_0 + A(x-x_0) \tag{13.1}$$

tal que

$$f(x) = P_1(x) + o(x-x_0), \quad x\to x_0,$$

además

$$P_1(x_0) = y_0 = f(x_0), \quad P_1'(x_0) = A = f'(x_0).$$

Planteemos un problema más general. Supongamos que la función f tiene en el punto x_0 n derivadas. Es necesario aclarar si existe un polinomio $P_n(x)$ de grado no mayor que n, tal que

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0, \tag{13.2}$$

y

$$f(x_0) = P_n(x_0), f'(x_0) = P'_n(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0). \tag{13.3}$$

Buscaremos este polinomio, por analogía con la fórmula (13.1), en la forma

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \ldots + A_n(x-x_0)^n.$$

Observando que $P_n(x_0) = A_0$, de la primera condición (13.3), es decir, de $f(x_0) = P_n(x_0)$, tenemos $A_0 = f(x_0)$. Luego,

$$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + \ldots + nA_n(x-x_0)^{n-1},$$

de donde $P'_n(x_0) = A_1$, y ya que $P'_n(x_0) = f'(x_0)$, entonces $A_1 = f'(x_0)$. Después encontramos la segunda derivada del polinomio $P_n(x)$:

$$P''_n(x) = 2\cdot1\cdot A_2 + \ldots + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}.$$

De aquí y de la condición $f''(x_0) = P''_n(x_0)$ obtenemos $A_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$ y en general

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Por la propia construcción, para el polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se cumplen todas las relaciones (13.3). Comprobemos si satisface la condición (13.2).

Sea
$$r_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x).$$

De la condición (13.3) se deduce que
$$r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \qquad (13.4)$$

Por esto, aplicando n veces la regla de L'Hospital para descubrir la indeterminación $\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n}$ cuando $x \to x_0$, y precisamente al principio $n - 1$ veces el teorema 2 del § 12 y después el teorema 1 del mismo párrafo, obtenemos:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$
es decir, en efecto $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$.

Así queda demostrado el importante teorema siguiente.

Teorema 1. *Supongamos que la función $f(x)$ definida sobre el intervalo (a, b) tiene en el punto $x_0 \in (a, b)$ derivadas hasta el orden n inclusive. Entonces, cuando $x \to x_0$*
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \qquad (13.5)$$
ó
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Este teorema sigue siendo válido, junto con su demostración, también para la función f, definida sobre el segmento $[a, b]$, cuando $x_0 \in [a, b]$, si para $x_0 = a$ y $x_0 = b$ por derivadas se entienden las derivadas unilaterales correspondientes.

La fórmula (13.5) se llama *fórmula de Taylor* *) *de n-ésimo orden con el término residual en la forma de Peano.*

El polinomio
$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (13.6)$$
se llama *polinomio de Taylor* de grado n, y la función
$$r_n(x) = f(x) - Pn(x) \qquad (13.7)$$
término residual de orden n de la fórmula de Taylor. Como se muestra, el término residual $r_n(x)$ es un infinitésimo, cuando $x \to x_0$, de orden más alto que todos los términos del polinomio de Taylor (13.6).

Mostremos otra forma de notación de la fórmula (13.5). Suponiendo
$$x - x_0 = \Delta x, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

*) Taylor (1685 — 1731), matemático inglés.

obtenemos
$$\Delta y = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\Delta x^k + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \qquad (13.5')$$

Si en la fórmula (13.5) $x_0 = 0$, entonces se obtiene una forma parcial de la fórmula de Taylor, llamada usualmente *fórmula de Maclaurin* *):
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0. \qquad (13.8)$$

El teorema demostrado permite sustituir cualquier función que satisfaga las condiciones de este teorema, en el entorno de cierto punto, por un polinomio salvo infinitésimos de orden más alto que los términos del polinomio. Este polinomio es el polinomio de Taylor. La magnitud del error está dada en este caso por el término residual.

La fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano da un método uniforme de selección de la parte principal de la función en un entorno de un punto dado. En esta circunstancia están fundamentadas las múltiples y distintas aplicaciones de la fórmula (13.5), en diferentes cuestiones del análisis.

Señalemos un corolario útil del teorema 1.

Corolario. *Sea la función $f(x)$ definida sobre el intervalo (a, b) y supongamos que tiene en el punto x derivadas hasta de orden $n + 1$ inclusive. Entonces cuando $x \to x_0$*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + O(x - x_0)^{n+1}. \qquad (13.9)$$

En efecto, según el teorema 1 cuando $x \to x_0$
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n+1}), \qquad (13.10)$$
y ya que
$$\frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + o((x - x_0)^{n+1}) = O((x - x_0)^{n+1}) \quad \text{para} \quad x \to x_0,$$
entonces, de la fórmula (13.10) se deduce directamente la fórmula (13.9). □

Ejercicio 1. Demuéstrese que si la función $f(x)$, en cierto entorno del punto x_0 tiene derivada de orden n, entonces, cualesquiera que sean el punto x de este entorno y la función $\psi(t)$, que es continua sobre el segmento con extremos en los puntos x_0 y x y tiene derivada no nula en el interior de este segmento, se halla un punto ξ, que se encuentra entre x_0 y x, tal que para el término residual $r_{n-1}(x)$ de la fórmula de Taylor de la función $f(x)$ tiene lugar la fórmula
$$r_{n-1}(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x - \xi)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

*) C. Maclaurin (1698 — 1746), matemático escocés.

Obténganse de aquí las formas siguientes de notación del término residual:

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!\,p}(x - x_0)^p(x-\xi)^{n-p}, \quad p > 0 \quad \text{(forma de Schlömilch-Roche *)}),$$

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{(forma de Lagrange)},$$

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x - x_0)^n,$$

$$0 < \theta < 1 \quad \text{(forma de Cauchy)}.$$

Indicación. Analícese la función auxiliar

$$\varphi(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k$$

y aplíquese a las funciónes φ y ψ el teorema de Cauchy sobre el valor medio. Para deducir el término residual en la forma Schlömilch — Roche hágase $\psi(t) = (x - t)^p$.

13.2. EL POLINOMIO DE TAYLOR COMO EL POLINOMIO DE MEJOR APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN EN UN ENTORNO DEL PUNTO DADO

Señalemos previamente que, evidentemente, todo polinomio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{13.11}$$

puede ser representado, para cualquier x_0, en la forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(x - x_0)^k. \tag{13.12}$$

En realidad, es suficiente en (13.11) poner $x = x_0 + h$ y desarrollar la parte derecha según las potencias de h; entonces

$$P_n(x) = A_0 + A_1 h + \ldots + A_n h^n, \quad \text{donde} \quad h = x - x_0,$$

es decir, obtuvimos la fórmula (13.12).

Supongamos ahora que para la función f, que tiene en el punto x_0 derivada de orden n, existe el polinomio $P_n(x)$ de grado no mayor que n, tal que para cierto $m \geqslant n$ se cumple la igualdad

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^m), \quad x \to x_0, \tag{13.13}$$

*) O. Schlömilch (1823 — 1901), matemático alemán. E. Roche (1820 — 1883), astrónomo y matemático francés.

y por lo tanto, ya que para $m \geqslant n$ tiene lugar la relación

$$o((x - x_0)^m) = o\ ((x - x_0)^n), \quad x \to x_0$$

(recordemos, que semejantes fórmulas se leen sólo de izquierda a derecha) y la igualdad

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{13.14}$$

Por lo dicho anteriormente, el polinomio $P_n(x)$ se puede representar en la forma (13.12), y entonces sus coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_n$, se hallan, como fue demostrado en el p. 13.1, por la fórmula

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Esto significa que el polinimio $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor (de grado no mayor que n), de la función f.

De esta forma, ningún polinomio de grado menor o igual a n, diferente del polinomio de Taylor, puede aproximar a la función dada con una exactitud $o((x - x_0)^n)$, cuando $x \to x_0$, y por lo tanto, con una exactitud mayor $o((x - x_0)^m)$, $m > n$, $x \to x_0$. Dicho de otra forma, el polinomio de Taylor es el único polinomio, que posee la propiedad (13.14), todos los polinomios restantes del mismo grado "aproximan peor" a la función f cuando $x \to x_0$. Precisamente en este sentido se dice que el polinomio de Taylor es el polinomio de mejor aproximación de la función dada en un entorno del punto x_0 cuando $x \to x_0$.

La unicidad de la representación de la función en la forma (13.13) puede ser utilizada a veces para su desarrollo según la fórmula de Taylor. Precisamente, si es posible obtener de alguna forma indirecta la representación (13.13), entonces, por el teorema 2 se puede afirmar que ésta es el desarrollo según la fórmula de Taylor (13.5), es decir, que los coeficientes del polinomio hallado se expresan por la fórmula (13.14).

Así, por ejemplo, la relación (13.12) representa el desarrollo del polinomio (13.11) según la fórmula de Taylor, además en este caso $r_n(x) \equiv 0$, por esto, por la unicidad del polinomio que satisface la condición (13.14), los coeficientes del polinomio (13.12) tienen la forma

$$A_k = \frac{P_n^k(x_0)}{k!}.$$

De esta forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

En particular, durante el desarrollo del polinomio de grado n según la fórmula de Taylor el resto de orden n es idénticamente igual a cero.

Supongamos que se exige desarrollar según la fórmula de Taylor la función $f(x) = 1/(1 - x)$ en un entorno del punto $x_0 = 0$. Observando que $1/(1 - x)$ no es otra cosa que la suma de la progresión geométrica infinita

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1,$$

y suponiendo $r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$, $|x| < 1$, obtenemos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + r_n(x),$$

donde $r_n(x) = O(x^{n+1})$ y, por tanto, $r_n(x) = o(x^n)$ cuando $x \to 0$. De esta forma, la representación

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \quad x \to 0,$$

es el desarrollo de la función $1/(1-x)$, según la fórmula de Taylor en un entorno de cero.

13.3. EJEMPLOS DE DESARROLLO SEGÚN LA FÓRMULA DE TAYLOR

1. $f(x) = \operatorname{sen} x$. La función $\operatorname{sen} x$ tiene derivadas de todos los órdenes. Hallemos para ella la fórmula de Taylor cuando $x_0 = 0$, es decir, la fórmula de Maclaurin (13.8). Fue demostrado (véase el p. 10.1), que $(\operatorname{sen} x)^{(m)} = \operatorname{sen}\left(x + m\dfrac{\pi}{2}\right)$, por esto

$$f^{(m)}(0) = \operatorname{sen}\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{para } m = 2k, \\ & k = 0, 1, 2, \ldots \\ (-1)^k & \text{para } m = 2k+1, \end{cases} \tag{13.15}$$

y por la fórmula (13.5),

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o más breve,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{cuando} \quad x \to 0.$$

Hemos escrito aquí el término residual en la forma $o(x^{2n+2})$, y no en la forma $o(x^{2n+1})$ ya que el término del polinomio de Taylor, siguiente al último sumando escrito, en virtud de (13.15) es igual a cero.

2. $f(x) = \cos x$. Como es conocido (véase el p. 10.1), $f^{(m)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{m\pi}{2}\right)$, y por esto,

$$f^{(m)}(0) = \cos\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{para } m = 2k+1, \\ & \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ (-1)^k & \text{para } m = 2k, \end{cases}$$

y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o, más breve,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{cuando} \quad x \to 0.$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

3. $f(x) = e^x$. Ya que $(e^x)^{(n)} = e^x$, entonces $f^{(n)}(0) = 1$, $n = 0, 1, \ldots$, por lo tanto,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{13.16}$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o más breve,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{cuando} \quad x \to 0.$$

De aquí, sustituyendo x por $-x$, obtenemos

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{cuando} \quad x \to 0, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13.17}$$

4. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Sumando y restando (13.16) y (13.17), tendremos

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{cuando} \quad x \to 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Por la unicidad de la representación de la función en la forma señalada (véase el p. 13.2) las relaciones obtenidas son las fórmulas de Taylor para las funciones $\operatorname{sh} x$ y $\operatorname{ch} x$.

5. $f(x) = (1 + x)^\alpha$, α es cierto número dado. Ya que $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$, entonces

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)$$

y, por lo tanto,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ó, más breve,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

6. $f(x) = \ln(1 + x)$. Es fácil ver que

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} = (1 + x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1 + x)^{-2}$$

y en general $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k - 1)!(1 + x)^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Por esto $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k - 1)!$, $k = 1, 2, \ldots$, y ya que $f(0) = 0$, entonces

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

cuando $x \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$, o, más breve,

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{cuando} \quad x \to 0, \quad x = 1, 2, \ldots .$$

OBSERVACIÓN 1. Por el corolario del teorema 1, las fórmulas obtenidas se pueden escribir, utilizando el símbolo O (O grande), de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+2}),$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}),$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!} + O(x^{2n+3}),$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1}), \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)}{k!} x^k + O(x^{n+1}),$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}),$$

$n = 1, 2, \ldots$, cuando $x \to x_0$.

Tal notación de la fórmula de Taylor en algunas cuestiones resulta más cómoda que su notación con el símbolo o (o pequeña).

OBSERVACIÓN 2. De los desarrollos de las funciones elementales, obtenidos por la fórmula de Taylor en el entorno de cero, es posible con ayuda de un cambio de variable lineal, obtener su desarrollo en un entorno de cualquier punto perteneciente a su dominio.

Por ejemplo, desarrollemos por este método, según la fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano, la función $f(x) = \sqrt[5]{x}$ en un entorno del punto $x_0 = 1$. Haciendo $x = 1 + t$ y aplicando la fórmula (13.19), obtenemos

$$\sqrt[5]{x} = (1 + t)^{1/5} =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}t + \frac{1}{2!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)t^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1} - 2\right)t^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right)\ldots\left(\frac{1}{5} - n + 1\right)t^n + o(t^n) =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}(x - 1) - \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5^2}(x - 1)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{3!5^3}(x - 1)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n 1 \cdot 4 \cdot 9 \ldots (5n - 6)}{n!5^n}(x - 1)^n + o((x - 1)^n),$$

cuando $x \to 1$ (o, lo que es lo mismo, cuando $t \to 0$). Este es el desarrollo buscado.

OBSERVACIÓN 3. Combinando los desarrollos de las funciones, señalados anteriormente, se puede seleccionar la parte principal (véase el p. 8.4) de las diferentes funciones elementales en los entornos de tales puntos que cuando el argumento tiende hacia ellos la función tiende a cero o al infinito, estos casos se encuentran con mayor frecuencia.

En calidad de ejemplo seleccionemos la parte principal de la función $\operatorname{ctg} x$ cuando $x \to 0$ hasta el orden $O(x^3)$.

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)}{\left[x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right]} =$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right]\left[1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right]\left[1 + \frac{x^2}{6} - O(x^4) + O((-\frac{x^2}{6} + O(x^4))^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right] = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + O(x^3), \quad x \to 0.$$

Aquí fueron utilizados los desarrollos por la fórmula de Taylor del coseno, del seno y del binomio $(1 + u)^\alpha$ cuando $\alpha = -1$ y $u = -\frac{x^2}{6} + O(x^4)$, $x \to 0$.

13.4. CÁLCULO DE LÍMITES CON AYUDA DE LA FÓRMULA DE TAYLOR (MÉTODO DE SELECCIÓN DE LA PARTE PRINCIPAL)

La fórmula de Taylor da una regla muy sencilla y muy general para seleccionar la parte principal de una función. Como resultado, este método de cálculo de los límites de las funciones con ayuda de la selección de la parte principal adquiere un carácter algorítmico acabado.

Analicemos primeramente el caso de las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$. Supongamos se exige hallar el límite $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. En este caso, se recomienda desarrollar según la fórmula de Taylor las funciones f y g en un entorno del punto x_0 (si, naturalmente, esto es posible), limitándose en este desarrollo sólo a los primeros términos diferentes de cero, es decir, tomar el desarrollo en la forma

$$f(x) = a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad a \neq 0,$$
$$g(x) = b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m), \quad b \neq 0,$$

entonces

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{a(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)}{b(x - x_0)^m + o((x - x_0)^m)} =$$
$$= \frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x - x_0)^{n-m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > m, \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } n = m, \\ \infty & \text{si } n < m. \end{cases}$$

Con frecuencia resulta cómodo para el desarrollo de las funciones f y g según la fórmula de Taylor utilizar el grupo de desarrollos de las funciones elementales, obtenido en el p. 13.13. Para esto se debe, en el caso de $x_0 \neq 0$ ejecutar previamente el cambio de variables $t = x - x_0$; entonces $x \to x_0$ corresponderá a $t \to 0$. El caso de $x \to \infty$ con el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ se reduce al caso $t \to 0$.

Si se tiene la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, es decir, se exige hallar $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces es fácil reducirla al caso analizado $\frac{0}{0}$ mediante la transformación $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

De forma semejante al cálculo de los límites, con ayuda de la regla de L'Hospital, aplicando el método de selección de la parte principal para resolver las indeterminaciones de la forma $0 \cdot \infty$ y $\infty - \infty$ se les debe transformar a las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$. Por último, para resolver las indeterminaciones de la forma

0^0, ∞^0 y 1^∞ por el método señalado, es necesario tomar, previamente, el logaritmo de las funciones analizadas.

Analicemos en ejemplos, cómo se aplica la fórmula de Taylor para el cálculo de los límites de las funciones. Supongamos que se exige hallar

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}.$$

Observando que (véase el p. 13.3)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - o(x^3), \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$
$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3/3}{x^3/6} = 2.$$

Analicemos la indeterminación de la forma $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2}{x^2\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]^2 - x^2}{x^2[x + o(x)]^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3 + o(x^4)}{x^2[x^2 + o(x^2)]} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

En calidad de último ejemplo calculemos el límite $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x}$, es decir, resolvamos la indeterminación de la forma 1^∞. Según la regla general, hallamos el límite del logaritmo de la expresión, que se encuentra bajo el signo del límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x + o(x^2)}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + o(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{O(x)}{x} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Ejercicios. Hállense los límites:

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x - x^2)}{x \operatorname{sen} x}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{1/x} - e}{x}$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x) - \cos x}{x^4}$.

6. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\sqrt[4]{1 - x^2} - 4e^{x^3} + \ln(1 + x^2)}{\operatorname{arctg} x - \operatorname{sen} x}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x}) + 2x^3}{x^5}$.

§ 14. INVESTIGACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LAS FUNCIONES

14.1. CRITERIO DE MONOTONÍA DE LAS FUNCIONES

Teorema 1. *Para que una función f diferenciable sobre el intervalo (a, b) crezca (decrezca) sobre este intervalo, es necesario y suficiente que su derivada en todos los puntos de éste sea no negativa, $f'(x) \geqslant 0$ (no positiva, respectivamente, $f'(x) \leqslant 0$).*

Si en todos los puntos de (a, b) la derivada es positiva: $f'(x) < 0$ (respectivamente negativa: $f'(x) < 0$), entonces la función f crece estrictamente (decrece estrictamente) sobre el intervalo analizado.

NECESIDAD. Si la función f crece (decrece) sobre (a, b), entonces para cualquier punto $x_0 \in (a, b)$ cuando $\Delta x > 0$ tenemos $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant 0 (\Delta y \leqslant \leqslant 0)$. Por esto $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$ $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0\right)$; pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos $f'(x_0) \geqslant 0 (f'(x_0) \leqslant 0)$.

SUFICIENCIA. Sea $a < x_1 < x_2 < b$. Entonces, según la fórmula de Lagrange (véase el p. 11.2) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, donde $x_1 < \xi < x_2$. Ya que $x_2 - x_1 > > 0$, entonces cuando $f'(x) \geqslant 0$ sobre (a, b) (de donde se deduce que en particular, $f'(\xi) \geqslant 0$) tendremos $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, es decir, la función f crece. Análogamente, cuando $f'(x) \leqslant 0$ sobre (a, b) tenemos $f'(\xi) \leqslant 0$, y por lo tanto, $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, es decir, la función f decrece.

Si $f'(x) > 0$ sobre (a, b), entonces $f'(\xi) > 0$ y por esto, $f(x_2) > f(x_1)$, es decir, la función f crece estrictamente. Sea ahora $f'(x) < 0$ sobre (a, b); entonces $f'(\xi) < 0$, por lo tanto, $f(x_2) < f(x_1)$, es decir, la función f decrece estrictamente. □

Señalemos que las condiciones $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ no son necesarias para el crecimiento estricto, respectivamente decrecimiento estricto de la función diferenciable sobre un intervalo, lo que muestran los ejemplos de las funciones $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = -x^3$. La primera de ellas crece estrictamente, y la segunda decrece estrictamente sobre todo el eje numérico, pero para $x = 0$ sus derivadas se hacen nulas.

El teorema sigue siendo válido para las funciones continuas, que no tengan derivadas en un número finito de puntos. La afirmación de la segunda parte del teorema sigue siendo válida, si además, en un número finito de puntos la derivada se anula.

Por ejemplo,

si la función es continua sobre cierto intervalo y tiene en todos los puntos derivada positiva (negativa), excepto, puede ser, en un número finito de puntos, en los cuales la derivada se hace nula o no existe, entonces la función crece estrictamente (respectivamente, decrece estrictamente) sobre el intervalo analizado.

Esto se deduce directamente del teorema 1: es suficiente aplicarlo sucesivamente a todos los intervalos, en los que se divide el intervalo dado por el conjunto finito de puntos señalados.

Ejemplo. Investiguemos la función

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{cuando} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{cuando} \quad x = 0. \end{cases}$$

La función f es diferenciable (y, por lo tanto, continua) sobre el segmento $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Una revisión especial la requiere sólo la existencia de la derivada en el punto $x = 0$. Aplicando, por ejemplo, dos veces la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t - t}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{2t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \operatorname{sen} t = 0.$$

Esto también significa que existe $f'(0) = 0$.

Para todos los $x \neq 0$ tenemos

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0,$$

o sea, $x < \operatorname{tg} x$, si $0 < x < \pi/2$ (véase la demostración del lema 1 en el p. 8.1). Por tanto, la función f decrece estrictamente sobre el segmento $[0, \pi/2]$, y por esto $f(0) > f(x) > f(1)$, es decir,

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \quad \text{cuando} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{14.1}$$

14.2. DETERMINACIÓN DE LOS VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE LA FUNCIÓN

Definición 1. *Sea la función f definida en cierto entorno del punto x_0. Entonces x_0 se llama punto de máximo (punto de mínimo, respectivamente) de la función f, si existe un $\delta > 0$ tal que para todos los Δx que satisfacen la condición $|\Delta x| < \delta$, se cumple la desigualdad $f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0)$ (respectivamente $f(x_0 + \Delta x) \geqslant \geqslant f(x_0)$).*

Si existe un $\delta > 0$, tal que para todos los $\Delta x \neq 0$, tales que $|\Delta x| < \delta$, se cumple la desigualdad $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ (respectivamente $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$), entonces x_0 se llama punto de máximo estricto (respectivamente, mínimo estricto).

Los puntos de máximo y mínimo (estrictos) se llaman puntos de extremo (estricto).

Para los puntos x_0 de extremo estricto de la función f, y sólo para ellos, el incremento $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ no cambia de signo cuando el argumento pasa por x_0, es decir, cuando cambia el signo de Δx. Precisamente $\Delta f < 0$ para todos los puntos de máximo estricto y $\Delta f > 0$ en el caso de mínimo estricto independientemente del signo del suficientemente pequeño $\Delta x \neq 0$.

Teorema 2 (condiciones necesarias del extremo). *Supongamos que x_0 es un punto de extremo de la función f, definida en cierto entorno del punto x_0. Entonces o bien la derivada $f'(x_0)$ no existe, o bien $f'(x_0) = 0$.*

En efecto, si x_0 es un punto de extremo para la función f, entonces se encuentra un entorno $U(x_0, \delta)$, tal que el valor de la función f en el punto x_0 será el mayor o el menor en este entorno. Por esto, si en el punto x_0 existe la derivada, entonces ella, por el teorema de Fermat (véase el p. 11.1), es igual a cero.

Señalemos que la condición $f'(x) = 0$ no es, para las funciones diferenciables cuando $x = x_0$, una condición suficiente para la presencia de extremo, como esto muestra el ejemplo de la función $f(x) = x^3$, la que para $x = 0$ tiene derivada igual a cero, pero para la cual $x = 0$ no es un punto de extremo.

Ejercicio 1 (condiciones suficientes de extremo). Sea la función f definida sobre el intervalo (a, b) y continua en el punto $x_0 \in (a, b)$. Demuéstrese que si f crece (estrictamente) sobre el intervalo (a, x_0) y decrece (estrictamente) sobre (x_0, b), entonces x_0 es un punto de máximo (estricto); si la función f decrece (estrictamente) sobre (a, x_0) y crece (estrictamente) sobre (x_0, b), entonces x_0 es un punto de mínimo (estricto).

Teorema 3 (condiciones suficientes de extremo estricto). *Sea la función f diferenciable en cierto entorno del punto x_0, excepto, puede ser, en el propio punto $x_0 \in (a, b)$, en el cual ella es, sin embargo, continua. Si la derivada $f'(x)$ cambia de signo cuando pasa por x_0 (esto significa, que existe un número $\delta > 0$ tal que los valores de la derivada f' tienen un mismo signo en todo $(x_0 - \delta, x_0)$ y signo contrario para todos los $x \in (x_0, x_0 + \delta)$), entonces x_0 es un punto de extremo estricto.*

En este caso, si para $x_0 - \delta < x < x_0$ se cumple la desigualdad $f'(x) > 0$ y para $x_0 + \delta > x > x_0$ la desigualdad $f'(x) < 0$, entonces x_0 es un punto de máximo estricto; si para $x_0 - \delta < x < x_0$ se cumple la desigualdad $f'(x) < 0$ y para $x_0 + \delta > x > x_0$ la desigualdad $f'(x) > 0$, entonces x_0 es un punto de mínimo estricto (fig. 54).

DEMOSTRACIÓN. Analicemos el caso $f'(x) > 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para $x > x_0$ donde x pertenece al entorno del punto x_0, señalado en las condiciones del teorema. Por el teorema de Lagrange (véase el p. 11.2)

$$\delta f = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

DONDE ξ se encuentra en el intervalo con extremos x_0 y x.

Si $x < x_0$, entonces $x - x_0 < 0$ y $f'(\xi > 0$, ya que $x < \xi < x_0$. Si $x > x_0$, entonces $x - x_0 < 0$ y $f'\xi) > 0$, ya que en este caso $x_0 < \xi < x$. De esta forma,

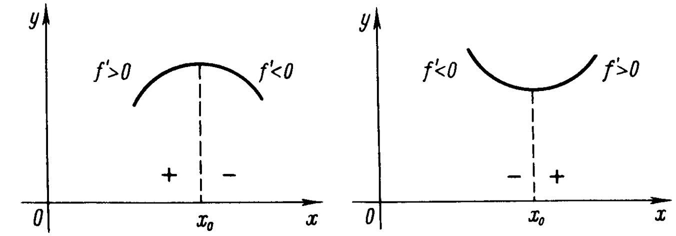


FIG. 54

siempre $\Delta f < 0$, es decir, el punto x_0 es un punto de máximo estricto. Análogamente se analiza el segundo caso. □

Del p. 14.1 se deduce que si la función tiene en todos los puntos de cierto entorno reducido de un punto dado x_0 derivada de un mismo signo, y en el propio punto x_0 la derivada o bien es igual a cero o bien no existe, sin embargo, la función es continua, es decir, si la derivada de una función continua "no cambia de signo" cuando pasa por el punto x_0, entonces este punto a ciencia cierta *no es un punto de extremo* de la función analizada (más aún, la función en el entorno señalado crece o decrece estrictamente, en dependencia de que la derivada en los puntos $x \neq x_0$ sea positiva o negativa).

Uniendo esta afirmación con el teorema 3, demostrado anteriormente, obtenemos el resultado siguiente.

Si la función $f(x)$, definida en cierto entorno del punto x_0, continua cuando $x = x_0$, tiene en todos los puntos del entorno analizado, excepto, puede ser, del punto x_0, derivada, y esta derivada por cada lado de x_0 conserva signo constante (por lo tanto, se puede hablar sobre la conservación o del cambio del signo de la derivada cuando pasa por x_0), entonces, para que la función alcance su extremo cuando $x = x_0$, es necesario y suficiente que la derivada cambie de signo cuando pasa por el punto x_0.

Se debe, sin embargo, prestar atención al hecho de que el caso aquí analizado, es decir, el caso cuando se puede hablar en el sentido señalado sobre el cambio de signo de la derivada cuando pasa por el punto x_0, no agotan las situaciones posibles (incluso para las funciones diferenciables en todos los puntos): puede suceder, que en entornos unilaterales, tan pequeños como se quiera, del punto x_0 la derivada de la función cambie de signo. En este caso, hay que utilizar otros métodos investigando las funciones para el extremo cuando $x = x_0$.

Por esto, en la clase de todas las funciones diferenciables, el teorema 3 da sólo *las condiciones suficientes* de extremo estricto.

Problema 9. Constrúyase un ejemplo de función, que sea diferenciable sobre un intervalo, alcanza en cierto punto x_0 un extremo estricto, y su derivada en cualquier entorno del punto x_0 (tanto por la izquierda, como por la derecha de ella) toma valores positivos y negativos (de esta forma, demuéstrese, que la condición de cambio de signo de la derivada en el punto dado es suficiente para la presencia de un extremo estricto, pero al mismo tiempo no es necesaria).

Introduzcamos otro concepto que utilizaremos en el futuro.

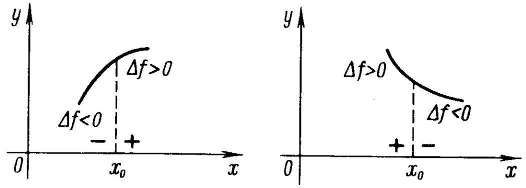


FIG. 55

Definición 2. *Sea la función f definida en cierto entorno del punto* x_0. *Llamaremos a* x_0 *punto de crecimiento (decrecimiento) del la función f, si existe un* $\delta > 0$, *tal que cuando* $x_0 - \delta < x < x_0$ *se cumple la desigualdad* $f(x) < f(x_0)$ *(respectivamente* $f(x) > f(x_0)$*), y cuando* $x_0 < x < x_0 + \delta$ *la desigualdad* $f(x) > f(x_0)$ *(respectivamente* $f(x) < f(x_0)$*).*

De esta forma, los puntos de crecimiento y decrecimiento de la función f se caracterizan por que durante el paso por ellos el incremento Δf cambia de signo, más preciso, de " − " a " + " en el punto de crecimiento y de " + " a " − " en el punto de decrecimiento (fig. 55).

No se debe pensar que si la función está definida sobre el intervalo, entonces cualquier punto de este intervalo es o bien un punto de extremo de la función, o bien un punto de crecimiento, o bien un punto de decrecimiento: pueden existir puntos, que no pertenezcan a ninguno de los tipos señalados. Por ejemplo, el punto $x = 0$ para la función

$$y = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{cuando} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = 0 \end{cases} \tag{14.2}$$

no es ni punto de extremo, ni punto de crecimiento, ni punto de decrecimiento.

La derivada de la función (14.2) es igual (véase el ejemplo 8 en el p. 9.7)

$$y' = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{cuando} \quad x \neq 0, & (14.3') \\ 0 & \text{cuando} \quad x = 0. & (14.3'') \end{cases}$$

De esta forma, la función (14.2) es diferenciable sobre todo el eje numérico. Cuando $x = 0$ su derivada tiene discontinuidad de segundo género, ya que

$$\lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \tag{14.4}$$

y el segundo sumando en el segundo miembro de la igualdad (14.3′), es decir, $-\cos \dfrac{1}{x}$ no tiene límite cuando $x \to 0$. Además de esto, este sumando, variando en cualquier entorno unilateral del punto $x = 0$ desde -1 hasta $+1$, cambia de signo infinitas veces. De aquí, a base de las fórmulas (14.3′) y (14.3′′) y (14.4) se deduce que la derivada de la función (14.2) en cualquier entorno unilateral del cero, tan pe-

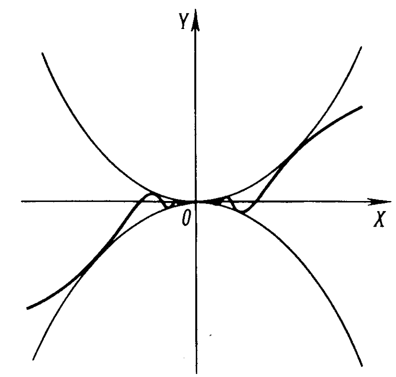


FIG. 56

queño como se quiera, también cambia de signo. El carácter general del comportamiento de la función (14.2) está representado en la fig. 56.

Enunciemos ahora las condiciones suficientes para la presencia de extremos estrictos, así como también de los puntos de crecimiento y decrecimiento fundamentadas en la utilización de las derivadas de órdenes superiores.

Teorema 4. *Supongamos que en el punto* x_0 *para la función f existen las derivadas hasta de orden* $n \geqslant 1$ *inclusive, además*

$$f^{(i)}(x_0) = 0 \quad \textit{para} \quad i = 1, \ldots, \quad n - 1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{14.5}$$

Entonces, si $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, *es decir, n es un número par, entonces la función f tiene en el punto* x_0 *un extremo estricto, más preciso, un maximo cuando* $f^{(2k)}(x_0) < 0$ *y un mínimo cuando* $f^{(2k)}(x_0) > 0$. *Si* $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, \ldots$, *es decir, n es un número impar, entonces la función f no tiene en el punto* x_0 *extremos; en este caso,* x_0 *es un punto de crecimiento cuando* $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ *y de decrecimiento cuando* $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$.

Hagámosle a la demostración del teorema una pequeña observación.

Si $\beta(x) = o(\alpha(x))$ cuando $x \to x_0$, entonces existe un $\delta > 0$, tal que cuando $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, es válida la desigualdad

$$|\beta(x)| \leqslant \frac{1}{2}\, |\alpha(x)|. \tag{14.6}$$

En realidad,

$$\beta(x) = \varepsilon(x)\alpha(x), \tag{14.7}$$

donde $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ y, por lo tanto, existe un δ tal que cuando $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, se cumple la desigualdad

$$|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}. \tag{14.8}$$

De (14.7) y (14.8) se deduce (14.6).

DEMOSTRACIÓN. Ante todo observemos que ya que f tiene en el punto x_0 derivada de orden $n \geqslant 1$, entonces (según la definición de derivada) la derivada de orden $n-1$ de la función analizada, está definida en cierto entorno del punto x_0. Por esto, la propia función f también está definida, en todo caso, en el mismo entorno del punto x_0.

Escribamos la fórmula de Taylor de orden n para la función f en un entorno del punto x_0. En virtud de (13.5′) y la condición (14.5) tendremos

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \alpha(x), \tag{14.9}$$

donde $\Delta x^n \overset{\text{def}}{=} (\Delta x)^n$,

$$\alpha(x) = o(\Delta x^n), \quad \Delta x \to 0,$$

y, por lo tanto (véase el p. 8.2),

$$\alpha(x) = o\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right), \quad \Delta x \to 0.$$

Por esto, por la observación hecha, existe un $\delta > 0$, tal que cuando $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$,

$$|\alpha(x)| < \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right|.$$

De aquí se deduce que cuando $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$, el signo del segundo miembro de la igualdad (14.9), y por lo tanto, el signo de Δf coincide con el signo del primer sumando del segundo miembro.

Si $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces en (14.9) Δx se eleva a una potencia par, por esto el signo de Δf no depende del signo de $\Delta x \neq 0$, y por lo tanto, x_0 es un punto de extremo estricto, además un punto de máximo estricto cuando $f^{(2k)}(x_0) < 0$ (en este caso $\Delta f < 0$) y mínimo estricto cuando $f^{(2k)}(x_0) > 0$ (en este caso $\Delta f > 0$).

Si $n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, entonces Δx se eleva a una potencia impar, por esto, el signo de Δf cambia junto con la variación del signo de Δx, y, por lo tanto, x_0 no es un punto de extremo. Si Δx cambia de signo de "−" a "+", entonces caundo $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ el incremento Δf cambia el signo de "−" a "+", y, por lo tanto, x_0 es un punto de crecimiento de la función f, y cuando $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$ el incremento Δf cambia de signo de "+" a "−", y, por lo tanto, x_0 es un punto de decrecimiento de la función f. □

Del teorema demostrado se derivan, en particular, cuando $n = 1$ y $n = 2$ dos corolarios.

1. *Si $f'(x) > 0$, entonces x_0 es un punto de crecimiento de la función; si $f'(x) < 0$, entonces x_0 es un punto de decrecimiento de la función.*

2. *Si $f'(x_0) = 0$, y $f''(x_0) \neq 0$, entonces cuando $f''(x_0) < 0$, x_0 es un punto de mínimo estricto, y cuando $f''(x_0) < 0$, es un punto de máximo estricto de la función* (fig. 57).

El corolario 1 sigue siendo válido para las derivadas infinitas: si $f'(x_0) = +\infty$ (respectivamente $f'(x_0) = -\infty$), entonces x_0 es un punto de crecimiento (respecti-

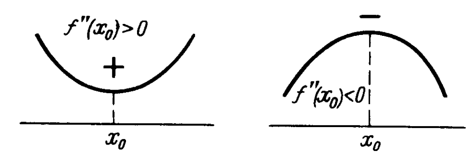


FIG. 57

vamente de decrecimiento) de la función. En realidad, si por ejemplo, $f'(x_0) = +\infty$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, y, en particular, para $\varepsilon = 1$ existe un $\delta > 0$, tal que para todos los Δx, que satisfacen la condición $|\Delta x| < \delta$, tiene lugar la desigualdad $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 1$. Por esto cuando $0 < \Delta x < \delta$ tenemos $\Delta y > \Delta x > 0$ y cuando $-\delta < \Delta x < 0$, análogamente $\Delta y < \Delta x < 0$, es decir, x_0 es un punto de crecimiento. De forma semejante se analiza el caso $f'(x_0) = -\infty$.

Señalemos que del primer corolario otra vez se deriva el teorema de Fermat (véase el teorema 1 del p. 11.1). En efecto, si la función $f(x)$ está definida en cierto entorno del punto x_0 y tiene en este punto un extremo, entonces la derivada en x_0 no puede ser ni positiva, ni negativa, ya que en caso contrario la función o bien crecería, o bien decrecería en este punto. Por lo tanto, la derivada en x_0, o no existe, o si existe, necesariamente es nula.

Observemos también que del teorema 4 se deduce directamente el criterio siguiente de presencia de puntos extremos.

Supongamos que para la función f en el punto x_0 existen las derivadas hasta de orden $n \geqslant 1$, inclusive, además

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad n-1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Entonces, para que cuando $x = x_0$ la función alcance un extremo, es necesario y suficiente que n sea un número par.

Todas las reglas obtenidas son válidas sólo en el caso cuando la función f está definida en cierto entorno del punto x_0. Sin embargo, sobre los extremos de la función se puede hablar no sólo en este caso: sea f una función definida sobre cierto conjunto númerico E; llamaremos a $x_0 \in E$ *punto de máximo (mínimo)* *), si existe un $\delta > 0$, tal que si $x \in E$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivamente $f(x) \geqslant f(x_0)$). De una forma semejante se definen en este caso los conceptos de máximo estricto y de mínimo estricto, se debe solamente cambiar los signos de las desigualdades no estrictas por los de las desigualdades estrictas y exigir además que $x \neq x_0$.

Por ejemplo, si la función f está definida sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, entonces el punto a en el sentido señalado puede ser extremal. Señalemos, sin embargo, que la derivada (por la derecha) en este punto, en general, no está obligada a convertirse en cero. Así, la función $y = x$, analizada sobre el segmento $[0, 1]$, tiene mínimo estricto cuando $x = 0$ y maximo estricto cuando $x = 1$, sin embargo, en estos puntos, como sobre todo el segmento $[0, 1]$, $y' = 1$.

*) Sería correcto agregar local, pero no vamos a complicar la terminología.

La aclaración de la circunstancia de si la función tiene o no extremos en los extremos del intervalo, perteneciente a su dominio (a estos extremos los llamaremos extremales), exige una investigación especial.

Ejercicio 2. Sea la función f definida sobre el segmento $[a, b]$ y tiene derivadas cuando $x = a$ y $x = b$. Demuéstrese que si $f'_+(a) > 0$ (respectivamente $f'_-(b) < 0$, entonces el punto $x = a$ (respectivamente $x = b$) es un punto de mínimo estricto, y si $f'_+(a) < 0$ (respectivamente $f'(b) > 0$), entonces $x = a$ (respectivamente $x = b$) es un punto de máximo estricto.

Los teoremas establecidos por nosotros descansan en la base de un método, que permite resolver uniformemente infinidad de problemas matemáticos, físicos y técnicos, en los cuales se buscan los valores extremos de alguna magnitud.

Supongamos, por ejemplo, que se exige determinar el valor máximo de la función f sobre el segmento $[a, b]$. Puede suceder, que esto sea posible realizar de una forma suficientemente sencilla por algún método, partiendo de un tipo concreto de función. Si no se ve cómo se puede hacer esto, entonces se deben hallar todos sus puntos críticos, que se encuentren sobre $[a, b]$ (el punto, en el cual la función está definida, y su derivada o bien es nula, o bien no existe, usualmente se llama *punto crítico* de esta función). Después, de estos valores de x es necesario, partiendo de lo dicho, separar aquellos en los cuales es posible un máximo (se puede a ciencia cierta desechar los puntos que satisfacen las condiciones suficientes para la presencia de un mínimo). Después de esto, es suficiente comparar entre sí, por la magnitud, los valores de la función en los puntos obtenidos y los números $f(a)$ y $f(b)$; el mayor de estos números será el valor máximo de la función sobre el segmento $[a, b]$. Este problema puede resolverse en principio, a ciencia cierta, si el conjunto de los puntos críticos es finito.

Si la función está definida sobre el intervalo semiabierto (finito o infinito), por ejemplo, sobre el intervalo semiabierto de la forma $[a, b)$, el problema sobre la determinación de su valor máximo sobre este intervalo semiabierto exige investigaciones auxiliares, hallando el conjunto de los puntos señalados anteriormente, es necesario estudiar el comportamiento de la función cuando $x \to b - 0$. De forma análoga se resuelven los problemas de determinación de los valores mínimos de la función.

Sin embargo, no se debe pensar, que el método expuesto permite hallar los puntos de extremo de la función dada con el grado de exactitud necesario. Esto no es así, ya que si utilizamos este método, es necesario ante todo, saber resolver la ecuación $f'(x) = 0$ con el grado de exactitud dado, lo que resulta otro problema matemático. Como éste se resuelve con ayuda del cálculo diferencial, en aquellos casos cuando la solución exacta de la ecuación no se da en una forma explícita, se mostrará más adelante (véase el tomo 2, § 60).

Ejemplo. Dos puntos se mueven con velocidades constantes v_1 y v_2 por dos rectas, que forman un ángulo recto, en el sentido del vértice de este ángulo, del cual al inicio del movimiento el primer punto se encontraba a una distancia a y el segundo a una distancia b. ¿En qué momento después del inicio del movimiento la distancia entre los puntos será mínima?

Sea $\rho = \rho(t)$ la distancia entre los puntos en el momento t después del inicio del movimiento, que consideraremos comenzado cuando $t = 0$. Entonces

$$\rho^2(t) = (a - v_1t)^2 + (b - v_2t)^2.$$

La función $\rho(t)$, evidentemente, alcanza el mínimo para el mismo valor t, para el cual alcanza el mínimo la función $y = \rho^2(t)$.

Físicamente es evidente que la distancia $\rho(t)$ debe alcanzar un mínimo (los cuerpos comienzan a acercarse) y a ciencia cierta no hay máximo, ya que $\rho(t) \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. En virtud de la condición necesaria de extremo esto puede ser sólo en un punto en el cual $y' = 0$ y ya que $y' = -2v_1(a - v_1t) - 2v_2(b - v_2t)$ entonces de la condición $y' = 0$ obtenemos una solución única

$$t_0 = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2},$$

que da respuesta a la pregunta planteada.

14.3. CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Sea la función f definida sobre el intervalo (a, b) y sea $a < x_1 < x_2 < b$. Tracemos una recta por los puntos $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$, que están sobre la gráfica de la función f. Su ecuación será

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Denotemos el segundo miembro de esta ecuación por $l(x)$, entonces abreviadamente se escribe de la forma

$$y = l(x).$$

Es evidente que $l(x_1) = f(x_1)$, $l(x_2) = f(x_2)$.

Definición 3. *La función f se llama convexa hacia las y positivas (convexa hacia las y negativas) sobre el intervalo (a, b) si cualesquiera que sean los puntos x_1 y x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, para cualquier punto x_0 del intervalo (x_1, x_2), se cumple la desigualdad*

$$l(x_0) \leqslant f(x_0) \tag{14.10}$$

(respectivamente

$$l(x_0) \geqslant f(x_0)). \tag{14.11}$$

Geométricamente esto significa que cualquier punto de la cuerda AB (es decir, del segmento de la recta $y = l(x)$ con extremos en los puntos A y B) está no por encima (no por abajo) del punto de la gráfica de la función f correspondiente al mismo valor del argumento (fig. 58).

Definición 4. *Si en lugar de* (14.10) *y* (14.11) *se cumplen las desigualdades estrictas $l(x_0) < f(x_0)$ y respectivamente $l(x_0) > f(x_0)$ para cualesquiera x_0, x_1 y x_2 tales que $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$, entonces la función f se llama estrictamente convexa hacia las y positivas (estrictamente convexa hacia las y negativas) sobre el intervalo (a, b).*

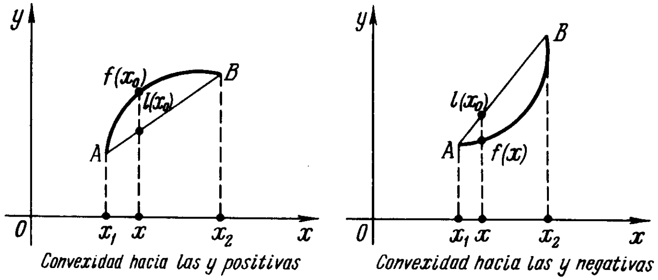


FIG. 58

En este caso cualquier punto de la cuerda AB, excluyendo sus extremos se encuentra por abajo (por encima) del punto correspondiente de la gráfica de la función.

Definición 5. *Cualquier intervalo, sobre el cual la función es (estrictamente) convexa hacia las y positivas, respectivamente hacia las y negativas, se llama intervalo de convexidad (estricta) hacia las y positivas, respectivamente hacia las y negativas, de esta función.*

Teorema 5 (condición suficiente de la convexidad estricta). *Sea la función f dos veces diferenciable sobre el intervalo (a, b). Entonces, si $f'' < 0$ sobre (a, b), la función f es estrictamente convexa hacia las y positivas y si $f'' > 0$ sobre (a, b), entonces la función f es estrictamente convexa hacia las y negativas sobre este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a < x_1 < x < x_2 < b$. Entonces

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Aplicando el teorema de Lagrange (véase el p. 11.2) obtenemos

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f'(\eta) - f'(\xi)](x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

donde $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.

Apliquemos de nuevo el teorema de Lagrange:

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(x_2 - x)(x - x_1)(\eta - \xi)}{x_2 - x_1}, \quad \xi < \zeta < \eta.$$

De aquí se ve que si $f'' < 0$ sobre (a, b), por consiguiente, en particular, $f''(\zeta) < 0$, entonces $l(x) < f(x)$, es decir, la función f es convexa estrictamente hacia las y positivas; si $f'' > 0$ sobre (a, b), entonces $l(x) > f(x)$, es decir, la función f es convexa hacia las y negativas. □

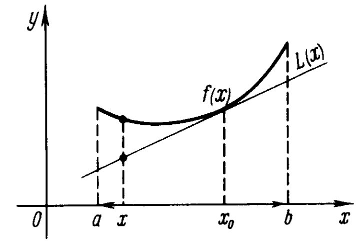


FIG. 59

La condición del signo constante de la segunda derivada, siendo suficiente para la convexidad estricta (hacia las y positivas o negativas) no es al mismo tiempo necesaria. Así, la función $y = x^4$ es estrictamente convexa hacia las y negativas sobre toda la recta numérica, no obstante, su segunda derivada $y'' = 12x^2$ se anula para $x = 0$.

Señalemos que si la función f es (estrictamente) convexa hacia las y positivas en el intervalo (a, b), entonces la función f es (estrictamente) convexa hacia las y negativas sobre este intervalo y viceversa, y por cuanto $\frac{d^2}{dx^2}[-f(x)] = -\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, entonces, por ejemplo, la condición suficiente de convexidad estricta hacia las y positivas dada en el teorema 5 se deduce de la condición suficiente de convexidad estricta de la función hacia las y negativas contenida en este mismo teorema.

Ejercicios. 3. Demuéstrese que para la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{cuando } x \neq 0, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$$

el punto $x = 0$ no pertenece a ningún intervalo de convexidad hacia las y positivas o negativas y no es extremo de ninguno de estos intervalos.

4. Demuéstrese que la función $y = x^4$ es convexa estrictamente hacia las y negativas sobre todo el eje numérico.

Vemos que la convexidad hacia las y positivas o negativas de una función f depende del signo de la segunda derivada. Resulta que la ubicación de la gráfica de una función dos veces diferenciable con respecto a la tangente, también, en determinado sentido, está relacionada con el signo de la segunda derivada.

Teorema 6. *Supongamos que la función f, en todo el intervalo (a, b), tiene segunda derivada positiva (negativa): $f''(x) > 0$ (respectivamente, $f''(x) < 0$), $x \in (a, b)$* *). *Entonces cualquiera que sea el punto $x_0 \in (a, b)$, todos los puntos*

*) De aquí se deduce que la función f es estrictamente convexa hacia las y negativas (positivas) sobre (a, b).

$(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, de la gráfica de la función f están por arriba (respectivamente por abajo) de la tangente trazada a ella en el punto $(x_0, f(x_0))$ (naturalmente, el propio punto, que se encuentra sobre la tangente indicada, es una excepción *) (fig. 59).

En efecto, la ecuación de la tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0, f(x_0))$ será

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Denotemos el segundo miembro de esta ecuación por $L(x)$. Entonces, aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia $f(x) - f(x_0)$ obtendremos

$$f(x) - L(x) = [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0),$$

donde $a < x_0 < b$, $a < x < b$ y el punto ξ está entre x y x_0.

Aplicando otra vez el teorema de Lagrange, pero ya al incremento de la derivada, obtendremos

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0)$$

donde el punto η está entre ξ y x_0.

Cuando $x \neq x_0$ tenemos $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$ ya que el punto ξ siempre está entre x y x_0 y, por consiguiente, siempre está por el mismo lado de x_0 que el punto x.

Por consecuencia, el signo de la diferencia $f(x) - L(x)$ coincide, cuando $x \neq x_0$, con el signo de $f''(\eta)$. Por esto, si sobre el intervalo (a, b) la segunda derivada es positiva (por consiguiente es positiva en el punto η), entonces para todas las $x \in (a, b)$ menos para el punto $x = x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) - L(x) < 0$; si sobre el intervalo (a, b) la segunda derivada es negativa: entonces para los puntos indicados es válida la desigualdad $f(x) - L(x) < 0$. □

Aclaremos este teorema partiendo de consideraciones algo diferentes. Si la función f en todos los puntos sobre cierto intervalo tiene segunda derivada, entonces en el entorno de cualquier punto x_0 de este intervalo se puede seleccionar la parte principal de la función f en forma de polinomio de Taylor de segundo orden

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2, \quad x \to x_0$$

y por consiguiente la gráfica de la función f'' "en el entorno del punto x_0 se comporta casi como una parábola"

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2,$$

la cual, cuando su coeficiente de x^2, es decir $\frac{f''(x_0)}{2}$ es positivo, es convexa hacia las

---

*) Si la función f además está definida y tiene derivada unilateral en el extremo a ó b del intervalo, entonces la propiedad indicada, como se ve en la demostración que se dará más adelante, se cumple también para la tangente en el punto $(a, f(a))$ (respectivamente, en el punto $(b, f(b))$).

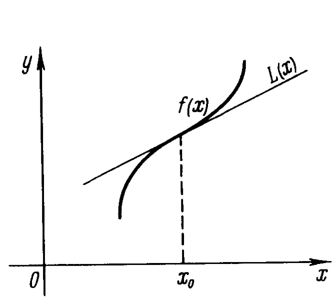


FIG. 60

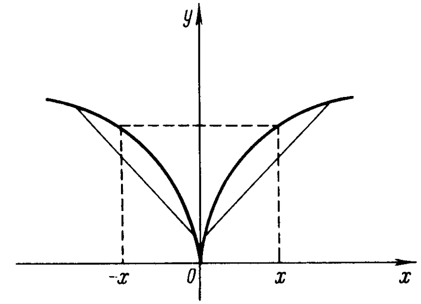


FIG. 61

y negativas y está por arriba de cualquier tangente, en particular, por arriba de la tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ (esta recta es también la tangente a la gráfica de la función f), y cuando el coeficiente indicado es negativo, es convexa hacia las y positivas y está por abajo de cualquiera de sus tangentes.

De nuevo vemos qué conveniente es, en el estudio de una función en el entorno de un punto dado, separar con ayuda de la fórmula de Taylor la parte principal de la función en este punto. En el futuro, al resolver diversos problemas del análisis, de nuevo, repetidas veces tendremos la oportunidad de convencernos de las grandes posibilidades y de lo fructífero del método de la separación de la parte principal.

Definición 6. *Supongamos que la función f es diferenciable para $x = x_0$ y supongamos que $y = L(x)$ es la ecuación de la tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Si la diferencia $f(x) - L(x)$ cambia de signo al pasar por el punto x_0, entonces x_0 se llama punto de inflexión de la función.*

Más detallada y exactamente, esto significa que existe un δ-entorno $U(x_0, \delta)$ del punto x_0 tal que sobre cada uno de los intervalos $(x_0 - \delta, x_0)$ y $(x_0, x_0 + \delta)$ la diferencia $f(x) - L(x)$ conserva el signo constante contrario a su signo sobre el otro intervalo.

Geométricamente esto significa que la gráfica de la función f pasa en el punto $(x_0, f(x_0))$ de un lado (de la recta inclinada) de la tangente en este punto al otro lado (véase la fig. 60).

Si x_0 es un punto de inflexión de la función, entonces el punto $(x_0, f(x_0))$ se llama *punto de inflexión de la gráfica de la función f.*

Ejemplos. 1. $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$. Evidentemente en este caso $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > 0$. Por esto, sobre el intervalo infinito $(-\infty, 0)$, la función $f(x) = x^3$ es convexa estrictamente hacia las y positivas; sobre el intervalo $(0, +\infty)$ es convexa estrictamente hacia las y negativas y el punto $x = 0$ es al mismo tiempo extremo de intervalos de convexidad hacia las y positivas y negativas. Este punto es también un punto de inflexión por cuanto la ecuación de la tangente en él será $y = 0$ y para $x < 0$ tiene lugar la desigualdad $f(x) < 0$ y para $x > 0$ al contrario $f(x) > 0$.

2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; la gráfica de esta función (fig. 61) se llama *parábola semicúbica.* Aquí $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, por lo que para todos los $x \neq 0$ es válida la desigual-

dad $f''(x) < 0$. Por consiguiente, los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ son intervalos de convexidad estricta hacia las y positivas. Conjuntamente con esto, para cualquier $x \neq 0$

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = f(x) > 0 = f(0),$$

por lo que el punto $x = 0$ no pertenece a ningún intervalo de convexidad hacia las y positivas (esta función no tiene intervalo de convexidad hacia las y negativas).

La gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en el punto $(0, 0)$ tiene tangente vertical y sus ramas para las cuales $x > 0$ y $x < 0$ están por lados diferentes de ella. No obstante, $x = 0$ no es un punto de inflexión, por cuanto en virtud de la verticalidad de la tangente en este punto su ecuación no se puede escribir en la forma $y = L(x)$ y, por consiguiente, $x = 0$ no satisface las condiciones de la definición 6.

Dicho en sentido figurado, la gráfica de la parábola semicúbica no hace inflexión al pasar por la tangente en el punto $(0, 0)$, sino que "regresa hacia atrás", por lo que los puntos de este tipo se llaman *puntos de retroceso*.

Teorema 7 (condición necesaria de la existencia de un punto de inflexión). *Supongamos que la función f tiene para $x = x_0$ segunda derivada continua. Entonces, si el punto x_0 es un punto de inflexión de la función f, $f''(x_0) = 0$.*

En efecto, si tuviera lugar la desigualdad $f''(x_0) > 0$ (respectivamente, $f''(x_0) < 0$), entonces, por la continuidad de la segunda derivada para $x = x_0$, se encontraría un entorno $U(x_0)$ de este punto en el cual se cumpliría la condición $f''(x) > 0$ (respectivamente, $f''(x) < 0$) y, por consiguiente, por el teorema 6, para todos los $x \in U(x)$, $x \neq x_0$, la gráfica de la función f estaría por arriba (por abajo) de la tangente trazada a ella en el punto x_0, lo cual contradiría que x_0 es un punto de inflexión. □

OBSERVACIÓN. De forma semejante a como todos los puntos de extremo de una función pertenecen al conjunto de los puntos en los cuales la derivada o bien es igual a cero o bien no existe, así mismo todos los puntos de inflexión de una función (dos veces continuamente diferenciable, menos podría ser para un número finito de valores de la variable independiente) entran en el conjunto de los puntos en los cuales la segunda derivada o bien es igual a cero, o bien no existe.

Teorema 8 (primera condición suficiente de la existencia de un punto de inflexión). *Si una función f diferenciable en el punto x_0 es dos veces diferenciable en algún entorno reducido $\mathring{U}(x_0, \delta)$ de este punto y la segunda derivada f'' de la función f cambia de signo al pasar el argumento por x_0 (es decir, o bien $f''(x) < 0$ cuando $x_0 - \delta < x < x_0$ y $f''(x) > 0$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$, o bien $f''(x) > 0$ cuando $x_0 - \delta < x < x_0$ y $f''(x) < 0$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$), entonces x_0 es un punto de inflexión de la función f.*

En realidad, representemos, como se hizo anteriormente, la ecuación de la tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ en la forma $y = L(x)$. En la demostración del teorema 6 fue mostrado que

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

donde los puntos x y ξ están por un mismo lado de x_0, por lo que cuando $x \neq x_0$ tenemos $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$ y, por consiguiente,

$$\operatorname{sign}[f(x) - L(x)] = \operatorname{sign} f''(\eta).$$

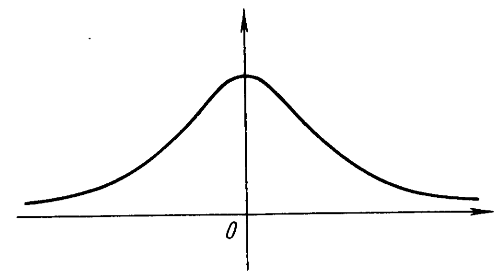


FIG. 62

El punto η está entre ξ y x_0, es decir, por el mismo lado de x_0 que el punto x. De aquí se deriva que si f'' cambia de signo al pasar el punto x_0, entonces la diferencia $f(x) - L(x)$ cambia de signo y, por consiguiente, es un punto de inflexión. □

Teorema 9 (segunda condición suficiente para la presencia de un punto de inflexión). *Sea $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces x_0 es un punto de inflexión.*

DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula de Taylor, en virtud de la condición $f''(x_0) = 0$ tenemos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3),$$

y por cuanto $L(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, entonces

$$f(x) - L(x) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3).$$

De aquí se deduce (véase la observación sobre los infinitésimos ante la demostración del teorema 4 de este párrafo), que el signo de la diferencia $f(x) - L(x)$ cambia cuando cambia el signo de $x - x_0$. Esto significa que x_0 es un punto de inflexión. □

Ejemplo. Analicemos la función $f(x) = e^{-x^2}$ y hallemos sus puntos de inflexión. Tenemos

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 4\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

De aquí se ve que la segunda derivada de la función f se anula en los puntos $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ y al pasar por ellos cambia su signo. Por consiguiente, por el teorema 8, estos puntos son puntos de inflexión de la función f (fig. 62).

Problema 10. Demuéstrese que si la función f es continua sobre el intervalo (a, b) y si para cualesquiera puntos x_1 y x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, se cumple la desigualdad

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

entonces (a, b) es un intervalo de convexidad hacia las y positivas para la función f.

Problema 11. Demuéstrese la afirmación que sigue a continuación. Para que una función diferenciable sea convexa hacia las y positivas (negativas) sobre cierto intervalo, es necesario y suficiente que su derivada decrezca (crezca) sobre él. Para que una función diferenciable sea estrictamente convexa hacia las y positivas (negativas) sobre cierto intervalo es suficiente que su derivada decrezca (crezca) estrictamente sobre él.

14.4. ASÍNTOTAS

Definición 7. *Supongamos que la función $f(x)$ está definida para todos los $x > a$ (respectivamente, para todos los $x < a$). Si existen los números k y l tales que $f(x) - kx - l = o(1)$ cuando $x \to +\infty$ (respectivamente, cuando $x \to -\infty$), entonces la recta*

$$y = kx + l \tag{14.12}$$

se llama asíntota de la gráfica de la función $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ (respectivamente, cuando $x \to -\infty$).

La existencia de una asíntota de la gráfica de una función significa que cuando $x \to +\infty$ (ó $x \to -\infty$) la función se comporta "casi como una función lineal", es decir, se diferencia de una función lineal en un infinitésimo.

Hallemos, por ejemplo, la asíntota de la gráfica de la función $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$. Dividiendo el numerador por el denominador según la regla de la división de polinomios obtendremos $y = x - 4 + \dfrac{2}{x + 1}$. Ya que $\dfrac{2}{x + 1} = o(1)$ cuando $x \to \pm\infty$, entonces la recta $y = x - 4$ es la asíntota de la gráfica de la función dada tanto cuando $x \to +\infty$ como cuando $x \to -\infty$.

Analicemos el sentido geométrico de la asíntota. Sea $M = (x, f(x))$ un punto de la gráfica de la función f, M_0 es la proyección de este punto sobre el eje Ox, AB es la asíntota (14.12); θ, el ángulo entre la asíntota y el sentido positivo del eje Ox, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$; MP, la perpendicular bajada desde el punto M sobre la asíntota AB; Q, el punto de intersección de la recta MM_0 con la asíntota AB (fig. 63). Entonces

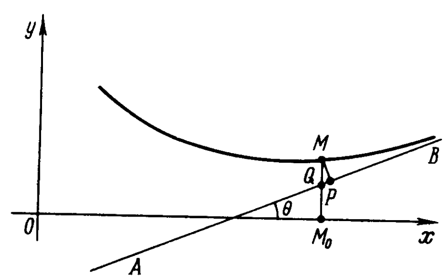


FIG. 63

$MM_0 = f(x)$, $QM_0 = kx + l$, $MQ = MM_0 - QM_0 = f(x) - (kx + l)$, $MP = MQ\cos\theta$. De esta forma, MP se diferencia de MQ sólo en el factor $\cos\theta$ diferente de cero, por lo que las condiciones $MQ \to 0$ y $MP \to 0$ cuando $x \to +\infty$ (respectivamente, cuando $x \to -\infty$) son equivalentes, es decir, si $\lim\limits_{x \to +\infty} MQ = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to \infty} MP = 0$ y viceversa.

De aquí se deduce que la asíntota puede ser definida como la recta, la distancia hasta la cual desde la gráfica de la función, es decir, el segmento MP, tiede a cero cuando el punto $M = (x, f(x))$ "tiende al infinito permaneciendo en la gráfica" (cundo $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$, respectivamente).

Indiquemos ahora el método general de la búsquede de la asíntota (14.12), es decir, el método de definición de los coeficintes k y l en la ecuación (14.12). Analizaremos para mayor exactitud sólo el caso $x \to +\infty$ (cuando $x \to -\infty$ el razonamiento se lleva a cabo análogamente). Supongamos que la gráfica de la función f tiene una asíntota (14.12) cuando $x \to +\infty$. Entonces por definición

$$f(x) = kx + l + o(1). \tag{14.13}$$

Dividamos ambas partes de la igualdad (14.10) por x y pasemos al límite cuando $x \to +\infty$. Entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \tag{14.14}$$

Utilizando el valor k hallado, obtendremos de (14.13) para la determinación de l la fórmula

$$l = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx). \tag{14.15}$$

La afirmación inversa también es válida: si existen los números k y l tales que se cumple la condición (14.15), entonces la recta $y = kx + l$ es asíntota de la gráfica de la función $f(x)$. En realidad, de (14.15) tenemos

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + l)] = 0,$$

es decir, la recta $y = kx + l$ efectivamente satisface la definición de asíntota, dicho de otro modo, cumple la condición (14.13).

De esta forma, las fórmulas (14.14) y (14.15) reducen el problema de la búsqueda de las asíntotas (14.12) al cálculo de límites de un tipo determinado. Más aún, mostramos que si existe la representación de la función f en la forma (14.13), entonces k y l se expresan por las fórmulas (14.14) y (14.15). Por consiguiente, si existe la representación (14.13), entonces es única.

Hallemos por esta regla la asíntota de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$ hallada por nosotros anteriormente por otro método:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x - 2}{x(x - 1)} = 1,$$

$$l = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x - 2}{x + 1} = -4,$$

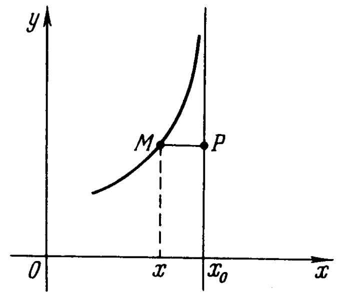


FIG. 64

es decir, como era de esperar, obtuvimos la misma ecuación de la asíntota $y = x - 4$ tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.

La ecuación de cualquier recta no paralela al eje Oy puede ser escrita en la forma (14.12). Es natural extender la definición de asíntota a las rectas paralelas al eje Oy.

Definición 8. *Supongamos que la función f está definida en cierto entorno del punto x_0 (puede ser unilateral) y supongamos que se cumpla al menos una de las siguientes condiciones*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty. \tag{14.16}$$

Entonces la recta $x = x_0$ (fig. 64) se llama asíntota vertical de la gráfica de la función f (a diferencia de la asíntota del tipo (14.12) la cual se llama inclinada).

En el caso de asíntota vertical, como en el caso de inclinada, la distancia $MP = x - x_0$ entre el punto M y la recta $x = x_0$ tiende a cero si el punto $M(x, f(x))$ tiende al infinito por la gráfica, es decir, cuando $x \to x_0 - 0$ ó $x \to x_0 + 0$.

Para hallar las asíntotas verticales de la gráfica de una función f es necesario hallar los valores x para los cuales se cumple una o ambas condiciones (14.16). Por ejemplo, la función $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$ tiene una asíntota vertical $x = -1$. En general, si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional ($(P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios), $Q(x_0) = 0$, $P(x_0) \neq 0$, entonces la recta $x = x_0$ es una asíntota de la gráfica de la función $f(x)$.

14.5. CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

El estudio de una función dada y la construcción de su gráfica con ayuda del aparato analítico desarrollado es racional llevarlo a cabo en el siguiente orden.

1. Determinar el dominio de existencia de la función, la región de continuidad y los puntos de discontinuidad.
2. Hallar las asíntotas.
3. Trazar aproximadamente, a grandes rasgos, la gráfica de la función.
4. Calcular la primera y si es necesario la segunda derivada (con frecuencia sin derivadas de orden superior se llega a la solución).

5. Hallar los puntos en los cuales la primera derivada y la segunda no existen o son iguales a cero.
6. Componer la tabla de variación del signo de la primera y segunda derivadas. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, convexidad hacia las y positivas o negativas de la función, hallar los puntos de extremo (entre ellos los terminales) y los puntos de inflexión.
7. Finalmente trazar la gráfica.

Además, a medida que sea mayor la exactitud que querramos alcanzar en la gráfica, en general, es necesario hallar más puntos sobre ella. Generalmente es conveniente hallar (puede ser con una exactitud determinada) los puntos de intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas y los puntos correspondientes a los extremos de la función; otros puntos se hallan a medida de las necesidades.

En el caso en que las expresiones de la segunda derivada sean muy voluminosas, a veces se hace necesario reducirse al análisis de las propiedades de la gráfica que se pueden estudiar sólo con ayuda de la primera derivada.

Ejemplo 1. Construyamos la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$.

Esta función está definida y es continua para todos los $x \neq -1$. Como ya sabemos (véase el p. 14.4) tiene asíntotas $y = x - 4$ y $x = -1$, y además $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$. Fue señalado también que $f(x) = x - 4 + \dfrac{2}{x+1}$ por lo que $f(x) > x - 4$ cuando $x > -1$ (la gráfica de la función se encuentra por arriba de la asíntota) y $f(x) < x - 4$ cuando $x < -1$ (la gráfica se encuentra por abajo de la asíntota).

La gráfica de la función $f(x)$ interseca el eje Ox en los puntos en los cuales $x^2 - 3x - 2 = 0$, es decir, cuando $x_1, x_2 = (3 \pm \sqrt{17})/2$ ó aproximadamente en los puntos $x_1 = 3{,}5$, $x_2 = 0{,}5$. La gráfica interseca el eje Oy en el punto $y = -2$. Esto permite trazar la gráfica de la función $f(x)$ en la forma indicada en la fig. 65.

El estudio posterior tiene el fin de hallar los extremos, los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad hacia las y negativas o positivas de la gráfica de la función. Para esto hallemos y' e y'':

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}, \quad y'' = \frac{4}{(x+1)^3}.$$

De aquí se ve que $y' = 0$ cuando $x = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}4$ y $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}4$. En el punto $x = -1$ las derivadas y' e y'' no existen.

Compongamos la tabla de variación del signo de la primera y segunda derivadas en dependencia de la variación del argumento, incluyendo en ella los puntos críticos:

x		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$	
y'	+	0	−	No existe	−	0	+
y''	−	−	−	No existe	+	+	+

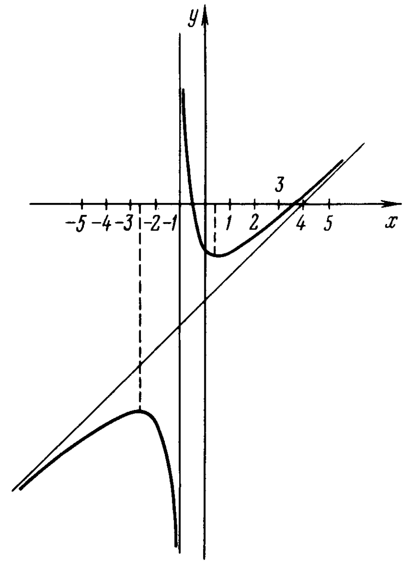


FIG. 65

De esta tabla se ve que la función $f(x)$ tiene en el punto $x = -1 + \sqrt{2}$ un mínimo estricto y en el punto $x = -1 - \sqrt{2}$ un máximo estricto; cuando $x < -1$ la función es convexa estrictamente hacia las y positivas y cuando $x > -1$ es convexa estrictamente hacia las y negativas. No hay puntos de inflexión, ya que cuando $x = -1$ la función es discontinua.

Hemos hallado el carácter general del comportamiento de la función. Para construir la gráfica más exactamente es necesario hallar una serie de puntos de la gráfica como se señaló anteriormente.

En el futuro, para mayor brevedad, a las tablas semejantes a la tabla dada más arriba las llamaremos *tablas del comportamiento de las funciones* y a veces señalaremos en ellas inmediatamente los puntos de extremo, los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad.

Ejemplo 2. Construyamos la gráfica de la función $f(x) = (x + 1)^3\sqrt[3]{x^2}$.

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales y además es continua en cada punto, por lo que no tiene asíntotas verticales. Ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

se deduce que no hay también asíntotas inclinadas.

Para la construcción de la gráfica a grandes rasgos observemos que:

1) $f(x)$ se anula en los puntos $x = -1$ y $x = 0$;

2) $f > 0$ cuando $x > -1, x \neq 0$;

3) $f < 0$ cuando $x < -1$;

4) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

El aspecto aproximado de la gráfica de la función que se puede trazar sobre la base de estas observaciones se representa en la fig. 66.

Realicemos ahora una investigación más detallada de la función con ayuda de las derivadas. Hallemos y' e y'':

$$y' = \frac{(x + 1)^2(11x + 2)}{3\sqrt[3]{x}}, \quad y'' = \frac{2(x + 1)(44x^2 + 16x - 1)}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

De aquí se ve que $y' = 0$ cuando $x = -1$ y $x = -2/11$; $y'' = 0$ cuando $x = -1$ y también cuando $44x^2 + 16x - 1 = 0$, es decir, aproximadamente cuando $x_1 = -9/22$ y $x_2 = 1/22$. Cuando $x = 0$ las derivadas y' e y'' no existen.

Compongamos la tabla del comportamiento de la función.

Intervalos de convexidad y puntos de inflexión	Intervalos de monotonía y puntos del extremo	y''	y'	x
Convexidad hacia las y positivas		−	+	$(-\infty, -1)$
Puntos de inflexión		0	0	-1
Convexidad hacia las y negativas	Crecimiento	+	+	$(-1, x_1)$
Punto de inflexión		0	+	x_1
		−	+	$\left(x_1, -\frac{2}{11}\right)$
Convexidad hacia las y positivas	Máximo	−	0	$-\frac{2}{11}$
	Decrecimiento	−	−	$\left(-\frac{2}{11}, 0\right)$
	Mínimo	No existe	No existe	0
Convexidad hacia las y positivas		−	+	$(0, x_0)$
Punto de inflexión	Crecimiento	0	+	x_2
Convexidad hacia las y negativas		+	+	$(x_2, +\infty)$

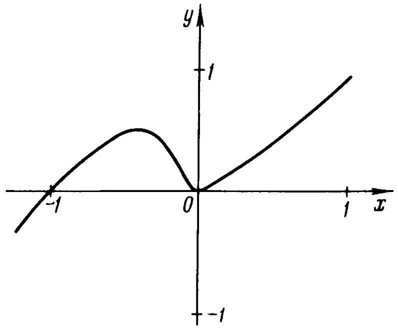


FIG. 66

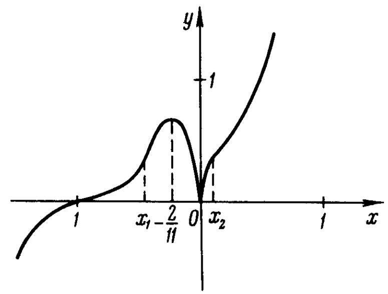


FIG. 67

Ahora se puede trazar la gráfica de la función $y = (x + 1)^3\sqrt[3]{x^2}$ más exactamente. Su aspecto está representado en la fig. 67. Como se ve, la investigación con ayuda de las derivadas permitió precisar sustancialmente el aspecto de la gráfica (compárense las figs. 66 y 67).

El aparato desarrollado permite construir las gráficas de las funciones dadas paramétrica y localmente: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Aquí no se supone que el par de funciones $x = x(t)$ $y = y(t)$ determina unívocamente una función del tipo $y = y(x)$ ó $x = x(y)$. Por gráfica de una función dada paramétricamente se sobreentiende la unión de las gráficas de todas las funciones del tipo $y = f(x)$ y $x = g(y)$ dadas por las fórmulas $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Hagamos algunas observaciones preliminares. Para hallar las asíntotas paralelas al eje Oy es necesario hallar tales valores t_0 *) para los cuales existe el límite finito $\lim_{t \to t_0 + 0} x(t) = a$ ó $\lim_{t \to t_0 - 0} x(t) = a$ y $\lim_{t \to t_0 + 0} y(t)$, respectivamente $\lim_{t_0 - 0} y(t)$ es igual a $+\infty$ ó $-\infty$.

Si tales valores t_0 existen, entonces

$$x = a \tag{14.17}$$

será la ecuación de la asíntota buscada.

De forma análoga, la búsqueda de las asíntotas paralelas al eje Ox se reduce a la determinación de tales valores t_0 para los cuales existen el límite finito $\lim_{t \to t_0 + 0} y(t) = b$ ó $\lim_{t \to t_0 - 0} y(t) = b$, y $\lim_{t \to t_0 + 0} x(t)$, respectivamente $\lim_{t \to t_0 - 0} x(t)$, es igual a $+\infty$ ó $-\infty$. Si resulta que tales valores t_0 existen, entonces

$$y = b \tag{14.18}$$

es la ecuación de la asíntota buscada.

Por último, para la búsqueda de las asíntotas no paralelas ni al eje Ox, ni al eje Oy, es necesario hallar tales valores t_0 para los cuales los límites $\lim_{t \to t_0 + 0} x(t)$ y

*) Aquí y en el futuro t_0 es un número o uno de los infinitos $+\infty$ ó $-\infty$.

$\lim_{t \to t_0 + 0} y(t)$ (ó $\lim_{t \to t_0 - 0} x(t)$ y $\lim_{t \to t_0 - 0} y(t)$) son iguales a $+\infty$ ó $-\infty$, y existe el límite finito $\lim_{t \to t_0 + 0} \frac{y(t)}{x(t)} k \neq 0$ (respectivamente, $\lim_{t \to t_0 - 0} \frac{y(t)}{x(t)} = k$). Si para este valor, además existe el límite finito $\lim_{t \to t_0 + 0} [y(t) - kx(t)] = l$ (respectivamente, $\lim_{t \to t_0 - 0} [y(t) - kx(t)] = l$), entonces la recta

$$y = kx + l \tag{14.19}$$

es asíntota de la gráfica de la función analizada.

Aquí siempre t_0 puede ser tanto finito como infinito.

Ejercicio 5. Dedúzcanse las ecuaciones de las asíntotas (14.17), (14.18) y (14.19), partiendo de que se llama asíntota la recta tal que la distancia desde el punto $(x(t), y(t))$ de la gráfica de la función, dada paramétricamente: $x = x(t)$, $y = y(t)$, hasta ella tiende a cero cuando el punto tiende al infinito, permaneciendo sobre la gráfica de la función, es decir, cuando $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \to \infty$, cuando $t \to t_0 + 0$ ó $t \to t_0 - 0$.

En el trazado preliminar de la gráfica de una función dada paramétricamente, a menudo es útil construir inicialmente por separado las gráficas de las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Para la determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función dada paramétricamente, para hallar sus extremos, los puntos de inflexión y también los intervalos de convexidad hacia las y positivas o negativas, es necesario utilizar las expresiones de las derivadas y'_{xx} e y''_{xx} por las derivadas $x'_t, y''_{tt}, y'_t, x''_{tt}$. Es necesario tener en cuenta que las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, en general, no definen unívocamente una función del tipo $y = y(x)$, así que en el estudio de la gráfica de la función es necesario siempre seguir con atención que "rama" de la gráfica se analiza. A veces es más útil analizar, por el contrario, a la x como función de la y.

Ejemplo 3. Construyamos la gráfica de la función

$$x = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)}, \quad y = \frac{t}{1 + t}. \tag{14.20}$$

La representación paramétrica tiene sentido para todos los t menos $t = \pm 1$. Las asíntotas paralelas al eje Ox se obtienen para $t = 1$ y $t = \pm\infty$, sus ecuaciones son respectivamente $y = 1/2$ e $y = 1$. La asíntota paralela al eje Oy se obtiene para $t = -1$; su ecuación es $x = 1/4$. En el caso dado no hay asíntotas inclinadas.

Para la construcción de la gráfica a grandes rasgos es útil formar la tabla de variación de los signos de las variables x e y en dependencia de la variación de t; en ella pueden ser incluidos algunos valores característicos de x e y. Así en el caso dado es útil la tabla siguiente.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$+\infty$	$+$	$1/4$	$+$	$1/4$	$+$	∞	$-$	$-\infty$
y	1	$+$	∞	$-$	0	$+$	$1/2$	$+$	1

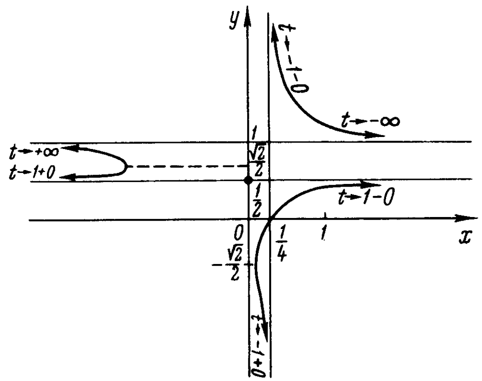


FIG. 68

Ahora construyamos la gráfica (fig. 68). Para mayor claridad, en la gráfica está señalado, cómo las ramas de la gráfica corresponden a la variación del parámetro.

Más adelante,

$$x'_t = \frac{1 + 2t - t^2}{4(1 - t)^3}, \quad y'_t = \frac{1}{(1 + t)^2},$$

por esto

$$x'_y = \frac{(1 + t)^2(1 + 2t - t^2)}{4(1 - t)^2}. \tag{14.21}$$

En el caso dado es mejor analizar x como función de y, y no al contrario, ya que de la gráfica dibujada se ve que es natural esperar que x se define unívocamente como función de y, $y \neq 1/2$ e $y \neq 1$.

De (14.21) se ve que $x'_y = 0$ cuando $t = -1$ y cuando $1 + 2t - t^2 = 0$, es decir, cuando $t = 1 + \sqrt{2}$ y $t = 1 - \sqrt{2}$. Al valor $t = -1$ no le corresponde ningún punto de la gráfica y para $t = 1 + \sqrt{2}$ y $t = 1 - \sqrt{2}$, tenemos respectivamente

$$y = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{1 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Compongamos ahora la tabla de variación del signo de la derivada x'_y, esta tabla permite hallar los puntos de extremo.

t	$-\infty$		-1		$1 - \sqrt{2}$		1		$1 + \sqrt{2}$		$+\infty$
y	1		∞		$-\sqrt{2}/2$		$1/2$		$\sqrt{2}/2$		1
x'/y		$-$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Extremos					Mínimo				Máximo		

De la tabla se ve que en el punto $y = \sqrt{2}/2$ la función $x = x(y)$ tiene máximo, en el punto $y = -\sqrt{2}/2$ mínimo y es estrictamente monótona sobre los intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \quad (1, +\infty).$$

Es necesario prestar atención a que tomando y como variable independiente y x como la dependiente, es decir, tomando el eje Oy como el primer eje de coordenadas y el eje Ox como el segundo, obtuvimos un sistema de coordenadas orientado en sentido contrario al sistema de coordenadas analizado por nosotros todo el tiempo, en el cual el primer eje es Ox y el segundo Oy. Al lector le será útil convencerse de que los criterios demostrados por nosotros más arriba, por ejemplo, para la existencia de los extremos y los puntos de inflexión, geométricamente no están relacionados con una u otra orientación de los ejes de coordenadas.

Para el analisis de la convexidad y de los puntos de inflexión de la función $x(y)$ hallemos x''_{yy}:

$$x''_{yy} = (x'_y)'_t t'_y = \frac{(1 + t)^3(3 + 3t - 3t^2 + t^3)}{2(1 - t)^3}.$$

La derivada x''_{yy} es igual a cero cuando $t = -1$ y para aquellos t para los cuales

$$P(t) \equiv 3 + 3t - 3t^2 + t^3 = 0.$$

Observando que $P'(t) = 3(t - 1)^2 \geqslant 0$ y además $P' = 0$ sólo en un punto, $t = 1$ vemos que $P(t)$ crece monótonamente sobre todo el eje real (¿por qué?). Por consiguiente existe un único t_0 tal que $P(t_0) = 0$. Además $P(0) = 3 > 0$ y $P(-1) = -4 < 0$ de donde $-1 < t_0 < 0$. Si $y_0 = \dfrac{t_0}{1 + t_0}$, entonces evidentemente $-\infty < y_0 < 0$ (por supuesto se puede obtener una estimación más exacta para y_0 escogiendo t_1 y t_2 más cercanos y tales que $P(t_1) < 0$, $P(t_2) > 0$). Formemos ahora la tabla de variación de la derivada x''_{yy} y determinemos con su ayuda los intervalos de convexidad hacia las y positivas y negativas y también los puntos de inflexión:

t	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, t_0)$	t_0	$(t_0, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$+\infty$
y	1	$(1, +\infty)$	∞	$(-\infty, y_0)$	y_0	$(y_0, ½)$	½	$(1/2, 1)$	1
x''_y		$+$		$-$	0	$+$	No existe	$-$	
Intervalos de convexidad		Convexidad hacia las y negativas		Convexidad hacia las y positivas		Convexidad hacia las y negativas		Convexidad hacia las y positivas	
Puntos de inflexión y puntos de discontinuidad	Punto de discontinuidad				Punto de inflexión		Punto de discontinuidad		Punto de discontinuidad

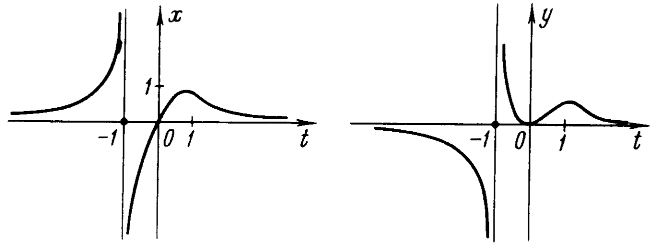


FIG. 69

La gráfica de la función (14.20) queda estudiada.

Ejemplo 4. Construyamos la gráfica de la función

$$x = \frac{t}{1+t^3}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^3}. \tag{14.22}$$

En el caso dado no hay asíntotas paralelas a los ejes coordenados; ya que $x \to \infty$ e $y \to \infty$ cuando $t \to -1$, entonces es posible que exista una asíntota inclinada. Para hallarla calculemos los límites correspondientes:

$$\lim_{t \to -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \to -1} t = -1, \quad \text{es decir,} \quad k = -1,$$

$$\lim_{t \to -1} (y - kx) = \lim_{t \to -1} \left(\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^3} \right) = \lim_{t \to -1} \frac{t}{t^2 - t + 1} = -\frac{1}{3}.$$

De aquí se deduce que la asíntota inclinada existe y que su ecuación será

$$y = -x - \frac{1}{3}.$$

Construyamos aproximadamente las gráficas de las funciones $x(t)$ e $y(t)$. Para esto hallaremos previamente las derivadas:

$$x_t' = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}, \quad y_t' = \frac{t(2-t^2)}{(1+t^3)^2}. \tag{14.23}$$

La derivada x'_t se anula para $t = 1/\sqrt[3]{2}$ cambiando el signo de "+" a "−", por lo que éste es un punto de máximo; la derivada y'_t se anula para $t = 0$, cambiando el signo de "−" a "+" (quiere decir que éste es un punto de mínimo) y para $t = 1/\sqrt[3]{2}$ cambiando el signo de "+" a "−" (por consiguiente éste también es un punto de máximo). De estas observaciones se deduce que las gráficas de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen el aspecto representado en la fig. 69.

Por estas gráficas, conociendo la ecuación de la asíntota se puede hallar aproximadamente la gráfica de la función (14.22) que buscamos. La gráfica tiene el aspecto representado en la fig. 70.

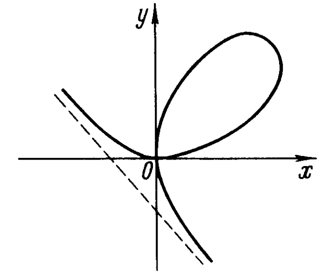


FIG. 70

El análisis de la derivada y'_x permite precisar las dimensiones del "lazo" formado por la gráfica. De (14.23) tenemos $y'_x = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. Ahora veamos que: 1) $y'_x = 0$ para $t = 0$ y $t = \sqrt[3]{2}$, es decir, la tangente a la gráfica es paralela al eje Ox en los puntos (0; 0) y ($\sqrt[3]{2}/3$; $\sqrt[3]{4}/3$); 2) $y'_x = \infty$ para $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ y $t = \infty$, es decir, la tangente es paralela al eje Oy en los puntos ($\sqrt[3]{4}/3$, $\sqrt[3]{2}/3$) y (0; 0). De esta forma al punto (0; 0) (que como se dice es un punto múltiple de la gráfica) le corresponden dos valores del parámetro, $t = 0$ y $t = \infty$, si sólo definimos complementariamente las funciones (14.22) haciendo $x(\infty) = 0$, $y(\infty) = 0$. En este punto dos partes de la gráfica tienen respectivamente los ejes coordenados como sus tangentes.

La gráfica de la función (14.22) se llama *folio de Descartes* *). De la fórmula (14.22) no es difícil obtener su expresión implícita

$$x^3 + y^3 - xy = 0.$$

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las siguientes funciones:

6. $y = x^{1/x}$.
7. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$.
8. $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.
9. $y = x^2 \ln x$.
10. $y = \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.
11. $y = x^2\left(1 - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$.
12. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.
13. $x = t - e^{-t}$, $y = 2t - e^{-2t}$.
14. $x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t}{t^4+1}$.
15. $y^3 - x^2y^2 - x^3 = 0$. Indicación: exprésense x e y por t considerando $y = tx$.

*) R. Descartes (1596 — 1650), filósofo, matemático, físico y fisiólogo francés.

§ 15. FUNCIÓN VECTORIAL

15.1. CONCEPTO DE LÍMITE Y CONTINUIDAD PARA UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Definición 1. *Si a cada valor $t \in E$, donde E es cierto conjunto de números, le corresponde un determinado vector $r = r(t)$ del espacio tridimensional, entonces diremos que sobre E está definida una función vectorial $r(t)$.*

En esta definición, en dependencia de los problemas analizados, por los valores de $r(t)$ se puede entender tanto vectores libres como vectores con extremos fijos en un mismo punto (los tal llamados *radio-vectores*).

Si en el espacio está dado un sistema de coordenadas rectangular, entonces, como es bien conocido, a cada vector le corresponden tres números reales ordenados, sus coordenadas, y viceversa, a cada tres números reales ordenados les corresponde un vector, para el cual estos números son sus coordenadas. Por esto, el dar una función vectorial es equivalente a dar tres funciones escalares (numéricas) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ que son sus coordenadas:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Si para todos los $t \in E$ tenemos $z(t) = 0$, entonces la función vectorial $r(t)$ se llama bidimensional. En este caso se escribe

$$r(t) = (x(t), y(t)).$$

La longitud de cualquier vector ρ se denota por $|\rho|$. Supondremos que son conocidas las principales propiedades algebraicas de los vectores, el concepto de producto escalar y vectorial y también las propiedades de estos productos. El producto escalar de los vectores a y b se denota por ab o (a, b) y el producto vectorial por $a \times b$ o $[a, b]$.

Introduzcamos los conceptos de límite, continuidad, derivada y diferencial para las funciones vectoriales.

Definición 2. *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ está definida en cierto entorno reducido del punto t_0 y a es cierto vector. Llamaremos al vector a límite de la función $r(t)$ cuando $t \to t_0$ y escribiremos $a = \lim\limits_{t \to t_0} r(t)$* (o $r(t) \to a$ *cuando $t \to t_0$) si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los t que satisfacen la condición $|t - t_0| < \delta$, $t \neq t_0$, se cumple la desigualdad* (fig. 71) $|r(t) - a| < \varepsilon$.

Es evidente que (compárese con el lema del p. 4.9)

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = a, \tag{15.1}$$

si y sólo si

$$\lim_{x \to t_0} |r(t) - a| = 0. \tag{15.2}$$

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y $a = (a_1, a_2, a_3)$ entonces para que $a = \lim\limits_{t \to t_0} r(t)$ es necesario y suficiente que

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \tag{15.3}$$

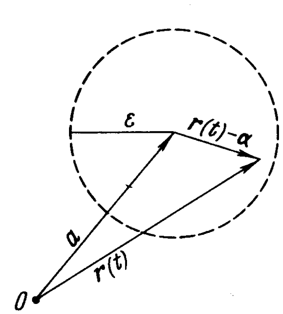


FIG. 71

En realidad

$$|r(t) - a| = \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2}. \tag{15.4}$$

Por esto, $|r(t) - a| \geqslant |x(t) - a_1|$. De aquí se deduce que la condición $|r(t) - a| \to 0$ cuando $t \to t_0$ trae consigo la condición $|x(t) - a_1| \to 0$ cuando $t \to t_0$, es decir, $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a_1$. Análogamente se demuestran las otras igualdades de (15.3). Inversamente, si se cumple (15.3), entonces de (15.4) inmediatamente obtenemos que $|r(t) - a| \to 0$ cuando $t \to t_0$, es decir, $a = \lim\limits_{t \to t_0} r(t)$.

Señalemos algunas propiedades de los límites de las funciones vectoriales.

1°. Si $\lim\limits_{t \to t_0} r(t) = a$, entonces $\lim\limits_{t \to t_0} |r(t)| = |a|$. Esto se deduce directamente de la desigualdad $||r| - |a|| \leqslant |r - a|$.

2°. $\lim\limits_{t \to t_0} [r_1(t) + r_2(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) + \lim\limits_{t \to t_0} r_2(t)$.

3°. $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)r(t) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t) \lim\limits_{t \to t_0} r(t)$ ($f(t)$ es una función escalar).

4°. $\lim\limits_{t \to t_0} r_1(t)r_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) \lim\limits_{t \to t_0} r_2(t)$.

5°. $\lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) \times r_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} r_2(t)$.

En las propiedades 2° — 5° todas las funciones analizadas están definidas en cierto entorno del punto t_0 menos, podría ser, el propio punto t_0 y se supone que todos los límites que aparecen en los segundos miembros de las igualdades existen; entonces se afirma que también existen los límites que están en los primeros miembros y en este caso son válidas las igualdades escritas.

Todas estas propiedades se demuestran de forma análoga a como demostramos las afirmaciones semejantes que aparecieron anteriormente (véanse los p. 4.9 y 5.10). Demostremos, por ejemplo, la propiedad 5°. Previamente observemos que para cualesquiera vectores p y q

$$|p \times q| = |p||q| \operatorname{sen} \widehat{pq} \leqslant |p||q|. \tag{15.5}$$

Por esto, si $p = p(t)$ y $q = q(t)$ y además $\lim\limits_{t \to t_0} |p(t)| = 0$ y $|q(t)|$ es una función acotada, entonces de (15.5) tenemos (véase el p. 4.9)

$$\lim_{t \to t_0} |p \times q| = 0. \tag{15.6}$$

Sea ahora $\lim\limits_{t \to t_0} r_1(t) = a$, $\lim\limits_{t \to t_0} r_2(t) = b$. Hagamos $\alpha(t) = r_1(t) - a$, $\beta(t) = r_2(t) - b$, entonces según (15.2)

$$\lim_{t \to t_0} |\alpha(t)| = \lim_{t \to t_0} |\beta(t)| = 0 \tag{15.7}$$

y

$$r_1(t) \times r_2(t) = [a + \alpha(t)] \times [b + \beta(t)] =$$
$$= a \times b + a \times \beta(t) + \alpha(t) \times b + \alpha(t) \times \beta(t);$$

donde en virtud de (15.7) $\lim\limits_{t \to t_0} |a \times \beta(t)| = \lim\limits_{t \to t_0} |\alpha(t) \times b| = \lim\limits_{t \to t_0} |\alpha(t) \times \beta(t)| = 0$ y ya que

$$|a \times \beta(t) + \alpha(t) \times b + \alpha(t)| \times \beta(t) \leqslant$$
$$\leqslant |a \times \beta(t)| + |\alpha(t) \times b| + |\alpha(t) \times \beta(t)|,$$

entonces $\lim\limits_{t \to t_0} |\alpha \times \beta(t) + \alpha(t) \times b + \alpha(t) \times \beta(t) = 0$. Esto, según (15.2) significa que

$$\lim_{t \to t_0} r_1(t) \times r_2(t) = a \times b. \square$$

Señalemos que las propiedades 1° — 5° de los límites de las funciones vectoriales pueden ser obtenidas, naturalmente, con ayuda de las fórmulas (15.3) de las propiedades correspondientes de las funciones escalares si se pasa a la escritura en coordenadas de los vectores y sus productos escalares y vectoriales.

Pasemos a la definición de la continuidad de una función vectorial.

Definición 3. *Una función vectorial $r = r(t)$ definida en cierto entorno del punto t_0 se llama continua en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} r(t) = r(t_0)$.*

De la equivalencia de las condiciones (15.1) y (15.3) se deduce que para que la función vectorial $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definida en cierto entorno del punto t_0 sea continua en este punto es necesario y suficiente que para $t = t_0$ sean continuas las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

De las propiedades de los límites de las funciones vectoriales se deduce que la suma, los productos escalares y vectoriales de las funciones vectoriales y también el producto de funciones escalares por vectoriales serán continuos en algún punto si en este punto son continuos todos los sumandos y los factores, respectivamente.

15.2. DERIVADA Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Definición 4. *Supongamos que la función vectorial $r = r(t)$ está definida en cierto entorno del punto t_0. Si existe el límite*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}$$

entonces se llama derivada de la función vectorial dada en t_0 y se denota por $r'(t_0)$ ó $\dot{r}(t_0)$.

De esta forma, la derivada de una función vectorial en un punto es un vector.

Para que la función $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definida en cierto entorno del punto t_0 tenga derivada en t_0 es necesario y suficiente que las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ tengan derivadas para $t = t_0$ y además en este caso

$$r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)), \ |r'(t_0)| = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0)}.$$

Esto se deduce directamente de la equivalencia de los enfoques (15.1) y (15.3) de la definición de límite para la función vectorial:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t} =$$
$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}\right).$$

Definición 5. *La función vectorial $r = r(t)$ definida en cierto entorno del punto t_0 se llama diferenciable para $t = t_0$ si su incremento $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$ en el punto t_0 es representable en la forma*

$$\Delta r = a\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t \tag{15.8}$$

donde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Además la función vectorial lineal [*] *$a\Delta t$ se llama diferencial de la función $r(t)$ en el punto t_0 y se denota por $dr = a\Delta t$*

$$\Delta r = dr + \varepsilon(\Delta t)\Delta t. \tag{15.9}$$

Es evidente que si la función vectorial es diferenciable para $t = t_0$, entonces es continuo en este punto.

Como en el caso de las funciones escalares, de la diferenciabilidad de una función se deduce la existencia de la derivada $r'(t)$ y su igualdad al vector a. En realidad, de (15.8) tenemos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} [a + \varepsilon(\Delta t)] = a.$$

Viceversa, si existe la derivada $r'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta t}$, entonces suponiendo $\varepsilon(\Delta t) = \dfrac{\Delta r}{\Delta t} - r'(t_0)$, obtenemos $\Delta r = r'(t_0)\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t$ donde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Quiere decir que $r(t)$ es diferenciable en el punto t_0 y

$$dr = r'(t_0)\Delta t.$$

---

[*] La función vectorial de argumento t se llama lineal si tiene la forma $at + b$, donde a y b son dos vectores cualesquiera dados.

18—6179

Hagamos, por definición, $dt = \Delta t$ para la variable independiente t, entonces (eliminando la notación del argumento t_0)

$$dr = r'dt, \quad r' = \frac{dr}{dt}.$$

Sustituyendo la expresión obtenida para dr, en (15.9) obtenemos

$$\Delta r = r'\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t,$$

ó

$$\Delta r = r'\Delta t + \alpha(\Delta t), \tag{15.10}$$

donde $\alpha(\Delta t) = \varepsilon(\Delta t)\Delta t = o(\Delta t)$ cuando $\Delta t \to 0$ *) y $\alpha(0) = \mathbf{0}$.

Sea ahora $t = t(\tau)$. Si esta función es diferenciable en el punto τ_0, $t_0 = t(\tau_0)$ y $\Delta\tau = \tau - \tau_0$, entonces de (15.10) (denotando para mayor claridad r' por r'_t) se deduce que

$$\frac{\Delta r}{\Delta\tau} = r'_t\frac{\Delta t}{\Delta\tau} + \frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta\tau}.$$

Ya que $\Delta t \to 0$ cuando $\Delta\tau \to 0$, entonces como en el caso de una función numérica (véase el p. 9.7), poniendo $\varepsilon(0) = \mathbf{0}$, obtendremos

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\Delta t)\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau} = \mathbf{0},$$

por lo que la derivada $r'_\tau = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\tau}$ existe y $r'_\tau = r'_t t'_\tau$. De aquí, como en el caso de las funciones escalares, se deduce la invariancia de la escritura de la diferencial de una función vectorial; tanto para la variable dependiente t como para la variable independiente τ tenemos

$$dr = r'_t dt, \quad dr = r'_t d\tau.$$

Demos las fórmulas de diferenciación de la función vectorial (el argumento, para simplificar las notaciones, se omite):

1. $(r_1 + r_2)' = r_1' + r'_2$.
2. $(fr) = f'r + fr'$.
3. $(r_1r_2)' = r'_1r_2 + r_1r'_2$.
4. $(r_1 \times r_2) = r'_1 \times r_2 + r_1 \times r'_2$.

Aquí, todas las funciones analizadas están definidas en cierto entorno del punto t_0 y se supone que todas las derivadas que aparecen en el segundo miembro de cada igualdad existen para $t = t_0$; entonces, en el punto t_0 existen también las derivadas que aparecen en el primer miembro y además son válidas las igualdades escritas.

Todas estas fórmulas se demuestran análogamente a las fórmulas de diferenciación de las funciones escalares (véase el p. 9.5). Demostremos, por ejemplo, la fórmula 4.

*) Por analogía con el caso de las funciones escalares para la función vectorial $\alpha(t)$ se escribe $\alpha = o(\beta)$ cuando $t \to t_0$ si $\alpha(t) = \varepsilon(t)\beta(t)$, donde $\lim\limits_{t\to t_0}\varepsilon(t) = 0$.

Utilizando las propiedades 1° — 5° de los límites de las funciones vectoriales obtendremos

$$[r_1(t)\times r_2(t)]'_{t=t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r_1(t_0+\Delta t)\times r_2(t_0+\Delta t) - r_1(t_0)\times r_2(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{r_1(t_0+\Delta t) - r_1(t_0)}{\Delta t}\times r_2(t_0+\Delta t) + r_1(t_0)\times\frac{r_2(t_0+\Delta t) - r_2(t_0)}{\Delta t}\right] =$$

$$= r_1'(t_0)\times r_2(t_0)\times r_2(t_0)\times r_2'(t_0).$$

Si la función vectorial $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está definida en cierto entorno del punto t_0 y tiene n derivadas en este punto, entonces para ella es válida la fórmula de Taylor

$$\Delta r = r(t_0+\Delta t) - r(t_0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k r(t_0)}{dt^k}\Delta t^k + o(\Delta t^n).$$

Esta fórmula se deduce directamente del desarrollo de las funciones coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ por la fórmula de Taylor.

Vemos que muchos hechos establecidos en la teoría de las funciones escalares, se transfieren al pie de la letra a las funciones vectoriales. No obstante, sería un error pensar que esto siempre es así: por ejemplo, en determinado sentido, el análogo de la fórmula de los incrementos finitos no tiene lugar para las funciones vectoriales.

En efecto, analicemos la función vectorial bidimensional $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Por cuanto $r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, entonces $|r'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$ para cualquier $t \in [0, 2\pi]$. Por consiguiente no existe tal punto $\xi \in [0, 2\pi]$ para el cual sea válida la igualdad análoga a la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange para las funciones escalares

$$r(2\pi) - r(0) = 2\pi r'(\xi),$$

ya que en el primer miembro aparece un vector nulo, por cuanto $r(2\pi) = r(0)$ y en el segundo uno no nulo.

La afirmación siguiente es una variación de la fórmula de los incrementos finitos para las funciones vectoriales.

Teorema 1. *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en su interior. Entonces existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$|r(b) - r(a)| \leqslant (b - a)|r'(\xi)|. \tag{15.11}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $r(a) = r(b)$, entonces la desigualdad (15.11) es válida para cualquier elección del punto $\xi \in (a, b)$ ya que su primer miembro se anula.

Sea $r(a) \neq r(b)$. Estimemos la longitud $|r(b) - r(a)|$ del vector $r(b) - r(a) \neq 0$. Si se da cualquier vector x, entonces denotando por e al vector unidad en el sentido del vector x, obtendremos $|x| = (x, e)$ ya que por la definición del producto escalar $(x, e) = |x||e| \cos xe$, $|e| = 1$, $xe = 0$, y por consiguiente $\cos xe = 1$. Por esto, si e es el vector unidad en el sentido del vector $r(b) - r(a) \neq 0$, entonces

$$|r(b) - r(a)| = (r(b) - r(a), e) = (r(b), e) - (r(a), e),$$

es decir, se obtuvo la diferencia de los valores de una función numérica

$$f(t) = (r(t), e) \tag{15.12}$$

en los extremos del segmento $[a, b]$:

$$|r(b) - r(a)| = f(b) - f(a). \tag{15.13}$$

De (15.12) se deduce que la función $f(t)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en todos sus puntos interiores, ya que por la condición del teorema, la función $r(t)$ posee estas propiedades. Por esto, según la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange, existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Pero en virtud de la regla de diferenciación del producto escalar tenemos

$$f'(t) = (r'(t), e)$$

como consecuencia de lo cual

$$f(b) - f(a) = (r'(\xi), e)(b - a), \quad a < \xi < b. \tag{15.14}$$

Para dos vectores cualesquiera x e y, de la definición de producto escalar se deduce la desigualdad

$$|(x, y)| = |x||y||\cos xy| \leqslant |x||y|;$$

en particular

$$|(r'(\xi), e)| \leqslant |r'(\xi)||e| = |r'(\xi)|.$$

Por consiguiente, de (15.4) obtenemos:

$$f(b) - f(a) \leqslant |r'(\xi)|(b - a), \quad a < \xi < b.$$

De esta desigualdad y de la fórmula (15.13) se deduce directamente la desigualdad (15.11). □

§ 16. LONGITUD DE CURVA

16.1. CONCEPTO DE CURVA

Analicemos las aplicaciones de los segmentos en el espacio tridimensional R^3. Sea $[a, b]$ cierto segmento y $r(t)$ su aplicación en R^3, es decir, la aplicación que pone en correspondencia a cada punto $t \in [a, b]$ un punto $r(t)$ del espacio R^3, más breve, $r: [a, b] \to R^3$.

Consideraremos que en el espacio R^3 está fijo un sistema de coordenadas. En este caso el dar un punto del espacio es equivalente a dar sus tres coordenadas. Denotemos las coordenadas del punto $r(t)$ por $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Entonces, el dar la aplicación $r(t)$ resulta ser equivalente a dar tres funciones numéricas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ llamadas *funciones coordenadas de la aplicación* $r(t)$.

La aplicación $r(t)$ se llama *continua sobre el segmento* $[a, b]$ si sobre este segmento son continuas todas sus funciones coordenadas.

Para la aplicación $r(t)$ denotaremos por $\boldsymbol{r}(t)$ la función vectorial para la cual las coordenadas del vector $\boldsymbol{r}(t)$ coinciden con las coordenadas del punto $r(t)$, es decir, $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamaremos a la aplicación $r(t)$ y a la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ correspondientes una a otra.

Es evidente que la aplicación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ si y sólo si sobre este segmento es continua la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ correspondiente. Efectivamente, sabemos que una función vectorial es continua sobre un segmento si y sólo si sobre él son continuas todas sus coordenadas (véase el p. 15.1), lo cual, por definición, es la condición de continuidad de la aplicación $r(t)$ sobre un segmento.

Ahora se puede enunciar la definición de curva.

El conjunto Γ del espacio dado como la imagen continua de cierto segmento *) se llama *curva continua* o simplemente curva.

La aplicación continua indicada — denotémosla de nuevo por $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — del segmento $[a, b]$ sobre el conjunto $\Gamma \subset R^3$ se llama representación de la curva Γ y se escribe

$$\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}.$$

La variable t se llama *parámetro de la curva* Γ.

De esta forma una curva no es simplemente un conjunto del espacio, sino un conjunto analizado como resultado de cierta aplicación continua de un segmento. Dicho de otro modo, una curva es un conjunto del espacio más una aplicación continua del segmento sobre él.

Por esto, un mismo conjunto, obtenido como la imagen de segmentos aplicados continuamente se analiza como curvas diferentes.

Señalemos que la aplicación continua $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ que es una representación de la curva Γ no se considera biunívoca: en un mismo punto de la curva Γ se pueden aplicar dos o más puntos del segmento $[a, b]$.

Los puntos de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ en los cuales se aplica más de un punto del segmento $[a, b]$ se llaman *puntos múltiples de esta curva*.

Así, si el punto M de la curva continua Γ es un punto múltiple de la última, entonces para la representación dada $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, de esta curva Γ, existen al menos dos valores diferentes t_1 y t_2 del parámetro t, $a \leqslant t_1 \leqslant b$, $a \leqslant t_2 \leqslant b$ tales que $r(t_1) = r(t_2) = M$.

El punto $r(a)$ de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ se llama su origen y el punto $r(b)$, su extremo.

Definición 1. *La curva* $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ *se llama curva cerrada o lo que es lo mismo contorno cerrado si su origen coincide con su extremo*: $r(a) = r(b)$.

Una curva cerrada que no tiene puntos múltiples menos el punto $r(a) = r(b)$ *y tal que* $r(t) \neq r(a) = r(b)$ *para* $a < t < b$, *se llama contorno cerrado simple*.

Diremos que el punto $M = r(t)$ de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ tiende al punto $M_0 = r(t_0)$ de esta curva si $|MM_0| \to 0$ cuando $t \to t_0$.

---

*) Se llama *imagen continua de un segmento* la imagen de un segmento por una aplicación continua del último.

Si la curva Γ está en cierto plano, entonces esta curva se llama *plana*. Si el plano indicado se escoge por plano coordenado xOy, entonces la representación de la curva tiene el aspecto

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = 0$$

y la ecuación $z = 0$, si esto no nos puede llevar a confusiones, usualmente no se escribe.

La gráfica de una función $y = f(x)$ continua sobre cierto segmento $[a, b]$ es una curva plana en nuestro sentido con la representación.

$$x = x, \quad y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

(en este caso el parámetro $t = x$).

La aplicación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, que define la curva Γ para un sistema de coordenadas x, y, z fijo en el espacio se puede definir también en la forma coordenada, es decir, dando las coordenadas del punto $r(t)$:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

En este caso las tres funciones $x(t), y(t), z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ se llaman *representación coordenada de la curva* Γ *y se escribe*

$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t); a \leqslant t \leqslant b\}.$$

La aplicación $r(t)$ se puede dar mediante la función vectorial correspondiente a ella $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, donde, como siempre, $r(t)$ es el radio vector con extremo en el punto $r(t)$ *). En este caso la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ se llama *hodógrafo* de la función vectorial $r(t)$ y la propia función vectorial $r(t)$ es *la representación vectorial de la curva* Γ y se escribe

$$\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}.$$

La circunferencia es un ejemplo de curva. Tomemos para mayor precisión la circunferencia de radio r con centro en el origen de coordenadas. Esta circunferencia se puede representar, por ejemplo, como la imagen continua del segmento $[0, 2\pi]$ con ayuda de las funciones

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{16.1}$$

Es evidente que la circunferencia es un contorno cerrado simple. Un ejemplo de curva no cerrada es cualquier arco de circunferencia correspondiente, por ejemplo, a la variación del parámetro t sobre el segmento $[0, \alpha]$, donde $0 \leqslant \alpha < 2\pi$.

Señalemos que el conjunto de puntos de la curva

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi \tag{16.2}$$

coincide con el conjunto de puntos de la curva (16.1): en uno y otro caso es la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ sobre el plano x, y. No obstante, ha sido obtenida, como resultado de aplicaciones diferentes: para la transformación (16.1), es decir, para la variación del parámetro t desde 0 hasta 2π esta circunferencia se recorre una vez y en la transformación (16.2), es decir, para la variación del parámetro t desde 0 hasta 4π se recorre dos veces. Por esto (16.1) y (16.2) son curvas diferentes.

---

*) Si no se ha acordado algo diferente, entonces siempre se supone que el origen del radio vector se encuentra en el origen de coordenadas.

De forma análoga se definen las formas especiales de curvas continuas, diferenciables (continuamente), dos veces (continuamente) diferenciables, etc. Definamos, por ejemplo, las curvas continuamente diferenciables. La aplicación $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ del segmento $[a, b]$ en el espacio se llama *continuamente diferenciable* si todas las funciones $x(t), y(t), z(t)$ son continuamente diferenciables sobre el segmento $[a, b]$.

La curva $\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ se llama *continuamente diferenciable* si su representación $r(t)$ es continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$.

Análogamente se definen las curvas diferenciables, dos veces diferenciables, dos veces continuamente diferenciables, etc.

La definición de curva dada tiene en su base la representación física sobre la trayectoria (camino) de un punto material que se mueve en el espacio. Pero en tal trayectoria se pueden escoger parámetros diferentes, por ejemlo, el tiempo de movimiento t, la longitud del espacio recorrido s o cualquier otro. Por esto la condición que consiste en que dos curvas con diferentes representaciones siempre se consideran diferentes, no es siempre cómoda. Tal acuerdo es natural para las curvas (16.1) y (16.2). No obstante, las dos representaciones de las curvas

$$x = \cos t, \quad y = -\operatorname{sen} t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 0 \quad \text{e} \quad y = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

sería natural considerarlas representación de una misma curva: la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$.

Estas consideraciones nos conducen a la idea de llevar a cabo cierta especificación del concepto de curva: la unión de ciertas curvas diferentes en el sentido de la definición dada anteriormente en una curva. Hagamos esto.

Diremos que las curvas $\Gamma_1 = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ y $\Gamma_2 = \{\rho(\tau), \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}$ son una misma curva si existe una función continua y estrictamente creciente $\tau = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ o una función continua estrictamente decreciente $\tau = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $\varphi(a) = \beta$, $\varphi(b) = \alpha$, tal que para todos los $t \in [a, b]$ tiene lugar $r(t) = \rho(\varphi(t))$.

En el caso de las curvas (continuamente) diferenciables se supone que la función $\varphi: [a, b] \to [\alpha, \beta]$ es además (continuamente) diferenciable sobre $[a, b]$ y tiene derivada que no se anula. La última condición garantiza la diferenciabilidad (continua) de la función inversa φ^{-1}.

Semejantes transformaciones del parámetro, es decir, tales que llevan a la misma curva en el sentido de la definición dada, se llaman *transformaciones admisibles del parámetro* y todas las representaciones de una misma curva se llaman *equivalentes* entre sí.

Más detalladamente el paso a otras representaciones de una curva dada se analizará en el punto siguiente.

16.2*. CURVAS DADAS PARAMÉTRICAMENTE

Para la construcción de una teoría estricta de curvas que admiten diferentes representaciones introduzcamos previamente el concepto de aplicaciones equivalentes de segmentos en el espacio.

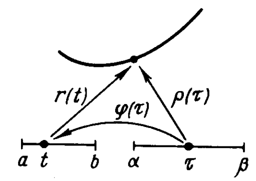


FIG. 72

Definición 2. *La aplicación continua $r(t)$ del segmento $[a, b]$ en el espacio se llama equivalente a la aplicación continua $\rho(\tau)$ del segmento $[\alpha, \beta]$ en el mismo espacio si existe una función continua estrictamente monótona $t = \varphi(\tau)$ (creciente o decreciente), tal que aplica el segmento $[\alpha, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$ y para cada $\tau \in [\alpha, \beta]$ es válida la igualdad* (fig. 72)

$$r(\varphi(\tau)) = \rho(\tau). \tag{16.3}$$

La función $\varphi(\tau)$ se llama aplicación realizadora de la equivalencia de las aplicaciones $r(t)$ y $\rho(\tau)$.

Si la aplicación continua $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, del segmento $[a, b]$ en el espacio es equivalente a la aplicación continua $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, del segmento $[\alpha, \beta]$ en el espacio, entonces se escribe $r(t) \sim \rho(\tau)$.

Es fácil convencerse de que cualquier aplicación continua de un segmento en el espacio es equivalente a sí misma: $r(t) \sim r(t)$ (aquí la aplicación realizadora de la equivalencia es la función $t = \tau$, $a = \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta = b$). Esta propiedad se llama propiedad *de reflexividad.* Fácilmente se comprueba también que si $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, son aplicaciones continuas de los segmentos $[a, b]$ y $[\alpha, \beta]$, respectivamente, en el espacio y si $r(t) \sim \rho(\tau)$, entonces $\rho(\tau) \sim r(t)$ es también la propiedad *de simetría.* Así mismo es fácil convencerse de que si $r_1(t_1)$, $a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1$, $r_2(t_2)$, $a_2 \leqslant t_2 \leqslant b_2$, y $r_3(t_3)$, $a_3 \leqslant t_3 \leqslant b_3$, son aplicaciones continuas de los segmentos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ y $[a_3, b_3]$, respectivamente, en el espacio, entonces de $r_1(t_1) \sim r_2(t_2)$ y $r_2(t_2) \sim r_3(t_3)$ se deduce que $r_1(t_1) \sim r_3(t_3)$ es la propiedad *de transitividad.*

Si en algún conjunto de elementos está introducido un concepto de equivalencia que posee las tres propiedades indicadas (reflexividad, simetría y transitividad), entonces tal conjunto se descompone en clases disjuntas de elementos equivalentes (véase § 61). En nuestro caso se obtienen clases disjuntas de aplicaciones de segmentos, continuas y equivalentes entre sí.

Finalmente, observemos que si $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, son aplicaciones de segmentos en el espacio, continuas y equivalentes, entonces las imágenes de los segmentos $[a, b]$ y $[\alpha, \beta]$ en el espacio por las transformaciones $r(t)$ y $\rho(\tau)$ coinciden, respectivamente. Esto se deriva inmediatamente de la condición (16.3).

Pasemos ahora al concepto de curva.

Definición 3. *Cualquier conjunto Γ de aplicaciones $r(t)$ de segmentos $[a, b]$ en el espacio, continuas y equivalentes (véase la definición 2) se llama curva dada paramétricamente:*

$$\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Cada una de las aplicaciones indicadas se llama representación de esta curva.

La función vectorial $r(t)$ ($r(t)$ es un radio vector con su extremo en el punto $r(t)$) por analogía con el p. 16.1 se llama *representación vectorial de la curva Γ definida paramétricamente*:

$$\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces el conjunto de funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, se llama *representación coordenada de la curva Γ dada paramétricamente*:

$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Es evidente que una curva dada paramétricamente se determina unívocamente por cada una de sus representaciones. Esto permite (lo cual es más cómodo), por ejemplo, en la escritura $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ entender el segundo miembro de la igualdad no como el conjunto de todas las representaciones de la curva Γ, sino como cierta representación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, totalmente definida. En el futuro obraremos así no sólo en el caso indicado sino también en los casos de representaciones tanto vectoriales como coordenadas.

Ejemplo. Por nuestra definición, las curvas dadas paramétricamente

$$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

y

$$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ 0 \leqslant t \leqslant 4\pi,$$

como ya se señaló en el p. 16.1, son curvas diferentes aunque coinciden como conjuntos de puntos del plano: estos conjuntos representan la misma circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. En el primer caso esta circunferencia "se recorre" una vez, en el segundo, dos veces.

Las representaciones

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

y

$$x = \sqrt{\tau(2-\tau)}, \quad y = \tau - 1, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 2,$$

definen la misma curva. Efectivamente, la función $\tau = 1 + \operatorname{sen} t$ es continua, crece monótonamente sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$ y transforma una representación en otra. El conjunto de todos los puntos de la curva forman en este caso la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$.

En la representación dada $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, para cierta curva continua y un valor fijo del parámetro t, por $r(t)$ se denota naturalmente el punto de la curva continua analizada, en el cual se transforma el punto $t \in [a, b]$ según la representación dada.

Definamos ahora qué se llama punto de una curva dada paramétricamente, es decir, de una curva definida como una clase de aplicaciones de segmentos, continuas y equivalentes.

Definición 4. *Sean $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y $\rho(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, dos representaciones de la curva Γ dada paramétricamente, φ, la aplicación realizadora de su equivalencia (véase la definición 3) y sea $t = \varphi(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $a \leqslant t \leqslant b$ (el valor τ y por tanto* *el valor t están fijos) y por consiguiente $r(t) = \rho(\tau)$. Denotemos este punto del espacio por P, es decir, $P = r(t) = \rho(\tau)$. Los pares (P, t) y (P, τ) se llaman equivalentes.*

La equivalencia de los pares (P, t) y (P, τ) la denotaremos con el símbolo $(P, t) \sim (P, \tau)$.

Es fácil comprobar que

1) $(P, t) \sim (P, t)$;

2) si $(P, t) \sim (P, \tau)$, entonces $(P, \tau) \sim (P, t)$;

3) si $(P, t_1) \sim (P, t_2)$ y $(P, t_2) \sim (P, t_3)$, entonces $(P, t_1) \sim (P, t_3)$.

Definición 5. *Para la curva Γ dada paramétricamente, el conjunto $\{(P, t)\}$ de todos los pares equivalentes (P está fijo) se llama punto de esta curva y el punto P del espacio, su portador.*

Cada punto $\{(P, t)\}$ de la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ dada paramétricamente se determina unívocamente por cada par (P, t) y por cuanto en este par $P = r(t)$, entonces cada punto de la curva Γ se determina unívocamente por el valor del parámetro $t \in [a, b]$ en cada representación. Por esto, para mayor brevedad, los puntos de las curvas dadas paramétricamente los denotaremos no con el símbolo $\{(P, t)\}$ sino simplemente $r(t)$. Por lo dicho, esta notación tiene un sentido unívoco.

Definición 6. *El conjunto de los portadores de todos los puntos de una curva Γ dada paramétricamente se llama portador de esta curva.*

El punto P del portador de la curva Γ, la cual es portador de por lo menos dos puntos diferentes de la curva, se llama *punto múltiple* del portador de la curva Γ.

Como ya vimos en los ejemplos del p. 16.1 (véase (16.1) y (16.2)), curvas diferentes pueden tener un mismo portador. Observemos además que si $r(t) \neq r(a) = r(b)$, $a < t < b$, en una representación de la curva, entonces esta condición se cumple en cualquier otra representación. Por consiguiente el concepto de contorno cerrado (véase la definición 1 en el p. 16.1) no depende de la elección de la representación de la curva.

Pasemos ahora a la definición de curvas de otras clases. El concepto de equivalencia de aplicaciones de un segmento en el espacio se puede introducir no sólo para las aplicaciones continuas, sino para otras aplicaciones. Esto da la posibilidad de definir clases especiales de curvas dadas paramétricamente: curvas dadas paramétricamente n veces diferenciables y n veces continuamente diferenciables, $n = 1, 2, \ldots$.

Definamos, por ejemplo, el concepto de equivalencia para las aplicaciones de segmentos continuamente diferenciables y la curva continuamente diferenciable dada paramétricamente.

Definición 7. *Dos aplicaciones de segmentos en el espacio continuamente diferenciables se llaman continuamente diferenciables y equivalentes si existe una función φ realizadora de su equivalencia en el sentido de la definición 2, la cual tanto ella misma como su inversa son continuamente diferenciables.*

Definición 8. *Cualquier conjunto Γ de aplicaciones continuamente diferenciables y continuamente diferenciables equivalentes de segmentos en el espacio se llama curva continuamente diferenciable dada paramétricamente.*

En general una curva dada paramétricamente de una clase se define como el conjunto de las aplicaciones de segmentos en el espacio (llamadas sus representaciones) equivalentes en algún sentido, y además la equivalencia satisface las condiciones de reflexividad, simetría y transitividad. Las aplicaciones de un segmento sobre otro que realizan esta equivalencia se llaman en este caso transformaciones admisibles del parámetro.

Cada curva dada paramétricamente de cierta clase se define unívocamente por cualquiera de sus representaciones y para ella, por el mismo esquema dado anteriormente se define el concepto de punto, portador del punto y portador de la curva. En el futuro, para simplificar, allí donde no puede llevarnos a confusiones, las curvas dadas paramétricamente y sus portadores (curvas continuas en el sentido del p. 16.1) se llamarán por un mismo término "curvas".

16.3. ORIENTACIÓN DE UNA CURVA. ARCO DE CURVA. SUMA DE CURVAS. REPRESENTACIÓN IMPLÍCITA DE CURVAS

El orden de los números (por magnitud) sobre el segmento $[a, b]$ con ayuda de una representación $r(t)$ de la curva dada $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$, naturalmente engendra el orden correspondiente de los puntos sobre la curva. El punto $r(t') \in \Gamma$ se considera anterior al punto $r(t'') \in \Gamma$ o lo que es lo mismo, el punto $r(t'')$ se considera posterior al punto $r(t')$ si $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$. Si este mismo orden de los puntos se desea conservar en otras representaciones de la curva, entonces es necesario reducir la clase de transformaciones admisibles del parámetro, admitiendo sólo las transformaciones estrictamente crecientes del parámetro.

Definición 9. *La curva Γ definida por la clase de aplicaciones de segmentos en el espacio, continuas y equivalentes, para las cuales las transformaciones admisibles del parámetro son sólo funciones continuas estrictamente crecientes, se llama curva orientada.*

De esta forma, las funciones φ realizadoras de la equivalencia de dos representaciones de la curva orientada dada satisfacen las condiciones de la definición 2 y además son estrictamente crecientes.

En lugar de la expresión "está dada una curva orientada" a veces se dice "en la curva está dada una orientación" (es decir, un orden de los puntos).

Definición 10. *Sea $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva orientada y sea $t = t(\tau)$ una función continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$, estrictamente decreciente y $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$. La curva definida por la representación $r = r(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, se llama curva orientada en sentido opuesto a la curva Γ y se denota por $-\Gamma$.*

De forma semejante se definen las curvas orientadas y orientadas en sentido opuesto de otras clases (diferenciables, continuamente diferenciables, etc.).

Si $t = t(\tau)$ es la aplicación del segmento $[\alpha, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$, indicada en la definición 10, $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ y $t_0 = t(\tau_0)$, entonces los puntos $r(t_0)$ y $r(t(\tau_0))$ de la curva Γ y la curva orientada en sentido opuesto $-\Gamma$, respectivamente, se llaman correspondientes uno a otro. Un punto de la curva Γ antecede a otro punto de esta curva si y sólo si el punto de la curva $-\Gamma$ correspondiente al primer punto es posterior al punto correspondiente al segundo. Con esto se justifica el término de "curva orientada en sentido opuesto".

Si $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una representaicón de la curva Γ, entonces $r(a + b - \tau)$, $a \leqslant \tau \leqslant b$ es una representaicón de la curva orientada en sentido opuesto $-\Gamma$ ya que la función $t = a + b - \tau$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, decrece estrictamente y aplica el segmento $[a, b]$ sobre sí mismo.

Como conclusión enunciemos algunas definiciones más, útiles para el futuro. Supongamos que está dada la curva $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$.

Definición 11. *Si* $[a', b'] \subset [a, b]$, *entonces la curva* $\Gamma' = \{r(t);\ a' \leqslant t \leqslant b'\}$ *se llama parte de la curva* Γ *(o su arco) y se escribe* $\Gamma' \subset \Gamma$.

Definición 12. *Si* $t_0 \in (a, b)$, $\Gamma_1 = \{r(t), a \leqslant t \leqslant t_0\}$, $\Gamma_2 = \{r(t), t_0 \leqslant t \leqslant b\}$, *entonces la curva* Γ *se llama suma de las curvas* Γ_1 *y* Γ_2 *y se escribe* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Análogamente se define la suma de un número finito de curvas.

Definición 13. *La suma de un número finito de curvas continuamente diferenciables se llama curva continuamente diferenciable a trozos.*

Definición 14. *Sea* $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *una curva plana situada sobre el plano* x, y. *Si existe una función* $F(x, y)$ *tal que las coordenadas de los puntos* (x, y) *de la curva* Γ *satisfacen la condición*

$$F(x, y) = 0, \tag{16.4}$$

entonces se dice que la ecuación (16.4) es la representación implícita de la curva Γ.

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que en general el conjunto de todos los puntos que satisfacen una ecuación del tipo (16.4) no es una curva en el sentido definido anteriormente incluso para las funciones $F(x, y)$ suficientemente "buenas". Por ejemplo, el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$ representa en sí la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el punto (0; 0). Se puede mostrar que este conjunto no es la imagen continua de un segmento.

En el caso del espacio se pueden dar las curvas de forma implícita, pero ya con ayuda de un sistema de dos ecuaciones:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Más detalladamente nos ocuparemos de este problema en el p. 41.3.

Finalmente señalemos que una curva siempre es acotada, es decir, está en cierta esfera. Esto se deduce de que las funciones de la representación coordenada de la curva según el teorema de Bolzano — Weierstrass son acotadas en virtud de su continuidad. Junto con esto, ya en la matemática elemental se encuentran curvas no acotadas. A tales curvas pertenecen por ejemplo, la recta, la parábola, la hipérbola, el sinusoide, la gráfica de tg x, etc. Para abarcar tales "curvas" se puede definir la clase de las así llamadas *curvas abiertas* por el esquema desarrollado anteriormente en el cual como base se toma una aplicación continua de un intervalo y no de un segmento, como esto fue hecho antes. Las curvas abiertas, en particular, pueden ser no acotadas. El enunciado, detallado y exacto de todos estos conceptos se le deja hacer al lector a medida de sus necesidades.

16.4. TANGENTE A LA CURVA. SENTIDO GEOMÉTRICO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Supongamos que está dada la curva $\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ que la función vectorial $r(t)$ es diferenciable en el punto $t_0 \in [a, b]$ y $r'(t_0) \neq 0$. Por cuanto en virtud

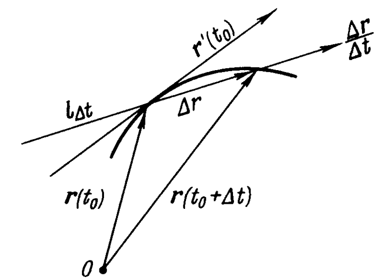


FIG. 73

de la definición de diferenciabilidad

$$\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = r'(t_0)\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0,$$

entonces para todos los $\Delta t \neq 0$ suficientemente pequeños tiene lugar la desigualdad

$$r(t_0 + \Delta t) \neq r(t_0).$$

Efectivamente, en las suposiciones hechas $r'(t_0)\Delta t \neq \mathbf{0}$, por esto para todos los $\Delta t \neq 0$ suficientemente pequeños tendremos

$$r'(t_0)\Delta t + o(\Delta t) \neq 0.$$

La recta trazada por los puntos $r(t_0)$ y $r(t_0 + \Delta t)$ se llama *secante* para la curva Γ. Denotémosla por $l_{\Delta t}$ (fig. 73). Para todos los $\Delta t \neq 0$ suficientemente pequeños, en virtud de la condición $r(t_0) \neq r(t_0 + \Delta t)$ la secante $l_{\Delta t}$ está definida unívocamente. Por cuanto el vector $\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$ es paralelo a esta secante, entonces el vector $\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$, $\Delta t \neq 0$, que se diferencia del vector Δr sólo en el factor escalar $1/\Delta t$ también es paralelo a ella.

Por condición, en el punto t_0 existe la derivada, es decir, el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t_0). \tag{16.5}$$

Ya que todas las secantes pasan por un mismo punto $r(t_0)$ entonces la fórmula (16.5) geométricamente significa que las secantes $l_{\Delta t}$, cuando Δt tiende a cero, tienden a cierta posición límite, es decir, a una recta que pasa por este mismo punto $r(t_0)$ en el sentido del vector $r'(t_0)$. Esta recta, en virtud de la condición $r'(t_0) \neq 0$, está definida unívocamente. Ella se llama *tangente a la curva* Γ en el punto $r(t_0)$.

De esta forma, en virtud de la propia definición de tangente a la curva Γ en el punto $r(t_0)$, la derivada $r'(t_0)$ de la función vectorial $r(t)$ en el caso cuando $r'(t_0) \neq 0$, es un vector paralelo a la tangente en el punto $r(t_0)$. Si el origen del vector $r'(t_0)$ lo trasladamos a este punto, como se hace usualmente, entonces estará dirigido por la tangente.

En el caso analizado la diferencial $dr(t_0) = r'(t_0)dt$ también está orientada por la tangente a la curva, ya que se diferencia de la derivada sólo en el factor escalar dt. El vector $t = r'/|r'|$, $r' \neq \mathbf{0}$ es el vector unidad orientado por la tangente. El vector Δr para $\Delta t > 0$ está orientado desde el punto de la curva con el menor valor del parámetro al punto con mayor valor del parámetro, por lo que se puede decir que el vector Δr para $\Delta t > 0$ muestra el sentido en el cual el parámetro crece sobre la curva, es decir, como se dice, el sentido positivo sobre la curva. El vector $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ para $\Delta t > 0$ tiene el mismo sentido que el vector Δr. Por cuanto $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t)$, entonces es natural decir que el vector $r'(t)$ y por tanto el vector t, el cual se diferencia del vector $r'(t)$, podría ser en un factor numérico positivo $1/|r'(t)|$, también está orientado en el sentido de crecimiento del parámetro y que su orientación (sentido) corresponde a la orientación de la curva. El sentido del vector t (o lo que es lo mismo, del vector r') se llama *sentido positivo de la tangente*.

La ecuación de la tangente a la curva Γ en el punto $r(t_0)$ para la cual $r'(t_0) \neq 0$ en escritura vectorial tiene la forma

$$r = r(t_0) + r'(t_0)\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty,$$

donde r es el radio vector corriente de la tangente. En escritura por coordenadas la ecuación de la tangente en este caso tiene la forma

$$x = x(t_0) + x'(t_0)\tau,$$
$$y = y(t_0) + y'(t_0)\tau,$$
$$z = z(t_0) + z'(t_0)\tau,$$
$$-\infty < \tau < +\infty.$$

Eliminando la variable τ obtenemos

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Definición 15. *Sea Γ una curva diferenciable y $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, su representación vectorial. El punto de la curva Γ en el cual $r' \neq 0$ se llama punto no singular y el punto en el cual $r' = \mathbf{0}$, singular.*

Si $r = (x(t), y(t), z(t))$, entonces de la igualdad $|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ (véase el p. 15.2) tenemos: *el punto $(x(t), y(t), z(t))$ de la curva Γ no es singular si y sólo si en él $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$, es decir, al menos una de las derivadas x', y' y z' no se convierte en cero.*

De acuerdo con lo demostrado anteriormente *en cualquier punto no singular de la curva Γ existe la tangente.*

En la definición 15 sería formalmente más correcto hablar de un punto singular y no singular de la curva en una representación dada. Esto no fue hecho por cuanto el concepto de punto singular no depende de la elección de la representación de la curva. Esclarezcamos y demostremos esto.

Las transformaciones admisibles del parámetro para las curvas diferenciables son las funciones $t = t(\tau)$, que tanto ellas como sus inversas son funciones diferenciables estrictamente monótonas. Por esto, en virtud del teorema 3 del p. 9.6 sobre la derivada de la función inversa tenemos $t'_\tau \tau'_t = 1$. De aquí se deduce que para cada transformación admisible $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, del parámetro de una curva diferenciable, siempre $t'(\tau) \neq 0$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. Por cuanto

$$x_\tau'^2 + y_\tau'^2 + z_\tau'^2 = (x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2)t_\tau'^2,$$

entonces un punto no singular en una representación de la curva diferenciable será al mismo tiempo no singular en cualquier otra representación.

Definición 16. *Una curva continuamente diferenciable sin puntos singulares se llama curva suave.*

Una curva representable como suma de un número finito de curvas suaves se llama suave a trozos.

Señalemos que si una curva plana tiene una representación explícita $y = y(x)$ ó $x = x(y)$, entonces para ella el vector $(x'(t), y'(t))$ es siempre no nulo: en el primer caso es $(1, y')$ y en el segundo $(x', 1)$.

De forma análoga se define la tangente como la posición límite de la secante y de la curva $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ en el punto $r(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ en el caso cuando $r'(t_0) = \mathbf{0}$, pero existe cierto número natural $n > 1$ para el cual $r^{(n)}(t_0) \neq 0$.

Si todos los $r^{(k)}(t_0) = \mathbf{0}$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, y $r^{(n)}(t_0) \neq 0$, entonces desarrollando Δr por la fórmula de Taylor obtendremos

$$\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0) = \frac{1}{n!} r^{(n)}(t_0)\Delta t^n + o(\Delta t^n), \quad \Delta t \to 0.$$

El vector $\frac{\Delta r}{\Delta t^n}$ está orientado paralelamente a la secante $l_{\Delta t}$ que pasa por los puntos $r(t_0)$ y $r(t_0 + \Delta t)$. De la igualdad escrita se deriva evidentemente que existe el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t^n} = \frac{1}{n!} r^{(n)}(t_0) \neq \mathbf{0}.$$

Por esto en este caso la posición límite de la secante $l_{\Delta t}$, es decir, la tangente en el punto $r(t_0)$ es la recta que pasa por el punto $r(t_0)$ paralelamente al vector $r^{(n)}(t_0)$.

16.5. LONGITUD DEL ARCO DE UNA CURVA

Antes de definir el concepto de longitud del arco de una curva introduzcamos el concepto de partición de un segmento, un concepto que repetidas veces se encontrará en el futuro.

Definición 17. *Para cualquier segmento $[a, b]$, al sistema de sus puntos t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ tales que*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b,$$

lo llamaremos su partición y lo denotaremos por $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$.

Supongamos que se da la curva $\Gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ y sea $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ alguna partición del segmento $[a, b]$. Pongamos

$$\sigma_\tau \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})|.$$

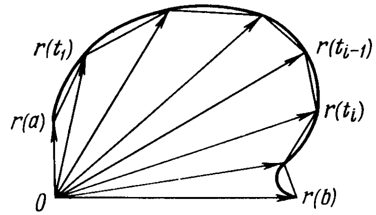


FIG. 74

Evidentemente (fig. 74) σ_τ es la longitud de la quebrada con vértices $r(a)$, $r(t_1)$, ..., $r(t_{n-1})$, $r(b)$, es decir, como se dice habitualmente, de la *quebrada inscrita en la curva* Γ.

Cualquier quebrada, en particular la inscrita en la curva $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$, se puede analizar como una curva en el sentido de la definición dada anteriormente si damos su representación. Sea λ una quebrada, es decir, el conjunto de puntos compuesto por un número finito de segmentos con vértices en los puntos $M_0, M_1, \ldots, M_n$ (estos segmentos se llaman eslabones de la quebrada). Tomemos algún segmento $[a, b]$ y cualquier partición de éste en n segmentos: $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$. Para mayor simplicidad siempre consideraremos que la representaicón de la quebrada es una aplicación continau $\rho(t)$ que transforma linealmente cada segmento $[t_{i-1}, t_i]$ sobre el segmento $M_{i-1}M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; de tal forma, si denotamos por ρ_i el radio vector del punto M_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces la representaicón vectorial de la quebrada tendrá la forma

$$\rho(t) = \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + \rho_{i-1}, \quad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si $M_{i-1} \neq M_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la quebrada se llama *no degenerada.*

Definición 18. *La magnitud*

$$S_\Gamma = \sup_\tau \tau_\tau$$

donde la cota superior se toma por todas las particiones τ posibles del segmento $[a, b]$ se llama longitud de la curva Γ.

Si $S_\Gamma < +\infty$, entonces la curva Γ se llama curva rectificable.

Por esta definición la rectificabilidad de una curva y su longitud no dependen de la elección de la representación de la curva y siempre

$$0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que una curva que sea una parte de una curva rectificable es también rectificable.

Lema 2. *Sea* $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$, *entonces*

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a < c < b$ y

$$\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}, \quad \Gamma_a = \{r(t), a \leqslant t \leqslant c\},$$
$$\Gamma_b = \{r(t), c \leqslant t \leqslant b\}.$$

Sea τ una partición del segmento $[a, b]$ y τ^* una partición de este mismo segmento que coincide con τ si el punto c entra en la partición τ y que se obtiene de τ agregándole el punto c si este punto no entra en la partición τ. La partición τ^* es la unión de las dos particiones de los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$ que denotaremos respectivamente τ_a y τ_b, es decir, $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$. Evidentemente para las longitudes de las quebradas correspondientes a las particiones τ^*, τ_a y τ_b es válida la igualdad $\sigma_{\tau^*} = \sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b}$. Pero $\sup_{\tau_a} \sigma_{\tau_a} = S_{\Gamma_a}$, $\sup_{\tau_b} \sigma_{\tau_b} = S_{\Gamma_b}$ por consiguiente

$$\sigma_{\tau^*} \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

En el paso de la partición τ a la partición τ^* puede ocurrir que sólo un eslabón $r(t_{i-1})r(t_i)$ se cambia por dos $r(t_{i-1})r(c)$ y $r(c)r(t_i)$ y por cuanto $|r(t_{i-1})r(t_i)| \leqslant$ $\leqslant |r(t_{i-1})r(c)| + |r(c)r(t_i)|$, entonces $\sigma_\tau \leqslant \sigma_{\tau^*}$ y por consiguiente

$$\sigma_\tau \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}.$$

Pero $S_\Gamma = \sup_\tau \sigma_\tau$ por lo que

$$S_\Gamma \leqslant S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b}. \tag{16.7}$$

Demostremos ahora la desigualdad opuesta. Para particiones arbitrarias τ_a y τ_b de los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente, y la partición $\tau^* = \tau_a \cup \tau_b$ del segmento $[a, b]$ tenemos $\sigma_{\tau_a} + \sigma_{\tau_b} = \sigma_{\tau^*} \leqslant S_\Gamma$. De aquí, $\sigma_{\tau_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$, fijando la partición τ_b y pasando a la cota superior σ_{τ_a} para todos los τ_a posibles obtenemos la desigualdad $S_{\Gamma_a} \leqslant S_\Gamma - \sigma_{\tau_b}$ y luego

$$S_{\Gamma_a} + \sigma_{\tau_b} \leqslant S_\Gamma.$$

Tomando la cota superior del conjunto de números σ_{τ_b} que se obtiene en todas las posibles particiones τ_b tendremos:

$$S_{\Gamma_a} + S_{\Gamma_b} \leqslant S_\Gamma. \ \square$$

Señalemos que en el lema 2 no se supone que las curvas analizadas son rectificables.

Problema 12. Constrúyase un ejemplo de curva no rectificable.

Teorema 1. *Si la curva $\Gamma = \{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ es continuamente diferenciable, entonces es rectificable y su longitud S_Γ satisface la desigualdad*

$$|r(b) - r(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant M(b - a), \tag{16.9}$$

donde

$$M = \max_{[a, b]} |r'(t)|. \tag{16.10}$$

Señalemos que en virtud de la continuidad de la derivada $r'(t)$ su valor absoluto $|r'(t)|$ también es continuo y por esto alcanza su valor máximo M sobre el segmento $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos cualquier partición $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ del segmento $[a, b]$. Entonces aplicando la desigualdad (15.11) obtendremos

$$|r(b) - r(a)| = |\sum_{i=1}^{n} r(t_i) - r(t_{i-1})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |r'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}), \tag{16.11}$$

donde $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, $t = 1, 2, \ldots, n$.

Por cuanto
$$\sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})| = \sigma_\tau$$

es la longitud de la quebrada inscrita en la curva Γ correspondiente a la partición τ y para todos los $i = 1, 2, \ldots, n$ en virtud de (16.10) tiene lugar la desigualdad $|r'(\xi_i)| \leqslant M$, entonces de la desigualdad (16.11) para cualquier partición τ tendremos

$$|r(b) - r(a)| \leqslant \sigma_\tau \leqslant M \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = M(b - a). \tag{16.12}$$

Pasando en esta desigualdad a la cota superior por τ obtendremos la afirmación del teorema. □

Teorema 2. *Sea la curva $\Gamma = \{r(t) = (x(t), y(t), z(t)); a \leqslant t \leqslant b\}$ continuamente diferenciable. Entonces la longitud variable del arco s, calculada desde el origen $r(a)$ de la curva Γ o respectivamente desde su extremo $r(b)$, es una función continuamente diferenciable del parámetro t y creciente, respectivamente decreciente, y además*

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \left|\frac{dr}{dt}\right|, \tag{16.13}$$

respecitvamente

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = -\left|\frac{dr}{dt}\right|. \tag{16.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $s = s(t)$ la longitud del arco de la curva Γ desde el punto $r(a)$ hasta el punto $r(t)$. Supongamos que $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t \in [a, b]$ y $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t)$. Es evidente que la función $s = s(t)$ crece sobre el segmento $[a, b]$, es decir, si $\Delta t > 0$, entonces $\Delta s \geqslant 0$; si $\Delta t < 0$, entonces $\Delta s \leqslant 0$. Por esto siempre $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \geqslant 0$.

Aplicando la desigualdad (16.9) a la parte de la curva Γ correspondiente al segmento $[t_0, t_0 + \Delta t]$ para $\Delta t > 0$ (respectivamente al segmento $[t_0 + \Delta t, t_0]$ para $\Delta t < 0$) obtendremos

$$|r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)| \leqslant |\Delta s| \leqslant M|\Delta t|;$$

de donde
$$\left|\frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant M, \tag{16.15}$$

donde M es el valor máximo del $|r'(t)|$ sobre el segmento $[t_0, t_0 + \Delta t]$ para $\Delta t > 0$ o sobre el segmento $[t_0 + \Delta t, t_0]$ para $\Delta t < 0$.

En virtud de la continuidad de la derivada $r'(t)$ su valor absoluto $|r'(t)|$ también es continuo y por esto su valor máximo existe, es decir, se alcanza en cierto punto $\xi = t_0 + \theta\Delta t$, $0 < \theta < 1$, del segmento indicado. Por esto la desigualdad (16.15) se puede escribir en la forma

$$\left|\frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant |r'(t_0 + \theta\Delta t)|, \quad 0 < \theta < 1.$$

Pasando aquí al límite cuando $\Delta t \to 0$ en el primer miembro de la desigualdad según la definición de derivada y en el segundo según la continuidad de la derivada $r'(t)$ en el punto $t = t_0$ obtenemos $|r'(t_0)|$. Por consiguiente el límite $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ existe y también es igual a $|r'(t_0)|$, es decir, existe la derivada $s'(t_0)$ y $s'(t_0) = |r'(t_0)|$.

Si $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ y por esto

$$s'(t) = |r'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}.$$

Si ahora $\sigma = \sigma(t)$ es la longitud variable del arco calculada desde el extremo $r(b)$ de la curva Γ entonces, evidentemente $\sigma = S_\Gamma - s$ de donde diferenciando esta igualdad por t tendremos

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{ds}{dt} = -\left|\frac{dr}{dt}\right|. \ \square$$

Corolario 1. *Si el parámetro de una curva continuamente diferenciable es la longitud variable del arco s, entonces*

$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1. \tag{16.16}$$

Esto se deduce directamente de la fórmula $\left|\dfrac{dr}{dt}\right| = \dfrac{ds}{dt}$ cuando $t = s$.

OBSERVACIÓN. La fórmula (16.16) tiene un sentido geométrico simple. Esclarezcámoslo. Supongamos que el parámetro de la curva continuamente diferenciable Γ es la longitud variable de arco s: $\Gamma = \{r(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$. La magnitud $|\Delta r| = |r(s + \Delta s) - r(s)|$ es igual a la longitud del segmento que une a los puntos $r(s)$ y $r(s + \Delta s)$. Este segmento se llama comúnmente cuerda que comprende el arco de la curva Γ con origen en el punto $r(s)$ y extremo en el punto $r(s + \Delta s)$. La longitud del arco indicado evidentemente es igual a $|\Delta s|$ (fig. 75). Por cuanto $\left|\dfrac{dr}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\dfrac{\Delta r}{\Delta s}\right|$, entonces de la igualdad (16.16) se deduce que

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta r|}{|\Delta s|} = 1.$$

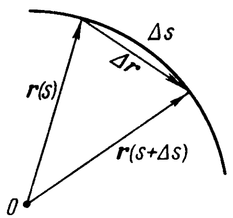


FIG. 75

Esto significa que el límite de la relación de la longitud del arco a la longitud de la cuerda que la abarca es igual a uno cuando el arco se reduce al punto. En esto consiste el sentido geométrico de la fórmula (16.16).

Corolario 2. *Para cualquier curva* Γ *continuamente diferenciable sin puntos singulares, es decir, para cualquier curva suave existe la representación* $r = r(s)$ *en la cual por el parámetro s está tomada la longitud variable del arco de la curva* Γ.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la curva $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ continuamente diferenciable no tiene puntos singulares, es decir, $r'(t) \neq 0$ para todos los $t \in [a, b]$. En este caso la longitud variable del arco $s = s(t)$ es una función estrictamente creciente y continuamente diferenciable ya que $\frac{ds}{dt} = |r'| > 0$ en todos los puntos de $[a, b]$. Por esto existe la función inversa $t = t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma$ la cual también crece estrictamente y tiene derivada continua que no se anula sobre el segmento $[0, S_\Gamma]$, es decir, la función $t = t(s)$ es una transformación admisible del parámetro para las curvas continuamente diferenciables sin puntos singulares y la representación $r = r(t(s))$ es la representación buscada en la cual el papel de parámetro lo juega la longitud variable del arco. □

Esclarezcamos ahora el sentido geométrico de las coordenadas del vector $\frac{dr}{ds}$. Denotemos por α, β y γ los ángulos formados por el vector $\frac{dr}{ds}$ o lo que es lo mismo, por la tangente a la curva $\Gamma = \{r(s)\}$ con los ejes Ox, Oy, y Oz, respectivamente. Entonces de la igualdad $\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1$, evidentemente, se deduce que las proyecciones del vector $\frac{dr}{ds}$ sobre los ejes coordenados son iguales a los cosenos directores del vector $\frac{dr}{ds}$: $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, respectivamente, es decir,

$$\frac{dr}{ds} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{16.17}$$

Conjuntamente con esto para la función vectorial $r(s) = (x(s), y(s), z(s))$ como para cualquier función vectorial (véase el p. 15.2) tenemos

$$\frac{dr}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right). \tag{16.18}$$

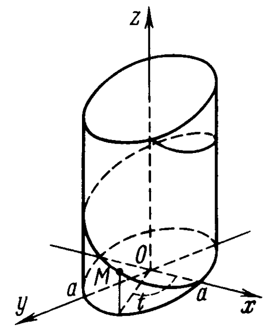


FIG. 76

Comparando (16.17) y (16.18) obtenemos

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma. \tag{16.19}$$

En calidad de ejemplo analicemos la curva llamada *hélice*. Esta curva está dada por la representación

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = bt, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Es evidente que la hélice es una curva diferenciable infinitas veces y ya que

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2 \neq 0,$$

entonces no tiene puntos singulares (fig. 76). Por consiguiente la longitud variable de su arco se puede tomar como parámetro.
Hallemos la representación correspondiente. De acuerdo con la fórmula (16.13) tenemos

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

De aquí $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y ya que $t(0) = 0$, entonces $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Por esto la representación buscada tiene la forma

$$x(s) = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y(s) = a \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$z(s) = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant T\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ejercicio 2. Demuéstrese que para una curva rectificable sin puntos múltiples, la longitud variable del arco es una *función del parámetro continua y estrictamente monótona*.

16.6. CURVAS PLANAS

Sea $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva plana continuamente diferenciable que está en el plano xOy,

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

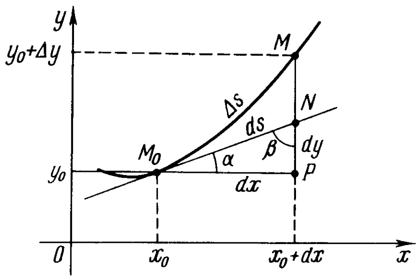


FIG. 77

y sea $s = s(t)$ la longitud variable del arco de la curva Γ. Para su derivada, de las fórmulas (16.13) y (16.14) obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \tag{16.20}$$

aquí el signo "+" se toma si la longitud del arco $s(t)$ se calcula desde el punto de origen de la curva $r(a)$ y el signo "−" si se calçula desde el punto extremo $r(b)$. De la fórmula (16.20) para la diferencial del arco obtenemos la expresión

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{16.21}$$

Sea $(x(t_0), y(t_0))$ un punto no singular, es decir, $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) > 0$, por ejemplo, $x'(t_0) \neq 0$. Sea para mayor precisión $x'(t_0) > 0$, entonces en cierto entorno del punto t_0 también $x'(t) > 0$ y quiere decir que la función $x(t)$ crece estrictamente en este entorno, por lo que existe la función inversa $t = t(x)$ continuamente diferenciable. Sustituyéndola en la representación de la curva Γ hallamos

$$y = y(t(x)) = f(x),$$

es decir, en cierto entorno de un punto no singular una curva continuamente diferenciable es la gráfica de una función f continuamente diferenciable; más exactamente, existe un entorno del punto t_0 y una función f continuamente diferenciable definida sobre cierto intervalo que contiene el punto $x_0 = x(t_0)$ tales que la parte de la curva correspondiente a los valores del parámetro que pertenecen al entorno del punto t_0 indicado, es la gráfica de la función f.

En el caso cuando la curva Γ es la gráfica de una función $y = f(x)$ continuamente diferenciable, la fórmula (16.20) se convierte en la fórmula

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + y'^2} \text{ y por consiguiente } ds = \pm\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Vemos el sentido geométrico de la fórmula (16.21) en el caso cuando Γ es la gráfica de una función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, continuamente diferenciable y la longitud del arco de la curva se calcula desde el punto de origen de la curva (fig. 77). Sea

$$x_0 \in [a, b], x_0 + dx \in [a, b], y_0 = f(x_0),$$
$$M_0 = (x_0, y_0), y_0 + \Delta y = f(x_0 + dx), M = (x_0 + dx, y_0 + \Delta y),$$

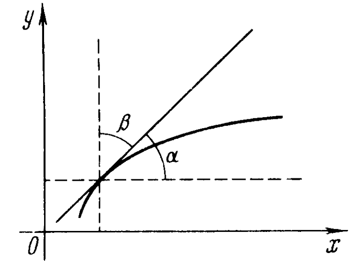


FIG. 78

M_0N es la tangente en el punto M_0, $PM = \Delta y$ es el incremento de la función en el punto $x_0 + dx$, $PN = dy$ es el incremento de la ordenada de la tangente en el punto $x_0 + dx$. El triángulo M_0NP es rectángulo; por cuanto $M_0P = dx$, $PN = dy$ entonces

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

es decir, la longitud del segmento de tangente M_0N es igual a ds. Dicho de otro modo, el incremento de la longitud de la tangente $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ es igual a la parte principal ds del incremento de la longitud del arco Δs.

Si ahora sobre la curva Γ en calidad de parámetro es tomada la longitud variable del arco s: $\Gamma = \{r(s); 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$, entonces por (16.19)

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \frac{dy}{ds} = \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha, \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \tag{16.22}$$

donde (fig. 78) α es el ángulo formado por la tangente con el eje Ox, y β con el eje Oy.

Señalemos que estas fórmulas pueden ser obtenidas con la aplicación al "triángulo curvo M_0MP (véase la fig. 77) de las fórmulas que expresan el seno y el coseno de los ángulos de un triángulo rectángulo común a través de sus catetos y su hipotenusa, considerando los lados del "triángulo" indicado M_0MP iguales a dx, dy, ds, respectivamente. Semejante situación tiene lugar para las fórmulas espaciales (16.19). Tal método de obtención de las fórmulas (16.19) y (16.22) naturalmente no está fundamentado y no tiene fuerza de demostración, no obstante facilita la memorización de estas fórmulas.

16.7. SENTIDO FÍSICO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Supongamos que ahora la hodógrafa Γ de la función vectorial $r(t)$ continuamente diferenciable es la trayectoria de un punto material que se mueve y el parámetro t, el tiempo de movimiento. Denotemos la longitud variable del arco medida desde cierto punto inicial $r(t_0)$ por $s = s(t)$. Sea $t > t_0$; haciendo $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ por (16.13) obtendremos

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

es decir, la longitud del vector $\dfrac{dr}{dt}$ coincide con la magnitud de la velocidad en el punto analizado (véase el p. 9.4), y el propio vector $\dfrac{dr}{dt}$, como sabemos (véase el p. 16.2), está orientado por la tangente. El vector $\dfrac{dr}{dt}$ se llama en este caso *velocidad del movimiento* en el punto dado y se denota por v:

$$v = \frac{dr}{dt}.$$

§ 17. CURVATURA DE UNA CURVA

17.1. DOS LEMAS. COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL DE LA VELOCIDAD

Demostremos dos lemas sobre las derivadas de una función vectorial muy útiles para el futuro.

Lema 1. *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ tiene derivada en el punto t_0. Si la longitud del vector $r(t)$ en un entorno del punto t_0 es constante, entonces el vector $r'(t_0)$ es ortogonal al vector $r(t_0)$, es decir,*

$$r'(t_0)r(t) = 0. \tag{17.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Según la condición existe un entorno del punto t_0 en el cual la longitud del vector $r(t)$ es constante: $|r(t)| = c$, donde c es una constante. Por esto, para todos los puntos del entorno indicado tenemos $|r(t)|^2 = c^2$ y por consiguiente $r^2(t) = c^2$. Diferenciando ambos miembros de la igualdad en el punto t_0 obtendremos (véase el p. 15.2) $2r(t_0)r'(t_0) = 0$ de donde se deduce (17.1). □

La interpretación física de este lema consiste en que un punto material que se mueve de forma tal que todo el tiempo se encuentra sobre la superficie de una esfera, tiene una velocidad orientada por la tangente a esta esfera y por consiguiente perpendicular al radio vector.

Supongamos que la función $r(t)$ está definida en cierto entorno $U(t_0)$ del punto t_0 y supongamos que en este entorno $r(t) \neq 0$ (si la función vectorial $r(t)$ es continua en el punto t_0, entonces la desigualdad a cero del radio vector $r(t)$ en un entorno del punto t_0 suficientemente pequeño siempre se puede obtener moviendo el origen de coordenadas). Sea $t = t_0 + \Delta t \in U(t_0)$ y sea $\varphi = \varphi(t)$ el ángulo (representado en radianes) entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t)$, $|\varphi| \leqslant \pi$ y además consideraremos que $\varphi(t) \geqslant 0$ para $\Delta t \geqslant 0$ y $\varphi \leqslant 0$ para $\Delta t < 0$. En el punto t_0 para el incremento $\Delta\varphi$ de la función φ tenemos

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t),$$

ya que $\varphi(t_0) = 0$; por lo que siempre $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} \geqslant 0$.

Definición 1. *La derivada $\dfrac{d\varphi(t_0)}{dt}$ se llama velocidad de rotación de la función vectorial $r(t)$ en el punto t_0 y se denota por $\omega = \omega(t_0; r(t))$:*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{17.2}$$

Observemos que si se escoge el sentido opuesto de medición de los ángulos, es decir, definimos el ángulo entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t)$ como el ángulo $\psi = -\varphi$, entonces, evidentemente,

$$\frac{d\psi}{dt} \leqslant 0 \quad \text{y} \quad \omega(t_0; r) = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} = \left|\frac{d\psi}{dt}\right|.$$

De esta forma, tanto en una como en la otra medición de los ángulos φ entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t)$ siempre

$$\omega(t_0; r) = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

Lema 2. *Supongamos que la función vectorial $r(t)$ está definida en cierto entorno del punto t_0 y $r(t_0) \neq 0$. Si en el punto t_0 existe la derivada $r'(t_0)$, entonces en este punto existe también la velocidad de rotación $\omega = \omega(t_0; r(t))$ y además*

$$\omega = \frac{1}{r^2(t_0)}|r(t_0) \times r'(t_0)|. \tag{17.3}$$

Corolario. *Si como complemento a las condiciones del lema, la longitud del vector $r(t)$ es constante: $|r(t)| = r$, r es una constante, entonces*

$$\omega = |r'(t)|/r. \tag{17.4}$$

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la existencia de la derivada $r'(t_0)$ la función $r(t)$ es continua en el punto t_0. De aquí y de la condición $r(t_0) \neq 0$ se deduce que para todos los Δt suficientemente pequeños se cumple la desigualdad $r(t_0 + \Delta t) \neq 0$ y por consiguiente está definido el ángulo $\Delta\varphi$ entre los vectores $r(t_0)$ y $r(t_0 + \Delta t)$. De la continuidad de la función vectorial $r(t)$ en el punto t_0 se deduce también *) la continuidad en el punto t_0 de la función $\varphi(t)$, es decir,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi = 0$$

(como siempre $\Delta t = t - t_0$, $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t)$, ya que $\varphi(t_0) = 0$).

Para el cálculo de la derivada (17.2) sustituyamos el infinitésimo $\Delta\varphi$ por el infinitésimo equivalente a él cuando $\Delta t \to 0$, sen $\Delta\varphi$ (véase el lema en el p. 8.2) el cual se puede hallar de la fórmula

$$|r(t_0) \times r(t_0 + \Delta t)| = |r_0(t_0)|\,|r(t_0 + \Delta t)|\,|\operatorname{sen} \Delta\varphi|.$$

Por el teorema 2 del p. 8.3 sobre la sustitución de los infinitésimos por sus equivalentes en el cálculo de los límites tenemos:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\operatorname{sen} \Delta\varphi}{\Delta t}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|r(t_0) \times r(t_0 + \Delta t)|}{|r(t_0)|\,|r(t_0 + \Delta t)|\,|\Delta t|} = \frac{1}{r^2(t_0)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|r(t_0) \times r(t_0 + \Delta t)|}{|\Delta t|}. \tag{17.5}$$

*) Esto se deduce, por ejemplo, de la igualdad $\cos\varphi = \dfrac{r(t_0)r(t)}{|r(t_0)|\,|r(t)|}$.

Aquí de nuevo fue utilizada la continuidad de la función vectorial $r(t)$ en el punto t_0: $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} r(t_0 + \Delta t) = r(t_0)$.

Más adelante, por cuanto la función $r(t)$ es diferenciable en el punto t_0, entonces

$$r(t_0 + \Delta t) = r(t_0) + r'(t_0)\Delta t + \varepsilon(\Delta t)\Delta t,$$

donde $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$. Sustituyendo esta expresión para $r(t_0 + \Delta t)$ en (17.5) y observando que $|r(t_0) \times r(t_0)| = 0$ y $\lim\limits_{\Delta t \to 0} |r(t_0) \times \varepsilon(\Delta t)| = 0$ obtendremos:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{|r(t_0) \times r'(t_0)|}{r^2(t_0)}. \ \square$$

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Si $|r(t)| = r$ es constante, entonces según el lema 1, $r(t_0)r'(t_0) = 0$, es decir, $|r(t_0)||r'(t_0)| \cos \widehat{rr'} = 0$. Por cuanto $|r(t_0)| \neq 0$, entonces o bien $|r'(t_0)| = 0$ o bień el ángulo $\widehat{rr'}$ entre los vectores $r(t_0)$ y $r'(t_0)$ es igual a $\pm\pi/2$ y por consiguiente $|\operatorname{sen} \widehat{rr'}| = 1$. En ambos casos

$$|r(t_0) \times r'(t_0| = |r(t_0)||r'(t_0)||\operatorname{sen} \widehat{rr'}| = r|r'(t_0)|.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (17.3) obtendremos (17.4). $\square$

Los lemas 1 y 2 continúan siendo válidos en el caso cuando en ellos por entornos se entienden entornos unilaterales.

Para el esclarecimiento del sentido básico de las fórmulas (17.3) y (17.4) interpretaremos de nuevo la curva descrita por el extremo del radio vector $r(t)$ como la trayectoria del movimiento de un punto material y el parámetro t como el tiempo. Supongamos que la longitud del vector $r(t)$ es constante: $|r(t)| = r$, es decir, el punto se mueve por una esfera de radio r. Analicemos el movimiento del punto en cada momento como la rotación alrededor del tal llamado eje instantáneo, es decir, del eje que pasa por el origen de coordenadas perpendicularmente al plano del movimiento $\left(\text{así se llama el plano que pasa por el radio vector } r(t) \text{ paralelamente a la velocidad } v = \dfrac{dr(t)}{dt}\right)$. Entonces el vector $\omega = (r \times r')/r^2$ denota físicamente el vector de la velocidad angular y las fórmulas (17.3) y (17.4) expresan la relación entre la velocidad angular ω y la velocidad lineal v. En particular la fórmula (17.4) en esta rotación toma la forma

$$|\omega| = |v|/r.$$

OBSERVACIÓN. Utilizando el lema 1 se puede obtener fácilmente el desarrollo de la derivada de una función vectorial en dos componentes perpendiculares: en el sentido del vector $r(t)$ (*la componente radial*) y en el sentido perpendicular (*la componente transversal*).

Supongamos que la función vectorial $r(t)$ está definida en cierto entorno del punto t_0, $r(t) \neq 0$ y existe la derivada $r'(t_0)$. Hagamos $r_0(t) = \dfrac{r(t)}{|r(t)|}$; evidentemente $|r_0(t)| \equiv 1$. En el punto t_0 existe la derivada

$$\frac{d|r|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{r^2} = \frac{rr'}{|r|} = r_0 r'.$$

por consiguiente, en el punto t_0 existe la derivada $\dfrac{dr_0}{dt}$ la cual por el lema 1 es ortogonal al vector $r_0(t_0)$ y por esto al vector $r(t_0)$.

Diferenciando la igualdad $r(t) = |r(t)| r_0(t)$ en el punto t_0 obtendremos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d|r|}{dt} r_0 + |r| \frac{dr_0}{dt} = (r_0 r')r_0 + |r| \frac{dr_0}{dt}. \tag{17.6}$$

Este es el desarrollo buscado.

En el caso cuando la hodógrafa de la función vectorial $r(t)$ es la trayectoria del movimiento de un punto material, entonces la fórmula (17.6) da el desarrollo de su velocidad en la componente del movimiento de traslación (la componente radial) y en la componente del movimiento de rotación (la componente transversal).

17.2. DEFINICIÓN DE CURVATURA DE UNA CURVA Y SU CÁLCULO

Sea $\Gamma = \{r(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ una curva continuamente diferenciable y por consiguiente rectificable, s la longitud variable del arco $0 \leqslant s_0 \leqslant S$, $\Delta s = s - s_0$, y $\alpha = \alpha(s)$, el ángulo entre las tangentes a la curva Γ en los puntos $r(s_0)$ y $r(s_0 + \Delta s)$ y además consideraremos que $\alpha(s) \geqslant 0$ para $\Delta s \geqslant 0$ y $\alpha(s) \leqslant 0$ para $\Delta s < 0$. Evidentemente $\Delta\alpha = \alpha(s) - \alpha(s_0) = \alpha(s)$ ya que $\alpha(s_0) = 0$.

Sea ahora $t(s) = \dfrac{dr(s)}{ds}$. Como fue mostrado $t(s)$ es un vector unitario (véase (16.16)) paralelo a la tangente a la curva en el punto correspondiente (véase el p. 16.4) por lo que el ángulo $\Delta\alpha$ es el ángulo entre los vectores $t(s_0)$ y $t(s_0 + \Delta s)$.

Definición 2. *La velocidad angular de rotación del vector unitario* $t = \dfrac{dr}{ds}$ *en un punto dado de la curva se llama curvatura* $k(s_0)$ *de la curva en este punto*, $k(s_0) = \omega(s_0; t) = \dfrac{d\alpha(s_0)}{ds}$.

Eliminando para mayor brevedad el valor del argumento obtenemos

$$k = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{17.7}$$

Por cuanto $|t| = 1$ entonces en virtud del corolario del lema 2 del p. 17.1 tenemos

$$k = \left|\frac{dt}{ds}\right| \tag{17.8}$$

(si, por supuesto, la derivada $\dfrac{dt}{ds}$ existe).

Definición 3. *La magnitud inversa a la curvatura se llama radio de la curvatura en el punto dado y se denota por* R, *es decir*, $R = 1/k$.

Sea Γ una circunferencia de radio R. En este caso el ángulo $\Delta\alpha$ entre las tangentes es igual al ángulo formado por los radios de los puntos de tangencia (fig. 79) y

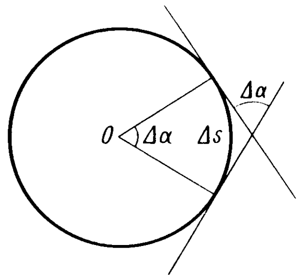


FIG. 79

para la longitud del arco Δs entre estos puntos se tiene la fórmula $\Delta s = R\Delta\alpha$. Por esto $\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \dfrac{1}{R}$. Según la definición de curvatura para la circunferencia tenemos

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \frac{1}{R}.$$

De esta forma, en el caso de una circunferencia, su curvatura k es constante (no depende del punto) y es igual a la magnitud inversa al radio; el radio de la curvatura de una circunferencia es igual a su radio. De aquí partió el término "radio de la curvatura".

Las condiciones suficientes de la existencia de la curvatura en un punto dado y el método de su cálculo se dan mediante el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea* $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *una curva dos veces diferenciable sin puntos singulares. Entonces en cada punto existe la curvatura y*

$$k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}. \tag{17.9}$$

Aquí y en el futuro con la virgulilla se denotan las derivadas por un parámetro arbitrario t. Las derivadas por la longitud del arco s las denotaremos con el símbolo $\dfrac{d}{ds}$.

DEMOSTRACIÓN. En las suposiciones del teorema la longitud variable del arco $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $o \leqslant s \leqslant S$ de la curva Γ puede ser tomada en esta curva como parámetro (véase el corolario 2 del teorema 2 en el punto 16.5). Además el vector unitario tangencial $t = \dfrac{dr}{ds}$ es una función vectorial continuamente diferenciable y por esto para él, para cada valor $s_0 \in [0, S]$ está definida la velocidad de rotación $\omega(s_0; t)$, es decir, en cada punto de la curva Γ está definida la curvatura

$$k(s_0) = \omega(s_0; t) = \frac{d\alpha}{ds}, \tag{17.10}$$

donde $\alpha = \alpha(s)$ es el ángulo entre los vectores $\dfrac{dr(s_0)}{ds}$ y $\dfrac{dr(s)}{ds}$, escogido como se indicó al principio de este punto. En particular, esto significa que para todos los $s \in [0, S]$ se cumple la desigualdad $\dfrac{d\alpha(s)}{ds} \geqslant 0$.

De la fórmula

$$\frac{dr(s)}{ds} = r'(t)\frac{dt}{ds} = \frac{r'(t)}{s'}$$

se deduce que los vectores $\dfrac{dr(s)}{ds}$ y $r'(t)$ para $s = s(t)$ siempre son colineales y por cuanto la función $s'(t)$ no cambia de signo, entonces los valores indicados o bien siempre tienen un sentido (si $s'(t) > 0$) o bien siempre tienen sentido opuesto (si $s'(t) < 0$).

Además en el primer caso, a los incrementos Δt suficientemente pequeños les corresponden los incrementos Δs del mismo signo, y en el segundo, de signo opuesto. Por lo dicho, si $s_0 = s(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ y si $\beta = \beta(t)$ es el ángulo entre los vectores $r'(t_0)$ y $r'(t)$, entonces o bien para todos los $t \in [a, b]$ será $\beta = \alpha$ o bien para todos los $t \in [a, b]$ será $\beta = -\alpha$, por lo que (véase el p. 17.1)

$$\omega(t_0, r') = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right|. \tag{17.11}$$

Ahora utilizando las fórmulas (17.10), (17.11) y el lema 2 obtendremos

$$k(s_0) = \frac{d\alpha}{ds} = \left|\frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \omega(t_0; r')\frac{1}{|s'|} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

(utilizamos también la fórmula (16.3)). □

De la fórmula (17.9) es fácil pasar a la expresión de la curvatura en la escritura por coordenada. En realidad, observando que $r' = (x', y', z')$, $r'' = (x'', y'', z'')$ y que

$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

(donde i, j, k son los vectores unitarios en los sentidos de los ejes Ox, Oy, Oz respectivamente) obtenemos

$$|r' \times r''| = \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}, \tag{17.12}$$

por otro lado

$$|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{17.13}$$

Sustituyendo (17.12) y (17.13) en (17.9) hallamos la expresión buscada.

17.3. NORMAL PRINCIPAL. PLANO OSCULADOR

Analicemos la curva Γ dos veces diferenciable sin puntos signulares. Para tal curva existe la representación $r = r(s)$ dos veces diferenciable, donde s es la longitud variable del arco, $0 \leqslant s \leqslant S$.

Denotemos por n el vector unitario en el sentido del vector $\dfrac{dt}{ds}$ donde $t = \dfrac{dr}{ds}$ es el vector unitario tangente a la curva analizada. De la fórmula (17.8) se deduce que

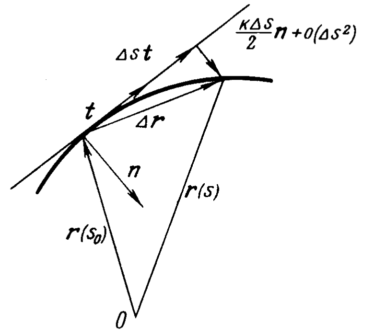


FIG. 80

el vector n está definido sólo para aquellos puntos en los cuales la curvatura $k \neq 0$ y que en estos puntos

$$\frac{dt}{ds} = kn. \tag{17.14}$$

El vector t es unitario, por lo que el vector n es perpendicular (véase el p. 17.1) al vector t. La fórmula (17.14) se llama *fórmula de Frenet* *).

El vector $\frac{d^2r}{ds^2}$ y por tanto el vector $n = \frac{1}{k}\frac{d^2r}{ds^2}$ no dependen de la elección de la orientación de la curva. Efectivamente si σ es la longitud variable del arco de la curva, calculada en el sentido contrario a s y por consiguiente si $\sigma = S - s$, entonces observando que $\frac{d\sigma}{ds} = -1$, obtendremos

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r}{d\sigma^2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \frac{d^2r}{d\sigma^2}.$$

Definición 4. *Cualquier recta que pasa por un punto de la curva y es perpendicular a la tangente en este punto se llama normal a la curva en el punto dado. La normal a la curva, paralela al vector n, se llama normal principal.*

El vector de la normal principal n salvo infinitésimos de orden superior que Δs^2 indica el sentido en el cual la curva en un entorno del punto dado se inclina de su tangente (fig. 80). Efectivamente, escogiendo sobre la curva en calidad de parámetro a la longitud variable del arco s, según la fórmula de Taylor para una función vectorial (véase el p. 15.2), tendremos

$$\Delta r = r(s_0 + \Delta s) - r(s_0) = \frac{dr(s_0)}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{d^2r(s_0)}{ds^2}\Delta s^2 + o(\Delta s^2),$$

u observando que (véase 17.14)

---

*) J. F. Frenet (1801—1880), matemático francés.

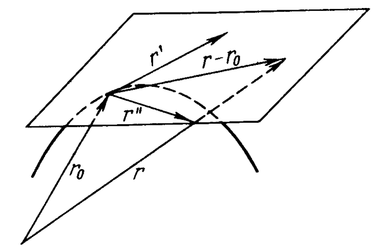


FIG. 81

$$\frac{dr}{ds} = t, \quad \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{dt}{ds} = kn, \tag{17.15}$$

obtendremos

$$\Delta r = \Delta s t + \frac{1}{2}k\Delta s^2 n + o(\Delta s^2);$$

por cuanto $\frac{1}{2}k\Delta s^2 > 0$, entonces esta fórmula demuestra la validez de nuestra afirmación.

Definición 5. *El plano que pasa por la tangente y la normal principal en un punto dado de una curva se llama plano osculador.*

Por esta definición el plano osculador está definido para los puntos en los cuales $k \neq 0$. Hallemos la ecuación de este plano para una curva dada por la representación $r = r(t)$ con un parámetro arbitrario t. Como antes, las derivadas por el parámetro t se denotarán con una virgulilla y las derivadas por la longitud del arco s, por el símbolo $\frac{d}{ds}$. Diferenciando $r = r(t)$ como una función compuesta $r = r(s)$, $s = s(t)$ obtenemos (véase (17.15))

$$r' = \frac{dr}{ds}s' = s't, \quad r'' = s'^2\frac{dt}{ds} + s''t = s'^2kn + s''t. \tag{17.16}$$

De aquí se deduce que los vectores r' y r'' también son paralelos al plano osculador. En virtud de la condición $k \neq 0$ se cumple la desigualdad $r' \times r'' \neq 0$ (véase (17.9)) y por lo tanto r' y r'' no son colineales. Denotemos ahora por r_0, r'_0 y r''_0 a los vectores r, r' y r'' en algún punto fijo de la curva Γ dada y por r denotaremos al vector variable del plano osculador, entonces el producto mixto de los vectores $r - r_0$, r'_0 y r''_0 debe ser igual a cero ya que todos son paralelos al plano osculador (fig. 81):

$$(r - r_0, r'_0, r''_0) = 0.$$

Esta es la ecuación del plano indicado en la forma vectorial. En la forma coordenada se escribe de la siguiente manera.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0,$$

donde $r'_0 = (x'_0, y'_0, z'_0)$, $r'' = (x''_0, y''_0, z''_0)$.

En el caso cuando en el punto dado $k = 0$, entonces cualquier plano que pase por la tangente en este punto se llama *osculador*.

17.4. CENTRO DE CURVATURA Y EVOLUTA DE LA CURVA

Definición 6. *El punto del espacio que está sobre la normal principal a la curva en un punto dado y que se encuentra a una distancia R de este punto en la dirección del vector* **n** *se llama centro de la curvatura de la curva en el punto indicado.*

De esta forma, si ρ es el radio vector del centro de curvatura y $\mathbf{r}$, como es común, es el radio vector del punto dado de la curva, entonces

$$\rho = r + Rn$$

o lo que es lo mismo (véase (17.15))

$$\rho = r + \frac{1}{k^2}\frac{d^2r}{ds^2}. \tag{17.17}$$

Hallemos la expresión de ρ por las derivadas de la función vectorial respecto a un parámetro t arbitrario. Según la regla de diferenciación de una función compuesta

$$\frac{dr}{ds} = r'\frac{dt}{ds} = \frac{r'}{s'},$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{r'}{s'}\right) = \left(\frac{r'}{s'}\right)'\frac{1}{s'} = \frac{r''s' - r's''}{s'^3}. \tag{17.18}$$

Estas fórmulas, en virtud de las fórmulas (17.15), evidentemente son la transformación de las fórmulas (17.16).

Sustituyendo (17.18) en (17.17) obtendremos

$$\rho = r + \frac{1}{k^2}\frac{s'r'' - s''r''}{s'^3}, \tag{17.19}$$

donde (considerando para mayor simplicidad que cuanto t crece la longitud del arco $s(t)$ también crece) $s' = |r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, de donde

$$s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Las fórmulas (17.17) y (17.19) se pueden analizar como representaciones de cierta curva, los puntos de la cual son los centros de curvatura de la curva dada. Esta curva se llama *evoluta* de la curva dada.

17.5. FÓRMULAS PARA LA CURVATURA Y LA EVOLUTA DE UNA CURVA PLANA

Todo lo dicho en el punto anterior, en particular es válido para las curvas planas. Observemos sólo que si la curva $\Gamma = \{r(t)\}$ está en cierto plano, entonces todas las derivadas de la función vectorial $r(t)$ también están en este plano. En realidad en él está el incremento de la función vectorial $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ y por lo tanto

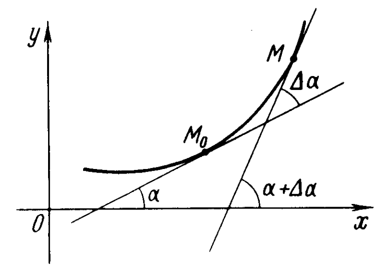


FIG. 82

la relación $\frac{\Delta r}{\Delta t}$. De aquí fácilmente se deduce que el límite de estas relaciones $r' = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}$ está en el plano indicado, aplicando el mismo razonamiento a r' demostraremos que r'' está en ese mismo plano, etc.

De lo dicho se deduce que si la curva está en algún plano, entonces el vector tangente r y si su curvatura $k \neq 0$, entonces también el vector n de la normal principal, están en ese mismo plano. Por esto, este plano es el plano osculador para la curva analizada.

Señalemos también que si en el caso de la curva $\Gamma = \{r(s)\}$ que está en el plano xOy a diferencia de 17.2 mediante $\alpha(s)$ denotamos el ángulo formado por la tangente en el punto $r(s)$ con el eje Ox (fig. 82) entonces $\Delta\alpha = \alpha(s_0 + \Delta s) - \alpha(s_0)$ será el ángulo entre las tangentes en los puntos $r(s_0)$ y $r(s_0 + \Delta s)$. Si el ángulo α crece junto con s, es decir, si $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \geqslant 0$ para $\Delta s > 0$, entonces $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$, si α decrece con el crecimiento de s, entonces

$$k = -\lim_{\Delta s \to \infty}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = -\frac{d\alpha}{ds}.$$

Escribamos algunas de las fórmulas obtenidas en el punto anterior, considerando que la curva $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ está en el plano xOy: $r(t) = (x(t), y(t))$. De las fórmulas (17.9), (17.12) y (17.13) tenemos

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{17.20}$$

Denotando por (ξ, η) el centro de curvatura de la curva Γ, de las fórmulas (17.17) obtendremos las fórmulas que expresan las coordenadas ξ y η mediante las derivadas por s:

$$\xi = x + R^2\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta = y + R^2\frac{d^2y}{ds^2},$$

y de las fórmulas (17.19) y (17.20) se deducen las fórmulas que expresan las coordenadas del centro de curvatura mediante las derivadas por un parámetro t arbitrario:

$$\xi = x + \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - x''y')^2} \frac{x''\sqrt{x'^2 + y'^2} - x' \dfrac{x'x'' + y'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} =$$

$$= x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}; \qquad (17.21)$$

análogamente

$$\eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \qquad (17.22)$$

Ejercicio 1. Sea Γ una curva plana dos veces diferenciable sin puntos singulares, sea α el ángulo de inclinación de su tangente con el eje Ox y sea $k^* = \dfrac{d\alpha}{ds}$ (por consiguiente $|k^*| = k$) y $R^* = \dfrac{1}{k^*}$. Muéstrese que $\xi = x - R^* \operatorname{sen}\alpha, \eta = y + R^* \cos\alpha$ y también que $\xi = x - \dfrac{dy}{d\alpha}, \eta = y + \dfrac{dx}{d\alpha}$.

En el caso cuando la curva es la gráfica de la función $y = f(x)$ las fórmulas (17.20), (17.21) y (17.22) toman la forma

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \qquad (17.23)$$

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y', \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \qquad (17.24)$$

Ejemplos 1. Hallemos la curvatura y la evoluta de la parábola $y = ax^2, a > 0$.

Observando que $y' = 2ax$, $y'' = 2a$ por la fórmula (17.23) tenemos $k = \dfrac{2a}{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}$. Para hallar la ecuación de la evoluta nos serviremos de las fórmulas (17.24):

$$\xi = x - \frac{1 + 4a^2x^2}{2a} 2ax = -4a^2x^3,$$

$$\eta = ax^2 + \frac{1 + 4a^2x^2}{2a} = \frac{6a^2x^2 + 1}{2a}.$$

Se obtuvo la representación paramétrica de la evoluta de la parábola con el parámetro x. Se puede obtener su representación explícita eliminando este parámetro x. Para esto, de la primera igualdad hallamos $x^3 = -\xi/4a^2$ y de la segunda $x^2 = (2a\eta - 1)/6a^2$. Al elevar la primera igualdad obtenida al cuadrado y la segunda al cubo e igualar los segundos miembros tendremos

$$\left(\frac{\xi}{4a^2}\right)^2 = \left(\frac{2a\eta - 1}{6a^2}\right)^3, \text{ de donde } \xi = \pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\left(\eta - \frac{1}{2a}\right)^{3/2}.$$

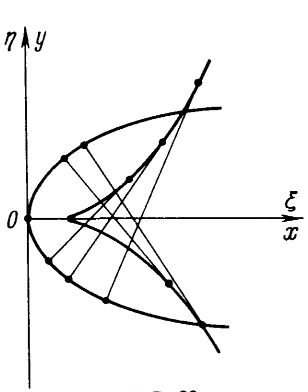


FIG. 83

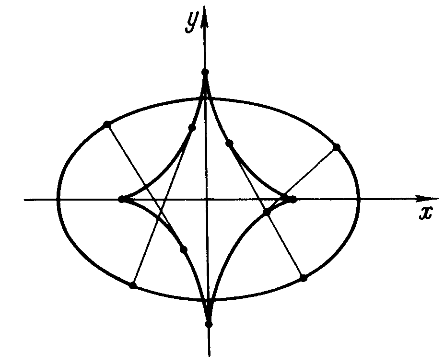


FIG. 84

Esta curva representada en la fig. 83 es, como ya sabemos (véase el ejercicio 2 en el p. 14.3), una parábola semicúbica.

2. Hallemos el radio de la curvatura y la evoluta de la elipse $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t, a \geqslant b > 0$.

Observando que $x' = -a\operatorname{sen} t$, $y' = b\cos t$, $x'' = -a\cos t$, $y'' = -b\operatorname{sen} t$, por la fórmula (17.20) obtendremos

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(a^2\operatorname{sen}^2 \;\; + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab\operatorname{sen}^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

Por esto, de las fórmulas (17.21) y (17.22) se deduce que

$$\xi = a\cos t - b\cos t\,\frac{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = b\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} t\,\frac{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b}\operatorname{sen}^3 t.$$

Esta es la representación paramétrica de la evoluta buscada. El parámetro t se puede eliminar elevando las igualdades obtenidas al exponente 2/3 y sumándolas:

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Esta curva se llama *astroide* (fig. 84).

A veces para la representación de la curva es cómodo utilizar las así llamadas coordenadas polares (ρ, φ), $\rho \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, donde ρ es la longitud del radio vector del punto M dado y φ, el ángulo formado por este radio vector con el eje Ox. De esta forma, a cada punto del plano, menos el origen de coordenadas, unívocamente le corresponde un par ordenado (ρ, φ); y además para el origen de coordenadas tenemos $\rho = 0$ y el ángulo φ no está definido (fig. 85).

Si $M = (x, y)$ donde, como es común, x e y son las coordenadas cartesianas del punto M, entonces

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\operatorname{sen}\varphi. \qquad (17.25)$$

La relación inversa se expresa por las fórmulas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi,$$

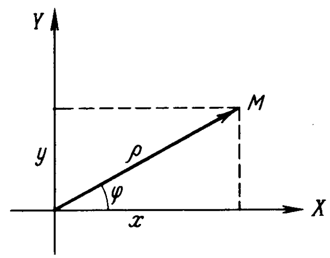


FIG. 85

donde $k = 0$, si $x \geqslant 0$, $k = 1$, si $x < 0, y > 0$ y $k = -1$ si $y < 0$; además, como es común, para $x = 0$, $y \neq 0$ se considera $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} y$.

A veces al ángulo φ no se le pone la limitación $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ y se denota por φ cualquier ángulo para el cual $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$. En este caso la correspondencia entre los pares ordenados (ρ, φ), $\rho \neq 0$, y los puntos del plano diferentes del origen de coordenadas, evidentemente ya no es biunívoca.

Si se da la función continua

$$\rho = \rho(\varphi), \quad a \leqslant \varphi \leqslant \beta \tag{17.26}$$

entonces sustituyéndola en (17.25) obtenemos

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \quad y = \rho(\varphi)\operatorname{sen}\varphi, \tag{17.27}$$

es decir, la representación paramétrica de cierta curva Γ. En este sentido se puede decir que la ecuación (17.26) define la curva Γ en coordenadas polares. Para el cálculo de la curvatura, el radio de curvatura y la evoluta de la curva Γ dada con la ecuación (17.26) es necesario pasar a su representación paramétrica (17.27) y servirnos de las fórmulas deducidas anteriormente.

Ejercicios 2. Supongamos que está dada la curva $\rho = \rho(\varphi)$ en coordenadas polares, sea α el ángulo de inclinación de su tangente con el eje Ox y ω el ángulo que forma esta tangente con la continuación del radio vector del punto de tangencia. Demuéstrese que $\alpha = \omega + \varphi$ y $\operatorname{tg}\omega = \rho/\rho'$.

3. Hállese la evoluta de la curva $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ llamada *cardioide*.

Indicación. Es útil servirse de los resultados de los ejercicios 1 y 2.

Problema 13. Sea Γ la curva dos veces diferenciable y sin puntos singulares $\Gamma = \{r(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ y supongamos que $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_1 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t_2 \in [a, b]$. Tracemos por los puntos $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ y $r(t_0 + \Delta t_2)$ un plano; demuéstrese que si en el punto $r(t_0)$ la curvatura $k \neq 0$ entonces para $\Delta t_1 \to 0$ y $\Delta t_2 \to 0$ este plano tiende (definese este concepto) al plano osculador en el punto $r(t_0)$.

Problema 14. Utilizando las hipótesis del porblema anterior tracemos por esos mismos tres puntos $r(t_0)$, $r(t_0 + \Delta t_1)$ y $r(t_0 + \Delta t_2)$ una circunferencia. Demuéstrese que esta circunferencia cuando $\Delta t_1 \to 0$ y $\Delta t_2 \to 0$ tiende a la circunferencia (definese este concepto) que está en el plano osculador con centro en el centro de curvatura de la curva y radio igual al radio de curvatura en el punto $r(t_0)$.

Esta circunferencia límite se llama *circunferencia osculadora* en el punto dado de la curva.

CAPÍTULO SEGUNDO

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 18. CONJUNTOS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

18.1. ENTORNOS DE LOS PUNTOS. LÍMITES DE LAS SUCESIONES DE PUNTOS

Antes de pasar al estudio de las funciones de varias variables, estudiemos algunas de las propiedades de los conjuntos sobre los cuales serán definidas estas funciones. Supongamos que en el plano analizado por nosotros, o en el espacio, está siempre definido cierto sistema rectangular de coordenadas cartesianas. En la mayoría de los casos, vamos a designar los puntos por las letras a, b, . . ., x, y, z, . . . *), y sus coordenadas serán designadas por esas mismas letras con índices, es decir, para el plano escribiremos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, y para el espacio $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. La distancia entre dos puntos x e y será designada por $\rho(x, y)$. Como es sabido, la fórmula para la distancia entre los puntos x e y en el caso del plano tiene la forma

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

y para el espacio

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

En lo adelante tendremos que estudiar no sólo funciones de dos o tres variables sino también funciones de una gran cantidad de variables, por eso es útil introducir el concepto de espacio n-dimensional para cualquier $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Definición 1. *Se llama punto x de un espacio n-dimensional el conjunto ordenado de n números reales* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$.

El número x_i se llama coordenada i del punto x; $i = 1, 2, \ldots, n$.

La distancia entre dos puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ se define por la fórmula

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \qquad (18.1)$$

El conjunto de todos los puntos de un espacio n-dimensional, para los cuales ha sido definida la distancia por la fórmula (18.1) *se llama espacio euclídeo*

---

*) En algunas ocasiones los puntos se designan por letras mayúsculas, por ejemplo M, N, P, y sus coordenadas por las letras x, y, z.

n-dimensional (*o, de una forma más completa, un espacio euclídeo aritmético n-dimensional*) *y se designa por* R^n *o por* R^n_x.

Para mayor brevedad, en lugar de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ escribiremos a veces $x = (x_i)$.

En el caso de $n = 1$, el espacio R^n coincide con la recta, en el caso de $n = 2$, con el plano, y en el caso de $n = 3$, con el espacio estudiado en la geometría elemental y en la geometría analítica. Para el caso de un $n > 3$ arbitrario, no se debe buscar en nuestra definición sentido físico o geométrico alguno. Nuestro objetivo es solamente la construcción de cierto aparato matemático, cómodo para el estudio de las funciones de varias variables; las definiciones y la terminología las tomaremos de la geometría elemental, ya que esto nos permite incluir la recta, el plano y el espacio tridimensional en un esquema más general.

La distancia entre dos puntos en un espacio euclídeo n-dimensional R^n tiene las propiedades siguientes:

1°) $\rho(x, y) \geqslant 0$, además, $\rho(x, y) = 0$, si y sólo si $x = y$;

2°) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para cualesquiera dos puntos x e y de R^n;

3°) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ para cualesquiera tres puntos x, y y z de R^n.

Las propiedades 1° y 2° se deducen directamente de la fórmula (18.1), la tercera, usualmente llamada "*desigualdad triangular*" y bien conocida para un espacio tridimensional corriente, en el caso general (para un n arbitrario) exige demostración.

Demostremos previamente un lema.

Lema 1 (de Cauchy — Schwarz *). *Para cualesquiera números reales a_k y b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, se cumple la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{18.2}$$

Corolario.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{18.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Si todos los $a_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la desigualdad es evidente, ambos miembros de la desigualdad se convierten en cero. Si $a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0$ analicemos la función cuadrática

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2. \tag{18.4}$$

Es evidente que

$$F(t) \geqslant 0. \tag{18.5}$$

*) H. Schwarz (1843 — 1921), matemático alemán.

De la condición (18.5) se deduce que el trinomio de segundo grado (18.4), tiene o bien raíces reales coincidentes, o bien raíces esencialmente complejas, y por eso su discriminante es no positivo:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0.$$

Trasladando el segundo sumando en el segundo miembro, y hallando la raíz cuadrada, obtenemos (18.2). □

Para la demostración de la desigualdad (18.3), estimemos la suma $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2$, utilizando la desigualdad (18.2):

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Hallando en ambos miembros la raíz cuadrada, obtenemos (18.3). □

Retornemos ahora a la propiedad 3 de la distancia entre puntos en el espacio R^n.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Hagamos $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$, y por tanto, $a_i + b_i = x_i - z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, la desigualdad (18.3) se transcribe de la siguiente forma:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2},$$

o, por (18.1), $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. □

En lo adelante en este párrafo consideraremos que el espacio R^n está fijado (es decir, consideraremos fijado el número n).

Definición 2. *Se llama i-ésima coordenada del eje* ($i = 1, 2, \ldots, n$) *del espacio euclídeo n-dimensional* R^n, *el conjunto de puntos* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *de este espacio, tales que* $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = x_n = 0$. *El punto* $O = (0, 0, \ldots \ldots, 0)$ *es llamado origen de coordenadas.*

Es evidente, que en el caso de $n = 2$ y $n = 3$ nuestra definición nos da los ejes de coordenadas usuales.

OBSERVACIÓN. Sean dados en el plano dos sistemas rectangulares de coordenadas, el punto M en uno de los sistemas tiene las coordenadas (x, y), y en el otro (ξ, η), es decir, $M = (x, y) = (\xi, \eta)$. Poniendo en correspondencia al par ordenado de números (x, y) el par ordenado (ξ, η), obtenemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) y el conjunto de todos los pares ordenados (ξ, η). En este caso, si

$$M' = (x', y') = (\xi', \eta'), \quad M'' = (x'', y'') = (\xi'', \eta''),$$

entonces

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} = \sqrt{(\xi'' - \xi')^2 + (\eta'' - \eta')^2}.$$

Este ejemplo hace natural la siguiente definición.

Supongamos que a cada punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ está puesto en correspondencia un complejo ordenado de n números reales $\xi(x) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, de tal forma que para cualesquiera dos puntos $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ y $x'' = (x_1'', \ldots, x_n'')$ y para sus complejos correspondientes $\xi(x') = (\xi_1', \ldots, \xi_n')$ y $\xi(x'') = (\xi_1'', \ldots, \xi_n'')$ se cumple la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i'' - x_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i'' - \xi_i')^2,$$

entonces los números, que forman parte del conjunto $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ también se llaman *coordenadas del punto x* ("en otro sistema de coordenadas"). Definiendo así las coordenadas, la distancia entre dos puntos dados no cambia cuando varía el sistema de coordenadas, es decir, cuando se sustituye un sistema de coordenadas por otro. En lo adelante, si no se dice lo contrario, el sistema de coordenadas se considera fijo.

Si el punto x está dado por las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, entonces a veces, para mayor claridad, el espacio R_x^n, designará a $R_{x_1, \ldots, x_n}^n$.

Definición 3. *Sea* $x \in R^n$ y $\varepsilon > 0$. *El conjunto de todos los puntos y del espacio* R^n, tales que $\rho(x, y) < \varepsilon$, *se llama bola n-dimensional con centro en el punto x y radio* ε *o un* ε-entorno (*a veces esférico o más correctamente, un entorno de bola*) *del punto x en el espacio* R^n *y se designa por* $U(x; \varepsilon)$; *de esta forma*

$$U(x; \varepsilon) = \{y : y \in R^n, \rho(x, y) < \varepsilon\}. \tag{18.6}$$

En la notación con coordenadas esta definición tendrá la forma siguiente:

$$U(x; \varepsilon) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 < \varepsilon^2\},$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \ \varepsilon > 0.$$

En el caso de una recta, es decir, para $n = 1$ (fig. 86) $x = x_1, y = y_1$, y por esto

$$U(x, \varepsilon) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}.$$

De esta forma, $U(x; \varepsilon)$ es un intervalo de longitud 2ε con centro en el punto x, es decir, con el entorno del punto x en el sentido analizado anteriormente (véase el p. 3.2).

En el caso del plano, es decir, para $n = 2$ (fig. 87) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y

$$U(x; \varepsilon) = \{y = (y_1, y_2) : (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2 < \varepsilon^2\}, \ \varepsilon > 0,$$

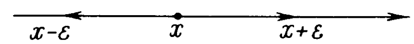


FIG. 86

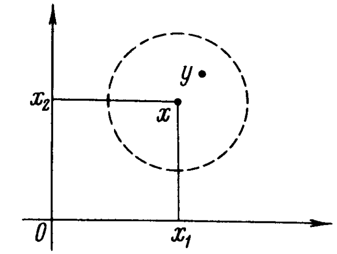


FIG. 87

es decir, $U(x; \varepsilon)$ es un círculo de radio ε con centro en el punto $x = (x_1, x_2)$, y en el caso del espacio, es decir para $n = 3$ el entorno del punto $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$U(x, \varepsilon) = \{y = (y_1, y_2, y_3) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 < \varepsilon^2\}, \ \varepsilon > 0$$

es una bola de radio ε con centro en el punto (x_1, x_2, x_3).

De esta forma, el concepto de entorno está generalizado para el caso del espacio euclídeo n-dimensional R^n. Sin embargo, conjuntamente con la generalización señalada, resulta de utilidad otra generalización de este concepto, precisamente el concepto del así llamado entorno rectangular.

Definición 4. *Sea* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *El conjunto*

$$P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) : x_i - \delta_i < y_i < x_i + \delta_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n\} \tag{18.7}$$

se llama paralelepípedo n-dimensional y el punto x es su centro.

Definición 5. *Si* $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \delta$, *entonces* $P(x, \delta, \delta, \ldots, \delta)$ *se llama cubo n-dimensional con centro en el punto x y se designa por* $P(x; \delta)$.

Si $n = 1$, entonces el conjunto $P(x; \delta)$ es el intervalo con centro en el punto x de longitud 2δ; si $n = 2$, entonces el conjunto $P(x; \delta_1, \delta_2)$ es un rectángulo con lados, paralelos a los ejes de coordenadas (sus longitudes son iguales respectivamente a $2\delta_1$ y $2\delta_2$); para $n = 3$, el conjunto $P(x; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ representa un paralelepípedo rectangular con aristas paralelas a los ejes de coordenadas (sus longitudes son respectivamente iguales a $2\delta_1$, $2\delta_2$ y $2\delta_3$).

Por paralelepípedo n-dimensional, cubo n-dimensional respectivamente, entenderemos también el conjunto, definido por las condiciones señaladas anteriormente al menos en un sistema de coordenadas (y no obligatoriamente en el dado, como esto fue hecho anteriormente). En lo adelante, paralelepípedo n-dimensional y cubo n-dimensional se entenderán sólo en el sentido restringido, es decir, en el sentido de la definición dada anteriormente para un sistema de coordenadas fijo.

Definición 6. *Cualquier paralelepípedo n-dimensional* $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *se denomina entorno rectangular del punto x.*

Si el entorno rectangular del punto x es un cubo n-dimensional, entonces también se denomina *entorno cúbico* de este punto.

Lema 2. *Cualquiera que sea el* ε-entorno $U(x; \varepsilon)$ *del punto* $x \in R^n$, *existe su entorno rectangular* $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *tal que*

$$P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n) \subset U(x; \varepsilon), \tag{18.8}$$

y vicerersa, cualquiera que sea el entorno rectangular $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *del punto* $x \in R^n$, *existe su* ε*-entorno* $U(x; \varepsilon)$ *tal que*

$$U(x; \varepsilon) \subset P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{18.9}$$

Estas afirmaciones son geométricamente evidentes, para $n = 1, 2$ y 3. Efectivamente, para $n = 1$ los conceptos de entornos esféricos y rectangulares coinciden. Para $n = 2$ el lema significa que en todo rectángulo se puede inscribir un círculo con centro en el centro del rectángulo, y en todo círculo se puede inscribir un rectángulo con centro en el centro del círculo. Por último, para $n = 3$ el lema significa que en cada paralelepípedo rectangular se puede incluir una bola con centro en el centro de este paralelepípedo y en toda bola se puede inscribir un paralelepípedo rectangular con centro en el centro de la bola analizada. No es difícil enunciar y demostrar estas afirmaciones en su forma analítica, utilizando la notación de las coordenadas. Este método, como se mostrará en seguida se generaliza fácilmente para el caso de un espacio n-dimensional arbitrario.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Para cualesquiera'puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ del espacio R^n, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumplen las desigualdades

$$|x_i - a_i| \leqslant \rho(x, a) \leqslant |x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n|. \tag{18.10}$$

La desigualdad izquierda se obtiene, si en la expresión $\rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$ todos los sumandos en la raíz, excepto el i-ésimo, son sustituidos por cero, como resultado el valor de $\rho(x, a)$ puede sólo disminuir.

La desigualdad derecha (18.10) se deduce de la desigualdad

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2} \leqslant |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|, \tag{18.11}$$

que se cumple para cualesquiera números reales α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, y comprobable directamente, elevando al cuadrado. Suponiendo en (18.11) $\alpha_i = x_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos la desigualdad, que se encuentra en la parte derecha de (18.10).

Sea dado el entorno de bola $U(a; \varepsilon)$ del punto a. Analicemos el entorno rectangular $P(a; \varepsilon/n)$, es decir, el cubo n-dimensional con centro en el punto a y arista de longitud $2\varepsilon/n$ (el caso de $n = 2$ se muestra en la fig. 88). Si $x \in P(a; \varepsilon/n)$ y, por tanto, por la definición (18.7) se cumplen las desigualdades $|x_i - a_i| < \dfrac{\varepsilon}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces de (18.10) se deriva la validez de la desigualdad

$$\rho(x, a) \leqslant |x_1 - a_1| + \ldots + |x_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Esto significa que $x \in U(a; \varepsilon)$. Ya que por x se sobreentendía un punto arbitrario del cubo $P(a; \varepsilon/n)$, entonces $P(a; \varepsilon/n) \subset U(a; \varepsilon)$; de esta forma, se demuestra (18.8).

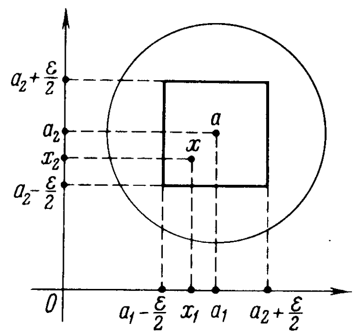


FIG. 88

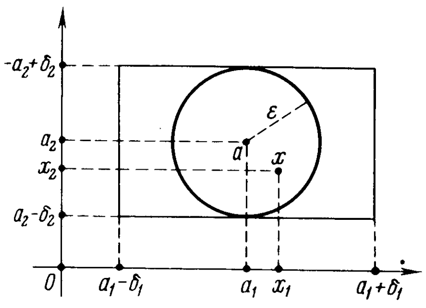


FIG. 89

Sea ahora dado un entorno rectangular $P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ del punto a. Hagamos $\varepsilon = \min\limits_{i=1,2,\ldots,n} \delta_i$ y analicemos el entorno de bola $U(a; \varepsilon)$ de este punto (véase fig. 89). Si $x \in U(a; \varepsilon)$, entonces para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$ en virtud de (18.10), obtenemos las desigualdades

$$|x_i - a_i| \leqslant \rho(x, a) < \varepsilon \leqslant \delta_i,$$

es decir, según la definición (18.7), $x \in P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. Ya que x es un punto arbitrario de la bola $U(a; \varepsilon)$, entonces $U(a; \varepsilon) \subset P(a; \delta_1, \ldots, \delta_n)$. □

En el ejemplo de la demostración de este lema se ve bien, cómo, utilizando para mayor claridad un dibujo plano, se puede realizar la demostración en un espacio n-dimensional. El ejemplo contenido en el ejercicio que se propone a continuación nos previene de la utilización apresurada de las analogías, no sustentadas por demostraciones matemáticas.

Ejercicio 1. Demuéstrese que para $n = 1, 2, 3, 4$ el cubo n-dimensional con aristas, cuyas longitudes son iguales a la unidad, se encuentra en la bola de radio unitario y con centro en el centro del cubo, y que para $n \geqslant 5$ la afirmación análoga no se cumple.

Definición 7. *Supongamos que a cada número natural* m *se le ha puesto en correspondencia cierto punto* $x^{(m)} \in R^n$ *(no obligatoriamente distintos puntos para distintos* m*). Entonces, el conjunto* $\{x^{(m)}: m = 1, 2, \ldots\}$, *compuesto por los puntos del especio* R^n *con distintos números se denomina sucesión de puntos de este espacio y se designa por*

$$x^{(m)}, m = 1, 2, \ldots, \text{ ó } \{x^{(m)}\}.$$

La sucesión $\{y^{(k)}\}$ *se llama subsucesión de la sucesión* $\{x^{(m)}\}$ *y se designa por*

$$x^{(m_k)}, k = 1, 2, \ldots, \text{ ó } \{x^{(m_k)}\},$$

si para todo k *existe un* m_k *tal que* $y^{(k)} = x^{(m_k)}$, *además si* $k' < k''$, *entonces* $m_{k'} < m_{k''}$.

Definición 8. *El punto* $x \in R^n$ *se denomina límite de la sucesión* $\{x^{(m)}\}$ *y se escribe*

$$x = \lim_{m \to \infty} x^{(m)}, \quad \text{si} \quad \lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0.$$

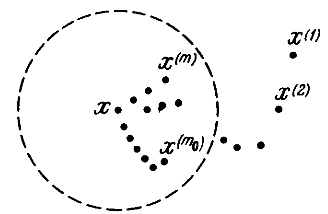


FIG. 90

Si $x = \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}$, *entonces se dice que la sucesión* $\{x^{(m)}\}$ *converge hacia el punto* x. *La sucesión que converge hacia cierto punto se denomina convergente.*

Utilizando el concepto de entorno, es fácil establecer que $x = \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}$ si, y sólo si, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe m_ε tal que para todos los $m \geqslant m_\varepsilon$ se cumple la inclusión $x^{(m)} \in U(x; \varepsilon)$. Por el lema 2, obtenemos también $x = \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}$ si, y sólo si, para cualquier entorno rectangular $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ existe un número m_0 (dependiente de este entorno) tal que para todos los $m \geqslant m_0$

$$x^{(m)} \in P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n). \tag{18.12}$$

Durante la definición del límite, naturalmente podemos limitarnos sólo a los entornos cúbicos.

En el caso de $n = 1$ la definición 8 se convierte en la definición habitual del límite de una sucesión numérica.

Para $n = 2$ la convergencia de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ de puntos del plano R^2 hacia el punto $x \in R^2$ significa, que cualquiera que sea el círculo con centro en el punto x, a partir de cierto número, dependiente del radio de este círculo, todos los términos de la sucesión dada se encuentran en este círculo (fig. 90). En el caso de $n = 3$ la convergencia de la sucesión de puntos $\{x^{(m)}\}$ del espacio, hacia el punto $x \in R^3$, significa, que cualquiera que sea la bola tridimensional habitual, con centro en el punto x, a partir de cierto número, dependiente del radio de la bola, todos los términos de la sucesión se encuentran en esta bola.

Al igual que en el caso de las sucesiones numéricas, se puede decir que $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, si cualquier ε-entorno del punto x contiene casi todos los puntos de la sucesión dada, es decir, todos, excepto, puede ser, de un número finito de éstos.

El concepto de límite de una sucesión $\{x^{(m)}\}$ de puntos del espacio R^n puede ser reducido al concepto de límite de las sucesiones numéricas, precisamente las sucesiones de las coordenadas de puntos $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$.

Teorema 1. *Para que la sucesión* $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, *converja hacia el punto* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, *es necesario y suficiente que*

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la necesidad de la condición (18.13). Sea $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$. Fijemos $\varepsilon > 0$ arbitrario; entonces, por (18.12) existe m_ε tal que para todos los $m \geqslant m_\varepsilon$ se cumple la inclusión

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon),$$

es decir, para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$ y para $m \geqslant m_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon,$$

y esto significa, que

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostremos la suficiencia de la condición (18.13). Sea $\lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y $P(x; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ un entorno rectangular dado del punto x. Entonces, para cada $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ existe un número $m_i = m_i(\varepsilon_i)$, tal que para todos $m \geqslant m_i$ se cumple la desigualdad

$$|x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18.14}$$

Designemos por m_0 el mayor de los números $m_1, \ldots, m_n$:

$$m_0 = \max\,\{m_1, \ldots, m_n\};$$

entonces para $m \geqslant m_0$ y todos los $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumplirán simultáneamente las condiciones (18.14) y por lo tanto (véase (18.7)), para $m \geqslant m_0$ tendremos la inclusión

$$x^{(m)} \in P(x; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

lo que significa, por (18.12), que

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x. \ \Box$$

Del teorema 1 y de las propiedades de los límites de las sucesiones numéricas, se deduce que si una sucesión de puntos tiene límite, entonces éste es único y que toda subsucesión de una sucesión convergente, converge al mismo límite que toda la sucesión.

Ejercicio 2. Enúnciese y demuéstrese la condición necesaria y suficiente de la convergencia de la sucesión de puntos del espacio R^n, análoga al criterio de Cauchy para las sucesiones numéricas.

Definición 9. *El conjunto* $E \subset R^n$ *se denomina acotado, si existe un cubo n-dimensional* $P(O; a)$ *con centro en el origen de los ejes de coordenadas* O, *tal que* $E \subset P(O; a)$.

De forma análoga al lema 2 se demuestra que cualquiera que sea la bola $U(x; \varepsilon)$, existe un cubo $P(x; \delta)$ tal que $P(x; \delta) \supset U(x; \varepsilon)$, y viceversa, cualquiera que sea el cubo $P(x; \delta)$, existe una bola $U(x; \varepsilon)$ tal que $U(x; \varepsilon) \supset P(x; \delta)$. De aquí se deduce que se puede dar una definición de conjunto acotado equivalente a la anterior.

Definición 9′. *El conjunto* $E \subset R^n$ *se llama acotado si existe una bola n-dimensional* $U(O; \varepsilon)$ *tal que* $E \subset U(O; \varepsilon)$.

Definición 10. *La sucesión de puntos* $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, *se llama acotada, si el conjunto de sus valores, es decir,* $\{x^{(m)}: m = 1, 2, \ldots\}$, *está acotado en el espacio* R^n.

Si la sucesión $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \ldots$, es convergente, entonces está acotada, ya que cada una de las sucesiones coordenadas $x_i^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, i es fijo ($i = 1, 2, \ldots, n$) en este caso, también converge y por lo tanto está acotada.

Teorema 2. *De cualquier sucesión acotada de puntos del espacio R^n se puede extraer una subsucesión convergente.*

Este teorema, al igual que en el caso unidimensional, comúnmente se denomina *teorema de Bolzano — Weierstrass.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una sucesión acotada de puntos $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \ldots$, del espacio R^n. Es evidente que cada una de las n sucesiones $\{x_i^{(m)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, también está acotada. Por esto, según el teorema de Bolzano — Weirstrass (véase el p. 3.6), la sucesión $\{x_1^{(m)}\}$ contiene una subsucesión convergente; sea ésta la sucesión $x_1^{(m_{k_1})}$, $k_1 = 1, 2, \ldots$. La sucesión $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$ como subsucesión de la sucesión $\{x_2^{(m)}\}$ también es acotada y por lo tanto, contiene una subsucesión convergente. Sea ésta la sucesión $x_2^{(m_{k_2})}$, $k_2 = 1, 2, \ldots$. La sucesión $\{x_1^{(m_{k_2})}\}$ como subsucesión de la sucesión convergente $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$ evidentemente también será convergente. Continuando este razonamiento, al cabo de n pasos obtendremos n sucesiones convergentes $\{x_i^{(m_{k_n})}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cada una de las cuales es la subsucesión correspondiente de la sucesión $\{x_i^{(m)}\}$. Entonces, por el teorema 1, la sucesión $\{x^{(m_{k_n})}\}$ de puntos del espacio R^n también será convergente. □

De forma análoga al caso unidimensional, el límite de una subsucesión de una sucesión de puntos del espacio n-dimensional se llama límite parcial. El teorema 2 muestra que el conjunto de los límites parciales de una sucesión de puntos de R^n acotada, siempre es no vacío.

A veces resulta cómodo analizar una sucesión de puntos que tiende al infinito.

Definición 11. *La sucesión de puntos $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, se llama tendiente al infinito, si la distancia desde sus términos al origen de coordenadas $O = (0, 0, \ldots, 0)$ tiende al infinito, es decir, si*

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, O) = +\infty. \tag{18.15}$$

En este caso se escribe

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty.$$

Ya que para cualquier punto $a \in R^n$ en virtud de la desigualdad triangular

$$\rho(x^{(m)}, O) \leqslant \rho(x^{(m)}, a) + \rho(a, O)$$

se cumple la desigualdad

$$\rho(x^{(m)}, a) \geqslant \rho(x^{(m)}, O) - \rho(a, O)$$

entonces, cuando se cumple la condición (18.15) tenemos: $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^m, a) = +\infty$, es decir, si $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, entonces la distancia desde los puntos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ hasta cualquier punto dado $a \in R^n$ tiende al infinito.

Señalemos que si $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, entonces para los puntos $x^{(m)}$ existe al menos una coordenada que también tiende al infinito cuando $m \to \infty$. Efectivamente si

$\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$, entonces, por ejemplo, para cada $p = 1, 2, \ldots$ existe un número m_p, tal que para todo $m \geqslant m_p$, se cumple la desigualdad

$$\rho(x^{(m)}, O) = \sqrt{x_1^{(m)2} + \ldots + x_n^{(m)2}} > p,$$

de donde, por (18.11) se deduce que

$$|x_1^{(m)}| + \ldots + |x_n^{(m)}| > p. \tag{18.16}$$

Por esto, para un p dado se encuentra una i-ésima coordenada, $i = 1, 2, \ldots, n$, tal que para ella tendremos

$$|x_i^{(m)}| \geqslant \frac{p}{n}.$$

En caso contrario, es decir, si para todos los $i = 1, 2, \ldots, n$ tuviera lugar la desigualdad

$$|x_i^{(m)}| < \frac{p}{n},$$

entonces, no se cumpliría la desigualdad (18.16). El número de las coordenadas es finito, y por esto, uno de ellos, designémoslo por i_0, para $p = 1, 2, \ldots$ se repetirá infinitas veces, es decir, se encuentra una subsucesión p_k de números naturales, tal que para todos los $m \geqslant p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, tendremos: $|x_{i_0}^{(m)}| \geqslant p_k/n$. Ya que $\lim\limits_{k \to \infty} (p_k/n) = +\infty$, entonces para el i_0 señalado obtenemos

$$\lim_{m \to \infty} x_{i_0}^{(m)} = \infty.$$

Ejercicio 3. La sucesión $x^{(m)} \in R^n$ se llame no acotada si el conjunto de sus valores es no acotado. Demuéstrese que cualquier sucesión no acotada de puntos del espacio n-dimensional contiene una subsucesión que tiende al infinito.

18.2. DISTINTOS TIPOS DE CONJUNTOS

En el presente punto se analizan cuestiones, auxiliares para el estudio ulterior del análisis matemático y relacionadas con la geometría del espacio n-dimensional.

Definición 12. *Sea X cierto conjunto de puntos del espacio euclídeo R^n. El punto $x \in X$ se denomina punto interior de este conjunto (con respecto al espacio R^n), si existe un ε-entorno de este punto, contenido en el conjunto X, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $U(x; \varepsilon) \subset X$.*

Ejercicio 4. Si la intersección $A \cap B$, $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ contiene al menos un punto interior del conjunto A como del conjunto B, entonces el conjunto de los puntos interiores de la intersección $A \cap B$ es no vacío.

Definición 13. *El conjunto cada punto del cual es un punto interior (con respecto al espacio analizado R^n), se denomina conjunto abierto.*

Se debe tener en cuenta que un mismo punto de un mismo conjunto puede ser punto interior de este conjunto respecto a un espacio, que contenga este conjunto y

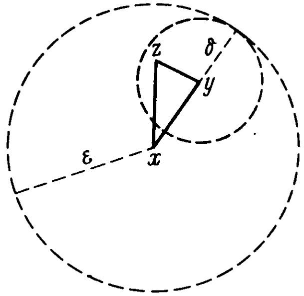


FIG. 91

no ser punto interior del conjunto analizado respecto a otro espacio que también contenga este conjunto. Analicemos, por ejemplo, el espacio R^2_{xy}, es decir, el plano con un cierto sistema de coordenadas cartesianas dado, las que vamos a designar por x e y. El eje de las x de este plano, como todo eje numérico, es un espacio euclídeo R^1_x. Cada punto de cualquier intervalo (a, b) de este eje, es decir, el conjunto de puntos

$$\{(x, y): a < x < b, y = 0\}$$

del plano R^2_{xy}, es un punto interior de este intervalo con respecto al espacio señalado R^1_x (eje de los x) y no es punto interior de este intervalo con respecto a todo el plano R^2_{xy}. De esta forma, el intervalo (a, b) es un conjunto del espacio R^1_x y no es conjunto abierto del espacio R^2_{xy}.

Una clase importante de conjuntos abiertos se establece por el siguiente lema.

Lema 3. *Cualquier ε-entorno $U(x; \varepsilon)$ de cualquier punto $x \in R^n$ es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado un entorno $U(x; \varepsilon)$ y sea $y \in U(x; \varepsilon)$. Hagamos

$$\delta = \varepsilon - \rho(y, x) \tag{18.17}$$

y mostremos que $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$ (fig. 91).

Si $z \in U(y; \delta)$ y por lo tanto $\rho(z; y) < \delta$, entonces, aplicando la desigualdad triangular y (18.17), obtenemos

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(y, x) = \varepsilon,$$

es decir, $z \in U(x; \varepsilon)$. Ya que z es un punto arbitrario del conjunto $U(y; \delta)$, esto significa que $U(y; \delta) \subset U(x; \varepsilon)$. □

Los conjuntos abiertos del espacio R^n serán designados en su mayoría por la letra G.

Ejercicio 5. Demuéstrese que el conjunto de los puntos interiores de cualquier conjunto es un conjunto abierto.

Lema 4. *La intersección de un número finito, al igual que la unión de cualquier colección de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ conjuntos abiertos del espacio R^n. Si su intersección $\bigcap_{j=1}^{k} G_j$ es un conjunto vacío, entonces, es abierto ya que su conjunto de puntos interiores es vacío y por lo tanto coincide con la propia intersección. Si la intersección señalada no es vacía y $x \in \bigcap_{j=1}^{k} G_j$, entonces, ya que los conjuntos G_j son abiertos, para cada $j = 1, 2, \ldots, k$ existe $\varepsilon_j > 0$ tal que $U(x; \varepsilon_j) \subset G_j$. Suponiendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$, obtenemos que para cada j es válida la inclusión $U(x, \varepsilon) \subset G_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Por lo tanto, $U(x; \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{k} G_j$, es decir, el punto x es un punto interior de la intersección $\bigcap_{j=1}^{k} G_j$. Ya que x es un punto arbitrario de esta intersección, éste es un conjunto abierto.

Sea dado ahora un sistema arbitrario de conjuntos abiertos $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, donde $\mathfrak{A}$ es un cierto conjunto de índices y $G = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$. Demostremos que G es un conjunto abierto. Efectivamente, cualquiera que sea el punto $x \in G$, existe un índice $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, tal que $x \in G_{\alpha_0}$. Ya que G_{α_0} es un conjunto abierto, entonces se encuentra un $\varepsilon > 0$, tal que $U(x; \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$. Pero entonces, $U(x; \varepsilon) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha = G$, es decir, x es un punto interior del conjunto G y por lo tanto este conjunto es abierto. □

Resulta muy cómoda la siguiente definición.

Definición 14. *Cualquier conjunto abierto que contenga un punto se denomina su entorno.*

El entorno del punto x será designado habitualmente por $U = U(x)$, tal vez con uno u otro índice, a veces, como en el caso unidimensional, por otras letras, por ejemplo, V, W.

OBSERVACIÓN. En cualquier entorno $U(x)$ del punto x, evidentemente se contiene tanto un entorno de bola como un entorno rectangular de este punto. Más aún, entendiendo entorno de un punto en el sentido de la definición 14 se conserva también el análogo de la propiedad (18, 12), es decir, el punto x es límite de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ si y sólo si para cada uno de sus entornos $U(x)$ existe un número m_0, tal que para todos los $m \geqslant m_0$ se cumple la inclusión $x^{(m)} \in U(x)$.

Definición 15. *El punto $x \in R^n$ se denomina punto de adherencia del conjunto $E \subset R^n$, si cualquier entorno de este punto contiene al menos un punto del conjunto X.*

Es evidente que cada punto del conjunto X es adherente de este conjunto, ya que cualquier entorno del punto $x \in X$ contiene el propio punto x. Al mismo tiempo pueden existir, naturalmente, puntos adherentes del conjunto dado, que no pertenezcan a éste (por ejemplo, los extremos del intervalo en la recta son sus puntos adherentes).

Ejercicio 6. Demuéstrese que para que el punto $x \in R^n$ sea un punto adherente del conjunto $X \subset R^n$, es necesario y suficiente que exista la sucesión de puntos $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$.

Definición 16. *Si para el punto $x \in X$ existe un entorno que no contenga otros puntos del conjunto X, excepto el propio punto x, entonces este punto se denomina punto aislado del conjunto X.*

Definición 17. *El punto $x \in R^n$ se denomina punto de acumulación del conjunto X, si cualquier entorno del punto x contiene al menos un punto del conjunto X diferente de x.*

Es evidente que un punto de acumulación es un punto adherente.

Ya nos encontramos con los conceptos de puntos de adherencia, de acumulación y aislados en el caso unidimensional (véanse el p. 5.4 y el p. 5.5). Recordemos algunos de sus propiedades.

Para cualquier punto adherente x_0 del conjunto X o bién existe un entorno, que contiene sólo un punto de X (en este caso este punto es el propio punto x_0), o bien este entorno no existe, es decir, en cada entorno del punto x_0 se tienen al menos dos puntos del conjunto X (por lo tanto, al menos uno de estos puntos es diferente de x_0). Por esto, cualquier punto adherente del conjunto X es o bien un punto aislado o bien un punto de acumulación de este conjunto (en el último caso, este punto puede pertenecer o no al propio conjunto).

Si $x^{(0)}$ es un punto de acumulación del conjunto $X \subset R^n$, entonces existe una sucesión de puntos $x^{(m)} \in X$ tales que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)}$, $x^{(m')} \neq x^{(m)} \neq x^{(0)}$, $m \in N$, $m' \in N$, $m \neq m'$, es decir, la sucesión $\{x^{(m)}\}$ está compuesta por diferentes puntos del conjunto X, distintos del punto $x^{(0)}$, y converge a este punto. En realidad, por cuanto $x^{(0)}$ es un punto de acumulación del conjunto X, entonces, para el entorno $U(x^{(0)}, 1)$ existe un punto, denotémoslo por $x^{(1)}$, tal que $x^{(1)} \in U(x^{(0)}, 1) \cap X$ y $x^{(1)} \neq x^{(0)}$. Sea $\delta_1 = \min\,\{1/2, \rho(x^{(0)}, x^{(1)})\}$. Para el entorno $U(x^0, \delta_1)$ se encuentra un punto, denotémoslo por $x^{(2)}$, tal que $x^2 \in U(x^{(0)}, \delta_1) \cap X$, $x^{(2)} \neq x^{(0)}$ y $x^{(2)} \neq x^{(1)}$. Continuando este proceso, obtendremos la sucesión buscada.

De lo demostrado se deduce que cualquier entorno de un punto de acumulación de un conjunto contiene una cantidad infinita de puntos de este conjunto (por ejemplo, son puntos de la sucesión construida anteriormente).

Ejemplos. Sean $n = 1$, $X = (0, 1)$ un intervalo. Cada punto del segmento $[0, 1]$ es un punto adherente y un punto de acumulación del conjunto X, al mismo tiempo que los puntos 0 y 1 no pertenecen al propio conjunto X. Si $X = [0, 1]$ es un segmento, entonces el conjunto de puntos adherentes del conjunto X coincide con el propio conjunto. Por último, si el conjunto X está compuesto por el intervalo $(0, 1)$ y por el punto 2, es decir, $X = (0, 1) \cup \{2\}$, entonces, el punto 2 es un punto aislado de este conjunto, y el conjunto de puntos adherentes de éste será $[0, 1] \cup \{2\}$.

Definición 18. *La colección de todos los puntos adherentes del conjunto $X \subset R^n$ se denomina clausura del conjunto X y se designa por $\bar{X}$.*

Como ya se ha señalado, cada punto del conjunto X es un punto adherente de éste, por esto

$$X \subset \bar{X} \tag{18.18}$$

Definición 19. *El conjunto X se llama cerrado si $\bar{X} = X$, es decir, si contiene todos sus puntos adherentes.*

Por ejemplo, para $n = 1$ el intervalo $(0, 1)$ no es un conjunto cerrado, y el segmento $[0, 1]$ es un conjunto cerrado.

Todo el espacio y el conjunto vacío son al mismo tiempo conjuntos cerrados y abiertos en R^n (verifíquese). Se puede mostrar que en el espacio R^n no existen otros cerrados y abiertos al mismo tiempo.

Ya que cualquier punto adherente de un conjunto es o bien un punto de acumulación de éste, o bien un punto aislado, y un punto aislado, como se deduce de su definición, pertenece al conjunto, entonces, la exigencia de pertenencia de cada punto adherente al conjunto es equivalente a exigir la pertenencia a este conjunto de cada uno de sus puntos de acumulación. Dicho de otra forma, *un conjunto es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Ejercicio 7. Sea $X \subset R^k \subset R^n$. Demuéstrese que $x \in R^n$ es un punto adherente del conjunto X en el espacio R^n si y sólo si pertenece al espacio R^k y es en él un punto adherente del conjunto X.

De aquí se deduce que el conjunto X es un conjunto cerrado del espacio R^k si y sólo si es un conjunto cerrado del espacio R^n. De esta forma, la propiedad de un conjunto de ser cerrado en un cierto espacio R^n es una propiedad "interna" de éste, es decir, una propiedad que no depende de la elección del espacio R^n, en el cual se encuentra el conjunto analizado. Como se ha señalado anteriormente, la propiedad de un conjunto de ser abierto no es una propiedad "interna" en el sentido señalado, un mismo conjunto puede ser abierto en un espacio R^n y no ser abierto en otro.

Señalemos la siguiente propiedad evidente de los conjuntos abiertos.

Si A es un conjunto cerrado, y $\{x^{(m)}\}$ es una sucesión convergente, todos los términos de la cual pertenecen al conjunto A: $x^{(m)} \in A$, $m = 1, 2, \ldots$, entonces, su límite también pertenece al conjunto A.

En efecto, si $x^{(0)} = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)}$, entonces de la definición de límite de una sucesión de puntos se deduce que en cualquier entorno del punto $x^{(0)}$ se tienen puntos de la sucesión dada (y más aún, allí se encuentran casi todos los puntos de la sucesión, es decir, todos a excepción de un número finito de ellos), que son, según nuestra suposición, puntos del conjunto A. De esta forma, el punto $x^{(0)}$ es un punto adherente del conjunto A y ya que A es cerrado, entonces $x^{(0)} \in A$.

Lema 5. *Un punto adherente de la clausura de un conjunto es también punto adherente del propio conjunto.*

Corolario. *La clausura de cualquier conjunto es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Sean $X \subset R^n$, $\bar{X}$ la clausura del conjunto X y x un punto adherente del conjunto $\bar{X}$, es decir, $x \in \bar{\bar{X}}$. Demostremos que $x \in \bar{X}$.

De la condición $x \in \bar{\bar{X}}$ se deduce que a cualquier entorno $U = U(x)$ del punto x pertenece, al menos, un punto y del conjunto $\bar{X}$: $y \in U \cap \bar{X}$. Ya que U, como cualquier entorno, es un conjunto abierto, entonces es también un entorno que contiene el punto y. Pero $y \in \bar{X}$, por lo tanto, en cualquier entorno del punto y, en particular, en U, se tiene un punto z del conjunto X: $z \in U \cap X$.

De esta forma, en cualquier entorno U del punto $x \in \bar{\bar{X}}$ se tiene un punto de X. Esto significa que x es un punto adherente del conjunto X: $x \in \bar{X}$ □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. En el lema 5 se demostró que

$$\bar{\bar{X}} \subset \bar{X},$$

y ya que por (18.18), $\bar{X} \subset \bar{\bar{X}}$, entonces

$$\bar{\bar{X}} = \bar{X}. \tag{18.19}$$

Ejemplos 1. Toda bola n-dimensional

$$Q^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n): \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2\} \tag{18.20}$$

es un conjunto abierto (véase el lema 1), por esto, con frecuencia se llama también *bola n-dimensional abierta*. El conjunto

$$\bar{Q}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n): \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leqslant r^2\} \tag{18.21}$$

es cerrado, ya que las desigualdades no estrictas se conservan durante el paso al límite. El es la clausura de la bola abierta Q^n y se llama *bola n-dimensional cerrada*. En el caso cuando $n = 2$: Q^2 es un círculo abierto, $\bar{Q}^2$ es círculo cerrado; en el caso cuando $n = 1$: Q^1 es un intervalo, $\bar{Q}^1$ es un segmento.

2. La bola cerrada $\bar{Q}^n$ se obtiene de la bola abierta Q^n al añadirle el conjunto

$$\{x = (x_1, \ldots, x_n): \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2\},$$

que se llama *esfera* $(n - 1)$*-dimensional de radio r con centro en el punto* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y que se designa por S^{n-1}. En el caso cuando $n = 2$: S^1 es una circunferencia, en el caso cuando $n = 1$: S^0 es un par de puntos.

La esfera

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_n): \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2\} \tag{18.22}$$

también es un ejemplo de conjunto cerrado (¿por que?).

Señalemos también, que la bola n-dimensional de radio 1 con centro en el origen de coordenadas, habitualmente se denomina *bola n-dimensional unitaria* (abierta o cerrada), y la esfera $(n - 1)$-dimensional de radio 1 con centro en el origen de coordenadas, esfera $(n - 1)$-dimensional unitaria.

Definición 20. *Para cualquier conjunto* $X \subset R^n$, *el conjunto* $R^n \setminus X$ *se llama su complemento en el espacio* R^n (véase el p. 1.1).

Lema 6. *Para que un conjunto sea abierto, es necesario y suficiente que su complemento sea cerrado.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea G un conjunto abierto. Entonces, ningún punto $x \in G$ es punto adherente de su complemento $F = R^n \setminus G$, ya que el conjunto G, siendo avierto, es un entorno del punto x y no contiene puntos del conjunto F. Por lo tanto, todos los puntos adherentes del conjunto F se encuentran en F, lo que significa que el conjunto F es cerrado.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea F un conjunto cerrado y sea $x \in G = R^n \setminus F$. Ya que F es cerrado, el punto x no es su punto adherente, por esto, existe un entorno de él $U(x)$, que no se interseca con el conjunto F y por lo tanto tal que $U(x) \subset G$. De esta forma, cualquier punto del conjunto G es interno, es decir, G es abierto. □

Corolario 1. *Un conjunto es cerrado si y sólo si su complemento es abierto.*

Esto se deduce inmediatamente del lema 6, ya que si el conjunto B es el complemento del conjunto A en R^n, es decir, $B = R^n \setminus A$, entonces también viceversa, el conjunto A es el complemento de B en R^n: $A = R^n \setminus B$.

Corolario 2. *La intersección de cualquier colección y la unión de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

En efecto, sea F_α conjuntos cerrados, entonces, por el lema 6, los conjuntos $G_\alpha = R^n \setminus F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, son abiertos. Por la fórmula (1.1) tenemos:

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha (R^n \setminus G_\alpha) = R^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

El conjunto $\bigcup_\alpha G_\alpha$, por el lema 4, es abierto, como unión de conjuntos abiertos. Por lo tanto, su complemento $\bigcap_\alpha F_\alpha = R^n \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha$, por el lema 6 es cerrado.

De forma análoga, con ayuda de la fórmula (1.2), se demuestra que es cerrada la unión de un número finito de conjuntos cerrados. □

Ejercicio 8. Demuéstrese que si G es un conjunto abierto y F es cerrado, $G \subset R^n$, $F \subset R^n$, entonces $G \setminus F$ es un conjunto abierto.

Lema 7. *Sean A y B conjuntos cerrados disjuntos de* R^n *y el conjunto A acotado; entonces, existe un número* $d > 0$, *tal que para dos puntos cualesquiera* $x \in A$ *e* $y \in B$ *se cumple la desigualdad* $\rho(x, y) \geqslant d$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tal número d no existe. Entonces, para cualquier $m = 1, 2, \ldots$ existe un par de puntos $x^{(m)} \in A$ e $y^{(m)} \in B$ tales que $\rho(x^{(m)}, y^{(m)}) < \frac{1}{m}$. Por cuanto A es un conjunto acotado, entonces de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ se puede extraer una subsucesión convergente $\{x^{(m_k)}\}$. Sea $\lim_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$. Ya que el conjunto A es cerrado, tenemos $x^{(0)} \in A$. De la desigualdad

$$\rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, y^{(m_k)}) < \rho(x^{(0)}, x^{(m_k)}) + \frac{1}{m}$$

se deduce que $\lim_{k \to \infty} \rho(x^{(0)}, y^{(m_k)}) = 0$. Por esto, el punto $x^{(0)}$ es un punto adherente del conjunto B y ya que es cerrado, $x^{(0)} \in B$. De esta forma, $x^{(0)} \in A$ y $x^{(0)} \in B$, y esto contradice la condición de que A y B son disjuntos. □

Definición 21. *Para dos conjuntos* X_1 *y* X_2 *la magnitud*

$$\rho(X_1, X_2) = \inf_{\substack{x \in X_1 \\ y \in X_2}} \rho(x, y)$$

se llama distancia entre X_1 y X_2.

En particular, si X_1 está compuesto por un punto x, entonces $\rho(X_1, X_2) = \rho(x, X_2)$ se denomina la distancia desde el punto x hasta el conjunto X_2.

Utilizando este término, el lema 7 puede ser enunciado de la siguiente forma.

Si dos conjuntos cerrados son disjuntos y al menos uno de ellos es acotado, entonces la distancia entre ellos es positiva.

Ejercicio 9. Cítese un ejemplo de dos conjuntos cerrados disjuntos, para los cuales la distancia entre ellos es igual a cero.

Lema 8. *Si A es un conjunto cerrado, $A \subset R^n$, $x \in R^n$ y $\rho(x, A) = d$, entonces existe un punto $y \in A$ tal que $\rho(x, y) = d$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y) = d$, entonces para cualquier $m = 1, 2, \ldots$ se encuentra un punto $y^{(m)} \in A$, tal que $\rho(x, y^{(m)}) < d + \frac{1}{m}$. Es evidente, que para cada m es válida la inclusión $y^{(m)} \in U(x, d + 1)$, y por esto, la sucesión $\{y^{(m)}\}$ está acotada y, por consiguiente, de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\{y^{(m_k)}\}$. Sea $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(m_k)} = y^{(0)}$. Ya que el conjunto A es cerrado, tenemos $y^{(0)} \in A$; más aún,

$$\rho(x, y^{(0)}) \leqslant \rho(x, y^{(m_k)}) + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}) < d + \frac{1}{m_k} + \rho(y^{(m_k)}, y^{(0)}).$$

Pasando al límite aquí, cuando $k \to \infty$, obtenemos $\rho(x, y^{(0)}) \leqslant d$. Por otra parte $\rho(x, y^{(0)}) \geqslant \rho(x, A) = d$, por lo tanto $\rho(x, y^{(0)}) = d$. □

Definición 22. *El punto $x \in R^n$ se llama punto frontera del conjunto $x \subset R^n$, si en cualquiera de sus entornos existen puntos que pertenecen al conjunto X y puntos que no pertenecen a ésta. El conjunto de todos los puntos frontera del conjunto X se llama su frontera y se designa por ∂X.*

Es evidente, que $\partial X \subset \overline{X}$. Cada uno de los puntos adherentes del conjunto X o bien es un punto frontera de éste o bien es un punto interno de éste, otras posibilidades no hay, por esto $\overline{X} = X \cup \partial X$.

Si G es un conjunto abierto, entonces, en la unión $\overline{G} = G \cup \partial G$ G y ∂G no se intersecan.

En efecto, ya que G es un conjunto abierto, todo punto de éste es interno y de esta forma no pertenece a su frontera.

Ejemplos. Sea $n = 2$, $Q^2 = \{(x_1, x_2): x_1^1 + x_2^2 < 1\}$ un círculo abierto. Si $X = Q^2$, entonces cualquier punto de la circunferencia $S^1 = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ es un punto frontera del conjunto X y no hay otros puntos frontera, es decir, $S^1 = \partial X$. En este caso, la frontera del conjunto X no pertenece a él.

Sea $X = \overline{Q}^2$ un círculo cerrado, y en este caso, la circunferencia S^1 es también forntera para X, además, ahora $\partial X \subset X$.

Por último, si $X = S^1$ es una circunferencia, entonces cada punto del conjunto X es su punto frontera y no tiene otros puntos frontera, es decir, $X = \partial X$.

En general, la esfera $(n - 1)$-dimensional (18.22) es frontera tanto de la bola abierta n-dimensional (18.20), como de la cerrada (18.21), así como también coincide con su propia frontera (¿por que?).

Ejercicios. 10. Demuéstrese que para que el conjunto $A \subset R^n$ sea cerrado es necesario y suficiente que $\partial A \subset A$.

11. Demuéstrese que $\overline{\partial X} = \partial X$.

En el futuro nos hará falta el concepto de curva en el espacio n-dimensional. Para este objetivo vamos a generalizar la definición dada anteriormente, de curva en el espacio tridimensional, sin tocar la cuestión de la transformación de los parámetros.

Definición 23. *El conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ del espacio R^n, cuyas coordenadas están dadas como funciones continuas $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, definidas sobre cierto segmento $[a, b]$, se llama curva continua en el espacio R^n. El argumento t se llama parámetro de la curva. El punto $x(a) = (x_1(a), \ldots, x_n(a))$ se llama origen y el punto $x(b) = (x_1(b), \ldots, x_n(b))$ se llama extremo de la curva dada.*

Todo lo dicho en los p. 16.1 y 16.2 sobre una curva en el espacio tridimensional puede ser trasladado de una forma natural para el caso general n-dimensional, pero no vamos a detenernos en esto. Es importante para el futuro el concepto de recta en el espacio n-dimensional.

Definición 24. *Sean $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R^n$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algunos números dados $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$. El conjunto de los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ del espacio R^n, cuyas coordenadas son representables en la forma*

$$x_i = x_i^{(0)} + \alpha_i t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < t < +\infty,$$

se llama recta en el espacio R^n, que pasa por el punto $x^{(0)}$.

La parte de la recta, que corresponde a la variación del parámetro t en cierto segmento $[a, b]$, se llama *segmento rectilíneo* (recto), y su parte que corresponde a la variación del parámetro en el intervalo infinito $t \geqslant a$, se llama *rayo*. Es evidente, que en el caso cuando $n = 3$, se obtiene una recta, correspondientemente un segmento o un rayo, en el espacio tridimensional habitual, y $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es el vector director de esta recta. Si son dados dos puntos distintos $(x'_1, \ldots, x'_n)$ y $(x''_1, \ldots, x''_n)$, entonces la ecuación de la recta que pasa por estos puntos tiene la forma

$$x_i = x'_i + (x''_i - x'_i)t; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Definición 25. *El conjunto $X \subset R^n$, dos puntos cualesquiera del cual pueden ser unidos por una curva continua que pertenezca completamente a este conjunto se llama linealmente conexo* *).

Dicho de otra forma, el conjunto X se llama linealmente conexo si cualesquiera que sean los puntos $x^{(1)} \in X$ y $x^{(2)} \in X$, existe una curva continua $x(t) = \{x_i(t);\ \alpha \leqslant t \leqslant b\}$ tal que su origen es el punto $x^{(1)}$, es decir $x(a) = x^{(1)}$, y su extremo el punto $x^{(2)}$, es decir, $x(b) = x^{(2)}$, y todos los puntos de esta curva pertenecen al conjunto X, es decir, $x(t) \in X$ para todos los $t \in [a, b]$.

*) Además del concepto de conexión lineal en matemática existe el concepto de conexión del conjunto, el cual no se analiza en nuestro curso.

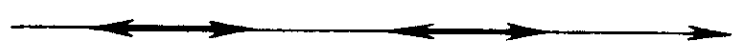


FIG. 92

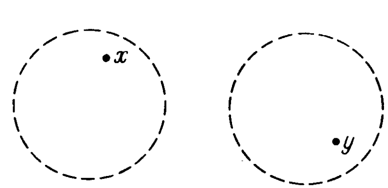


FIG. 93

Ejemplos de conjuntos linealmente conexos son el punto, el segmento y ejemplo de conjunto linealmente no conexo: un par de puntos diferentes.

Lema 9. *Si un conjunto linealmente conexo se interseca con un cierto conjunto y con su complemento en R^n, entonces también se interseca con la frontera de este conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto linealmente conexo, $A \subset R^n$, B un cierto conjunto, $B \subset R^n$, y sean las intersecciones $A \cap B$ y $A \cap (R^n \setminus B)$ no vacías. Sean $x^{(1)} \in A \cap B$ y $x^2 \in A \cap (R^n \setminus B)$. Ya que A es un conjunto linealmente conexo, entonces existe una curva continua $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ tal que $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ y $x(t) \in A$ para todos los $t \in [a; b]$. Designemos por τ la cota superior de aquellos $t \in [a, b]$, para los cuales $x(t) \in B$. Es evidente que $a \leqslant \tau \leqslant b$. En cualquier entorno del punto $x(\tau)$ se contienen tanto puntos que pertenecen a B como puntos que no pertenecen a B (¿por que?). Por lo tanto, $x(\tau) \in \partial B$. Ya que $x(\tau) \in A$, la intersección $\partial B \cap A$ no es vacía. □

Definición 26. *Un conjunto abierto linealmente conexo se llama región.* *)

Ejemplos. En el caso de $n = 1$ cualquier intervalo es una región, y el conjunto compuesto por dos o más intervalos disjuntos (fig. 92) aunque representa un conjunto abierto no es una región.

En el caso cuando $n = 2$ todo círculo abierto es una región, y el conjunto compuesto por dos o más círculos abiertos disjuntos (fig 93), aunque también es abierto no es una región ya que dos puntos x e y, que pertenecen a distintos círculos, no pueden ser unidos con una curva continua que pertenezca completamente al interior del conjunto analizado.

Toda bola abierta n-dimensional es una región.

Definición 27. *La región, dos puntos cualesquiera de la cual pueden ser unidos por un segmento que pertenezca completamente a ella se llama región convexa.*

Toda bola abierta n-dimensional es una región convexa.

Definición 28. *El conjunto, que pertenece al espacio R^n y que es la clausura de cierta región, se llama región cerrada.*

La bola cerrada n-dimensional es una región cerrada.

Ejercicios. 12. Demuéstrese que la bola n-dimensional y un paralelepípedo n-dimensional son conjuntos convexos.

13. Constrúyase un ejemplo de región no convexa.

---

*) No se debe mezclar el concepto de dominio de definición de una función y el concepto de región en el sentido de esta definición.

Problema 15 (teorema de Jordan *)). Demuéstrese que cualquier contorno sencillo (véase el p. 16.1) en el plano divide el plano en dos regiones (acotada y no acotada); esto significa, en primer lugar, que es frontera de cada una de estas regiones, en segundo lugar, que ningunos dos puntos pertenecientes a cada una de las regiones señaladas puedan ser unidos por una curva que no interseque el contorno dado.

18.3. COMPACTOS

En este punto serán analizadas ciertas propiedades de los conjuntos, que se llaman compactos y que juegan un papel importante en el análisis.

Definición 29. *El conjunto $A \subset R^n$ se llama compacto si de cualquier sucesión de puntos de conjunto se puede extraer una subsucesión convergente cuyo límite pertenece al conjunto A.*

Una propiedad importante, que caracteriza a los compactos en R^n, es establece por el siguiente teorema.

Teorema 3. *Para que el conjunto $X \subset R^n$ sea compacto, es necesario y suficiente que éste sea acotado y cerrado.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $A \subset R^n$ y A compacto. Si el conjunto A fuese no acotado, entonces, para cualquier número natural m se encontraría un punto $x^{(m)} \in A$, tal que $\rho(O, x^{(m)}) > m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Aquí, como siempre, $O = (0, 0, \ldots, 0)$. Es evidente, que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$. Por esto, cualquier subsucesión de la sucesión $x^{(m)}$ también tiene como límite, y por lo tanto, de $x^{(m)}$ no se puede elegir una subsucesión convergente, lo que contradice el hecho de que A es compacto. De esta forma A es un conjunto acotado.

Si el conjunto A no fuese cerrado, entonces existiría un punto adherente x que no pertenecería a él, $x \notin A$. Para este punto se encontraría una sucesión $x^{(m)} \subset A$, $m = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Por esto, cualquier subsucesión de esta sucesión también tendría como límite un punto $x \notin A$, es decir, el conjunto A otra vez no sería compacto. Por lo tanto, A es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea X un conjunto cerrado acotado y $\{x^{(m)}\}$ una subsucesión cualquiera de puntos de este espacio: $x^{(m)} \in X$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Ya que el conjunto X es acotado, esta sucesión también es acotada. Por lo tanto, según el teorema 2 del p. 18.1, de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\{x^{(m_k)}\}$. Designemos su límite por x: $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x$. Es evidente que x es un punto adherente del conjunto X, o sea, $x^{(m_k)} \in X$, y ya que X es un conjunto cerrado, entonces, $x \in X$, es decir, X efectivamente es compacto. □

El teorema demostrado permite establecer fácilmente la compacticidad de muchos conjuntos que se encuentran con frecuencia, por ejemplo, los segmentos, las bolas cerradas y los paralelepípedos, las esferas en los espacios R^n de cualquier dimensión, todos los conjuntos enumerados al ser acotados y cerrados son compactos. Con la misma facilidad, con ayuda del teorema 3 se establece también la no compacticidad de muchos conjuntos. Por ejemplo, los intervalos finitos, al no ser cerrados, y los infinitos al no ser conjuntos acotados, no son compactos.

---

*) C. Jordan (1838—1892), matemático francés.

Señalemos que también según el teorema 3, el lema 7 del p. 18.2 puede ser enunciado de la forma siguiente: *si dos conjuntos cerrados no se intersecan y si al menos uno de ellos es compacto, entonces la distancia entre ellos es mayor que cero.*

Antes de pasar a otras propiedades características de los compactos, introduciremos una serie de definiciones y demostraremos una afirmación complementaria.

La sucesión de cubos n-dimensionales $\{Q_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, se llama sucesión de *cubos encajados* si

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_k \supset Q_{k+1} \supset \ldots$$

Lema 10. *Para la sucesión de cubos cerrados y encajados $\{Q_k\}$, cuyas longitudes de las aristas tienden a cero, cuando $k \to \infty$, existe un punto, y sólo uno, que pertenece a todos los cubos de la sucesión analizada.*

DEMOSTRACIÓN. Sean los cubos

$$Q_k = \{x = (x_i): a_i^{(k)} \leqslant x_i \leqslant a_i^{(k)} + d^{(k)};\ i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{18.23}$$

con aristas de longitud $d^{(k)}$, que forman una sucesión de cubos encajados *) y sea $\lim\limits_{k \to \infty} d^{(k)} = 0$. Entonces, los segmentos $[a_i^k, a_i^k + d_i^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, forman un sistema de segmentos encajados, cuyas longitudes $d_i^{(k)}$ tienden a cero cuando $k \to \infty$. Por esto, existen y además son únicos, los números ξ_i tales que para un i ($i = 1, 2, \ldots, n$) dado y para cualquier $k = 1, 2, \ldots$, tiene lugar la inclusión $\xi_i \in [a_i^k, a_i^k + d^{(k)}]$. De aquí se deduce que el punto $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ pertenece a todos los cubos de la sucesión analizada $\xi \in Q_k$, $k = 1, 2, \ldots$ y este punto es único.

Definición 30. Sea $X \subset R^n$. El sistema

$$\Omega = \{X_\alpha\}, \alpha \in \mathfrak{A} \tag{18.24}$$

de conjuntos $X_\alpha \subset R^n$ ($\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ es un conjunto de índices α) se llama *recubrimiento del conjunto X*, si

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} X.$$

De esta forma, el sistema (18.24) se llama recubrimiento del conjunto X, si cada uno de los puntos de este conjunto pertenece al menos a uno de los conjuntos X_α del sistema Ω.

El recubrimiento (18.24) del conjunto X, compuesto por un número finito de conjuntos X_α, se llama *recubrimiento finito de este conjunto*.

En el caso, cuando todos los conjuntos del sistema Ω son abiertos, el recubrimiento Ω se llama *recubrimiento abierto del conjunto X*.

Teorema 4. *Para que el conjunto $X \subset R^n$ sea compacto, es necesario y suficiente que de cualquiera de sus recubrimientos abiertos se pueda extraer un recubrimiento finito.*

*) Recordemos que acordamos (véase el p. 18.1) entender siempre por cubo sólo los cubos que estuvieran dados por desigualdades de la forma (18.23) para un sistema de coordenadas dado.

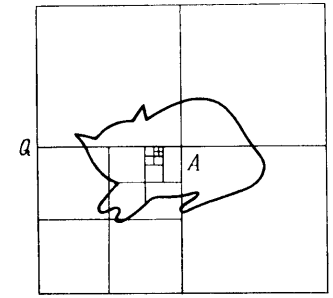


FIG. 94

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea A compacto y sea el sistema

$$\Omega = \{G_\alpha\}, \quad \alpha \in \mathfrak{A} \tag{18.25}$$

un recubrimiento abierto de A. Supongamos que de este recubrimiento no se puede extraer un recubrimiento finito del compacto A. Según el teorema 3 del hecho de que el conjunto A es compacto se deduce que es acotado. Por esto, existe un cubo cerrado Q, que contiene el conjunto A.

Sea

$$Q = \{x = (x_i): a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + d, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Dividamos el cubo Q en 2^n cubos cerrados iguales Q_j, definidos por el juego de las n desigualdades de la forma

$$a_i + \frac{d}{2} \leqslant x_i \leqslant a_i + d \qquad \text{o} \qquad a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + \frac{d}{2}$$

(en la fig. 94 se muestra el caso cuando $n = 2$), entonces

$$Q = \bigcup_{j=1}^{2^n} Q_j. \tag{18.26}$$

El sistema (18.25) forma un recubrimiento abierto de cada uno de los conjuntos $A \cap Q_j$ ($j = 1, 2, \ldots, 2^n$). Entre estos conjuntos existe un conjunto no vacío — designémoslo por $A \cap Q_{j_1}$ — tal que del recubrimiento (18.25) no se puede extraer un recubrimiento finito de este conjunto, en el caso contrario, del sistema (18.25) se podría, en virtud de la igualdad (18.26), extraer también un recubrimiento finito de todo el conjunto A, lo que estaría en contradicción con la suposición hecha.

Dividamos otra vez el cubo Q_{j_1} en 2^n cubos cerrados iguales $Q_{j_1 j}$ ($j = 1, 2, \ldots, 2^n$). Designemos por $Q_{j_1 j_2}$ aquel de los cubos $Q_{j_1 j}$, cuya intersección con el compacto A no pueda ser recubierta con un número finito de conjuntos del sistema Ω, etc. Como resultado, obtenemos una sucesión de cubos cerrados encajados

$$Q_{j_1} \supset Q_{j_1 j_2} \supset \ldots \supset Q_{j_1 j_2 \ldots j_k} \supset \ldots, \tag{18.27}$$

las longitudes de los cuales son respectivamente iguales a $d/2, d/4, \ldots, d/2^k, \ldots$, y por lo tanto, tienden a cero, cuando $k \to \infty$.

Cada uno de los cubos $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ de la sucesión (18.27) tiene la propiedad de que del sistema (18.25) no se puede extraer un recubrimiento finito del conjunto no vacío

$$A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_k},$$

j_ν toma uno de los valores $1, 2, 3, \ldots, 2^n$; $\nu = 1, 2, \ldots, k$; $k = 1, 2, \ldots$. Por el lema 10 existe, y además es único, un punto, que pertenece a todos los cubos del sistema (18.27). Ya que las aristas de los cubos de este sistema tienden a cero y cada uno de los cubos tiene una intersección no vacía con el conjunto A, entonces en cualquier entorno del punto ξ se tienen puntos del conjunto A. Efectivamente, señalemos que la diagonal del cubo $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ es igual a $d\sqrt{n}/2^k$. Más adelante, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ elegimos k_0 tal que

$$d\sqrt{n}/2^{k_0} < \varepsilon. \tag{18.28}$$

Esto es posible, ya que $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{d\sqrt{n}}{2^k} = 0$. Ahora, observando que cualquier punto $x \in Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ se encuentra del punto $\xi \in Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ a una distancia, que no sobrepasa a la diagonal del cubo $Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$ tendremos

$$\rho(x, \xi) \leqslant \frac{d\sqrt{n}}{2^{k_0}} < \varepsilon.$$

Esto significa que x se encuentra en un ε-entorno del punto ξ. Por lo tanto, todo el cubo $Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$, incluso sus puntos pertenecientes al conjunto A, está contenido en el ε-entorno del punto ξ analizado. De esta forma, ξ es un punto adherente del conjunto A. Por el teorema 3, el conjunto A, siendo compacto, es cerrado y por esto $\xi \in A$.

La sucesión auxiliar de cubos construida (18.27) permite demostrar fácilmente la imposibilidad de que se cumpla la suposición hecha de que del recubrimiento (18.25) del compacto A no se puede extraer un recubrimiento finito de este compacto. En efecto, ya que el sistema (18.25) es un recubrimiento del conjunto A, entonces existe un índice $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, tal que $\xi \in G_{\alpha_0}$. El conjunto G_{α_0} es abierto, por lo tanto, se encuentra un número $\varepsilon > 0$ tal que el ε-entorno $U(\xi, \varepsilon)$ del punto ξ estará completamente contenido en G_{α_0}:

$$U(\xi, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}. \tag{18.29}$$

Observemos ahora, que para cualquier $\varepsilon > 0$, en particular, para ε, que satisfaga la condición (18.29), se encuentra, como se ha mostrado con anterioridad, un número k_0 tal que se cumplirá la inclusión

$$Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset U(\xi, \varepsilon). \tag{18.30}$$

De (18.29) y (18.30) tenemos

$$A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}} \subset U(\xi, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$$

y, por lo tanto, del sistema (18.25) se puede extraer un recubrimiento finito del conjunto $A \cap Q_{j_1 j_2 \ldots j_{k_0}}$, y precisamente un recubrimiento compuesto solamente por el conjunto G_{α_0}. Esto contradice el supuesto, en correspondencia con el cual fueron elegidos los cubos $Q_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. De esta forma, al suponer que del sistema (18.25) no se extrae un recubrimiento finito del compacto hemos llegado a una contradicción. De esta forma, está demostrada la necesidad de esta condición.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea $X \subset R^n$ y supongamos que de cualquier recubrimiento abierto del conjunto X se puede extraer un recubrimiento finito. Supongamos que X no es compacto. Esto, por la definición 29, significa que existe una sucesión $\{x^{(m)}\} \subset X$, $m = 1, 2, \ldots$, de la cual no se puede extraer una subsucesión que converja hacia cierto punto de X. Por lo tanto, cualquiera que sea el punto $x \in X$, no es un límite parcial de la sucesión $\{x^{(m)}\}$. Por esto, para cada punto $x \in X$ se encuentra un entorno — designémoslo por G_x — que contiene solamente un número finito de elementos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$; en caso contrario, de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ se hubiera podido extraer una subsucesión convergente hacia x (si todos los elementos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$, que se encuentran en G_x, son tales que $x^{(m)} \neq x$, entonces del hecho de que estos elementos son sólo un número finito, evidentemente se deduce que se puede escoger incluso tal entorno del punto x que no contendrá elementos algunos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$.

En virtud de la elección del entorno G_x, cada punto x del conjunto X pertenece al correspondiente entorno: $x \in G_x$. Por esto, el conjunto $\Omega \sim \{G_x\}$, $x \in X$, de todos estos entornos forma un recubrimiento abierto del conjunto X. Según la condición del teorema, de éste se puede extraer un recubrimiento finito. Sea éste

$$\Omega_0 = \{G_{x_1}, G_{x_2}, \ldots, G_{x_k}\}.$$

Cada elemento de este recubrimiento contiene sólo un número finito de términos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$. Por lo tanto, todos los elementos del recubrimiento Ω_0 también contienen sólo un número finito de términos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$. Esto sin embargo, es imposible, ya que al recubrir todo el conjunto X, los elementos del recubrimiento finito Ω_0 deben contener todos los términos de la sucesión $\{x^{(m)}\}$, cuyo número es infinito. La contradicción obtenida demuestra la suficiencia de las condiciones del teorema. ☐

OBSERVACIÓN. La necesidad de las condiciones del teorema, es decir, la afirmación que de cualquier recubrimiento abierto del compacto se puede extraer un recubrimiento finito, se llama habitualmente **lema de Heine — Borel** *).

Subrayemos que en el teorema 4 es esencial el hecho de que se analizan recubrimientos compuestos precisamente por conjuntos abiertos. Así, por ejemplo, del recubrimiento del segmento $[0, 1]$ (el que, como ya se ha señalado, siendo un conjunto cerrado y acotado, es compacto) por los segmentos $[1/(n+1), 1/n]$, $n = 1, 2, \ldots$, y por el segmento $[-1, 0]$ no se puede extraer un recubrimiento finito. Esto se explica por el hecho de que aquí el recubrimiento está compuesto no por conjuntos abiertos, sino por conjuntos cerrados.

---

*) E. Borel (1871 — 1956), matemático francés.

Ejercicio 14. Demuéstrese que para cualquier recubrimiento abierto finito $\Omega = \{G_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ del compacto $A \subset R^n$ existe un número $l > 0$, tal que cualquiera que sea el conjunto $X \subset A$, para el cual $\sup\limits_{x,\, y \in E} \rho(x, y) \leqslant l$, existe un elemento G_{k_0} del recubrimiento Ω, tal que $X \subset G_{k_0}$.

Para concluir este punto demostremos otra afirmación auxiliar. Previamente introduzcamos el siguiente símbolo: para cualquier conjunto $X \subset R^n$ designemos por X_η, donde $\eta > 0$, el conjunto de todos los puntos cuya distancia hasta X no es superior al número η, es decir, hagamos

$$X_\eta \overset{\text{def}}{=} \{x: \rho(x, X) \leqslant \eta\}.$$

Lema 11. *Si A es compacto, $A \subset R^n$, entonces para cualquier $\eta > 0$ el conjunto A también es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Según el teorema 3, el conjunto A, siendo compacto, es acotado y cerrado. La acotación del conjunto A significa que existe un $a > 0$ tal que A está contenido en la bola $U(O, a)$.

Mostremos que $A_\eta \in U(O, a + \eta)$. Si $x \in A_\eta$, entonces por el lema 8 se encuentra un punto $y \in A$, tal que $\rho(x, y) = \rho(x, A) \leqslant \eta$. De la condición $A \subset U(O, a)$ se deduce que $\rho(O, y) < a$, por esto

$$\rho(O, x) \leqslant \rho(O, y) + \rho(y, x) < a + \eta.$$

De esta forma, $x \in U(O, a + \eta)$. El punto x es un punto arbitrario del conjunto A_η. Por lo tanto, $A_\eta \subset U(O, a + \eta)$ y por esto el conjunto A_η es acotado.

Mostremos ahora, que A_η es un conjunto cerrado. Si x es un punto adherente del conjunto $A_\eta: x \in \bar{A}_\eta$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un punto $y \in A_\eta$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon$. De la definición del conjunto A_η y del lema 8 se deduce que existe un punto $z_0 \in A$ tal que $\rho(y, z_0) = \rho(y, A) \leqslant \eta$; por esto

$$\rho(x, A) = \inf_{z \in A} \rho(x, z) \leqslant \rho(x, z_0) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z_0) < \varepsilon + \eta.$$

Esta desigualdad es válida para cualquier $\varepsilon > 0$. Haciendo tender ε hacia cero, obtenemos $\rho(x, A) \leqslant \eta$, es decir, $x \in A_\eta$ lo que demuestra que el conjunto A_η es cerrado.

Así, el conjunto A_η es acotado y cerrado, y por lo tanto, en virtud del propio teorema 3 es compacto. □

18.4. ESPACIOS VECTORIALES DE VARIAS DIMENSIONES

En el p. 15.1 se señaló, que para un sistema de coordenadas dado en un espacio tridimensional, la definición de un vector es equivalente a la definición de sus tres coordenadas. Durante la adición de vectores y su multiplicación por un número, se efectúan las mismas operaciones con sus coordenadas. En el caso n-dimensional, el vector puede ser definido con ayuda de sus coordenadas.

Definición 31. *El sistema ordenado de n números reales*

$$(x_1, \ldots, x_n); \quad x_i \in \mathbf{R}; \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

se llama vector real n-dimensional x, y los números $x_1, \ldots, x_n$ se llaman sus coordenadas. El número n se llama dimensión del vector.

Se llama suma $x + y$ de los vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ el vector $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, es decir,

$$x + y \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

y se llama producto del vector x por el número $\lambda \in \mathbf{R}$ el vector

$$\lambda x \overset{\text{def}}{=} x\lambda \overset{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

El conjunto de todos los vectores n-dimensionales, en el que se han introducido las operaciones de adición de vectores y multiplicacion de un vector por un número real, se llama *espacio vectorial real n-dimensional, o, de una forma más completa, espacio vectorial aritmético n-dimensional sobre el campo de los números reales.*

El vector $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ se llama *vector nulo o cero del espacio vectorial n-dimensional.*

Por definición, el vector $-x \overset{\text{def}}{=} (-1)x$ se llama vector opuesto al vector x.

Ejercicio 15. Demuéstrese que si x, y, z son vectores cualesquiera, y los números $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ son arbitrarios, entonces 1) $x + y = y + x$; 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$; 3) $x + \mathbf{0} = x$; 4) $1 \cdot x = x$; 5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; 7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

De esta forma, el espacio aritmético n-dimensional (véase la definición 1 en el p. 18.1) se convierte en el espacio vectorial aritmético n-dimensional, si en él se introducen la adición de sus elementos y la multiplicación de sus elementos por un número según la definición 31.

En el caso tridimensional, la relación entre los puntos del espacio y los vectores en él, se puede establecer (como siempre, considerando dado un sistema de coordenadas), poniendo en correspondencia a cada punto $M = (x_1, x_2, x_3)$ de este espacio su radio vector, es decir, el vector $\overline{OM} = (x_1, x_2, x_3)$. Esta correspondencia es una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio tridimensional y los vectores en este espacio.

A veces, el espacio aritmético n-dimensional, introducido en la definición 1 del p. 18.1, a diferencia del espacio vectorial n-dimensional, es llamado *espacio puntual.*

Así, tanto el espacio puntual n-dimensional, como el espacio vectorial n-dimensional están compuestos por los mismos elementos, por los conjuntos ordenados de n números reales. Por esto, tanto uno como otro espacio, será designado por el mismo símbolo R^n. Ellos se diferencian en que en el espacio aritmético n-dimensional se introduce el concepto de distancia entre sus elementos (véase la definición 1 en el p. 18.1), y en el espacio vectorial n-dimensional se definen las operaciones de adición de vectores y multiplicación de vectores por un número real (véase la definición 31 de este punto).

Si por e_k se designa un vector n-dimensional, todas las coordenadas del cual son iguales a cero, excepto la coordenada k, que es igual a la unidad, k es un número natural fijo, $(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$, entonces para cualquier vector n-dimensional $x = (x_1, \ldots, x_n)$, es válida la igualdad

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \tag{18.31}$$

cuyo miembro segundo se llama descomposición del vector x según los vectores $e_1, \ldots, e_n$. Los coeficientes $x_1, \ldots, x_n$ de esta descomposición son únicos, es decir, están unívocamente definidos por el propio vector x, y, por lo tanto, en virtud de la igualdad (18.31) coinciden con sus coordenadas $x_1, \ldots, x_n$.

Los vectores e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ se llaman vectores *coordenados* o *vectores básicos, y su conjunto* $\{e_1, \ldots, e_n\}$, se llama *base estándar* del espacio R^n (la definición general de base será dada en el p. 57.2).

El subconjunto L del espacio vectorial R^n se llama *subespacio* del espacio R^n, si para vectores cualesquiera $x \in L$, $y \in L$ y números cualesquiera $\lambda \in R$, $\mu \in R$ tiene lugar la inclusión

$$\lambda x + \mu y \in L.$$

Definición 32. *Se llama producto escalar de los vectores* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $n > 3$, *el número designado por* (x, y) *y definido por la fórmula*

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n. \tag{18.32}$$

De la matemática elemental, es conocido que la fórmula (18.32) es válida también para la definición habitual del producto escalar de vectores, es decir, para $n \leqslant 3$.

Cualquier espacio n-dimensional, en el que se haya introducido el producto escalar se llama *euclídeo*.

El número $\sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ se llama *longitud del vector* x y se designa por $|x|$:

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{18.33}$$

Es evidente que para cualquier vector $x \in R^n$ y para cualquier número $\lambda \in R$ tiene lugar la igualdad

$$|\lambda x| = |\lambda| |x| \tag{18.34}$$

y de la desigualdad (18.3) (véase el p. 18.1) se deduce, que para cualesquiera $x \in R^n$, $y \in R^n$ se cumple la desigualdad

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \tag{18.35}$$

llamada *desigualdad triangular*.

De (18.35) se deduce que

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|. \tag{18.36}$$

En efecto, $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$, por esto

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|.$$

Ya que x e y son equitativos, tenemos también

$$|y| - |x| \leqslant |y - x| = |x - y|.$$

De las dos últimas desigualdades se deduce (18.36). □

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces $x - y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ y por esto

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \rho(x, y), \tag{18.37}$$

donde x e y son puntos del espacio puntual n-dimensional con las mismas coordenadas que los vectores x e y. De esta forma, en el espacio vectorial n-dimensional con producto escalar está definida la distancia $|x - y|$ entre sus elementos y ésta coincide con la distancia $\rho(x, y)$ definida en el p. 18.1. Por esto, todos los conceptos introducidos en los p. 18.1 — 18.3 para los espacios puntuales tienen sentido también para los espacios vectoriales con producto escalar.

En calidad de ejemplo de la utilización de los símbolos vectoriales señalemos que la bola cerrada $Q^n(x_0, r)$ de radio r con centro en el punto x_0 en las designaciones vectoriales se define por la igualdad

$$Q^n(x_0, r) = \{x: |x - x_0| \leqslant r\},$$

y la esfera $(n - 1)$-dimensional $S^{n-1}(x_0, r)$, que la acota, se define por la igualdad

$$S^{n-1}(x_0, r) = \{x: |x - x_0| = r\}.$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades, demostrables directamente.

1°. **Conmutatividad.** Para cualesquiera $x \in R^n$, $y \in R^n$: $(x, y) = (y, x)$.

2°. **Distributividad.** Para cualesquiera $x \in R^n$, $y \in R^n$: $z \in R^n$: $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

3°. **Homogeneidad.** Para cualquier $x \in R^n$ y para cualquier número $\lambda \in R$: $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

4°. **Regularidad.** Para cualquier $x \in R^n$: $(x, x) \geqslant 0$, además,

$$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

La distributividad y la homogeneidad del producto escalar componen conjuntamente la propiedad llamada *linealidad del producto escalar*.

Si $e_1, \ldots, e_n$ son vectores coordenados en R^n, entonces por (18.32)

$$(e_i, e_j) \begin{cases} 1 & \text{para } i = j, \\ 0 & \text{para } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Por esto para cualquier vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en virtud de las propiedades del producto escalar obtenemos:

$$(x, e_i) = (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, e_i) = x_1(e_1, e_i) + \ldots + x_n(e_n, e_i) = \\ = x_i(e_i, e_i) = x_i, \tag{18.38}$$

es decir, la coordenada i del vector x es igual al producto escalar (x, e_i).

Utilizando la designación del producto escalar y de la longitud de un vector, la desigualdad de Cauchy — Shwarz (véase (18.2) en el p. 18.1) para los vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ puede ser escrita en la forma

$$|(x, y)| \leqslant |x| |y|. \tag{18.39}$$

Señalemos que la desigualdad (18.3) en términos de longitud de los vectores significa que la longitud de la suma de vectores no sobrepasa la suma de sus longitudes:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Se llama ángulo φ entre los vectores $x \in R^n$ e $y \in R^n$, $n > 3$, el ángulo φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, definido por la igualdad

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}. \tag{18.40}$$

En virtud de la desigualdad de Cauchy — Shwarz (18.39) esta definición es correcta, o sea, según (18.39) para φ, definido por la fórmula (18.40), tiene lugar la desigualdad $\cos|\varphi| \leqslant 1$.

Aquí, otra vez, como en el caso de la definición de producto escalar, por la definición inicial se toma la afirmación análoga a la afirmación demostrada en el espacio R^n, $n \leqslant 3$. Gracias a esto, las fórmulas (18.32) y (18.40) son válidas en todos los espacios R^n, $n = 1, 2, \ldots$.

Los vectores, cuyos productos escalares son iguales a cero, se llaman *ortogonales*.

El vector de longitud unitaria de forma breve se llama *vector unitario*.

Si a y b son vectores unitarios, entonces para el coseno del ángulo entre ellos, de la fórmula (18.40) obtenemos

$$\cos \varphi = (a, b), \quad |a| = |b| = 1. \tag{18.41}$$

Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es un vector unitario, entonces designando por α_i el ángulo entre los vectores a y e_i según (18.38) y (18.41) tenemos:

$$a_i = (a, e_i) = \cos \alpha_i, \quad \text{es decir,} \quad a = (\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_n).$$

Los cosenos $\cos \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, se llaman *cosenos directores del vector a*.

Ya que $|a| = 1$, entonces por (18.33)

$$\cos^2 \alpha_1 + \ldots + \cos^2 \alpha_n = 1. \tag{18.42}$$

Si a no es un vector unitario y $a \neq 0$, entonces, evidentemente, el vector $a/|a|$ ya es unitario, y sus cosenos directores se llaman también cosenos directores del vector a.

La ecuación de la recta en el espacio R^n (véase la definición 24 en el p. 18.2) en la notación vectorial tiene la forma

$$x = x^{(0)} + ta, \ -\infty < t < +\infty,$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \ a = (a_1, \ldots, a_n) \tag{18.43}$$

(al sumar las coordenadas de los vectores también se suman los propios vectores, y al multiplicar sus coordenadas por un número se multiplican ellos mismos por el mismo número). La recta (18.43) se llama *recta que pasa por* el punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ del espacio puntual en el sentido del vector a.

Si a es un vector unitario: $|a| = 1$ y, por lo tanto, $a = (\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_n)$ ($\cos \alpha_i$ son cosenos directores del vector a; $i = 1, 2, \ldots, n$), entonces la recta (18.43) expresada según las coordenadas tiene la forma

$$x_i = x_i^{(0)} + t \cos \alpha_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad -\infty < t \quad +\infty. \tag{18.44}$$

Sean dados dos puntos $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ y $x'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ del espacio puntual; designemos por x' y x'' los vectores con estas mismas coordenadas. Entonces, la ecuación de la recta, que pasa por los puntos x' y x'' (véase el p. 18.2) en la forma vectorial será

$$x = x' + (x'' - x')t, \quad -\infty < t < +\infty. \tag{18.45}$$

Por analogía con el § 15 se puede analizar la función vectorial n-dimensional

$$r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in E \subset R$$

(R, como siempre, es el conjunto de todos los números reales). Completamente análogo a como fue hecho en el § 15, para cualquier n natural se definen los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función vectorial, $r(t) \in R^n$. Al igual que en el caso de $n \leqslant 3$ durante la diferenciación de una función vectorial, se diferencian sus coordenadas: $r'(t) = (x'_1(t), \ldots, x'_n(t))$, y la afirmación $\lim\limits_{t \to t_0} r(t) = 0$ es equivalente a $\lim\limits_{t \to t_0} |r(t)| = 0$.

§ 19. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

19.1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En este párrafo se analizan las funciones definidas sobre los conjuntos del espacio aritmético n-dimensional euclídeo R^n y cuyos valores son números reales. De esta forma, todas las funciones serán funciones de puntos del espacio. Esto significa que si se tiene cualquier función $f(x_1, \ldots, x_n)$ y en el espacio R^n está dado un sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, entonces en otro sistema de coordenadas $\xi_1, \ldots, \xi_n$, relacionado con el inicial por la transformación

$$x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

por *la misma función se entiende no la función* $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, sino la función

$$f[x_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)].$$

Las funciones analizadas serán designadas o bien por una letra, por ejemplo f, o bien más detalladamente, señalando el argumento, por $f(x)$ o por $f(x_1, \ldots, x_n)$. Para $n > 1$ éstas se llaman *funciones de varias variables*. En el caso cuando $n = 2$ en lugar de $f(x_1, x_2)$ escribiremos también $f(x, y)$, en el caso cuando $n = 3$ en lugar de $f(x_1, x_2, x_3)$ escribiremos también $f(x, y, z)$.

A cada función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le corresponde su gráfica en el espacio n-dimensional de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$. Definamos este concepto para el caso aquí analizado.

Definición 1. *Sea la función* $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, *definida sobre el conjunto* X *del espacio euclídeo* R^n, *y sea* R_{xy}^{n+1} *un espacio euclídeo* $(n + 1)$*-dimensional de puntos* $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$. *El conjunto de puntos*

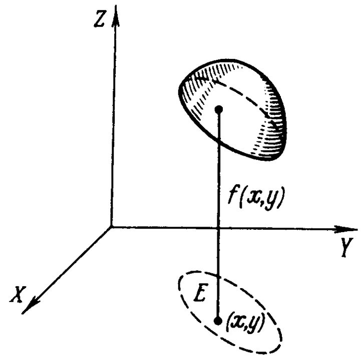


FIG. 95

del espacio R^{n+1}_{xy} del tipo $(x, f(x)) = (x_1, \ldots, x_n, f(x))$, donde $x \in X$, se llama gráfica de la función f.

La gráfica de la función de varias variables, al igual que la gráfica de la función de una variable, es cómodo utilizarla para la interpretación geométrica de los conceptos introducidos y de las afirmaciones que se demuestran. Naturalmente, la representación de la gráfica en un dibujo, cuando el número de variables independientes es mayor que uno, es más difícil que en el caso unidimensional. En la fig. 95 se representa la forma de la gráfica de una función de dos variables $y = f(x_1, x_2)$.

El enunciado dado aquí de la definición de gráfica de una función de n variables es un caso particular de la definición general de gráfica de una función enunciada en el p. 1.2*.

Sea otra vez la función f definida sobre el conjunto $X \subset R^n$. El conjunto de los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ del espacio R^n, que satisfacen la ecuación

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c,$$

donde c es una constante, se llama *conjunto de nivel* de la función f, correspondiente al valor dado de c.

En el caso cuando $n = 2$ el conjunto de nivel se llama también *línea de nivel*; en el caso cuando $n = 3$, *superficie de nivel*, y cuando $n > 3$, *hipersuperficie de nivel*.

19.2. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y SU CONTINUIDAD

Enunciemos la definición de límite de una función de varias variables.

Definición 2. *Sea $f: X \to R$, $E \subset X \subset R^n$, $x^{(0)} \in R^n$, $x^{(0)}$ es un punto de adherencia del conjunto E.*

El número a se llama límite de la función f por el conjunto E en el punto $x^{(0)}$ o lo que es lo mismo, cuando $x \to x^0$ si para cualquier sucesión de puntos

$$x^{(m)} \in E, \quad \lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)},$$

la sucesión numérica $\{f(x^{(m)})\}$ converge al número a:

$$\lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = a.$$

En este caso, se escribe

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = a. \tag{19.1}$$

Por analogía con el caso unidimensional (véase el p. 5.4 y el p. 5.7) se puede dar otra definición de límite de una función en un punto dado, equivalente a la enunciada, en la cual no se utiliza el concepto de límite de una sucesión.

Definición 3. *Sea $f: X \to R$, $E \subset X \subset R^n$, $x^{(0)} \in R^n$, $x^{(0)}$ es un punto de adherencia del conjunto E.*

El número a se llama límite de la función por el conjunto E en el punto $x^{(0)}$ (o cuando $x \to x^{(0)}$) si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier punto $x \in U(x^{(0)}, \delta)$ se cumple la desigualdad

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

De forma completamente análoga al caso de una función de una variable (véase el p. 5.7) se demuestra la equivalencia de las definiciones 2 y 3.

En el caso de $E = X$, es decir, cuando el límite se toma por todo el conjunto de definición de la función, el límite (19.1) se llama simplemente límite de la función f en el punto x_0 y se denota por

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x). \tag{19.2}$$

Al igual que para las funciones de una variable, en el caso de definición de la función de varias variables con una fórmula, por $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ se entiende el límite de esta función en el punto $x^{(0)}$ por todo el conjunto de los valores $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, para los cuales la fórmula indicada tiene sentido y para los cuales en el proceso de realización de todos los cálculos necesarios según esta fórmula para obtener los valores de la función f se obtienen sólo números reales.

Junto con la notación (19.2), para el límite de la función f en el punto $x^{(0)}$ se utiliza la notación

$$\lim_{\rho(x, x^{(0)}) \to 0} f(x), \quad \lim_{|x - x^{(0)}| \to 0} f(x). \tag{19.3}$$

En esencia, el concepto de límite de una función por un conjunto, no es más general que simplemente el concepto de límite de una función, ya que en las definiciones 2 y 3 se habla del concepto de límite de una función aplicado a la restricción de la función sobre el conjunto E.

La existencia del límite de una función f de varias variables $f: X \to R$, $X \subset R^n$ en el punto $x^{(0)} \in R^n$, y si éste existe, entonces su valor se determina completamente por los valores de la función sobre la intersección $U(x^{(0)}) \cap X$ de un entorno arbitrario $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ con el conjunto de definición X de la función f, es decir, no dependen de la elección del entorno indicado. El enunciado exacto de esta afirmación consiste en lo siguiente.

Si la función $f: X \to R$, $X \subset R^n$, tiene límite $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, entonces, para cualquier entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ tiene el mismo límite por el conjunto $U(x^{(0)}) \cap X$:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in U(x^{(0)}) \cap X}} f(x). \tag{19.4}$$

Si la función $f: X \to \boldsymbol{R}, X \subset R^n$ tiene límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in U(x^{(0)}) \cap X}} f(x)$ al menos para un entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$, entonces tiene límite en este punto por el conjunto X (además, en virtud de la primera afirmación se cumple la igualdad (19.4)). Todo esto es totalmente fácil de comprobar y por esto, puede ser realizado por el lector.

La propiedad de una función que no depende de la elección de un entorno suficientemente pequeño que contenga el punto dado, se llama *propiedad local de la función* en este punto. Evidentemente la existencia del límite de la función $f: X \to \boldsymbol{R}$ en el punto $x^{(0)}$ que es un punto de adherencia del conjunto X, y su valor (si, naturalmente, éste existe) son propiedades locales de la función en el punto señalado.

Ejercicios. 1. Demuéstrese la equivalencia de las definiciones 2 y 3 de límite de una función de varias variables en un punto dado.

2. Por analogía con el caso de una función de una variable enúnciese y demuéstrese el criterio de Cauchy de la existencia del límite de una función de varias variables.

A menudo es necesario analizar los límites de las funciones $f: X \to \boldsymbol{R}, X \subset R^n$ en los puntos $x^{(0)} \subset X$ por el conjunto $X \setminus \{x^{(0)}\}$. En este caso es cómodo servirse del concepto del así llamado entorno reducido en el espacio n-dimensional. Definamos este concepto por analogía con el caso unidimensional.

Definición 4. *Se llama entorno reducido $\overset{o}{U}(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)} \in R^n$ cualquier conjunto que se obtiene eliminando el punto $x^{(0)}$ de cierto entorno $U(x^{(0)})$ de este punto*:

$$\overset{o}{U}(x^{(0)}) \overset{\text{def}}{=} U(x^{(0)}) \setminus \{x^{(0)}\}.$$

Es fácil ver que el análisis del límite de una función f en un punto $x^{(0)}$ por el conjunto $X \setminus \{x^{(0)}\}$ es equivalente al análisis de su límite en este punto por el conjunto $\overset{o}{U}(x^{(0)}) \cap X$, donde $\overset{o}{U}(x^{(0)})$ es un entorno reducido arbitrario del punto $x^{(0)}$ (equivalente en el sendio de la existencia y magnitud del límite).

Si en la definición 2 ó 3 en calidad de conjunto $E \subset X$ se toma la intersección del conjunto X con cierta recta l o cualquier curva γ, que pasa por el punto $x^{(0)}$, entonces el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in l \cap X}} f(x)$, respectivamente $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in \gamma \cap X}} f(x)$, se llama límite de la función f en el punto $x^{(0)}$ por la recta l, respectivamente, por la curva γ.

Como en el caso unidimensional, si para la función $f: X \to \boldsymbol{R}, X \subset R^n$, existe $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, es decir, el límite indicado existe por todo el conjunto de definición X de la función f, entonces existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x)$ de esta función por cualquier subconjunto E del conjunto X, para el cual $x^{(0)}$ es un punto de adherencia: $x^{(0)} \in \overline{E}$, $E \subset X$, y son iguales:

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)}} f(x).$$

Por ejemplo, si existe un entorno reducido $\overset{o}{U}(x^{(0)})$ tal que $\overset{o}{U}(x^{(0)}) \subset X$ y existe $\lim\limits_{x \to x} f(x)$, entonces existe el límite $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \subset l \cap X}} f(x)$ por cualquier recta l que pase por el punto $x^{(0)}$, además

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in l \cap X}} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)}} f(x).$$

Ejemplo. Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Esta fórmula define una función en todos los puntos del plano, excepto el origen de coordenadas (0, 0). Investiguemos los límites de esta función por distintos sentidos en el punto (0, 0). La ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas (0, 0) en el sentido del vector (α, β), tiene la forma $x = \alpha t, y = \beta t, \alpha^2 + \beta^2 > 0$. Tenemos: $f(\alpha t, \beta t) = \dfrac{\alpha^2 \beta t}{\alpha^4 t^2 + \beta} \to 0$ cuando $t \to 0$, es decir, el límite en cualquier dirección existe y es igual a cero. Si $y = x^2$, entonces $f(x, x^2) \equiv \dfrac{1}{2}$, y por lo tanto, el límite a lo largo de la parábola $y = x^2$ también existe, pero es igual a 1/2.

De esta forma, para la función analizada existe el mismo límite por cualquier dirección, y el límite por la parábola señalada, aunque existe, es diferente del valor general de los límites por las direcciones, así que sencillamente el límite en el punto (0, 0) no existe.

Ejercicio 3. Investíguese el límite por las direcciones en el punto (0, 0) de la función $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

De forma análoga al caso de las funciones de una variable, para los límites de las funciones de varias variables por un conjunto tienen lugar los correspondientes teoremas sobre el límite de la suma, el producto y el cociente, ya que por la definición dada anteriormente, el límite de una función de n variables por un conjunto, también se reduce al concepto de límite de una sucesión (véase el p. 4.7).

Junto con los límites señalados, para las funciones de varias variables se pueden también analizar límites de otros tipos, relacionados con el paso sucesivo al límite, por ejemplo, según las distintas coordenadas, es decir, los límites del tipo

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^{(0)}} \lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^{(0)}} \dots \lim_{x_{i_n} \to x_{i_n}^{(0)}} f(x_1, \dots, x_n) \tag{19.5}$$

donde $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ es cierta permutación de los números $1, 2, \dots, n$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, y la función f está definida, por ejemplo, en cierto entorno reducido o en un entorno común del punto $x^{(0)}$. Aquí se habla de un paso sucesivo al límite, cada vez en una función de una variable. Así $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x_1, \dots, x_n)$ significa que para la función $f: X \to \boldsymbol{R}$ están fijados todos los valores de las coordenadas $x_j, j \neq i$, de su argumento $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ y por lo mismo el límite indicado significa el límite de la función f por el conjunto $\{x = (x_1, \dots, x_n): x_j$ están fijos, $j \neq i\} \cap X$.

Los límites del tipo (19.5) se llaman *límites reiterados*. Estos representan lo específico de las funciones de varias variables.

Analicemos la función definida sobre todo el plano

$$f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{y} + y \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0. \end{cases}$$

Investiguemos sus distintos límites en el punto (0, 0).

Es evidente que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. En lo que respecta a los límites reiterados

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen}\frac{1}{y} + y \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{y} + y \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right),$$

éstos no existen, ya que no existen los límites

$$\lim_{x\to 0} y \operatorname{sen}\frac{1}{x}\ (y \neq 0) \quad \text{y} \quad \lim_{y\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{y}\ (x \neq 0)$$

y

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{y} = 0, \quad y \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y\to 0} y \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0, \quad x \neq 0.$$

Para la función $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, definida por esta fórmula sobre todo el plano, excepto el origen de coordenadas, ambos límites reiterados existen en el punto (0, 0), y $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = 0$. Sin embargo, el límite de la función f en el punto (0, 0) no existe, ya que, como es fácil ver, el límite a lo largo de los ejes coordenados es igual a cero y a lo largo de la recta $y = x$ es igual a 1/2.

De esta forma, sólo de la existencia del límite de una función en un punto dado, no se deduce la existencia de los límites reiterados en este punto y viceversa, de la existencia de los límites reiterados no se deduce la existencia del límite en el punto correspondiente. Sin embargo, puede ser establecida una cierta relación entre estos conceptos.

Teorema 1. *Sea la función $f(x, y)$ definida sobre el conjunto E, que contiene todos los puntos de cierto entorno rectangular $P((x_0, y_0); \delta_1, \delta_2)$ del punto (x_0, y_0) excepto, puede ser, los puntos de las rectas $x = x_0$ e $y = y_0$. Si existe el límite de la función f en el punto (x_0, y_0) por el conjunto E y para cualquier $y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, $y \neq y_0$, existe el límite* *)

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y) = g(y), \tag{19.6}$$

entonces el límite reiterado $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ *existe y*

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0),\\ (x,y)\in E}} f(x, y). \tag{19.7}$$

*) Como siempre, por límites, si no se dice otra cosa, se entenderán límites finitos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0),\\ (x,y)\in E}} f(x, y) = A$ y sea dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe un entorno rectangular $P = P((x_0, y_0); \eta_1, \eta_2)$, $0 < \eta_1 < \delta_1$, $0 < \eta_2 < \delta_2$, tal que $0 < |x - x_0| < \eta_1$, $0 < |y - y_0| < \eta_2$, entonces

$$|f(x, y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19.8}$$

En virtud de la existencia del límite (19.6), para cualquier número y, tal que $0 < |y - y_0| < \eta_2$, de (19.8) se deduce que

$$|g(y) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(para esto es suficiente pasar al límite cuando $x \to x^{(0)}$ en la igualdad (19.8)), y esto significa que $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = A$. □

Ejemplo. Analicemos la función $f(x, y) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$, $y \neq 0$. Esta función está definida en todo el plano, excepto los puntos del eje de las x. Designemos su dominio por X. Evidentemente existen los límites

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ x\in X}} f(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} f(x, y) = 0, \quad y \neq 0;$$

por esto, según el teorema demostrado, existe también el límite reiterado $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = 0$. Esto, naturalmente, se ve claramente. Observemos, que en este caso no existe otro límite reiterado $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$.

Al igual que en el caso de las funciones de una variable, para las funciones

$$f\colon X \to R, \quad X \subset R^n,$$

de varias variables se puede definir el límite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, es decir, el límite cuando el punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ se aleja ilimitadamente del origen de coordenadas, dicho de otra forma, cuando $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \to +\infty$ y también el límite reiterado por las variables $x_i \to \infty$ y $x_j \to \infty$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Señalemos que también en este caso tiene lugar una afirmación análoga al teorema 1.

Todas estas definiciones tienen sentido, naturalmente, sólo en el caso cuando el conjunto X no está acotado. El infinito ∞ también en el caso del espacio R^n se llama, para simplificar, punto, más exacto, punto infinitamente alejado.

Señalemos que se llama ε-entorno $U(\infty, \varepsilon)$ del infinito ∞ en el espacio R^n el exterior de la esfera n-dimensional cerrada con centro en el origen de coordenadas y radio igual a ε, es decir,

$$U(\infty, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\colon |x| > \varepsilon\}$$

y se llama simplemente entorno $U(\infty)$ en R^n el complemento en R^n de cualquier compacto perteneciente a este espacio.

Se puede, naturalmente, analizar también el espacio obtenido del espacio R^n completándolo con su punto infinitamente alejado ∞, es decir, el espacio $R^n \cup \{\infty\}$, como se hizo para $n = 1$. En este espacio, naturalmente, por entorno del punto infinitamente alejado ∞ se entiende su entorno en el espacio R^n, completado con el propio punto ∞.

Por analogía con el caso unidimensional, para las funciones de varias variables se introducen los conceptos de diferentes límites infinitos (con signo y sin signo). No haremos todo esto, proponiéndole al lector hacerlo a medida de sus necesidades.

OBSERVACIÓN. Si el conjunto $X \subset R^2$, sobre el cual está definida la función f: $X \to R$, está compuesto solamente por los puntos x, cuyas coordenadas son números naturales: $x = (m, n)$, $m \in N$, $n \in N$, entonces la función f se llama *sucesión doble* y su valor $y = f(m, n)$ se designa por y_{mn}, y la propia sucesión se designa por $\{y_{mn}\}$.

Para las sucesiones dobles $\{y_{mn}\}$ se puede analizar el límite $\lim\limits_{(m,n)\to\infty} y_{mn}$ y los límites reiterados

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} y_{mn}, \quad \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} y_{mn}.$$

Nos encontraremos de nuevo con las sucesiones dobles en el p. 38.1.

Ejemplo. Sea $y_{mn} = \cos^m 2\pi n!x$, $m \in N$, $n \in N$, $x \in R$; entonces

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un número racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

Efectivamente, si $x = p/q$, $p \in Z$, $q \in Z$, $q > 0$, entonces cuando $n \in N$, $n \geqslant q$, tiene lugar la igualdad $\cos 2\pi n!x = 1$, y por lo tanto, $\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x = 1$, $n \geqslant q$, y por esto $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x = 1$. Si el número x es irracional, entonces para cualquier n natural se cumple la desigualdad $|\cos 2\pi n!x| < 1$, de la cual se deriva que $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x = 0$. □

Como resultado hemos obtenido la forma analítica de la función de Dirichlet

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\cos^m 2\pi n!x, \quad x \in R.$$

19.3. FUNCIONES CONTINUAS

Como en el caso de las funciones de una variable (véase el p. 5.5), si el punto $x^{(0)}$ pertenece al dominio X de la función f, entonces para la existencia del límite finito $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x)$ es necesario y suficiente que

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}). \tag{19.9}$$

Definición 5. *Si para la función f: $X \to R$, $X \subset R^n$, en el punto $x^{(0)} \in X$ se cumple la condición* (19.9), *entonces la función f se llama continua en este punto.*

De forma natural, se introduce la generalización formal del concepto de continuidad de una función f: $X \to R$, $X \subset R^n$, en el punto $x^{(0)}$ y precisamente el concepto de su continuidad en este punto por el subconjunto $E \subset X$, si $x^{(0)} \in E$.

Definición 6. *Si f: $X \to R$, $E \subset X \subset R^n$ y para la función f en el punto $x^{(0)} \in E$ se cumple la condición*

$$\lim_{\substack{x\to x^{(0)}\\ x\in E}} f(x) = f(x^{(0)}), \tag{19.10}$$

entonces la función f se llama continua en el punto $x^{(0)}$ por el conjunto E.

Como en el caso unidimensional (véase el lema 3 en el p. 5.5) si el punto $x^{(0)} \in X$ es un punto aislado del conjunto X, entonces la función f: $X \to R$ siempre es continua en él.

Si en la igualdad (19.10) se traslada $f(x^{(0)})$ al primer miembro y se pone $\Delta y = (f(x) - f(x^{(0)})$, entonces la condición (19.10) se escribe en la forma

$$\lim_{\substack{\rho(x,\, x^{(0)})\to 0,\\ x\in E}} \Delta y = 0.$$

El número Δy se llama incremento de la función en el punto $x^{(0)}$, que corresponde a la variación del argumento del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ hasta el punto $x = (x_1, \dots, x_n)$. Ya que $\rho(x, x^{(0)}) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ donde $\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la continuidad de f en el punto $x^{(0)}$ por el conjunto E significa que su incremento Δy en este punto tiende a cero, cuando el incremento Δx_i de todos sus argumentos simultáneamente tienden a cero, (es decir, cuando $\rho(x, x^{(0)}) \to 0$).

Naturalmente, se puede enunciar el concepto de continuidad de una función también en el lenguaje de las sucesiones.

La función $f(x)$, definida sobre el conjunto X, es continua por este conjunto en el punto $x^{(0)} \in X$ si y sólo si para cualquier sucesión de los puntos $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}). \tag{19.11}$$

Esto se deduce directamente de la equivalencia de las definiciones 2 y 3 del límite de una función f: $X \to R$, $X \subset R^n$, en el punto $x^{(0)} \in X$.

19.4. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Para los límites de las funciones de varias variables son válidas las propiedades análogas a las propiedades de las funciones de una variable enunciadas y demostradas en el p. 5.10. Por cuanto en el caso de las funciones de varias variables, los enunciados de las afirmaciones y sus demostraciones permanecen, en esencia, siendo las mismas, sólo que por el conjunto de definición (dominio) X de la función analizada es necesario entender un subconjunto del espacio n-dimensional R^n; por un punto x, un punto de este espacio; por entorno, un entorno en este espacio, etc., entonces incluso no enunciaremos estas propiedades, esto nos llevaría casi a una transcripción al pie de la letra; es necesario, ciertamente, señalar que en el caso de $n > 1$, el argumento de una función de n variables puede tender sólo al infinito ∞, es decir, al infinito sin signo, su tendencia a $+\infty$ ó $-\infty$ ya no tiene sentido, ya que el conjunto de los puntos del espacio R^n para $n > 1$ ya no es ordenado. Todas las propiedades indicadas de los límites de las funciones de varias variables se utilizarán en el futuro sin comentarios complementarios.

Para las funciones $f(x_1, \dots, x_n)$, $n > 1$, conjuntamente con su continuidad en el sentido anteriormente definido, a la cual llaman *continuidad por el conjunto de variables* $x_1, \dots, x_n$, se puede analizar la continuidad por las variables x_i sueltas.

La función $f(x_1, \dots, x_n)$, definida, por ejemplo, en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ se dice *continua en el punto* $x^{(0)}$ *por la variable* x_i si la función

$$\varphi(x_i) \overset{\text{def}}{=} f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

de una variable x_i es continua en el punto $x_i^{(0)}$. Es evidente que la función φ es una restricción de la función f sobre la intersección de la recta $x_j = x_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, con el conjunto de definición de la función f, o sea, la continuidad de la función por una variable significa la continuidad de su restricción por el conjunto correspondiente.

Señalemos que de la continuidad de una función por todas sus variables sueltas no se deduce su continuidad por su colección. Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2), & \text{si} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

es continua por cada una de las variables x e y por separado en cada uno de los puntos del plano, pero no es continua por su conjunto en el punto $(0, 0)$, ya que en este punto incluso no tiene límite (compruébese).

19.5. LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Analicemos más detalladamente la composición de funciones de varias variables, ya que en este caso se manifiesta cierta particularidad del análisis multidimensional, que no tiene análogo para las funciones de una variable, aquí se puede tomar la composición de funciones de diferentes números de variables.

Sea dado, sobre un conjunto $X \subset R^n$, un sistema de m funciones $f_1: X \to \boldsymbol{R}, \dots, f_m: X \to \boldsymbol{R}$, y sea dado, sobre un conjunto $Y \subset R^m$, la función $g(y) = g(y_1, \dots, y_m)$, $y \in Y$.

Si para cualquier punto $x \in X$ se cumple la inclusión $(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in Y$, entonces tiene sentido hablar sobre la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m): X \to \boldsymbol{R}$, es decir, la función, que pone en correspondencia a cada punto $x \in X$ el número $g(f_1(x), \dots, f_m(x))$. La función $g(f_1, \dots, f_m)$ se llama también composición de las funciones $f_1, \dots, f_m$ y g.

Analizaremos los límites

$$y_k^{(0)} = \lim_{x \to x^{(0)}} f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{19.12}$$

donde $x^{(0)}$ es o bien un punto de R^n y entonces es un punto adherente del conjunto X, o bien $x^{(0)} = \infty$ y entonces X es un conjunto no acotado. Para hacer más sencillo el enunciado del teorema nos limitaremos al caso, cuando todos los límites (19.12) son finitos.

Teorema 2. *Supongamos tiene sentido la función compuesta* $g(f_1, \dots, f_m)$. *Si existen los límites finitos* (19.12),

$$y^{(0)} \overset{\text{def}}{=} (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) \tag{19.13}$$

y existe el límite finito o infinito $\lim_{y \to y^{(0)}} g(y)$ *entonces existe también el límite* $\lim_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x))$ *de la función compuesta* $g(f_1, \dots, f_m)$, *además*

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y). \tag{19.14}$$

Corolario. *Si tiene sentido la función compuesta* $g(f_1, \dots, f_m)$, *las funciones* $f_1, \dots, f_m$ *son continuas por el conjunto* X *en el punto* $x^{(0)} \in X \subset R^n$, *y la función* g *es continua por el conjunto* Y *en el punto* $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)})) \in Y \subset R^m$, *entonces la función compuesta* $g(f_1, \dots f_m)$, *es continua por el conjunto* X *en el punto* $x^{(0)}$.

De esta forma, dicho brevemente, se puede decir, que una función continua de funciones continuas es una función continua.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sean $z_0 = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y)$ y $U(z_0)$ un entorno, dado arbitrariamente, del punto z_0. Entonces, según la definición de límite de la función g en el punto $y^{(0)}$, existe un entorno $U(y^{(0)})$ del punto $y^{(0)}$, tal que si

$$y \in U(y^{(0)}) \cap Y, \tag{19.15}$$

entonces

$$g(y) \in U(z_0). \tag{19.16}$$

Señalemos ahora que existe $\eta > 0$, para el cual el entorno cúbico

$$P(y^{(0)}, \eta) = \{y = (y_1, \dots, y_m) : |y_k - y_k^{(0)}| < \eta, \ k = 1, 2, \dots, m\}$$

está contenido en el entorno $U(y^{(0)})$:

$$P(y^{(0)}, \eta) \subset U(y^{(0)})$$

y por lo tanto,

$$P(y^{(0)}, \eta) \cap Y \subset U(y^{(0)}) \cap Y. \tag{19.17}$$

De acuerdo con esta inclusión, de (19.15) — (19.16) se deduce que si

$$y \in P(y^{(0)}, \eta) \cap Y \tag{19.18}$$

entonces

$$g(y) \in U(z^{(0)}). \tag{19.19}$$

Más adelante, por la existencia de los límites finitos (19.12), para cada $k = 1, 2, \dots, m$ existe un entorno $U_k(x^{(0)})$ del punto x^0 tal que para

$$x \in U_k(x^{(0)}) \cap X \tag{19.20}$$

se cumple la inclusión

$$f_k(x) \in U(y_k^{(0)}, \eta). \tag{19.21}$$

Hagamos

$$U(x^{(0)}) = \bigcap_{k=1}^{m} U_k(x^{(0)}). \tag{19.22}$$

Por cuanto $U_k(x^{(0)})$ es un conjunto abierto, entonces el conjunto $U(x^{(0)})$ como intersección de un número finito de conjuntos abiertos, también es abierto (véase el lema 4 en el p. 18.2). Además, cada entorno $U_k(x^{(0)})$ contiene el punto $x^{(0)}$, por lo que su intersección también lo contiene. Por consiguiente, el conjunto $U(x^{(0)})$, siendo abierto y conteniendo el punto $x^{(0)}$, es su entorno.

Si $x \in U(x^{(0)}) \cap X$, entonces, según (19.22) simultáneamente para todos los $k = 1, 2, \dots, m$ se cumplen las inclusiones (19.20) y por lo tanto, la inclusión (19.21), lo que por (19.13) significa que

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in P(y^{(0)}, \eta). \tag{19.23}$$

Pero por cuanto la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m)$ está definida sobre el conjunto X, entonces para todos los $x \in X$ es válida la inclusión

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in Y.$$

Así pues, finalmente, si

$$x \in U(x^{(0)}) \cap X, \tag{19.24}$$

entonces

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in P(y^{(0)}, \eta) \cap Y \tag{19.25}$$

y por consiguiente, por (19.18) — (19.19),

$$g(f_1(x), \dots, f_m(x)) \in U(z_0),$$

y esto significa que la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m)$ tiene límite en el punto $x^{(0)}$ igual a z_0:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = z_0 = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y). \ \square$$

El corolario se deriva directamente del teorema en virtud de la definición (19.9) de continuidad de una función. En efecto, por cuanto $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f_k(x) = f_k(x^{(0)}) = y_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, y $\lim\limits_{y \to y^{(0)}} g(y) = g(y^{(0)})$, entonces, según el teorema

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y) =$$
$$= g(y^{(0)}) = g(y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) = g(f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)})),$$

es decir, la función compuesta $g(f_1, \dots, f_m)$ efectivamente es continua en el punto $x^{(0)}$.

OBSERVACIÓN. Como en el caso unidimensional, si en el conjunto de definición de la función g se encuentra un entorno $U(y^{(0)})$ del punto $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$, donde $y_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, se definen por las igualdades (19.12), entonces existe un entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ tal que para las restricciones de las funciones $f_1, \dots, f_m$ sobre la intersección $X \cap U(x^{(0)})$ — denotémoslas, respectivamente, $f_{1\,0}, \dots, f_{m\,0}$ — está definida la composición $g(f_{1\,0}, \dots, f_{m\,0})$.

Esto se deduce de la existencia de los límites (9.12). Para convencerse de esto es suficiente en la demostración del teorema, en calidad de entorno $U(y^{(0)})$, tomar un entorno, que se contenga en el conjunto de definición de la función g, entonces el entorno $U(x^{(0)})$ allí construido (véase (19.22)) será el buscado.

Con ayuda del teorema 2 se puede establecer fácilmente la continuidad de la mayor parte de las funciones, que se encuentran en la práctica, precisamente de las así llamadas funciones elementales de varias variables.

Definición 8. *Las funciones, que se obtienen de las variables $x_1, \dots, x_n$ con ayuda de un número finito de composiciones de funciones elementales de una sola variable, de operaciones de adición, multiplicación y división, se llaman funciones elementales de las variables $x_1, \dots, x_n$.*

Por ejemplo, la función $f(x, y) = xe^{y \operatorname{sen} \frac{xy}{x+y}}$ es una función elemental de dos variables x e y. Efectivamente,

$$f(x, y) = xw, \quad w = e^v, \quad v = yz, \quad z = \operatorname{sen} t, \quad t = \alpha/\beta,$$
$$\alpha = xy, \quad \beta = x + y.$$

Del teorema 2 y de la conservación de la continuidad en los puntos correspondientes durante las operaciones aritméticas sobre las funciones continuas (véase el p. 19.3) se deduce que *cualquier función elemental de cualquier número de variables es continua en cada punto de su dominio.*

19.6. TEOREMAS ACERCA DE LAS FUNCIONES CONTINUAS SOBRE LOS CONJUNTOS

La función f se llama *continua sobre el conjunto X*, si ella es continua por este conjunto en cada uno de sus puntos. A veces en este caso se dice también que la función *f es continua en el conjunto X.*

Demostremos una serie de teoremas acerca de las funciones continuas sobre los conjuntos. Estos teoremas se demuestran de una forma análoga a los teoremas correspondientes para funciones de una sola variable. Los analizaremos partiendo de supuestos suficientemente generales, esto permitirá aclarar más profundamente, con qué están relacionadas las propiedades de las funciones continuas analizadas. Comencemos con una generalización del teorema de Weierstrass (véase el p. 6.1) para el caso de varias dimensiones. La definición de una serie de conceptos, que se analizarán a continuación, como por ejemplo, acotación de una función, cotas superior e inferior de una función, véase en el p. 5.1.

Teorema 3. *Toda función, continua sobre un compacto, está acotada en él y alcanza su cota superior e inferior* *).

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f continua sobre el compacto $A \subset R^n$ y sea $M = \sup\limits_A f$. Escojamos por analogía con el caso unidimensional (véase la demostración del teorema 1 en el p. 6.1) una sucesión de números a_m, tales que $\lim\limits_{m \to \infty} a_m = M$ y $a_m < M$, $m = 1, 2, \dots$.

*) Dicho de otra forma, una función continua sobre un compacto toma en él su valor máximo y su valor mínimo.

Para cada $m = 1, 2, \ldots$ existe un punto $x^m \in A$, tal que $f(x^{(m)}) > a_m$. Ya que el conjunto A es un compacto, entonces de la sucesión $\{x^{(m)}\}$ se puede extraer una subsucesión convergente $\{x^{(m_k)}\}$, cuyo límite $x^{(0)}$ se encuentra en A: $\lim_{k \to \infty} (x^{(m_k)}) = x^{(0)} \in A$.

Para cualquier $k = 1, 2 \ldots$ es válida la desigualdad $a_{m_k} < f(x^{(m_k)}) \leqslant M$. Pasando al límite en ésta, cuando $k \to \infty$, obtenemos $\lim_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = M$. En virtud de la continuidad de la función f en el punto $x^{(0)}$ por el conjunto A tenemos $\lim_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = f(x^{(0)})$, y, por lo tanto, $M = f(x^{(0)})$.

De esta forma, la cota superior de la función f es finita, y por esto la función f está acotada superiormente; además, esta cota superior se alcanza en el punto $x^{(0)} \in A$. Análogamente se demuestra que la función f está acotada inferiormente y que su cota inferior se alcanza en cierto punto del conjunto A. □

Pasemos ahora a analizar la generalización del teorema de Cauchy sobre los valores intermedios (véase el p. 6.2) para el caso de las funciones de varias variables.

Teorema 4. *Sea la función f definida y continua en la región $G \subset R^n$, entonces, al tomar dos valores cualesquiera en G, la función f toma en G también cualquier valor, que se encuentra entre ellos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f continua en la región $G \subset R^n$, sean $x^{(1)} \in G$, $x^{(2)} \in G$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ y por ejemplo, $a < b$. Sea más adelante c cualquier número tal que $a < c < b$. Según la definición de región (véase las definiciones 25 y 26 en el p. 18.2), existe una curva $x(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, tal que $x(\alpha) = x^{(1)}$, $x(\beta) = x^{(2)}$ y $x(t) \in G$ para todos los $t \in [\alpha, \beta]$.

Si $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, entonces, según la definición de curva, las funciones $x_i(t)$ son continuas sobre el segmento $[\alpha, \beta]$. De acuerdo con el teorema 2 sobre la superposición de las funciones continuas de varias variables, la función $f(x(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ también es continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$. Ya que $f(x(\alpha)) = a$, $f(x(\beta)) = b$ y $a < c < b$, entonces por el teorema de Cauchy (véase el p. 6.2), existe un punto $t_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(x(t_0)) = c$. Suponiende $x^{(0)} = x(t_0)$, tenemos $x^{(0)} \in G$ y $f(x^{(0)}) = c$. □

Corolario. *La función f definida y continua en la región cerrada $\bar{G}$, al tomar dos valores cualesquiera, toma también en G cualquier valor intermedio.*

DEMOSTRACIÓN. Sean G una región, la función f definida y continua sobre su clausura $\bar{G}$, $x^{(1)} \in \bar{G}$, $x^{(2)} \in \bar{G}$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ y sea para mayor exactitud $a < c < b$. Demostremos que existe un punto $\zeta \in G$, tal que $f(\zeta) = c$.

Tomemos el número $\varepsilon > 0$ definido por la igualdad

$$\varepsilon = \min\{c - a, b - c\}.$$

En virtud de la continuidad de la función f en el punto $x^{(1)}$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $x \in U(x^{(1)}; \delta) \cap \bar{G}$, entonces $|f(x) - f(x^{(1)})| < \varepsilon$ y, por lo tanto, $|f(x) - a| < c - a$ y, en particular, $f(x) < c$. El punto $x^{(1)} \in \bar{G}$, es decir, el punto $x^{(1)}$ es un punto adherente del conjunto G, por esto en el entorno $U(x^{(1)}; \delta)$ a ciencia cierta existe un punto perteneciente a G; designémoslo por $y^{(1)}$. De esta forma, $y^{(1)} \in U(x^{(1)}; \delta) \cap G$, y por esto $f(y^{(1)}) < c$. Por un método análogo se demuestra la existencia del punto $y^{(2)} \in G$, tal que $f(y^{(2)}) > c$. De la existencia en la región G de los puntos $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ con las propiedades señaladas, según el teorema 4, se deriva la existencia en G del punto ζ tal que $f(\zeta) = c$. □

Señalemos que ni en la demostración del propio teorema 4, ni en la demostración de su corolario se ha utilizado el hecho de que el conjunto G es abierto. Se ha utilizado solamente el hecho de que cualesquiera dos puntos de este conjunto pueden ser unidos por una curva perteneciente a él, es decir, que el conjunto es linealmente conexo.

Ejercicio 4. Supongamos que la función f es continua y toma valores de signos distintos en un conjunto abierto. Demuéstrese que el conjunto de puntos en los cuales $f \neq 0$ es un conjunto abierto, pero no es una región.

Problema 16. Constrúyase un ejemplo de región G, en cuya clausura $\bar{G}$ no existen dos puntos tales que no puedan ser unidos por una curva continua en $\bar{G}$.

19.7. CONTINUIDAD UNIFORME DE LAS FUNCIONES. MÓDULO DE CONTINUIDAD

Junto con el concepto de continuidad de una función en un punto, en el análisis matemático juega un papel importante el así llamado concepto de continuidad uniforme de una función sobre un conjunto.

Definición 9. *La función $f(x)$, definida sobre el conjunto $X \subset R^n$, se llama uniformemente continua sobre X, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que para cualesquiera dos puntos $x \in X$, $x' \in X$, que satisfacen la condición*

$$\rho(x, x') < \delta, \tag{19.26}$$

se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{19.27}$$

Señalemos que si la función f es uniformemente continua sobre el conjunto X, entonces ella es sencillamente continua sobre X, es decir, es continua en cada punto $x^{(0)} \in X$. Para convencerse de esto, es suficiente, por ejemplo, en (19.26) y (19.27) poner $x' = x^{(0)}$.

Si la función f es continua en cada punto $x \in X$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe solamente un $\delta = \delta(\varepsilon; x)$ tal que, para todos los $x' \in X$, que satisfacen la condición $\rho(x, x') < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. En este caso, la elección de δ depende no solo de ε, sino, en general, del punto x.

Subrayemos que cuando la función f es uniformemente continua sobre el conjunto X, la elección del δ correspondiente depende sólo del ε y no depende de la elección de los puntos analizados del conjunto X.

Lo dicho se ve claramente cuando se escriben las definiciones señaladas con ayuda de los símbolos lógicos. La condición de continuidad de la función f sobre el conjunto X tiene la forma

$$(\forall\varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists\delta > 0)(\forall x' \in X), (\rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon,$$

y la condición de su continuidad uniforme sobre X, la forma

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in X, \forall x' \in X, \rho(x', x) < \delta) : |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Ejemplos. 1. La función $f(x) = x$ es uniformemente continua sobre todo el eje numérico, o sea, si es dado $\varepsilon > 0$, es suficiente tomar $\delta = \varepsilon$, en este caso si $|x - x'| < \delta$, entonces en virtud de la igualdad $f(x) = x$, $f(x') = x'$ obtenemos $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

2. La función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, no será uniformemente continua sobre su dominio, es decir, sobre el eje numérico, del cual se ha eliminado el punto $x = 0$. En efecto, si tomamos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, entonces para cualquier $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera se encuentran los puntos x y x', por ejemplo, los puntos de la forma

$$x = 1\Big/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \text{y} \quad x' = 1\Big/\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right)$$

(n es un número natural suficientemente grande) tales que $|x - x'| < \delta$ y junto con esto $|f(x) - f(x')| > 1$.

En calidad de criterio suficiente para la continuidad uniforme de las funciones de una variable sobre un intervalo señalemos el siguiente.

Lema 2. *Si la función $f(x)$ está definida y tiene derivada acotada en un intervalo (a, b), entonces es uniformemente continua sobre este intervalo.*

En efecto, si $|f'(x)| \leqslant c$ (c es una constante) sobre (a, b), entonces con ayuda de la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange (véase el p. 11.2) obtenemos

$$|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)(x' - x)| \leqslant c|x' - x|,$$
$$a < x < b, \quad a < x' < b, \quad a < \xi < b. \qquad (19.28)$$

Por esto, para $\varepsilon > 0$ es suficiente tomar $\delta = \varepsilon/c$; en este caso si $|x' - x| < \delta$, $a < x < b$, $a < x' < b$, entonces según (19.28) es válida la desigualdad $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ lo que significa la continuidad uniforme de la función f sobre (a, b). □

Un resultado análogo tiene lugar para cualquier intervalo, finito o infinito. Una generalización de este criterio para el caso de muchas dimensiones será dado en el p. 39.2.

Una significación fundamental tiene el siguiente teorema.

Teorema 5 (de Cantor). *Una función, continua sobre un compacto, es uniformemente continua.*

Corolario. *Una función, continua sobre un segmento, es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Utilicemos el método de reducción al absurdo. Supongamos que existe la función f definida y continua sobre cierto compacto $X \subset R^n$, pero que no es uniformemente continua sobre éste. Entonces, existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ se encuentran los puntos $x'_\delta \in X$ y $x''_\delta \in X$ (el índice "δ" de los puntos significa que éstos dependen de la elección de δ), para los cuales $\rho(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ y junto con esto $|f(x''_\delta) - f(x'_\delta)| \geqslant \varepsilon_0$. Tomemos una sucesión cualquiera de números, δ_m, tal que $\lim\limits_{m \to 0} \delta_m = 0$, por ejemplo, $\delta_m = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$. Sea $x'^{(m)} = x'_{\delta_m}$, $x''^{(m)} = x''_{\delta_m}$ y, por lo tanto,

$$\rho(x'^{(m)}, x''^{(m)}) < \frac{1}{m}, \quad |f(x''^{(m)}) - f(x'^{(m)})| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (19.29)$$

El conjunto X es un compacto, por esto de la sucesión $\{x'^{(m)}\}$ se puede extraer una subsucesión convergente $\{x'^{(m_k)}\}$, el límite ξ de la cual pertenece al compacto X, $\lim\limits_{k \to \infty} x'^{(m_k)} = \xi \in X$. El punto ξ es un punto adherente del conjunto cerrado X, y por esto $\xi \in X$.

Analicemos ahora la subsucesión $\{x''^{(m_k)}\}$ de la sucesión $\{x''^{(m)}\}$, correspondiente a la subsucesión $\{x'^{(m_k)}\}$. Demostremos que $\lim\limits_{k \to \infty} x''^{(m_k)} = \xi$. En efecto

$$\rho(x''^{(m_k)}, \xi) \leqslant \rho(x''^{(m_k)}, x'^{(m_k)}) + \rho(x'^{(m_k)}, \xi) < \frac{1}{m_k} + \rho(x'^{(m_k)}, \xi),$$

y ya que $\rho(x'^{(m_k)}, \xi) \to 0$ y $\frac{1}{m_k} \to 0$ cuando $k \to \infty$, entonces también $\rho(x''^{(m_k)}, \xi) \to 0$ cuando $k \to \infty$, y esto significa que $x''^{(m_k)} \to \xi$ cuando $k \to \infty$.

En virtud de la continuidad de la función f en el punto $\xi \in X$ tenemos $f(x'^{(m_k)}) \to f(\xi)$ y $f(x''^{(m_k)}) \to f(\xi)$ cuando $k \to \infty$, y, por lo tanto

$$f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)}) \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty. \qquad (19.30)$$

Pero, por el método de construcción de las sucesiones $\{x'^{(m)}\}$ y $\{x''^{(m)}\}$ (véase (19.29))

$$|f(x''^{(m_k)}) - f(x'^{(m_k)})| \geqslant \varepsilon_0 \qquad (19.31)$$

para todos los $k = 1, 2, \ldots$.

Es evidente, que las condiciones (19.30) y (19.31) se contradicen mutuamente. Esto demuestra el teorema 5. □

La validez del corolario se deriva del hecho de que el segmento es un compacto.

Señalemos que si se rechaza la exigencia de que el conjunto, sobre el cual la función analizada es continua, sea un compacto, ésta puede no ser uniformemente continua. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ está definida y es continua sobre el intervalo $(0, 1)$, el cual aunque es un conjunto acotado, no es cerrado; esta función no será uniformemente continua sobre el intervalo $(0, 1)$. La función $y = x^2$ está definida y es continua sobre todo el eje real, que aunque es un conjunto cerrado, no es acotado. Esta función tampoco es uniformemente continua sobre el eje real. La demostración de que las funciones $y = 1/x$ e $y = x^2$ no son uniformemente continuas sobre los conjuntos señalados será dada más adelante en este mismo punto.

Con frecuencia resulta más cómodo otro enfoque del concepto de continuidad uniforme, precisamente con ayuda del así llamado módulo de continuidad de funciones.

Definición 10. *Sea la función f definida sobre el conjunto $X \subset R^n$. Se llama su módulo de continuidad $\omega(\delta; f; X)$ la función*

$$\omega(\delta, f, X) = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x'') - f(x')], \quad x' \in X, \quad x'' \in X. \qquad (19.32)$$

A veces para mayor brevedad, en lugar de $\omega(\delta; f; x)$ se escribe sencillamente $\omega(\delta; f)$ o incluso $\omega(\delta)$.

No es difícil convencerse de que

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} [f(x') - f(x'')] = \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} |f(x') - f(x'')|, \quad x' \in X, \quad x'' \in X,$$

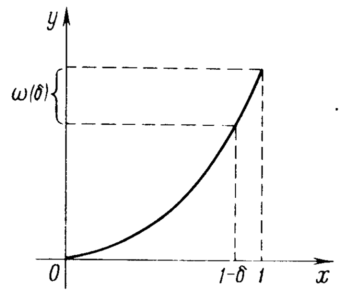


FIG. 96

es decir, en el segundo miembro de la igualdad (19.32) bajo el signo de la cota superior se puede escribir o no el signo de valor absoluto, con lo cual la magnitud de la cota superior señalada no varía.

Es evidente también que $\omega(\delta) \geqslant 0$.

Más adelante, si $0 < \delta_1 < \delta_2$, entonces

$$\{y : y = f(x'') - f(x'),\ \rho(x', x'') \leqslant \delta_1\} \subset$$
$$\subset \{y : y = f(x'') - f(x'),\ \rho(x', x'') \leqslant \delta_2\},$$

de donde

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta_1} [f(x'') - f(x')] \leqslant \sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta_2} [f(x'') - f(x')]$$

(ya que cuando se amplía el conjunto númerico, su cota superior puede solamente crecer), es decir, $\omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2)$, dicho de otra forma, *el módulo de continuidad es una función creciente.*

Problema 17. Sea G una región en R^n. Demuéstrese que si $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\omega(\delta; f; G)}{\delta} = 0$, entonces f es una función constante.

Ejemplos. 1. Hallemos $\omega(\delta)$ para la función $y = x^2$, $-\infty < x < +\infty$.

Para cualquier $\delta > 0$ y un x_0 arbitrario dado, tenemos:

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} (x''^2 - x'^2) \geqslant x_0^2 - (x_0 - \delta)^2 = 2x_0\delta - \delta^2. \tag{19.33}$$

Esta desigualdad se cumple para todos los x_0 y ya que para cualquier δ dado tenemos $\lim\limits_{x_0 \to +\infty} (2x_0\delta - \delta^2) = +\infty$, entonces de (19.33) obtenemos

$$\omega(\delta; x^2) = +\infty, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Hallemos ahora el módulo de continuidad de la función $y = x^2$ sobre el segmento $[0; 1]$. Intuitivamente está claro que ya que el módulo de continuidad $\omega(\delta)$ describe según la definición el mayor incremento de la función sobre un segmento de longitud δ, entonces, para obtener el módulo de continuidad de la función en el caso dado se debe tomar el segmento $[1 - \delta, \delta]$, sobre el cual la función $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, crece más rápidamente: el módulo de continuidad coincide con el incremento de la función sobre este segmento (fig. 96):

$$\omega(\delta) = f(1) - f(1 - \delta) = 1 - (1 - \delta)^2 = 2\delta - \delta^2.$$

Analíticamente esto se comprueba de la forma siguiente. Sea $0 \leqslant x'' - \delta \leqslant \leqslant x' \leqslant x'' \leqslant 1$, entonces, en virtud de la desigualdad

$$x''^2 - x'^2 \leqslant x''^2 - (x'' - \delta)^2 = 2x''\delta - \delta^2 \leqslant 2\delta - \delta^2,$$

obtenemos

$$\omega(\delta, x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} (x''^2 - x'^2) \leqslant 2\delta - \delta^2, \tag{19.34}$$

pero si se toma $x' = 1 - \delta$, $x'' = 1$, entonces

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} (x''^2 - x'^2) \geqslant 1 - (1 - \delta)^2 = 2\delta - \delta^2. \tag{19.35}$$

De las estimaciones (19.34) y (19.35) se deduce, que sobre el segmento $[0; 1]$ tenemos $\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$.

2. Analicemos la función $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Por una parte,

$$\omega\left(\delta; \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x''} - \operatorname{sen}\frac{1}{x'}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} \left(\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x''}\right| + \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x''}\right|\right) \leqslant \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} 2 = 2.$$

Por otra parte, eligiendo $x_n'' = 1\Big/\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $x_n' = 1\Big/\left|\dfrac{3}{2}\pi + 2\pi n\right|$ y fijando n tal que $|x_n'| \leqslant \delta/2$, $|x_n''| \leqslant \delta/2$ y por esto $|x_n'' - x_n'| \leqslant |x_n'| + |x_n''| \leqslant \delta$ tendremos

$$\omega\left(\delta, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \geqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x_n''} - \operatorname{sen}\frac{1}{x_n'} = 1 + 1 = 2.$$

De las estimaciones obtenidas se deduce que $\omega\left(\delta; \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right) = 2$.

3. Analicemos la función $y = \dfrac{1}{x}$ sobre el intervalo $(0; 1)$.

Para cualquier δ, $0 < \delta < 1$, tenemos

$$\omega\left(\delta; \frac{1}{x}\right) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} \left(\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'}\right) = \sup_{x' \leqslant x'' \leqslant x' + \delta} \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \delta} \overset{*)}{=} \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)} \to +\infty \quad \text{cuando} \quad x_0 \to +0.$$

De esta forma, $\omega(\delta; 1/x) = +\infty$.

En los términos del módulo de continuidad, la continuidad uniforme puede ser expresada de la forma siguiente.

*) Aquí x_0 es tal que $0 < x_0 < 1 - \delta$.

Teorema 6. *Para que la función f definida sobre el conjunto X sea uniformemente continua sobre este conjunto, es necesario y suficiente, que*

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta; f; X) = 0. \tag{19.36}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f uniformemente continua sobre el conjunto X, es decir se cumplen las condiciones (19.26) y (19.27); entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_\varepsilon > 0$, tal que si $x' \in X$, $x'' \in X$, $\rho(x', x'') < \delta_\varepsilon$, entonces $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2$. De aquí se deduce que para cualquier $\delta < \delta_\varepsilon$ se cumpla la desigualdad

$$\sup_{\rho(x', x'') \leqslant \delta} |f(x'') - f(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

es decir, si $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, entonces $\omega(\delta) < \varepsilon$. Esto significa que $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. La necesidad de la condición (19.36) queda demostrada.

Demostremos la suficiencia de la condición (19.36). El cumplimiento de la condición (19.36) significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_\varepsilon > 0$, tal que si $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, entonces $\omega(\delta, f, X) < \varepsilon$. Elijamos cualquiera de los δ señalados. Entonces cuando $\rho(x', x'') < \delta$, $x' \in X$, $x'' \in X$, tendremos (véase (19.32)): $|f(x'') - f(x')| \leqslant \omega(\delta, f, X) < \varepsilon$, es decir, la función f es uniformemente continua sobre X. □

Hemos visto anteriormente que sobre el segmento $[0, 1]$ $\omega(\delta; x^2) = 2\delta - \delta^2$, por esto, $\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta; x^2) = 0$, y por lo tanto, la función x^2 es uniformemente continua sobre este segmento, como debe ser según el teorema 5. El módulo de continuidad de esta misma función x^2, pero analizado sobre todo el eje real, al igual que los módulos de continuidad $\omega\left(\delta, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, y $\omega\left(\delta, \frac{1}{x}\right)$, $0 < x < 1$ no tienden hacia 0, cuando $\delta \to +0$ y por esto todas estas funciones no son uniformemente continuas sobre los conjuntos correspondientes.

Ejercicios. 5. Demuéstrese el teorema de Cantor sobre la continuidad uniforme de una función, continua sobre un compacto con ayuda del lema de Heine — Borel (véase el teorema 4 en el p. 18.3 y la observación después de él).

6. La función $f(x)$ continua sobre el segmento $[a, b]$ se llama *lineal a trozos*, si existe una partición del segmento $[a, b]$ en un número finito de segmentos $[x_{i-1}, x_i]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

tal que la función $f(x)$ es lineal sobre cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n - 1$.

Demuéstrese que cualquier función $F(x)$ continua sobre el segmento $[a, b]$ puede ser aproximada con cualquier exactitud por una función lineal a trozos, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función $f(x)$ lineal a trozos, tal que para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|F(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Introduzcamos ahora una serie de conceptos, que serán útiles en el futuro.

Definición 11. *Sea $X \subset R^n$. El número (finito o infinito) $d = \sup_{x' \in X, x'' \in X} \rho(x', x'')$ se llama diámetro del conjunto X y se designa por $d(X)$.*

Ejercicio 7. Sea Q^n una bola n-dimensional con centro en cierto punto $x^{(0)}$ y de radio r: $Q^n = O(x^{(0)}, r)$, entonces $d(Q^n) = 2r$. Demuéstrese que el conjunto X es acotado si y sólo si $d(X) < +\infty$.

Definición 12. *Sea la función f definida sobre el conjunto X; entonces el valor del módulo de continuidad $\omega(\delta, f, X)$ cuando δ es igual al diámetro del conjunto E, es decir, $\omega(d(X), f, X)$ se llama oscilación de la función f sobre el conjunto X y se designa por $\omega(f; X)$ o sencillamente por $\omega(f)$.*

Es evidente, que por (19.16)

$$\omega(f; X) = \sup_{x' \in X, x'' \in X} [f(x'') - f(x')].$$

Recordemos que si en el segundo miembro de esta igualdad tomamos la cota superior de los valores absolutos de las diferencias que aparecen allí, obtenemos el mismo valor.

OBSERVACIÓN. De lo dicho en este párrafo y el anterior, particularmente, es evidente, que todas las particularidades referentes a las cuestiones relacionadas con las funciones de varias variables, pueden ser vistas con bastante claridad en los casos bidimensionales y tridimensionales. Gracias a la elección afortunada de las definiciones y notaciones, las demostraciones de los teoremas se trasladan automáticamente del caso de $n = 2$ al caso n-dimensional arbitrario, llevando a veces sólo a una complicación técnica de la notación. El caso cuando $n = 2$ tiene la ventaja de su evidencia geométrica y de una notación más sencilla, cuando en ella participan las coordenadas de los puntos. Por eso, para mayor claridad y sencillez en la exposición, como regla, analizaremos detalladamente sólo el caso cuando $n = 2$ ó $n = 3$, y en el caso de un n arbitrario sólo enunciaremos los resultados correspondientes o incluso sólo señalaremos la posibilidad de su generalización para el caso de un n arbitrario. Si durante el análisis de alguna cuestión cuando $n > 3$ surgen algunas dificultades específicas, entonces esta custión se analizará detalladamente en el caso general.

§ 20. DERIVADAS PARCIALES. DIFERENCIABILIDAD DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

20.1. DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIALES PARCIALES

Analicemos primeramente el caso de las funciones de tres variables.

Definición 1. *Supongamos que en cierto entorno del punto $(x_0 y_0, z_0)$ está dada la función $u = u(x, y, z)$. Si fijamos las variables y y z: $y = y_0$, $z = z_0$, obtenemos una función de una variable x: $u = u(x, y_0, z_0)$. La derivada habitual (véase el p. 9.1) de esta función en el punto $x = x_0$ se llama derivada parcial de la función $u(x, y, z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) por x y se designa por $\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$.*

De esta forma,

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial u(x, y_0, z_0)}{\partial x}\right|_{x = x_0}.$$

Señalemos que la designación de la derivada parcial según la variable x por $\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$ es tradicional. Hubiera sido más correcto escribir $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, ya que $\frac{\partial u}{\partial x}$ es un símbolo único, que designa una nueva función, cuyo valor se analiza en el punto (x_0, y_0, z_0).

Si recordamos la definición de derivada $\frac{du}{dx}$ (véase el p. 9.1), entonces, por esta definición, se puede escribir

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

o, si introducimos la notación $u(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0) = \Delta_x u$ ($\Delta_x u$ es el incremento de la función por la variable x),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

De forma análoga se introducen las derivadas parciales por y y z:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \frac{du(x_0, y, z_0)}{dy}\bigg|_{y = y_0},$$

ó

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = \frac{du(x_0, y_0, z)}{dz}\bigg|_{z = z_0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta^y u}{\Delta y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta^z u}{\Delta z},$$

donde $\Delta_y u$ y $\Delta_z u$ son los incrementos de la función por las variables y, z respectivamente.

Por analogía con las funciones de una variable, las funciones lineales $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, $\frac{\partial u}{\partial y} dy$, $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ de las variables dx, dy, dz llamadas *diferenciales de las variables independientes*, se llaman *diferenciales parciales* de la función $u(x, y, z)$ según las variables x, y, z recpectivamente y se designan por

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Definiciones análogas tienen lugar para cualquier número de variables.

Si la función $y = f(x_1, \dots, x_n)$ está definida en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, entonces por definición

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\partial x_i} \overset{\text{def}}{=} \frac{df(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, \dots, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{dx_i}\bigg|_{x_i = x_i^{(0)}} \tag{20.1}$$

o, lo que es lo mismo, omitiendo el símbolo del argumento, $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} y}{\Delta x_i}$, donde $\Delta_{x_i} y = f(x_i^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Para designar la derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ se utilizan también símbolos y_{x_i} ó f_{x_i}.

La diferencial parcial $d_{x_i} y$ se define por la fórmula

$$\partial_{x_i} y \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i, \quad -\infty < dx_i < +\infty, \tag{20.2}$$

y de esta forma es una función lineal de la variable dx_i, llamada *diferencial de la variable independiente* x_i. Aquí, siempre $i = 1, 2, \dots, n$. En el caso cuando $n = 1$, la derivada parcial coincide con la derivada ordinaria, y la diferencial parcial con la diferencial ordinaria.

Subrayemos que $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ es un símbolo único, es decir, que en él el numerador y el denominador no tienen sentido independiente. Por otra parte, la derivada parcial $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, naturalmente, puede ser escrita también en la forma de cociente de dos diferenciales: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial_{x_i} y}{dx_i}$.

De la definición de las derivadas parciales, como derivadas ordinarias con la condición de que se han fijado todas las variables excepto una, por la cual se toma la derivada, se deduce que al calcular las derivadas parciales se pueden utilizar las reglas del cálculo de las derivadas ordinarias. Supongamos, por ejemplo, que se exige hallar la derivada $\partial z / \partial y$ de la función $z = xye^{x/y}$. Para esto, fijando en esta fórmula x, obtenemos una función de una variable y; calculando su derivada, tendremos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{x/y} + xye^{x/y} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x(y - x)e^{x/y}}{y}.$$

Para concluir este punto señalemos que de la continuidad de la función de n variables en un punto dado, no se deriva la existencia de sus derivadas parciales en este punto. El ejemplo correspondiente para el caso cuando $n = 1$ fue presentado anteriormente (véase el p. 9.2). Es importante señalar, que cuando $n \geqslant 2$ incluso de la existencia todas las derivadas parciales en cierto punto, no se deduce la continuidad de la función en este punto *). Esto es natural por cuanto la condición de continuidad de la función de varias variables en un punto impone determinadas limitaciones sobre su comportamiento cuando se acerca a este punto por todas las direcciones, mientras que la existencia de las derivadas parciales en el punto significa que la función satisface determinadas condiciones acercándose al punto señalado sólo en la dirección de los ejes coordenados.

*) Recordemos que para $n = 1$, es decir, para la función de una variable, de la existencia de la derivada en un punto se deriva también que la función es continua en este punto (véase el p. 9.2).

Para convencerse evidentemente de esto, analicemos la función $f(x, y)$ igual a cero si $xy = 0$, y a 1, si $xy \neq 0$. Es evidente que $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$, y, por lo tanto,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Sin embargo, esta función es discontinua en el punto $(0, 0)$, ya que, por ejemplo, su límite a lo largo de la recta $y = x$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ es igual a 1, y $f(0, 0) = 0$.

Más aún, existen funciones, que tienen derivadas parciales en todos los puntos y a pesar de esto, son discontinuas. Ejemplo de tales funciones es la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{cuando} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad x = y = 0. \end{cases} \tag{20.3}$$

Esta función tiene derivadas parciales en todo el plano y es discontinua en el punto $(0, 0)$ (¿por qué?).

20.2. DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES EN UN PUNTO

Analicemos primeramente el caso de las funciones de dos variables. Sea la función $z = f(x, y)$ definida en cierto δ-entorno $U = U(M_0; \delta)$ del punto $M_0 = (x_0, y_0)$ y sea (fig. 97)

$$M = (x, y) \in U(M_0; \delta), \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

y, por lo tanto,

$$\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta.$$

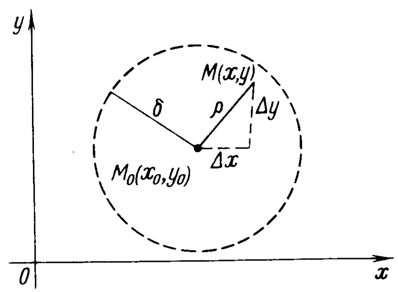
Sea, finalmente, $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Habitualmente Δz se llama *incremento total de la función*; este nombre se explica por el hecho de que aquí, en general, todas las variables independientes reciben incrementos distintos de cero.

Definición 2. *La función $z = f(x, y)$ se llama diferenciable en el punto (x_0, y_0), si existen dos números A y B tales que*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{20.4}$$

FIG. 97



donde, cuando $\rho \neq 0$:

$$\alpha(\Delta x; \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho, \quad \lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0. \text{ *)} \tag{20.5}$$

De (20.4) se deduce que $\alpha(0, 0) = 0$.

Junto con esto señalemos que el valor de la función $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ en el punto $(0, 0)$ no está definido por la fórmula (20.5).

Definición 3. *En el caso de la diferenciabilidad de la función f en el punto (x_0, y_0) la función lineal $A\Delta x + B\Delta y$, de las variables Δx y Δy se llama diferencial total o sencillamente diferencial de la función f en el punto (x_0, y_0) y se designa por dz.*

De esta forma $dz = A\Delta x + b\Delta y$.

En lugar de Δx y Δy se utilizan también las notaciones equivalentes dx y dy, es decir, se escribe $dz = A\,dx + B\,dy$. De (20.5) se deduce que

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0. \tag{20.6}$$

La función $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, que tiene la propiedad (20.6), la designaremos, por analogía con las funciones de una variable, por $o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$ **). Utilizando esta notación, la definición de diferenciabilidad se puede escribir en la forma

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0. \tag{20.7}$$

Lema 1. *La condición* (20.5) *es equivalente a la condición*

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad \rho \neq 0 \tag{20.8}$$

donde $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se cumple la condición (20.5), es decir, $\alpha = \varepsilon\rho$, $\rho \neq 0$, donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\rho \to 0$; entonces

$$\alpha = \varepsilon\rho = \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$$

$$= \varepsilon\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta x + \varepsilon\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta y = \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

donde $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$. Señalando que

*) Recordemos que por lo acordado, la notación $\lim\limits_{\rho \to 0} f$ es equivalente a la notación $\lim\limits_{M \to M_0} f$, donde $\rho = \rho(M, M_0)$.

**) En general para las funciones α y β de varias variables $\alpha = o(\beta)$ cuando $x \to x^{(0)}$, $x \in E \subset R^n$, $x^{(0)} \in R^n$, si $\alpha(x) = \varepsilon(x)\beta(x)$, donde $\lim\limits_{\substack{x \to x^{(0)},\\ x \in X}} \varepsilon(x) = 0$. En este caso diremos que la función α es infinitesimal en comparación con la función β cuando $x \to x^{(0)}$, $x \in X$.

$\left| \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leqslant 1$, $\left| \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \leqslant 1$, tenemos $|\varepsilon_1| \leqslant |\varepsilon|$, $|\varepsilon_2| \leqslant |\varepsilon|$ de donde $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$, es decir, se obtiene una representación de la función α en la forma (20.8).

Supongamos que al revés se cumple la condición (20.8), es decir, $\alpha = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$, $\rho \neq 0$ donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\rho \to 0$; entonces

$$\alpha = \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_2 \right) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon \rho$$

donde $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \varepsilon_2$ y, por lo tanto, $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$; por esto $\varepsilon \to 0$ cuando $\rho \to 0$. De esta forma, se obtiene la representación de la función α en la forma (20.5). □

Teorema 1. *Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces ella es continua en este punto.*

En efecto, ya que $|\Delta x| \leqslant \rho$ y $|\Delta y| \leqslant \rho$, entonces de las fórmulas (20.4) y (20.5) se deduce que $\Delta z \to 0$ cuando $\rho \to 0$, lo que implica la continuidad de la función f en el punto (x_0, y_0). □

Teorema 2. *Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) y $dz = Adx + Bdy$ es su diferencial en este punto, entonces en el punto (x_0, y_0) existen todas las derivadas parciales de la función f y*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B. \tag{20.9}$$

De esta forma,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{20.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de diferenciabilidad (véase (20.4) y (20.8)),

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \quad \rho \neq 0,$$

donde

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \tag{20.11}$$

Suponiendo $\Delta y = 0$, obtenemos $\Delta z = \Delta_x z = A \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$, donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0$ (esto se deduce de (20.11), y ya que, suponiendo $\Delta y = 0$, obtenemos $\rho = |\Delta x|$). De aquí,

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1, \tag{20.12}$$

donde para $\Delta x \to 0$ el segundo miembro tiende hacia el límite igual a A, por esto, también el primer miembro para $\Delta x \to 0$ tiene el mismo límite, y esto significa (véase (20.1)) que en el punto (x_0, y_0) existe la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x} = A$. Análogamente, suponiendo en (20.4) $\Delta x = 0$ y pasando al límite, cuando $\Delta y \to 0$ obtenemos $\frac{\partial z}{\partial y} = B$. □

Corolario. *Si la función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces esta diferencial es única.*

La unicidad de la diferencial se deriva directamente de la fórmula (20.9), ya que las derivadas parciales en el punto dado se determinan unívocamente.

Recordando las definiciones de las diferenciales parciales (véase (20.2)), la fórmula (20.10) se puede escrbir en la forma

$$dz = d_x z + d_y z,$$

es decir, la diferencial total de la función (cuando existe) es la suma de sus diferenciales parciales.

Señalemos que la afirmación, inversa al teorema 2, no tiene lugar: existen funciones que tienen todas sus derivadas parciales en todos los puntos del plano, pero no son diferenciables en cierto punto. Como ejemplo puede servir la función (20.3), citada en el punto anterior: en el punto (0, 0) esta función es discontinua, de donde, por el teorema 1 se deriva que en el punto (0, 0) no es diferenciable.

De lo dicho se deduce que no siempre la expresión $d_x z + d_y z$, cuando tiene sentido, es la diferencial total de la función. La relación entre la diferenciabilidad de la función en un punto y la existencia en este punto de las derivadas parciales es más complicada que la relación entre la diferenciabilidad y la existencia de la derivada para la función de una variable.

Enunciemos las condiciones de suficiencia en términos de las propiedades de las derivadas parciales para la diferenciabilidad de las funciones.

Teorema 3. *Supongamos que la función $z = f(x, y)$ en cierto entorno del punto (x_0, y_0) tiene las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ las que son continuas en el punto (x_0, y_0); entonces la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en este punto.*

Corolario. *Si la función $z = f(x, y)$ tiene, en cierto entorno del punto (x_0, y_0),* las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ *y además estas derivadas parciales son continuas en el punto (x_0, y_0), entonces la función $z = f(x, y)$ también es continua en este punto.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Designemos por $U(\delta)$ el δ-entorno del punto (x_0, y_0), en el cual está definida la función f, al igual que sus derivadas parciales f_x y f_y. Elijamos Δx y Δy tales que $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(\delta)$. Notando que

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)],$$

apliquemos a las expresiones que se encuentran entre los corchetes y que son incrementos de las funciones por una variable, la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange (véase el p. 11.2). Esto es posible, ya que la función $f(x, y_0 + \Delta y)$, analizada como función de una variable x, tiene sobre el segmento con extremos en los puntos x_0 y $x_0 + \Delta x$ derivada (que es la derivada parcial según x de la función f), por esto es continua sobre el segmento indicado. De esta forma, la función $f(x, y_0 + \Delta y)$ satisface todas las condiciones, bajo las cuales fue demostrada la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange. Análogamente se comprueba la posibilidad de aplicación de la fórmula de Lagrange a la función $f(x_0, y)$, analizada como función de una variable y, sobre el segmento con extremos en los puntos y_0 e $y_0 + \Delta y$. Entonces

$$\Delta z = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y,$$

$$0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, \quad (20.13)$$

además, θ_1 y θ_2 dependen, naturalmente, de la elección del punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, es decir, de Δx y Δy.

Si

$$f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0) = \varepsilon_1,$$

$$f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f_y(x_0, y_0) = \varepsilon_2, \quad (20.14)$$

entonces, por la continuidad de las derivadas parciales f_x y f_y en el punto (x_0, y_0) tenemos

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \quad (20.15)$$

Obteniendo de (20.14) las expresiones para $f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)$ y $f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)$ y sustituyéndolas en (20.13), obtenemos:

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \quad (20.16)$$

lo que en virtud del cumplimiento de la condición (20.15), significa que la función f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) (véanse (20.4) y (20.8)). □

El corolario del teorema se deduce del hecho de que una función diferenciable en cierto punto es también continua en éste (véase el teorema 1).

El teorema 3 tiene una significación importante, relacionada con el hecho de que el concepto de diferenciabilidad de una función desempeña un papel de primer orden en una serie de secciones de la teoría de funciones de varias variables. Sin embargo, la comprobación directa de la diferenciabilidad de una función (por ejemplo, para aclarar las posibilidades de aplicación de unos u otros teoremas) con frecuencia es muy difícil, mientras que la comprobación de la continuidad de las derivadas parciales, para el cálculo de las cuales se tiene un aparato analítico muy cómodo, resulta más fácil.

Definición 4. *La función, que tiene en cierto punto (o sobre cierto conjunto, respectivamente) derivadas parciales continuas, se llama continuamente diferenciable en este punto (sobre este conjunto, respectivamente).*

Comparemos la definición de diferenciabilidad de una función (definición 2) y la definición de diferenciabilidad continua (definición 4). La diferenciabilidad de una función en un punto, implica la existencia en este punto de la diferencial, es decir, la validez para este punto de la fórmula (20.4). Lo que la función sea continuamente diferenciable en un punto, significa que sus derivadas parciales en este punto son continuas. De esta forma, la diferenciabilidad de una función está relacionada con el concepto de diferencial, y la diferenciabilidad continua está relacionada con el concepto de derivadas parciales. Conjuntamente con esto, de la diferenciabilidad continua en un punto (sobre un conjunto abierto) se deduce la diferenciabilidad en este punto (sobre este conjunto respectivamente); en esto reside la afirmación del teorema 3.

En el futuro necesitaremos de algunas propiedades auxiliares de las funciones ε_1 y ε_2 de la fórmula (20.16).

Definición 5. *Sean A y B dos conjuntos planos, $A \subset R^2_{xy}$, $B \subset R^2_{uv}$ y sea la función $f = f(x, y, u, v)$ definida para $(x, y) \in A$, $(u, v) \in B$.*

La función f se llama uniformemente tendiente hacia cero sobre el conjunto A de las variables x, y cuando $(u, v) \to (u_0, v_0)$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los (u, v) que satisfacen la condición $\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \delta$, $(u, v) \neq (u_0, v_0)$ y todos los $(x, y) \in A$ se cumple la condición $|f(x, y, u, v)| < \varepsilon$.

La definición general de tendencia uniforme de la función hacia un límite, será dada en el p. 39.4.

Teorema 4. *Sea la función $z = f(x, y)$ continuamente diferenciable sobre el conjunto abierto $G \subset R^2$. Entonces*

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \quad (20.17)$$

donde las funciones $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, y, \Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x, y, \Delta x, \Delta y)$ tienden uniformemente hacia cero cuando $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ sobre cualquier compacto $A \subset G$.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un compacto, perteneciente a G. Entonces los conjuntos cerrados A y $R^2 \setminus G$ no se intersecan y ya que A es acotado (véase el p. 18.3, teorema 3), entonces $d = \rho(A, R^2 \setminus G) > 0$ (véase el lema 7 del p. 18.2).

El conjunto $A_{d/2} = \{(x, y) : \rho((x, y), A) \leqslant d/2)\}$ está contenido en el conjunto G y es compacto (véase el lema 11 del p. 18.3).

Sea ahora $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < d/2$; entonces cuando $(x_0, y_0) \in A$ obtendremos (véase (20.13)):

$$(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \in A_{d/2}, \quad (x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \in A_{d/2},$$

y, por lo tanto, según las fórmulas (20.14), tenemos las desigualdades

$$|\varepsilon_1| \leqslant \omega(\rho; f_x; A_{d/2}), \quad |\varepsilon_2| \leqslant \omega(\rho; f_y; A_{d/2}),$$

donde, en sus segundos miembros, están los módulos de continuidad de las funciones f_x y f_y, respectivamente. De la continuidad de las derivadas parciales f_x y f_y sobre el compacto $A_{d/2}$ se deduce que

$$\lim_{\rho \to 0} \omega(\rho; f_x; A_{d/2}) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\rho \to 0} \omega(\rho; f_y; A_{d/2}) = 0.$$

Por esto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todos los $\rho < \delta$ se cumplen las desigualdades

$$\omega(\rho; f_x; A_{d/2}) < \varepsilon, \quad \omega(\rho; f_y; A_{d/2}) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, para todos los $\rho < \delta$ y todos los $(x_0, y_0) \in A$ son válidas las desigualdades

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon, \quad |\varepsilon_2| < \varepsilon.$$

Esto implica que las funciones ε_1 y ε_2 tienden uniformemente hacia cero cuando $\rho \to 0$ sobre el compacto A. □

OBSERVACIÓN. En las suposiciones del teorema 2, el incremento Δz de la función, también es representable en la forma

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon\rho, \quad (20.18)$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y)$ tiende hacia cero uniformemente sobre cada uno de los compactos $A \subset G$, cuando $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Para la demostración, es suficiente en la fórmula (20.18) poner $\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\rho} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\rho}$ (compárese con la demostración del lema al inicio de este punto).

Todas las definiciones y afirmaciones de este punto se extienden al caso de la función $y = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, de cualquier número n de variables, definida en cierto entorno del punto $x^{(0)}$. Por ejemplo, la condición de diferenciabilidad en un punto dado $x^{(0)}$, en el caso general tendrá la forma siguiente:

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.19}$$

donde

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}, \quad \Delta y = f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

además, en este caso $A_i = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

De esta forma, si la función f es diferenciable, entonces

$$f(x) = f(x^{(0)}) + A_1(x_1 - x_1^{(0)}) + \dots + A_n(x_n - x_n^{(0)}) + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.20}$$

es decir, la función f en el entorno del punto dado, salvo un infinitésimo de un orden más alto que $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(0)})^2}$ es igual a una función lineal *). Dicho de otra forma, la diferenciabilidad de una función en un punto dado significa que la función f es "casi lineal" en un entorno de este punto; el sentido exacto de la expresión "casi lineal" está contenido en la fórmula (20.20).

En el caso cuando tiene lugar (20.19), la función lineal $\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x_1 + \dots$ $\dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n$ de las variables $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ (aquí, en lugar de $x^{(0)}$ está escrito x) se llama *diferencial de la función*, o más claro, diferencial total de la función en un punto dado x y se designa por $df(x)$:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n. \tag{20.21}$$

La diferencial, como toda función lineal de n variables, está definida sobre todo el espacio n-dimensional R^n. De esta forma, *la fórmula* (20.21) *tiene sentido para*

*) Las funciones de la forma $y = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$, donde c_i son constantes, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, se llaman *funciones lineales* de n variables o lo que es lo mismo *funciones lineales del punto* $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$.

todos los valores Δx_i, $i = 1, 2, \dots, n$, al mismo tiempo que *la fórmula* (20.19) *tiene sentido sólo para aquellos que no salen fuera del dominio de la función* f.

Las variables Δx_i se llaman también *diferenciales de las variables* x_i y se designan por dx_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Con esta notación la diferencial de la función f se escribe en la forma

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n.$$

Es evidente que $\Delta f(x) = df(x) + o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$.

Si se analiza la diferencial cuando varía el punto $x = x(x_1, \dots, x_n)$ entonces ésta será una función de $2n$ variables: $x_1, \dots, x_n, \dots, dx_n$.

Los teoremas 1 — 4 del presente párrafo, de forma evidente, se generalizan para las funciones de n variables, por esto no daremos sus enunciados.

20.3. DIFERENCIACIÓN DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

Teorema 5. *Sean las funciones* $x(t)$ *e* $y(t)$ *de una variable* t, *diferenciables en el punto* t_0 *(lo que, como sabemos, es equivalente a la existencia de sus derivadas en el punto* t_0, *véase el p. 9.2) y sean* $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. *Si la función* $z = f(x, y)$ *es diferenciable en el punto* (x_0, y_0) *entonces la función compuesta* $z = f(x(t), y(t))$ *definida en cierto entorno del punto* t_0, *tiene en* t_0 *derivada y esta derivada se expresa por la fórmula*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \tag{20.22}$$

o más detalladamente,

$$\frac{df(x(t_0), y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy(t_0)}{dt}.$$

DEMOSTRACIÓN. La función $f(x, y)$, por la definición de diferenciabilidad de una función, está definida en cierto entorno del punto (x_0, y_0). De la diferenciabilidad de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ se deduce su continuidad en el punto t_0. Por esto, según la observación al teorema 2 en el p. 19.4, en cierto entorno del punto t_0 está definida la función compuesta $f(x(t), y(t))$.

La diferenciabilidad de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) significa que su incremento total $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ es representable en la forma

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \tag{20.23}$$

donde la función $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ es tal que $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Aquí, como es habitual, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Definamos la función $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ en el punto $(0, 0)$, poniendo $\varepsilon(0, 0) = 0$ (compárese con la demostración del teorema 4 en el p. 9.7). Así la función definida $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ es continua en el punto $(0, 0)$.

Sea ahora Δt el incremento de la variable t y $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Dividamos ambos miembros de la igualdad (20.23) por Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}. \tag{20.24}$$

Cuando $\Delta t \to 0$ en virtud de la continuidad de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ en el punto t_0 obtenemos $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, por lo tanto, también $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \rho = 0$. De aquí, según el teorema sobre la composición de funciones continuas (véase el p. 19.3), $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. Señalemos, por último, que existe el límite finito

$$\lim_{\Delta t \to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

De todo esto se deduce que, cuando $\Delta t \to 0$ la parte derecha de la fórmula (20.24) tiende hacia el límite finito $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ $(t = t_0)$, por esto, también la parte izquierda de esta fórmula, es decir, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, tiende hacia el mismo límite, y esto significa que en el punto t_0 existe la derivada $\frac{dz}{dt}$ y se expresa por la fórmula (20.22). □

Señalemos que aunque en la fórmula definitiva de la derivada de una función compuesta (20.22) entran sólo las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la función $z = f(x, y)$, durante la demostración se ha usado esencialmente una propiedad más fuerte de esta función que la existencia de sus derivadas parciales, como es su diferenciabilidad.

Ejercicio 1. Muéstrese que cuando se rechaza la exigencia de diferenciabilidad de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) y cuando se supone solamente la existencia en este punto de las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ y la existencia de las derivadas $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ en el punto t_0, la fórmula (20.22), en general, no es válida, y, más aún, la función compuesta $f[x(t), y(t)]$ (se supone que tiene sentido), en general, no tiene derivada en el punto t_0.

Corolario. *Sean las funciones $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ definidas en cierto entorno del punto (u_0, v_0), y la función $z = f(x, y)$ definida en cierto entorno del punto (x_0, y_0), donde $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$.*

Si la función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) y si en el punto (u_0, v_0) existen las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial u}$ y $\frac{\partial y}{\partial u}$ entonces en este punto (u_0, v_0) existe también la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial u}$ de la función compuesta $z = f[x(u, v), y(u, v)]$, además

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{20.25}$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $v = v_0$ y analicemos la función compuesta $z = f[x(u, v_0), y(u, v_0)]$ de una variable u. Según el teorema 5, esta función está definida en cierto entorno del punto u_0 y tiene en este punto derivada. De esta forma, la derivada $\frac{\partial z}{\partial u}$ en el punto (u_0, v_0) existe y de la fórmula (20.22) se deduce la fórmula (20.25). □

De forma análoga, si en el punto (u_0, v_0) existen las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial v}$ y $\frac{\partial y}{\partial v}$, entonces para la función compuesta $z = f(x(u, v), y(u, v))$ existe en el punto (u_0, v_0) la derivada parcial por v y para ella es válida la fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Analicemos el caso general n-dimensional. *Supongamos en el entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ dada la función $y = y(x_1, \dots, x_n)$ y sobre cierto conjunto $E_t \subset R^k$ las funciones $x_i = x_i(t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tales que $x_i(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)}) = x_i^{(0)}$. Si la función $y = y(x) = y(x_1, \dots, x_n)$ es diferenciable en el punto $x^{(0)}$ y si en punto $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)})$ existen las derivadas parciales $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, $i = 1, 2, \dots, n$,* entonces la función compuesta $y(x(t))$ *tiene en el punto $t^{(0)}$ derivadas parciales $\frac{\partial y}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, además*

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_i}, \quad j = 1, 2, \dots, k. \tag{20.26}$$

Señalemos, que si en las suposiciones hechas las derivadas parciales $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ son continuas respectivamente en los puntos $x^{(0)}$ y $t^{(0)}$, entonces en virtud de la fórmula (20.26) las derivadas parciales de la función compuesta $y = y(x(t))$ también serán continuas en el punto $t^{(0)}$, por lo tanto, serán diferenciables en este punto (véase el teorema 3 en el p. 20.2). En el próximo punto será demostrada la diferenciabilidad de la composición de funciones con hipótesis más débiles.

20.4. INVARIANCIA DE LA FORMA DE LA PRIMERA DIFERENCIAL CON RESPECTO A LA ELECCIÓN DE LAS VARIABLES. REGLA DE CÁLCULO DE LAS DIFERENCIALES

Teorema 6. *Sea la función $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, definida en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, y las funciones $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \dots, t_k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, definidas en cierto entorno del punto $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)})$ y sea $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

En este caso, si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto $x^{(0)}$ y las funciones $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, son diferenciables en el punto $t^{(0)}$, entonces la función compuesta $f(x(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ está definida en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ y es diferenciable en este punto. Además la diferencial df de la función $f(x(t))$ en el punto $t^{(0)}$ puede ser escrita en las dos formas siguientes:

$$df = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j, \tag{20.27}$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i, \text{ donde } dx_i = dx_i(t)\Big|_{t = t^{(0)}} \tag{20.28}$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, están definidas en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ y ya que de la diferenciabilidad de las funciones se deduce su continuidad, entonces la función compuesta $f(x(t))$ está definida en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ (véase la observación al teorema 2 en el p. 19.4). Fijemos dos números cualesquiera $\delta > 0$ y $\eta > 0$ de tal forma que la función $f(x)$ estuviese definida sobre un η-entorno del punto $x^{(0)}$, las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, en un δ-entorno del punto $t^{(0)}$, y que $(x_i(t), \dots, x_n(t)) \in U(x^{(0)}; \eta)$ cuando $t \in U(t^{(0)}; \delta)$. Entonces, sobre el entorno $U(t^{(0)}; \delta)$ está definida la función compuesta $f(x(t))$. La posibilidad de elegir tales números δ y η (evidentemente δ depende de la elección de η) fue mostrada en el p. 19.4. La función $f(x)$ es diferenciable en el punto $x^{(0)}$; por esto, cuando $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} < \eta$ tenemos

$$\Delta f = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \Delta x_i + \varepsilon r, \tag{20.29}$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ es tal que $\lim_{r \to 0} \varepsilon = 0$. Pongamos $\varepsilon(0, \dots, 0) = 0$. Definida complementariamente de esta forma la función ε es continua en el punto $(0, \dots, 0)$.

Por la diferenciabilidad de las funciones $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, en el punto $t^{(0)}$ cuando $\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \Delta t_j^2} < \delta$ obtenemos:

$$\Delta x_i = x_i(t_1^{(0)} + \Delta t_1, \dots, t_k^{(0)} + \Delta t_k) - x_i(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j + \varepsilon_i \rho, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{20.30}$$

donde $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Sustituyendo los valores de Δx_i de (20.30) en (20.29), obtenemos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j + \beta, \tag{20.31}$$

donde

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i \rho + \varepsilon r. \tag{20.32}$$

Cambiando el orden de la adición en (20.31), tendremos

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) \Delta t_j + \beta. \tag{20.33}$$

Ahora, para demostrar que la función compuesta $f(x(t))$ es diferenciable en el punto $t^{(0)}$, es necesario demostrar que $\beta = o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$. Por la continuidad de las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ en el punto $t^{(0)}$ tenemos $\lim_{\rho \to 0} \Delta x_i = 0$, y por lo tanto, $\lim_{\rho \to 0} r = 0$. De aquí, en virtud del teorema sobre la composición de funciones continuas (véase el p. 19.2)

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0. \tag{20.34}$$

De (20.32) tenemos:

$$\frac{\beta}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \varepsilon_i + \varepsilon \frac{r}{\rho}. \tag{20.35}$$

Demostremos que la relación r/ρ es acotada. Utilizando la fórmula (20.30), obtenemos

$$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \leqslant \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|^{*)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right| \frac{|\Delta t_j|}{\rho} + \varepsilon_i.$$

Y como $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_i = 0$, entonces en cierto entorno del punto $t^{(0)}$ las funciones ε_i son acotadas, y ya que $|\Delta t_j| / \rho \leqslant 1$, entonces, la función r/ρ es acotada en cierto entorno del punto $t^{(0)}$. Por esto, de (20.34) y (20.35) se deduce que $\lim_{\rho \to 0} (\beta/\rho) = 0$, es

*) Nos servimos de la desigualdad $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, que es una consecuencia evidente de la desigualdad $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \right)^2$ (véase (18.11)).

decir, que $\beta = o(\rho)$ cuando $\rho \to 0$. La diferenciabilidad de la función compuesta $f(x(t))$ en el punto $t^{(0)}$ queda demostrada.

De la fórmula (20.31) tenemos

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t} \Delta\partial t_j.$$

De aquí, observando que $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \Delta t_j = dx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, precisamente obtenemos la fórmula (20.28). La fórmula (20.27) es la forma habitual para la diferencial (véase (20.21)). □

Formalmente ambas notaciones (20.27) y (20.28) de la diferencial de la función, son iguales: en ambas fórmulas, la diferencial es igual a la suma de los productos de las derivadas parciales por las diferenciales correspondientes, sin embargo, en el caso de la fórmula (20.27) dt_j son las diferenciales de las variables independientes, y en el caso de la fórmula (20.28) dx_i son las diferenciales de la función. Esta propiedad se llama *invariancia de la forma de la primera diferencial* con respecto a la elección de las variables.

OBSERVACIÓN 1. De la fórmula (20.33) se deduce que

$$df(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j} \right) dt_j.$$

Pero los coeficientes de la diferencial de la función en las diferenciales de las variables independientes se determinan unívocamente y son iguales a las derivadas parciales correspondientes, por esto, comparando esta fórmula con la fórmula (20.27), obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t^{(0)})}{\partial t_j},$$

es decir, otra vez la fórmula (20.26). Cierto es que esta vez ha sido deducida teniendo en cuenta limitaciones más fuertes que las anteriores; esta vez se ha supuesto la diferenciabilidad de las funciones $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, mientras que en el p. 20.3 se ha supuesto sólo la existencia para estas funciones de sus correspondientes derivadas parciales.

OBSERVACION 2. Si las funciones $f(x_1, \ldots, x_n)$ y $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_k) \in R^k$, $i = 1, 2, \cdots, n$, tienen derivadas parciales continuas en el punto $(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \in \in R^n$ y en el punto $t^{(0)} \in R^k$, respectivamente, donde $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, entonces según el teorema 3 del p. 20.2 (véanse también las observaciones al final del p. 20.2 sobre el caso general), son diferenciables en los puntos señalados y por esto satisfacen las condiciones del teorema 6. Por consiguiente, para ellas se cumplen las hipótesis de este teorema y la fórmula, que se deduce de éste, para el cálculo de las derivadas parciales de la función compuesta (véase la observación anterior).

La invariancia de la fórmula de la primera diferencial se utiliza ampliamente durante el cálculo práctico de las diferenciales y de las derivadas parciales. Si u y v son funciones de cierto número de variables, entonces con ayuda de las fórmulas (20.28), se obtienen fácilmente las siguientes:

$$\begin{aligned} &1.\ d(u + v) = du + dv. \\ &2.\ d(uv) = v\,du + u\,dv. \\ &3.\ d(u/v) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \end{aligned} \qquad (20.36)$$

Demostremos, por ejemplo, la fórmula 3. Sea $z = u/v$, donde $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, $v = v(x_1, \ldots, x_n)$. Notando que $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}$ y $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, según la fórmula (20.28) tenemos

$$dz = \frac{1}{v}du - \frac{u}{v^2}dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \ \square$$

Durante el cálculo de las diferenciales concretas de funciones de varias variables se pueden utilizar ampliamente las fórmulas obtenidas anteriormente por nosotros (véase el § 9), para las diferenciales de las funciones elementales. Señalemos para esto lo siguiente: sea la función $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ representada en la forma $y = F(u)$, donde $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Entonces, teniendo en cuenta las suposiciones correspondientes, por la fórmula (20.28),

$$dy = F'(u)du, \quad u = u(x_1, \ldots, x_n).$$

Por ejemplo, si $y = \operatorname{sen} u$, entonces $dy = \cos u\,du$; si $y = \ln u$, entonces $dy = \frac{du}{u}$; si $y = \operatorname{arctg} u$, entonces $dy = \frac{du}{1 + u^2}$, etc. (subrayamos que aquí en todos los casos $u = u(x_1, \ldots, x_n)$).

En calidad de ejemplo hallemos la diferencial de la función $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

El cálculo se realiza en el orden siguiente:

$$dz = d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + y^2/x^2}\, d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Si se exige calcular las derivadas parciales de las funciones de varias variables, en particular, si es necesario calcular todas las derivadas, entonces es conveniente calcular la diferencial de esta función, y en este caso las derivadas parciales buscadas serán los coeficientes de las diferenciales correspondientes.

Así, en el ejemplo analizado $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, tomando los coeficientes de dx y dy de la expresión hallada por nosotros para la diferencial, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

OBSERVACIÓN 3. *Cualquier función $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables puede ser analizada también, en cierto sentido, como una función de cualquier número de va-*

riables $n + m > n$, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}$. Precisamente, para cualquier función $f(x_1, \dots, x_n)$, dada sobre el conjunto $E \subset R^n$, definamos la función $f^*(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m})$ sobre el conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m})$ tales que $(x_1, \dots, x_n) \in E$, $-\infty < x_j < +\infty$, $j = n+1, \dots, n+m$, de la forma siguiente:

$$f^*(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n). \tag{20.37}$$

De esta forma, el estudio de la función de n variables, como una función de $n + m$ variables, de hecho significa la prolongación, según la fórmula (20.37), de la función f desde el conjunto de su definición $E \subset R^n$ sobre el conjunto

$$E^* = \{x_1, \dots, x_{n+m}) : (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad -\infty < x_j < +\infty,$$
$$j = n+1, \dots, n+m\},$$

que se encuentra ya en el espacio R^{n+m}. Para la función f^*, obtenida, después de esta prolongación, tenemos

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_j} = 0, \quad j = n+1, \dots, n+m,$$

por esto

$$df^*(x_1, \dots, x_{n+m}) = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_{n+m})}{\partial x_i} dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} dx_i = df(x_1, \dots, x_n).$$

Por ejemplo, cuando decimos que la función de una variable $z = f(x)$, definida sobre un intervalo (a, b), la analizamos como una función de dos variables $f(x) = F(x, y)$, $x \in (a, b)$, $-\infty < y < +\infty$, esto significa que la función $F(x, y)$ es constante, igual a $f(x)$ sobre cualquier recta que pase por el punto x del intervalo (a, b) del eje Ox paralelamente al eje Oy. En este caso

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0, \quad dF(x, y) = df(x),$$
$$a < x < b, \ -\infty < y < +\infty.$$

Será útil para el futuro señalar el hecho contrario, en un determinado sentido. Sea $E \subset R^n$. Si la función $f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ definida sobre el conjunto

$$E^* = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad a < x_{n+1} < b\}$$

y

$$\frac{\partial f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0 \text{ sobre } E^*, \tag{20.38}$$

entonces, existe la función $f(x_1, \dots, x_n)$ de n variables, definida sobre el conjunto E y tal que $f^*(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)$ para todos los $(x_1, \dots, x_n) \in E$, $x_{n+1} \in (a, b)$. En este caso, se dice que la función f^* de hecho *no depende de la variable* x_{n+1}. En efecto, de la condición (20.38) se deduce que la función f^* es constante como la función x_{n+1} (véase el corolario 1 del teorema 3 del p. 11.2) para el punto dado $(x_1, \dots, x_n)$, es decir, fijando, cualquier $c \in (a, b)$ para cualquier punto $(x_1, \dots, x_n) \in E$ y $x_{n+1} \in (a, b)$, tenemos $f^*(x_1, \dots, x_{n+1}) = f^*(x_1, \dots, x_n, c)$. La función buscada f, evidentemente, se define por la igualdad $f(x_1, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_n, c)$, además no depende de la elección de $c \in (a, b)$.

De lo dicho anteriormente, en particular, se deduce que las fórmulas (20.36) para las diferenciales siguen siendo válidas también en el caso cuando las funciones u y v dependan de un número distinto de variables, ya que siempre, en virtud del método señalado, este caso puede reducirse al caso analizado anteriormente para las funciones de una variable.

20.5. SENTIDO GEOMÉTRICO DE LAS DERIVADAS PARCIALES Y DE LA DIFERENCIAL TOTAL

Para una mejor evidencia geométrica y para no introducir nuevos conceptos, en este punto nos limitaremos al análisis de las funciones de dos variables.

Analicemos la función $z = f(x, y)$, definida sobre el conjunto abierto y plano G, es decir, sobre el conjunto G que se encuentra sobre el plano R^2. Sea $(x_0, y_0) \in G$ y supongamos que en el punto (x_0, y_0) existe la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$. Su sentido geométrico se obtiene inmediatamente de la definición de la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$, como una derivada ordinaria de la función $f(x, y)$ por x para un y dado y del sentido geométrico de la derivada ordinaria (véase el p. 9.3). En efecto, tomemos el círculo cerrado Q de radio r con centro en el punto (x_0, y_0) y que se encuentra en G *). Sea una curva dada por la representación

$$z = f(x, y_0), \quad y = y_0, \quad x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r,$$

es decir, la curva que se obtiene seccionando la gráfica de la función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ con el plano $y = y_0$ (fig. 98). Como es conocido, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x = x_0} = \operatorname{tg}\alpha$, donde α es el ángulo formado por la tangente a la gráfica de la función $f(x, y_0)$ en el punto $(x_0, f(x_0, y_0))$ con el eje Ox, es decir, el ángulo formado por la tangente a la curva γ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ con el eje Ox.

De esta forma,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha,$$

en esto consiste el sentido geométrico de la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$.

---

*) Tal círculo Q siempre existe. En efecto, según la definición de conjunto abierto, existe un δ-entorno U del punto (x_0, y_0), tal que $U \subset G$. Entonces el círculo cerrado Q de radio $\delta/2$ con centro en el punto (x_0, y_0), estará, a ciencia cierta, en G.

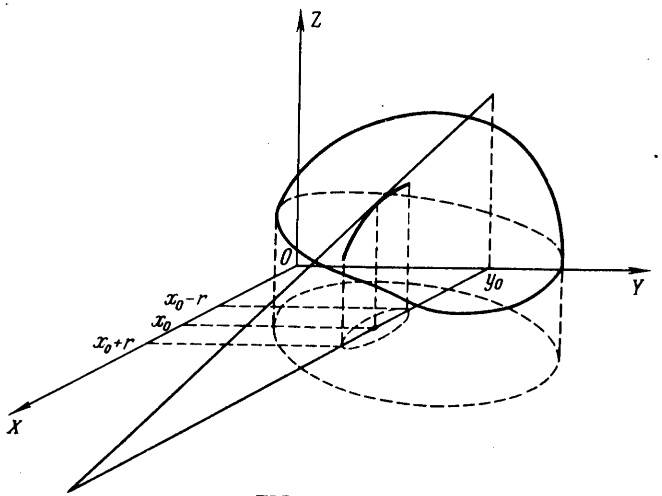


FIG. 98

De forma análoga se establece también el sentido geométrico de la derivada parcial $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ como tangente del ángulo de inclinación, formado por la tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a la curva obtenida seccionando la gráfica de la función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in Q$ por el plano $x = x_0$ con el eje Oy.

En lo que respecta al sentido geométrico de la diferencial, entonces de las fórmulas (20.20) y (20.9) para nuestro caso, es decir, cuando $n = 2$, obtenemos

$$f(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{20.39}$$

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

La ecuación

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) \tag{20.40}$$

es la ecuación del plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y que no es paralelo al eje Oz. Como sabemos, los coeficientes A y B se definen unívocamente por la relación (20.39), además

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \tag{20.41}$$

y, por lo tanto, el plano (20.40) se define unívocamente por la relación (20.39). Este plano se llama *plano tangente* a la gráfica de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0).

De esta forma, llegamos a la definición siguiente.

Definición 6. *Se llama plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y)$ en el punto dado el plano tal que la diferencia entre su coordenada z y el valor de la función $f(x, y)$ es una magnitud infinitesimal en comparación con ρ cuando $\rho \to 0$.*

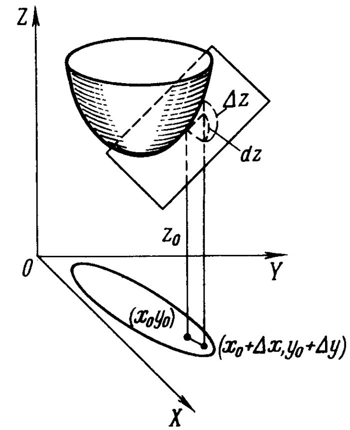


FIG. 99

En virtud de (20.41) la ecuación de este plano tangente tiene la forma

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \tag{20.42}$$

En adelante (véase el t. 2, el p. 50.4) presentaremos otro enfoque del concepto de plano tangente.

Suponiendo $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, el segundo miembro de la ecuación (20.42) lo escribemos en la forma

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Esta es la forma usual de escritura de la diferencial dz de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) y por esto la ecuación (20.42) puede ser escrita en la forma:

$$z - z_0 = dz.$$

De esta forma, geométricamente *la diferencial total de la función en el punto (x_0, y_0) es igual al incremento de la coordenada z* del plano tangente a la gráfica de la función (fig. 99).

Más detalladamente, la diferencial

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y, \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0,$$

coincide con el incremento en el punto $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ de la coordenada z del plano tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

20.6. GRADIENTE DE LA FUNCIÓN

Supongamos que la función $F(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) y la curva γ es tal que las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, que son su forma paramétrica, satisfacen la ecuación

$$F(x, y) = 0,$$

es decir, por medio de ella está dada de forma implícita la curva γ. Sean $t_0 \in [a, b]$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, y las funciones $x(t)$, $y(t)$ diferenciables cuando $t = t_0$.

Diferenciando para $t = t_0$ la identidad $F(x(t), y(t)) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, obtendremos

$$x_t' \frac{\partial F}{\partial x} + y_t' \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad t = t_0,$$

es decir, los vectores $(x'(t_0), y'(t_0))$ y $\left(\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ son ortogonales. El vector $\boldsymbol{a} = (x_t', y_t')$, en el caso cuando es distinto de cero, como es conocido, un vector tangente a la curva γ en el punto $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. El vector $\left(\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$ se llama *gradiente de la función* F en el punto (x_0, y_0) y se denota por grad $F(x_0, y_0)$. De lo dicho se deduce que el gradiente de la función F es ortogonal a la tangente de la curva dada implícitamente por la ecuación $F(x, y) = 0$. La recta, perpendicular a la tangente a la curva plana y que descansa en un mismo plano con ésta, se llama (véase el p. 17.3) *normal* a la curva dada.

De esta forma, el gradiente de la función F es colineal con la normal a la curva, dada por la ecuación $F(x, y) = 0$, en el punto correspondiente.

En el caso de la función diferenciable $f(x_1, \dots, x_n)$, se llama su gradiente el vector $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

20.7. DERIVADA RESPECTO A UNA DIRECCIÓN

Las derivadas parciales de la función son derivadas "por la dirección de los ejes coordenados". Es natural plantear la cuestión sobre la definición y el cálculo de la derivada respecto a cualquier dirección dada. Ante todo, definamos este concepto. Realicemos el análisis de esta cuestión en el ejemplo de las funciones de tres variables.

Sea la función f definida en el δ-entorno $U(M_0; \delta)$ del punto $M_0 \in R^3$ y sea $M_1 \in U(M_0; \delta)$. Tracemos una recta a través de los puntos M_0 y M_1. Por dirección positiva sobre esta recta tomaremos la dirección del vector $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$, es decir, la dirección desde el punto M_0 hacia el punto M_1. Para cualquier punto M de esta recta, designemos por M_0M la longitud orientada del segmento con origen en el punto M_0 y extremo en el punto M, es decir, la longitud de este segmento con signo positivo, si el vector $\overrightarrow{M_0M}$ tiene la misma dirección que el vector $\boldsymbol{l}$, y con signo negativo en el caso contrario.

Definición 7. *El límite* $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$, *si existe, se llama derivada de la función f en el punto M_0 respecto a la dirección del vector $\boldsymbol{l}$ y se denota por* $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$.

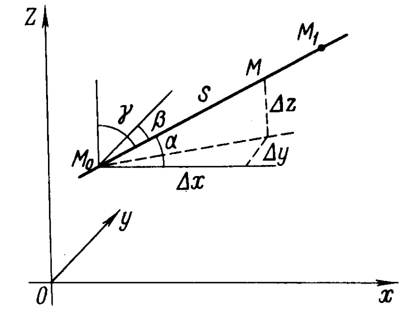


FIG. 100

Sea ahora dado, en el espacio R^3, un sistema de coordenadas x, y, z. Sean $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M = (x, y, z)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$ y $s = M_0M$. Hallemos la relación entre las coordenadas del punto M y la longitud orientada s del segmento M_0M. Sean α, β y γ los ángulos formados por el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ con los ejes Ox, Oy, y Oz respectivamente, entonces (fig. 100)

$$x - x_0 = s\cos\alpha, \quad y - y_0 = s\cos\beta, \quad z - z_0 = s\cos\gamma.$$

A lo largo de la recta M_0M, la función f es función de una variable s, más exactamente

$$f(x, y, z) = f(x_0 + s\cos\alpha, \quad y_0 + s\cos\beta, \quad z_0 + s\cos\gamma).$$

La derivada de esta función según s (si naturalmente existe) es la derivada *de la función f en el punto M_0 respecto a la dirección del vector* $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Señalemos que los cosenos directores $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ a través de las coordenadas de los puntos $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ se definen de la siguiente forma:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_0}{\rho}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_0}{\rho}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z_0}{\rho}, \tag{20.43}$$
$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

La derivada respecto a la dirección se calcula según la regla de diferenciación de la función compuesta. Sea la función $f(x, y, z)$ diferenciable en el punto (x_0, y_0, z_0) y sea

$$x = x_0 + s\cos\alpha, \quad y = y_0 + s\cos\beta, \quad z = z_0 + s\cos\gamma. \tag{20.44}$$

De acuerdo con la definición de derivada respecto a la dirección y la fórmula de la derivada de la función compuesta tenemos:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial t} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M} =$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s\cos\alpha, y_0 + s\cos\beta, z_0 + s\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{s} =$$
$$= \left.\frac{df}{ds}\right|_{s=0} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

pero de (20.44) se deduce que

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma, \tag{20.45}$$

por esto definitivamente

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{20.46}$$

Esta es la fórmula buscada.

De esta forma, queda demostrado el teorema siguiente.

Teorema 7. *Sea la función f diferenciable en el punto* (x_0, y_0, z_0). *Entonces, en este punto la función f tiene derivada respecto a cualquier dirección y esta derivada se halla por la fórmula* (20.46).

Es curioso señalar, que de la fórmula obtenida (20.46) para la derivada respecto a una dirección no se ve inmediatamente que esta derivada no depende de la elección del sistema de coordenadas. Esta independencia se deduce directamente de la definición de derivada respecto a una dirección, de donde a su vez se deriva, que la parte derecha de la fórmula (20.46) no depende de la elección del sistema de coordenadas rectangular cartesiano y se determina sólo por los puntos M_0 y M_1, o lo que es lo mismo, por el punto M_0 y el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$.

El vector con coordenadas $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}$ se llama, como sabemos, *gradiente* de la función $f(M)$ en el punto M_0 y se designa por grad f. (Ya nos hemos encontrado con el concepto de gradiente de las funciones cuando analizamos las curvas dadas implícitamente: véase el p. 20.6.)

De esta forma, si $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ son versores coordenados, entonces

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{20.47}$$

Con frecuencia resulta cómoda la utilización del vector simbólico de Hamilton *)

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

llamado *nabla*. Es la notación de una determinada operación que se debe realizar sobre una u otra función.

Para la función f, según la definición, suponemos

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Formalmente esta igualdad se puede analizar como el "producto" del vector ∇ por el número f. Así, el grad f y ∇f son las notaciones de una misma expresión.

---

*) W. Hamilton (1805 — 1865), matemático irlandés.

Sea ahora el vector $\boldsymbol{l}$ unitario, y, por lo tanto, $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Con ayuda del gradiente, la fórmula para la derivada de la función f respecto a la dirección $\boldsymbol{l}$ se escribe de la forma siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha\,\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\,\frac{\partial f}{\partial z} = \boldsymbol{l}\operatorname{grad} f, \tag{20.48}$$

donde en el segundo miembro se halla el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{l}$, y grad f. De aquí, por cuanto $\boldsymbol{l}$ es un vector unitario,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\operatorname{grad} f|\cos\varphi,$$

donde φ es el ángulo formado por el vector $\boldsymbol{l}$ y el grad f. De esta fórmula se ve que si en el punto dado

$$|\operatorname{grad} f|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \neq 0,$$

entonces la derivada de la función diferenciable respecto a la dirección, alcanza su valor máximo en una única dirección, y precisamente en aquella para la cual $\cos\varphi = 1$, es decir, en la dirección del gradiente. De esto se deduce que para la función dada del punto $f(M)$, el gradiente en cada punto se determina unívocamente por la propia función, y no depende de la elección del sistema de coordenadas, como hubiera podido parecer de la fórmula (20.47).

En realidad, ante todo, si el gradiente es igual a cero en un sistema de coordenadas cartesianas, entonces es igual a cero también en cada sistema de coordenadas semejante. En efecto, la igualdad a cero del gradiente en un punto, por la fórmula (20.48), es equivalente a la igualdad a cero en este punto de las derivadas respecto a todas las direcciones, lo último no depende de la elección del sistema de coordenadas cartesianas, por cuanto de esta elección no depende la derivada respecto a la dirección. Si el gradiente no es igual a cero, entonces su independencia de la elección del sistema de coordenadas cartesianas se deduce directamente de su sentido geométrico demostrado anteriormente: la dirección del gradiente muestra la dirección del crecimiento más rápido de la función (es única), y su magnitud es igual a la derivada en este dirección.

Tomemos ahora cualquier curva continuamente diferenciable, sin puntos particulares, que pase por punto (x_0, y_0, z_0), y al que el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sea su vector tangente. Designemos por s la longitud variable del arco de esta curva, medida desde el punto M_0 en una dirección tal que el vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ de la dirección positiva sobre la tangente. Si $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ es una representación de esta curva, entonces, como sabemos (véase el p. 16.5), $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$, $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$, es decir, también se cumple (20.45). Por esto, si se toma la derivada en el punto (x_0, y_0, z_0) de la función diferenciable $f(x, y, z)$ respecto a la curva dada, es decir, cuando $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, dicho de otra forma, se toma la derivada de la función $f(x(s), y(s), z(s))$ respecto a s, entonces para esta derivada será válida la fórmula (20.46). Esto significa que la derivada en cierto punto de la función a lo largo de la curva, que pasa por el punto señalado coincide con la derivada respecto a la dirección de la tangente a esta curva en este mismo punto.

Todo lo dicho se extiende a funciones de cualquier número n de variables ($n \geqslant 2$). Enunciemos sólo la definición de la derivada respecto a una dirección.

Sea la función $f(x)$ definida en un entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, y sea $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ un punto de este entorno, $x^{(1)} \neq x^{(0)}$.

Tracemos una recta por los puntos $x^{(0)}$ y $x^{(1)}$. Su ecuación tiene la forma (véase (18.44) y (18.45))

$$x_i = x_i^{(0)} + s\cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < s < +\infty,$$

donde $\cos\alpha_i$ son los cosenos directores

$$l = (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(1)} - x_n^{(0)}).$$

Analicemos la función dada f sólo en los puntos de esta recta, es decir, analicemos la función

$$f(x_1^{(0)} + s\cos\alpha_1, \ldots, x_n^{(0)} + s\cos\alpha_n).$$

La derivada $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ *de la función* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *en el punto* $x^{(0)}$ *en la dirección del punto* $x^{(1)}$, *o lo que es lo mismo, en la dirección* $(\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, *se define como la derivada* $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ *de la función compuesta* $f(x_1^{(0)} + s\cos\alpha_1, \ldots, x_n^{(0)} + s\cos\alpha_n)$.

En el caso, cuando la función f es diferenciable en el punto $x^{(0)}$, entonces, por la fórmula para la derivada de la función compuesta, tenemos en este punto

$$\frac{\partial f}{\partial l} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n.$$

Recordando la definición de gradiente de la función de n variables (véase el p. 20.6), con ayuda del producto escalar de vectores n-dimensionales (véase (18.32)), la fórmula de la derivada de la función f respecto a la dirección del vector l para cualquier espacio n-dimensional R^n, se puede escribir en la forma (20.48), es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f, l_0),$$

donde $l_0 = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$.

Para concluir señalemos que del hecho de que la función en cierto punto tiene derivadas respecto a todas las direcciones, no se deduce que la función en este punto es diferenciable. Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad y \neq x^2, \quad \text{ó} \quad x = y = 0, \\ 1, & \text{si} \quad y = x^2, \qquad x^2 + y^2 > 0, \end{cases}$$

tiene en el punto (0, 0) respecto a cualquier dirección derivada igual a cero. Sin embargo, en el punto (0, 0) la función f es discontinua y de ningún modo diferenciable (fig. 101).

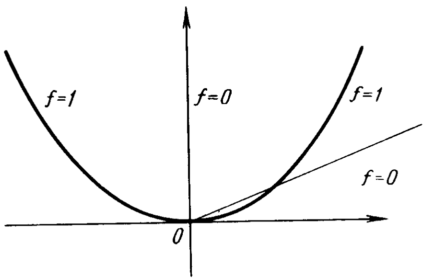


FIG. 101

20.8. EJEMPLO DE LA INVESTIGACIÓN DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Con ayuda de las derivadas parciales se puede estudiar el comportamiento de las funciones de varias variables, de forma semejante a como se investigó el comportamiento de las funciones de una variable con ayuda de su derivada. El problema de la búsqueda de los valores máximos y mínimos, lo estudiaremos más tarde, en los § 40 y § 43, aquí nos limitaremos sólo a un ejemplo del estudio de una función de dos variables, que nos permitirá obtener una desigualdad útil para el futuro.

Mostremos, que para cualesquiera $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p > 1$, y el número q, definido por la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{20.49}$$

es válida la desigualdad

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{20.50}$$

Ante todo, señalemos que la ecuación (20.49), que relaciona a los números p y q, es equivalente a la relación

$$(p-1)(q-1) = 1, \tag{20.51}$$

la que es equivalente a la condición

$$q = \frac{p}{p-1}. \tag{20.52}$$

Esto se establece comparándolos directamente.

Para la demostración de la desigualdad (20.50), analicemos la función

$$F(x, y) = xy - \frac{x^p}{p} - \frac{y^q}{q}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0. \tag{20.53}$$

Calculemos sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y - x^{p-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x - y^{q-1}. \tag{20.54}$$

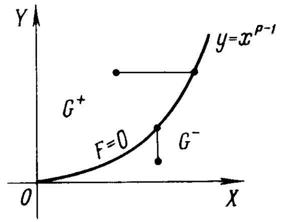


FIG. 102

De (20.51) se deduce que cuando $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, las ecuaciones

$$y - x^{p-1} = 0 \tag{20.55}$$

y

$$x - y^{q-1} = 0 \tag{20.56}$$

son equivalentes. De esta forma, los puntos (x, y), que satisfacen tanto la condición $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$, como lo condición $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$ descansan sobre la curva (20.55), o, lo que es lo mismo, sobre la curva (20.56).

En virtud de (20.49) y (20.52), a lo largo de la curva (20.55) tenemos:

$$F(x, x^{p-1}) = x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^{(p-1)q}}{q} =$$

$$= x^p - \frac{x^p}{p} - \frac{x^p}{q} = x^p\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 0. \tag{20.57}$$

Designemos ahora por G^+ el conjunto de todos los puntos, situados por encima de la curva (20.55) y sobre la propia curva:

$$G^+ \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) : y \geqslant x^{p-1},\ x \geqslant 0\},$$

y por G^-, el conjunto de todos los puntos del primer cuadrante (incluyendo el eje de las x), situados por debajo de esta curva y sobre ella misma:

$$G^- \overset{\text{def}}{=} \{(x, y);\ 0 \leqslant y \leqslant x^{p-1},\ x \geqslant 0\}.$$

Por las fórmulas (20.54) para $(x, y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$ tenemos $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) > 0$, y para $(x, y) \in G^-$, $y \neq x^{p-1}$, respectivamente $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ (aquí se ha utilizado la equivalencia de las ecuaciones (20.55) y (20.56)). Por esto, a lo largo de cualquier segmento, situado en el conjunto G^+ y paralelo al eje de las x (fig. 102), la función $F(x, y)$ crece estrictamente. Por lo tanto, si $(x, y) \in G^+$, $y \neq x^{p-1}$, entonces (véase (20.57))

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0.$$

De forma análoga, sobre cualquier segmento, situado en el conjunto G^- y paralelo al eje de las y, la función $F(x, y)$ también crece estrictamente. Por esto, si

$(x, y) \in G^-$ e $y \neq x^{p-1}$, entonces otra vez

$$F(x, y) < F(x, x^{p-1}) = 0.$$

De esta forma, si $y \neq x^{p-1}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, entonces, siempre $F(x, y) < 0$.

Así pues, recordando la forma de la función F (véase (20.53)), tenemos: si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, entonces

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{cuando} \quad b \neq a^{p-1},$$

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{cuando} \quad b = a^{p-1}.$$

Así la desigualdad (20.50) queda demostrada.

§ 21. DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

21.1. DERIVADAS PARCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

Sea dada la función $f(x, y)$. Entonces cada una de sus derivadas parciales (si naturalmente existen) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, las que se llaman también *derivadas parciales de primer orden*, otra vez es una función de las variables independientes x, y por lo tanto puede tener también derivadas parciales. La derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ se denota por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \text{o } f_{xx}, \quad \text{y } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \text{por} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \text{ o } f_{xy}.$$

De esta forma,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{xy}$$

y, análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Las derivadas f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} y f_{yy} se llaman *derivadas parciales de segundo orden*. Analizando las derivadas parciales de éstas, obtendremos todas posibles derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x}, \quad \text{etc.}$$

De forma análoga se definen las derivadas parciales de un orden arbitrario para las funciones de cualquier número de variables.

Definición 1. *La derivada parcial (respecto a cualquiera de las variables independientes) de la derivada parcial de orden $m - 1$, $m = 1, 2, \ldots$,* *) *se llama derivada parcial de orden m.*

La derivada parcial, obtenida por la diferenciación respecto a distintos variables, se llama derivada parcial mixta (cruzada). La derivada parcial, obtenida diferenciando sólo con respecto a una variable, se llama derivada parcial pura.

El número de las distintas derivadas parciales cuando aumenta m, naturalmente, crece; sin embargo, resulta que para determinadas suposiciones muchas de ellas coinciden, precisamente, las derivadas parciales mixtas respecto a las mismas variables, no dependen del orden de diferenciación.

Más exactamente tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema 1. *Sea la función $f(x, y)$, al igual que sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx}, definida en un entorno del punto (x_0, y_0), además f_{xy} y f_{yx} son continuas en este punto; entonces*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{21.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f(x, y)$ definida, junto con sus derivadas f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx}, en el δ-entorno del punto (x_0, y_0) y sean Δx y Δy fijados, tales que $\Delta x^2 + \Delta y^2 < \delta^2$. Designaremos, al igual que antes (véase el p. 20.1), por el símbolo Δ_x, respectivamente Δ_y, al incremento de la función f respecto al argumento x, respectivamente y, en el punto (x_0, y_0) **). Introduzcamos la notación

$$\Delta_{xy}f = \Delta_x(\Delta_y f), \quad \Delta_{yx}f = \Delta_y(\Delta_x f)$$

y demostremos que

$$\Delta_{xy}f = \Delta_{yx}f. \tag{21.2}$$

En efecto,

$$\Delta_{xy}f = \Delta_x(\Delta_y f) = \Delta_x[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] =$$
$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]; \tag{21.3}$$

análogamente,

$$\Delta_{yx}f = \Delta_y(\Delta_x f) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] -$$
$$- [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)]. \tag{21.4}$$

Comparando (21.3) y (21.4), nos convencemos de la validez de la relación (21.2).

Hagamos ahora

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0);$$

entonces (21.3) se puede transcribir en la forma

$$\Delta_{xy}f = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

---

*) Para comodidad de la notación, la propia función se considera *derivada parcial de orden cero.*

**) Para la función dada $F(x, y)$ sus incrementos Δ_x y Δ_y, en el punto dado (x_0, y_0) se determinan por las fórmulas $\Delta_x F(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)$, $\Delta_y F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)$.

Debido a que en el entorno analizado del punto (x_0, y_0) existe la derivada parcial f_x, la función $\varphi(x)$ es diferenciable sobre el segmento con extremos en los puntos x_0 y $x_0 + \Delta x$. Del teorema de Lagrange sobre los incrementos finitos, se deduce que

$$\Delta_{xy}f = \varphi'(x_0 + \theta_1\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Pero $\varphi'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y) - f_x(x, y_0)$, y por esto

$$\Delta_{xy}f = [f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0)]\Delta x.$$

Aplicando otra vez el mismo teorema de los incrementos finitos, pero ahora respecto a la variable y, tendremos

$$\Delta_{xy}f = f_{xy}(x + \theta_1\Delta x, \quad y_0 + \theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$
$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1. \tag{21.5}$$

De un modo completamente análogo, suponiendo $\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$, tenemos

$$\Delta_{yx}f = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3\Delta y)\Delta y =$$
$$= [f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y) - f_y(x_0, y_0 + \theta_3\Delta y)]\Delta y =$$
$$= f_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y, \quad 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1. \tag{21.6}$$

Por (21.2), los primeros miembros de las igualdades (21.5) y (21.6), son iguales entre sí, por lo tanto, son iguales también los segundos; igualándolos y simplificándolos por $\Delta x\Delta y$, cuando $\Delta x \neq 0$ y $\Delta y \neq 0$, obtendremos

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1\Delta x, \quad y_0 + \theta_2\Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y),$$
$$0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{21.7}$$

Por la continuidad de las derivadas parciales f_{xy} y f_{yx} en el punto (x_0, y_0), pasando en (21.7) al límite cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, obtenemos (21.1). □

OBSERVACIÓN 1. Del teorema demostrado, por inducción, es fácil deducir, que si para una función de n variables, las derivadas parciales mixtas de orden m son continuas en un punto, entonces no depende del orden de diferenciación.

Esto se deduce del hecho de que dos sucesiones cualesquiera de diferenciación, que se diferencian sólo en el orden de diferenciación (es decir, tales que respecto a cada argumento fijo contienen el mismo número total de diferenciaciones), se puede convertir una en otra con un número finito de pasos, en cada uno de los cuales se cambia el orden de diferenciación respecto a dos variables, y las restantes permanecen fijas. De esta forma, en cada paso, de hecho, se analiza el cambio del orden de diferenciación de la función que tiene sólo dos variables, es decir, en este caso nos encontramos en las condiciones del teorema demostrado anteriormente. Así, el caso general se reduce al caso de las funciones de dos variables.

Aclaremos esto en un ejemplo. Demostremos, por ejemplo, que

$$f_{xyz} = f_{zyx}.$$

Por lo dicho anteriormente, tenemos la sucesión

$$f_{xyz} = (f_x)_{yz} = (f_x)_{zy} = (f_{xz})_y = (f_{zx})_y = (f_z)_{xy} = (f_z)_{yx} = f_{zyx}.$$

OBSERVACIÓN 2. Para concluir este punto señalemos, que, a primera vista, el teorema demostrado puede parecer que no tiene mucho contenido: para juzgar, si tiene lugar la igualdad $f_{xy} = f_{yx}$, es necesario, según este teorema, comprobar la continuidad de las funciones f_{xy} y f_{yx}, y para esto parecería necesario conocerlas, pero si ya las conocemos, entonces sin ningún teorema podemos aclarar si son iguales o no. No obstante, el teorema 1 tiene sentido. El problema es que sobre la continuidad de una función se puede juzgar algunas veces a base de ciertos teoremas generales, sin tener que recurrir al cálculo concreto y a la investigación de la propia función. Así, sabemos que todas las funciones elementales de varias variables son continuas en sus dominios (véase el p. 19.4). Por otra parte, las derivadas parciales de las funciones elementales, también son elementales, por esto, si por ejemplo, la derivada de cierta función elemental está definida sobre un entorno de cualquier punto, entonces esta derivada también es continua en cada punto del entorno señalado.

Problema 18. Demuéstrese que si la función $f(x, y)$ está definida junto con sus derivadas parciales f_x, f_y y f_{xy} en un entorno del punto (x_0, y_0), además la derivada parcial f_{xy} es continua en el punto (x_0, y_0), entonces en este punto existe la derivada parcial f_{yx}, y

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

La función que tiene en un punto (o, respectivamente, sobre un conjunto abierto) derivadas parciales continuas de todos los órdenes hasta un cierto orden m inclusive, se llama *m veces continuamente diferenciable* en este punto (sobre este conjunto).

Señalemos que para que la función tenga en el punto (sobre un conjunto abierto) derivadas parciales continuas de todos los órdenes hasta un cierto orden m inclusive, es suficiente que tenga en este punto (sobre este conjunto) derivadas parciales continuas de orden m. En efecto, de la continuidad de todas las derivadas parciales de orden m en el punto (sobre un conjunto abierto), según el corolario del teorema 3 en el p. 20.2, se deriva la continuidad de todas las derivadas parciales de orden $m - 1$, en el punto analizado (sobre el conjunto analizado). De la continuidad de las derivadas parciales de orden $m - 1$, se deriva (en el caso $m > 1$) la continuidad de las derivadas parciales de orden $m - 2$, etc.

21.2. DIFERENCIALES DE ÓRDENES SUPERIORES

La función de $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, o, lo que es lo mismo, de los pares ordenados de puntos del espacio n-dimensional $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ del tipo

$$A(x, y) = A(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k,$$

donde a_{ik} son números dados ($i, k = 1, 2, \dots, n$), se llama *forma bilineal* de x e y. Este nombre se explica por el hecho de que si uno de los puntos x o y es fijo, entonces la función será lineal respecto a las coordenadas de los puntos restantes.

La función $A(x, x)$ se llama *forma cuadrática*, correspondiente a la forma bilineal dada $A(x, y)$:

$$A(x, x) = A(x_1, \dots, x_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k.$$

En el caso cuando $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, la forma bilineal $A(x, y)$ y la forma cuadrática $A(x, x)$ correspondiente a ella se llaman *simétricas*.

Por ejemplo, el producto escalar de dos vectores $x = (x_1, x_2 \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ del espacio euclídeo n-dimensional R^n

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

es una forma bilineal simétrica de los puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, y al cuadrado de la longitud del vector $|x|$ le corresponde su forma cuadrática:

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

En el futuro, para comodidad de la exposición, denotaremos las diferenciales no sólo por el símbolo d, sino también por el símbolo δ, por ejemplo, escribiremos no sólo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \quad \text{sino también} \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\delta y,$$

además, a la diferencial de cualquier función la llamaremos también su primera diferencial.

Supongamos que la función $z = z(x, y)$ tiene continuas las primeras y segundas derivadas parciales sobre cierto conjunto abierto y plano G (tales funciones, por la definición del punto anterior, se llaman dos veces continuamente diferenciables sobre el conjunto G). De la continuidad sobre el conjunto G de las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, se deduce, como sabemos (véase el teorema 3 en el p. 20.2), la diferenciabilidad de la propia función $z(x, y)$ en cada punto de este conjunto. De esta forma, para todos los puntos $(x, y) \in G$ está definida la diferencial

$$dz = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}dy.$$

Por cuanto, según las suposiciones hechas, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ tienen sobre un conjunto abierto derivadas parciales continuas

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

entonces, por el teorema 3 del p. 20.2 $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ también son diferenciables sobre el conjunto G. Por esto, la diferencial dz, analizada como función sólo de las variables x e y, a su vez, es diferenciable sobre el conjunto G de la función. Calculemos la diferencial de la primera diferencial dz, considerando a dx y dy fijas, y el punto (x, y) perteneciente a la región G: $(x, y) \in G$, en este caso, la nueva diferenciación la denotaremos por el símbolo δ:

$$\delta(dz) = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\delta\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\delta\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\delta y\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\delta y\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx\delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(dx\delta y + \delta x dy) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\delta y.$$

Llamemos la atención al hecho de que la continuidad de las segundas derivadas ha sido utilizada no sólo para que los cálculos tuvieron sentido $\Big($es decir, para que en todos los puntos analizados existieran las diferenciales $\delta\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\delta\frac{\partial z}{\partial y}\Big)$, sino también para que en el proceso de cálculo no se presentara atención al orden de la diferenciación. En efecto, fue demostrado (véase el p. 21.1), que en el caso de continuidad de las derivadas parciales mixtas $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, éstas coinciden, por esto para su designación puede ser utilizado un mismo símbolo, lo que ha sido hecho en los cálculos señalados.

Como resultado se ha obtenido la forma bilineal simétrica de las variables dx, dy, δx, δy. Suponiendo $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, obtendremos su correspondiente forma cuadrática, la que se llama *segunda diferencial* de la función $z = z(x, y)$ en el punto dado $(x, y) \in G$ y se designa por d^2z.

De esta forma, hemos llegado a la siguiente definición.

Definición 2. *Se llama segunda diferencial d^2z de la función $z = f(x, y)$ en el punto dado la forma cuadrática de las diferenciales dx y dy de las variables independientes, correspondiente a la forma bilineal de la diferencial de la primera diferencial, es decir,*

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{21.8}$$

En la práctica, durante el cálculo concreto de las diferenciales con frecuencia se simultanean ambos pasos, o sea, el cálculo de la diferencial de la diferencial $\delta(dz)$ y la igualación de las diferenciales de los argumentos en las sucesivas diferenciaciones: $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. Por ejemplo, sea $z = x^3\cos^2 y$ y se pide hallar d^2z. Sucesivamente tendremos:

$$dz = 3x^2\cos^2 y dx - x^3 \operatorname{sen} 2y dy,$$

$$d^2z = 6x\cos^2 y\, dx^2 - 3x^2 \operatorname{sen} 2y\, dx\, dy - 3x^2 \operatorname{sen} 2y\, dx\, dy - 2x^3\cos 2y\, dy^2 =$$

$$= 6x\cos^2 y\, dx^2 - 6x^2\operatorname{sen} 2y\, dx\, dy - 2x^3\cos^2 2y\, dy^2.$$

De forma análoga, durante la continuidad de las derivadas parciales de tercer orden, se puede calcular también la diferencial de la segunda diferencial $\delta(d^2z)$, después de lo cual, suponiendo $\delta x = dx$ y $\delta y = dy$, obtendremos por definición la tercera diferencial. Por inducción se define también la diferencial de orden $(m + 1)$ $d^{m+1}z$, $m = 1, 2, \cdots$ De forma más precisa, en la suposición de que son continuas todas las derivadas parciales hasta del orden $m + 1$ inclusive, de la función dada sobre un cierto conjunto, para obtener su diferencial $d^{m+1}z$, es necesario tomar la diferencial de la diferencial $d^m z$ de orden m: $\delta(d^m z)$ y hacer $\delta x = dx$, $\delta y = dy$. En este caso, para las diferenciales de orden $m = 1, 2, \cdots$ será válida la fórmula

$$d^m z = \sum_{k=0}^{m} C_n^k \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-k}\partial y^k} dx^{m-k}dy^k, \tag{21.9}$$

con frecuencia se escribe simbólicamente en la forma siguiente que es más cómoda para ser recordada:

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(m)} f(x, y). \tag{21.10}$$

Demostremos la fórmula (21.9) por inducción. Para $m = 1$, evidentemente es cierta. Supongamos que sea válida para cierto m, mostremos su validez para $m + 1$. Tenemos

$$\delta(d^m z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k\left(\frac{\partial^{m+1}z}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}\delta x dx^{m-k}dy^k + \frac{\partial^{m+1}z}{\partial x^{m-k}\partial y^{k+1}}dx^{m-k}\delta y dy^k\right).$$

Hagamos $\delta x = dx$ y $\delta y = dy$; entonces

$$d^{m+1}z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}dx^{m-k+1}dy^k +$$

$$+ \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-p}\partial y^{p+1}}dx^{m-p}dy^{p+1}.$$

Sustituyamos en la segunda suma el índice de la adición p por $k - 1$ y observemos que $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$; obtendremos finalmente:

$$d^{m+1}z = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}dx^{m-k+1}dy^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1}\frac{\partial^{m+1}z}{\partial x^{m-k+1}\partial y^k}dx^{m-k+1}dy^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^{k} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1-k} \partial y^{k}} dx^{m+1-k} dy^{k}. \square$$

OBSERVACIÓN. Se debe tener en cuenta que si se tiene una función compuesta $z = f(x, y)$, donde $x = x(u, v)$, $y = (u, v)$, entonces la segunda diferencial de la función f, expresada por las diferenciales de las variables x e y, ya no tendrá, en general, la forma (21.8) y tendrá, como regla, una forma más compleja. De esta forma, en el caso de la diferencial de orden superior (es decir, de orden mayor o igual a dos) no tiene lugar la invariancia de la forma de la diferencial respecto a la elección de las variables. Para convencerse de esto, calculemos en el caso analizado la segunda diferencial de la función $z = f(x, y)$, donde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Por la invariancia de la forma de la primera diferencial tenemos

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Más adelante, calculemos la diferencial $\delta(dz)$, considerando que $\delta u = du$, $\delta v = dv$. Utilizando la invariancia de la forma de la primera diferencial respecto a la elección de las variables durante los cálculos de $\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ y $\delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$:

$$\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \delta y,$$

$$\delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \delta x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \delta y,$$

y notando, que la diferencial $\delta(dx)$, es la diferencial de la función, y por lo tanto, en general, no es nula, obtendremos

$$dz^2 = \delta(dz) \Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} = \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) \Big|_{\substack{\delta u = du \\ \delta v = dv}} =$$

$$= \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial z}{\partial x} \delta(dx) + \frac{\partial z}{\partial y} \delta(dy) \Big|_{\substack{\delta v = du \\ \delta w = dv}} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y.$$

En la práctica también en este caso ambas operaciones — cálculo de las diferenciales e igualación de las diferenciales $\delta u = du$, $\delta v = dv$ — se realizan simultáneamente, es decir, la notación $\delta(dz) \big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}}$, se considera equivalente a la notación $d(dz)$.

Todo lo dicho, en particular, la definición de las diferenciales de órdenes superiores, de una forma natural se extiende a las funciones de un gran número de variables. Señalemos que la diferencial de orden m de las funciones de n variables $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ tiene la forma

$$d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^{[m]} y(x_1, \ldots, x_n). \tag{21.11}$$

Esta fórmula se demuestra de forma análoga a la fórmula (21.10).

Ejercicios. 1. Hállense las derivadas parciales de primer orden de la función $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

2. Hállese la diferencial total de la función $u = z^{xy}$.

3. Hállense todas las derivadas parciales de segundo orden de la función.

$$u = x \operatorname{sen}(x + y) + y \cos(x + y).$$

4. Hállese $d^2 z$, si $z = \frac{1}{y} \ln(x^2 + y^2)$.

5. Hállense las derivadas de los dos primeros órdenes de la función $w = f(u, v)$, donde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

CAPÍTULO TERCERO

CÁLCULO INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

§ 22. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

22.1. PRIMITIVA E INTEGRAL INDEFINIDA

En este párrafo se analiza el problema de hallar una función para la cual la función dada es su derivada.

Definición 1. *Sea la función f definida sobre un intervalo Δ, finito o infinito, del eje numérico* $\boldsymbol{R}$, *es decir, sobre un intervalo, intervalo semiabierto o segmento* *).

La función F definida sobre este intervalo se llama función primitiva (o sencillamente primitiva), de la función f sobre Δ, si

1) *la función F es continua sobre el intervalo Δ,*

2) *en cualquier punto del intervalo Δ, excepto un conjunto finito $E_f = E_{f,F} \subset \subset \Delta$, la función F tiene derivada, igual al valor de la función f en este punto:*

$$F'(x) = f(x), \ X \in \Delta \setminus E_f. \tag{22.1}$$

A veces en lugar de "primitiva de la función dada" se dice "primitiva para la función dada".

En los puntos del conjunto E_f la función F, siendo obligatoriamente continua puede tener o no derivada, y además, si la derivada existe, entonces $F'(x) \neq f(x)$, $x \in F_f$.

El conjunto E_f puede ser, en particular, un conjunto vacío.

Ejemplo. Para la función $f(x) = \operatorname{sign} x$ (véase el p. 5.2) la función $F(x) = |x|$, $-\infty < x < +\infty$, es primitiva. Aquí el conjunto E_f está compuesto por un punto, el cero: $E_{\operatorname{sign} x} = \{0\}$. Para cualquier punto $x \neq 0$ tiene lugar $|x|' = \operatorname{sign} x$. Señalemos que la función $F(x) = |x|$ es también primitiva de la función

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad x \geqslant 0, \\ -1 & \text{cuando} \quad x < 0, \end{cases}$$

que se diferencia de la función $f(x) = \operatorname{sign} x$ por su valor en el cero.

En este ejemplo se ve que una misma función F puede ser primitiva para diferentes funciones f, no obstante, en virtud de la condición (22.1) estas funciones f

*) Si el intervalo analizado es un segmento, entonces por supuesto, puede ser solamente finito.

pueden diferenciarse una de otra sólo en los valores sobre un conjunto finito de puntos (que depende de las funciones escogidas).

Es evidente que si la función F es un primitiva de la función f sobre cierto intervalo Δ, es decir, F es continua sobre Δ y en todos sus puntos menos cierto conjunto finito se cumple la condición $F'(x) = f(x)$, entonces para cualquier constante C, la función $F(x) + C$ también es continua sobre el intervalo Δ y en todos sus puntos menos el conjunto finito indicado se cumple la condición

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x),$$

es decir, la función $F(x) + C$ también es primitiva de la función f sobre el intervalo Δ.

Por otro lado, si las funciones F y Φ son primitivas para la función f sobre el intervalo Δ, es decir, F y Φ son continuas sobre el intervalo Δ y en todos sus puntos excepto los conjuntos finitos $E_{f,F}$ y respectivamente $E_{f,\Phi}$ se cumplen las condiciones

$$F'(x) = f(x) \quad \text{y} \quad \Phi'(x) = f(x),$$

entonces para todos los puntos del intervalo Δ excepto el conjunto $E_{f,F} \cup E_{f,\Phi}$, se cumplirá la condución

$$F'(x) = f(x) = \Phi'(x)$$

y además, el conjunto $E_{f,F} \cup E_{f,\Phi}$ donde esta condición se altera, es finito como la unión de dos conjuntos finitos.

De aquí, en virtud del corolario 2 del teorema 3 del p. 11.2 se deriva que las funciones F y Φ se diferencian sobre el intervalo Δ sólo en cierta constante C:

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad x \in \Delta. \tag{22.2}$$

Así pues, si la función F es cualquier primitiva de la función f sobre el intervalo Δ, entonces cualquier función Φ del tipo (22.2) también es primitiva de la función f y cualquier primitiva de la función f es representable en la forma $F(x) + C$.

Definición 2. *El conjunto de todas las primitivas de la función f definidas sobre cierto intervalo Δ se llama integral indefinida de la función f sobre este intervalo y se denota por*

$$\int f(x)\,dx. \tag{22.3}$$

El símbolo $\int$ *se llama símbolo de la integral*, $f(x)$ *función subintegral* (*integrando*).

Si F es cualquier primitiva de la función f sobre Δ, entonces se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{22.4}$$

aunque sería más correcto escribir

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}. \tag{22.5}$$

Como se acepta usualmente, utilizaremos la escritura (22.4). Así pues, un mismo símbolo $\int f(x)\,dx$ denotará tanto todo el conjunto de primitivas de la función f como cualquier elemento de este conjunto, es decir, cualquier primitiva de la función f.

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que *cualquier igualdad en ambos miembros de la cual aparecen integrales indefinidas, es una igualdad entre conjuntos.*

Bajo el signo de la integral se escribe para mayor comodidad no la propia función f sino su producto por la diferencial dx. Esto se hace ante todo para indicar respecto a qué variable se busca la primitiva. Por ejemplo,

$$\int x^2 z dx = \frac{x^3 z}{3} + C, \quad \int x^2 z dz = \frac{x^2 z^2}{2} + C;$$

aquí en ambos casos la función subintegral es igual a $x^2 z$, pero sus integrales indefinidas en los casos analizados resultan diferentes: en el primer caso se analiza como una función de la variable x y en el segundo como una función de z.

Otras comodidades que se derivan de la utilización de la notación $\int f(x)dx$, serán indicadas en el futuro (véase al cambio de variable en la integral, en el p. 22.3).

Si F es una primitiva de la función f sobre el intervalo Δ, entonces por la definición 2 en la fórmula (22.3) bajo el signo de la integral aparece la diferencial de la función F en los puntos $x \in \Delta \setminus E_f$:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Consideraremos a base de la definición que esta diferencial bajo el signo de la integral se puede escribir en cualquiera de las formas indicadas, es decir, según este acuerdo

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x). \tag{22.6}$$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Supondremos que todas las funciones analizadas están definidas sobre un mismo intervalo finito o infinito Δ.

1°. *Sea la función F continua sobre el intervalo y diferenciable en sus puntos interiores; entonces*

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

o, lo es lo que mismo, véase (22.6)):

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

La validez de esta igualdad se deriva de la definición de integral indefinida como conjunto de todas las funciones continuas sobre el intervalo dado Δ cuya diferencial (en los puntos $x \in \Delta \setminus E_f$) aparece bajo el signo de la integral (véase (22.6)), y de la forma general (22.2) de todas las primitivas de la función dada.

2°. *Supongamos que la función f tiene primitiva sobre el intervalo Δ; entonces para cualquier punto interior del intervalo Δ tiene lugar la igualdad*

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

En la fórmula dada por integral $\int f(x)dx$ se entiende cualquier primitiva F de la función f. La validez de esta fórmula es evidente en virtud de la definición de primitiva.

3°. *Si las funciones f_1 y f_2 tienen primitivas sobre Δ, entonces, la función $f_1 + f_2$ también tiene primitiva sobre Δ, y además*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \tag{22.7}$$

Esta igualdad expresa la coincidencia de dos conjuntos de funciones y significa que la suma de primitivas cualesquiera para las funciones f_1 y f_2 es una primitiva para la función $f_1 + f_2$ y que viceversa, cualquier primitiva para la función $f_1 + f_2$ es la suma de ciertas primitivas para las funciones f_1 y f_2.

La propiedad de la integral expresada por la fórmula (22.7) se llama *aditividad de la integral con respecto a las funciones.*

Sea $\int f_1(x)dx = F_1(x) + C_1$, $\int f_2(x)dx = F_2(x) + C_2$ y, por consiguiente, las funciones F_1 y F_2 son continuas sobre el intervalo Δ y en sus puntos $x \in \Delta \setminus E_{f_1}$ se cumple la condición $F_1'(x) = f_1(x)$ y en los puntos $x \in \Delta \setminus E_{f_2}$ la condición $F_2'(x) = f_2(x)$, donde E_{f_1} y E_{f_2} son ciertos conjuntos finitos.

Hagamos $F = F_1 + F_2$. Entonces la función F es continua sobre el intervalo Δ como suma de las funciones F_1 y F_2 continuas sobre este intervalo y para cualquier punto $x \in \Delta \setminus (E_{f_1} \cup F_{f_2})$ tiene lugar la igualdad

$$F'(x) = [F_1(x) + F_2(x)]' = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

y además, el conjunto $E_{f_1} \cup E_{f_2}$ para los puntos del cual esta igualdad no se cumple, es finito, como unión de dos conjuntos finitos E_{f_1} y E_{f_2}.

Esto significa, que F es la primitiva para la función $f_1 + f_2$ sobre Δ, por esto

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C.$$

De esta forma, la parte izquierda de la fórmula (22.6) está compuesta por las funciones del tipo $F_1(x) + F_2(x) + C$ la parte derecha, por las funciones del tipo $F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$. Por la arbitrariedad de las constantes C, C_1 y C_2, estos conjuntos coinciden. □

4°. *Si la función f tiene primitiva sobre el intervalo Δ y k es un número, entonces la función kf también tiene sobre Δ primitiva, además cuando $k \neq 0$ es válida la igualdad*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx. \tag{22.8}$$

En efecto, sea $\int f(x)dx = F(x) + C$, es decir, F es continua sobre el intervalo Δ y en todos sus puntos, excepto un conjunto finito E_f, se cumple la condición

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \Delta \setminus E_f.$$

Entonces, la función kf también es continua sobre este intervalo y en todos los puntos $x \in \Delta \setminus E_f$ tiene lugar la igualdad $[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$. Esto significa que la función kF es primitiva para kf, y por esto $\int kf(x)dx = kF(x) + C_1$.

De esta forma, la parte izquierda de la fórmula (22.8) es un conjunto de funciones del tipo $kF(x) + C_1$ y la derecha está compuesta por funciones del tipo $k[F(x) + C] = kF(x) + kC$. Por la arbitrariedad de las constantes C y C_1, a condición $k \neq 0$ ambos conjuntos coinciden. □

Corolario (linealidad de la integral). *Si las funciones f_1 y f_2 tienen primitivas sobre el intervalo Δ y $\lambda_1 \in R$ y $\lambda_2 \in R$ son números tales que $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$ entonces* *la función* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *también tiene primitiva sobre* Δ *y además*

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx.$$

Esto se deduce directamente de las propiedades 3° y 4°.

La cuestión sobre la existencia de la primitiva se estudiará algo más tarde (véase el p. 29.2) y ahora analicemos los métodos más simples del cálculo de las primitivas para las funciones elementales.

Ejercicio 1. Demuéstrese que para la función sign x no existe una función F tal que para todos los $x \in \boldsymbol{R}$ se cumpla la igualdad $f'(x) = \operatorname{sign} x$.

22.2. INTEGRALES DE TABLA

La operación de hallar la integral indefinida de una función dada llamada *integración* es la operación inversa a la diferenciación, es decir, a la operación de hallar por una función dada su derivada (véanse las propiedades 1 y 2 de la integral indefinida en el p. 22.1). Por esto, cualquier fórmula que expresa la derivada de una u otra función, es decir, del tipo $F'(x) = f(x)$ puede ser invertida (escrita en forma de fórmula integral):

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Utilizando esta idea escribiremos la tabla de valores de una serie de integrales indefinidas, que se obtiene directamente de la tabla correspondiente de las derivadas de las funciones elementales (véase el § 9)

1. $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha} + 1}{x + 1} + C \quad x > 0, \quad \alpha \neq -1.$

Si el número α es tal, que la potencia x^{α} tiene también sentido para todos los $x \leqslant 0$, entonces la fórmula 1 es válida sobre cualquier intervalo. Por ejemplo, la fórmula

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

es válida sobre todo el eje numérico.

No obstante, para la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$ ya no es posible escribir tal fórmula única, válida para todo su dominio, es decir, para todo el eje numérico, de cual se excluye el cero. En este caso tenemos:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_{\mathrm{I}} & \text{para } x > 0, \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ sobre cualquier intervalo sobre el cual $x \neq 0$.

3. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a_x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$ En particular, $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$

5. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \ |x| < |a|.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$, y además, cuando bajo la raíz aparece $x^2 - a^2$ se supone que $|x| > |a|$.

Claro, se sobreentiende que si el denominador de la función subintegral se anula en cierto punto, entonces las fórmulas escritas serán válidas sólo para aquellos intervalos en los cuales no se anula el denominador indicado (véanse las fórmulas 2, 6, 7, 11, 13, 15). Esta observación se refiere también a las situaciones análogas que nos encontraremos en el futuro y que no serán comentadas especialmente cada vez.

Lo que las derivadas de las funciones que aparecen en las partes derechas de estas fórmulas son las expresiones subintegrales correspondientes se comprueba directamente diferenciando (véanse los ejemplos en el § 9).

Con ayuda de las integrales 1–15 llamadas usualmente *integrales de tabla* y las propiedades de la integral indefinida demostradas anteriormente, se pueden expresar las integrales de funciones elementales más complejas también con funciones elementales.

Por ejemplo

$$\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1}\right) dx =$$
$$= 5\int \cos x\, dx + 2\int dx - 3\int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$
$$= 5\operatorname{sen} x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4\operatorname{arctg} x + C.$$

Señalemos que para cualquier polimonio de grado n existe la primitiva y es un polimonio de grado $n + 1$, más exacto,

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)dx =$$
$$= a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \ldots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + C. \quad (22.9)$$

Esto se deduce de las propiedades 3 y 4 de la integral indefinida (véase el p. 22.1) y de la fórmula 1 de este punto.

Si la primitiva de cierta función f es una función elemental, entonces se dice que la integral $\int f(x)dx$ se expresa con funciones elementales o que esta integral se calcula.

22.3. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN (CAMBIO DE VARIABLE)

En este punto y en el siguiente se analizarán dos propiedades de la integral indefinida que a menudo resultan útiles en el cálculo de las primitivas de las funciones elementales.

Teorema 1. *Sean las funciones $f(x)$ y $\varphi(t)$ definidas respectivamente sobre los intervalos Δ_x y Δ_t, $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$, la función f tiene sobre Δ_x la primitiva $F(x)$ y, por consiguiente,*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (22.10)$$

E_f — es un conjunto finito tal que $E_f \subset \Delta_x$ y para todos los $x \in \Delta_x \setminus E_f$ se cumple la igualdad

$$F'(x) = f(x).$$

Si la función φ es continua sobre el intervalo Δ_t, es diferenciable en todos sus puntos a excepción de cierto conjunto finito y la preimagen total $\varphi^{-1}(E_f)$ del conjunto E_f también es un conjunto finito, entonces la función $f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)$ tiene la primitiva $F[\varphi(t)]$ sobre el intervalo Δ_t y por esto

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C. \quad (22.11)$$

DEMOSTRACIÓN. Las funciones $f(x)$ y $F(x)$ están definidas sobre el intervalo Δ_x y por la condición del teorema es válida la inclusión $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$, por lo que tienen sentido las funciones compuestas $f[\varphi(t)]$ y $F[\varphi(t)]$. Según las condiciones del teorema, la función φ es continua sobre el intervalo Δ_t y existe un conjunto finito — denotémoslo por E_φ — tal que la función φ es diferenciable en todos los puntos $t \in \Delta_t \setminus E_\varphi$. Por consiguiente, la función $F[\varphi(t)]$ es continua sobre Δ_t como la composición de funciones continuas y por la regla de diferenciación de las funciones compuestas, para todos los puntos $t \in \Delta_t \setminus [E_\varphi \cup \varphi^{-1}(E_f)]$ tiene lugar la igualdad

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)] = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

y además, el conjunto $E_\varphi \cup \varphi^{-1}(E_f)$, donde la igualdad indicada no tiene lugar, es un conjunto finito como la unión de dos conjuntos finitos E_φ y $\varphi^{-1}(E_f)$. Esto significa que la función $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ tiene en calidad de una de sus primitivas la función $F[\varphi(t)]$. De aquí se deduce inmediatamente la fórmula (22.11). □

La fórmula (22.9) a menudo se aplica en la práctica para el cálculo de integrales. Para mayor comodidad de su utilización démosle una forma algo diferente. Observando que

$$\int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)} = [F(x) + C]_{x=\varphi(t)} = F[\varphi(t)] + C,$$

transcribamos la fórmula (22.9) en la forma

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\,|_{x=\varphi(t)}. \quad (22.12)$$

De aquí se ve que se puede inicialmente calcular la integral $\int f(x)dx$ y luego en lugar de x poner la función $\varphi(t)$. Esta fórmula usualmente se llama *fórmula de integración por sustitución*. Su parte izquierda se puede escribir de otra forma según la igualdad

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t).$$

Señalemos además, que resulta conveniente utilizar la fórmula (22.12) en el orden inverso, es decir, de derecha a izquierda. Precisamente, a veces resulta cómodo el cálculo de la integral

$$\int f(x)dx$$

con ayuda del cambio de variable correspondiente $x = \varphi(t)$ reducirlo al cálculo de la integral

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

(si esta integral en algún sentido es "más simple" que la inicial), es decir, utilizar la fórmula (22.12) en la forma

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\,|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \quad (22.13)$$

Esta fórmula se deduce directamente de (22.12) si en ambas partes hacemos el cambio de variable $t = \varphi^{-1}(x)$, donde φ^{-1} como siempre denota la función inversa a la función φ. Para que la función φ^{-1} exista, en complemento a las condiciones del teorema 1 es suficiente, por ejemplo, exigir que sobre el intervalo analizado la función φ sea estrictamente monótona. En este caso, como es conocido (véase el p. 6.3) existirá la función inversa unívoca φ^{-1}.

La fórmula (22.13) usualmente se llama *fórmula de integración por cambio de variable.*

Ejemplos. 1. Para el cálculo de la integral $\int \cos ax\,dx$ es natural hacer la sustitución $u = ax$, entonces

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\int \cos u\,du = \frac{1}{a}\operatorname{sen} u + C = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

2. Para el cálculo de integral $\int \frac{xdx}{x^2 + a^2}$ es cómodo aplicar la sustitución $u = x^2 + a^2$:

$$\int \frac{xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(u) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

3. Al calcular las integrales del tipo $\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}$, $\varphi(x) \neq 0$, es útil la sustitución $u = \varphi(x)$:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Por ejemplo,

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

4. Las integrales del tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0$, en el caso cuando la expresión subradical es no negativa sobre cierto intervalo *), fácilmente se reducen, con ayuda de un cambio de variable a integrales de tabla.

En efecto, observando que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, hagamos el cambio de variable $t = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ y pongamos $d = c - \frac{b^2}{4a}$. Entonces $dx = \frac{dt}{\sqrt{|a|}}$ y en virtud de la fórmula (22.11) obtendremos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2 + d}}$$

(frente a t^2 aparece el signo "+" si $a > 0$ y el signo "−" si $a < 0$). La integral que aparece a la derecha, es de tabla (véanse las fórmulas 14 y 15 en el p. 22.2). Hallándola por las fórmulas correspondientes y regresando de la variable t a la x obtendremos la integral buscada.

Con un método semejante se calculan las integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad a \neq 0$$

(véase esto en el p. 24.1).

*) En el caso contrario, es decir, cuando la expresión subradical es negativa para todos los $x \in \boldsymbol{R}$, se obtendrá la integral de una función de valores complejos. Tales integrales aquí no se analizan.

5. La integral $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ se puede calcular con ayuda de la sustitución $x + a \operatorname{sen} t$ (véase también el ejemplo 2 en el p. 22.4). Tenemos $dx = a\cos t dt$ y por esto

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\operatorname{sen} 2t + C.$$

Sustituyendo en la expresión obtenida $t = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$ y observando que

$$\operatorname{sen} 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} = 2\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right)\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right) = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

finalmente tendremos

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Observemos que para la comprobación del resultado obtenido en el cálculo de una integral indefinida, es suficiente diferenciarla, después de lo cual se debe obtener la expresión subintegral de la integral que se calcula.

Otros ejemplos de integración con ayuda del cambio de variable se analizarán en los § 25, 26.

22.4. INTEGRACÍON POR PARTES

Teorema 2. *Si cada una de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ es continua sobre un intervalo dado, diferenciable en todos sus puntos excepto un conjunto finito de ellos y sobre este intervalo existe la integral $\int v du$, entonces sobre este mismo intervalo existe también la integral $\int u dv$ y además*

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{22.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean las funciones $u(x)$ y $v(x)$ continuas sobre el intervalo Δ, la función $u(x)$ no es diferenciable sobre el conjunto finito E_u, la función $v(x)$ no es diferenciable sobre el conjunto finito E_v y $E = E_u \cup E_v$. Es evidente que E también es un conjunto finito y que para todos los puntos $x \in \Delta \setminus E$, por la regla de diferenciación del producto tendremos

$$d(uv) = v du + u dv$$

y por lo tanto

$$u dv = d(uv) - v du.$$

La integral de cada sumando de la parte derecha existe, ya que por la propiedad 1° del p. 22.1

$$\int d(uv) = uv + C$$

y la integral $\int v du$ existe por la condición del teorema. Por esto, según la propiedad 3° del p. 22.1 existe también la integral $\int u dv$ y además

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du. \tag{22.15}$$

Sustituyendo en la parte derecha de (22.15) $uv + C$ en lugar de $\int d(uv)$ y llevando la constante arbitraria C a la integral $\int v du$ obtendremos la fórmula (22.14). □

Con ayuda de la fórmula (22.14) se calculan muchas integrales. En su uso práctico está dada la parte izquierda de (22.14), es decir, la función u y la diferencial dv y por esto v se determina no unívocamente. Usualmente en calidad de v se escoge la función escrita con la fórmula más simple.

Ejemplos. 1. Supongamos que se exige calcular la integral $\int xe^x dx$. Considerando

$$u = x, \quad dv = e^x dx, \quad \text{de donde} \quad du = dx, v = e^x,$$

tenemos

$$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Observemos que tomando $u = e^x$ y $dv = xdx$, de donde $u = e^x$ y $v = x^2/2$ tendremos

$$\int xe^x dx = \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx,$$

es decir, la integración por partes nos llevará a una integral más compleja que la inicial. De aquí se ve que al calcular las integrales con ayuda de la fórmula (22.14) no cada forma de elección de las funciones u y v nos lleva a una integral más simple que la inicial.

2. Calculemos la integral $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ integrando por partes (anteriormente, véase el p. 22.3, ejemplo 5, fue calculada con ayuda de un cambio de variable).

Considerando $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$ y, por consiguiente, $du = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, $v = x$, obtendremos

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{22.16}$$

Sumemos y restemos a^2 en el numerador de la función subintegral de la integral que aparece en la parte derecha de la igualdad; entonces realizando la división por $\sqrt{a^2 - x^2}$ tendremos

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$
$$= a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} - I.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.16) obtendremos:

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} - I. \tag{22.17}$$

Como ya se señaló anteriormente, cualquier igualdad de tal tipo es una igualdad entre dos conjuntos de funciones; los elementos de cada uno de estos conjuntos se diferencian uno de otro en una constante. Por esto, la expresión general para un elemento del conjunto I, según (22.17) tiene la forma

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C.$$

3. A veces para el cálculo de una integral, es necesario aplicar la regla de integración por partes varias veces, por ejemplo,

$$\int \operatorname{arcsen}^2 x\, dx = x \operatorname{arcsen}^2 x - 2 \int \operatorname{arcsen} x \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$
$$= x \operatorname{arcsen}^2 x = 2 \int \operatorname{arcsen} x d\sqrt{1 - x^2} =$$
$$= x \operatorname{arcsen}^2 x = 2 \operatorname{arcsen} x \sqrt{1 - x^2} - 2x + C.$$

4. Si $P_n(x)$ es un polinomio de grado n, entonces para el cálculo de la integral $\int P_n(x) e^{\alpha x} dx$ es necesario aplicar la fórmula de integración por partes n veces. Efectuando esto obtendremos

$$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x} \left(\frac{P_n(x)}{\alpha} - \frac{P_n'(x)}{\alpha^2} + \ldots + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{\alpha^{n+1}} \right) + C.$$

Otros ejemplos de la aplicación de la integración por partes serán analizados en el § 26.

§ 23. ALGUNOS CONOCIMIENTOS SOBRE NÚMEROS COMPLEJOS Y POLINOMIOS

23.1. NÚMEROS COMPLEJOS

Como es conocido del álgebra, se llaman *números complejos* las expresiones del tipo

$$z = x + iy$$

donde $i^2 = -1$ y x e y son números reales cualesquiera. El conjunto de todos los números complejos se denota por C. El número x se llama parte real e y, parte imaginaria del número complejo $z = x + iy$. Esto se escribe de la siguiente forma: $x = \operatorname{Re} x$, $y = \operatorname{Im} z$ *).

Un número complejo z que no sea real, es decir, para el cual $\operatorname{Im} z \neq 0$, lo llamaremos *número esencialmente complejo*. El número $\sqrt{x^2 + y^2}$ se llama módulo del número complejo $z = x + iy$ y se denota por $|z|$, es decir, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A cada número complejo $z = x + iy$ le corresponde un par ordenado de núme-

*) De los vocablos latinos *realis*, real, e *imaginarius*, imaginario.

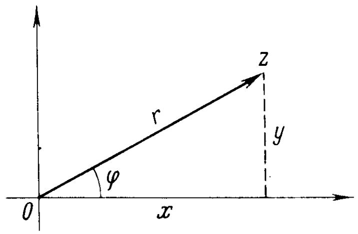


FIG. 103

ros reales (x, y) y viceversa, a cada par ordenado de números reales (x, y) le corresponde el número complejo $z = x + iy$. Por esta relación biunívoca (y también en virtud de otras circunstancias sobre las cuales se hablará posteriormente) el número complejo $z = x + iy$ es cómodo interpretarlo geométricamente o bien como el punto (x, y) o bien como el radio vector sobre el plano con coordenadas x e y (en cierto sistema rectangular de coordenadas cartesianas dado).

El plano coordenado, cuyo punto (x, y) (para $x, y \in \mathbf{R}$ cualesquiera) está identificado con el número $x + yi$ se llama *plano complejo*. En él el eje Ox se llama real y Oy, eje imaginario.

El ángulo φ que forma el radio vector z, $z \neq 0$, con la dirección positiva del eje Ox se llama *argumento* del número complejo z y se denota por $\operatorname{Arg} z$. Los valores φ del argumento del número complejo z tales que $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ usualmente se denotan por $\arg z$. Evidentemente, $\operatorname{Arg} z$ se define por el número complejo $z \neq 0$ salvo un múltiplo entero de 2π, mientras que $\arg z$ ya se determina por el número $z \neq 0$ unívocamente. Es evidente también que

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi,$$

donde $k = 0$ para los cuadrantes primero y cuarto, $k = 1$ para el segundo y $k = -1$ para el tercero. Si $x = 0$, entonces para $y \neq 0$ se considera que $\arg z \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$ y para $x = y = 0$ $\arg z$ no está definido.

Sea $|z| = r$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$, entonces (fig. 103) $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$ y por esto

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

El segundo miembro de esta igualdad se llama *forma trigonométrica del número complejo z.*

Los números complejos $x_1 + y_1 i$ y $x_2 + y_2 i$ se consideran iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Según la definición, se considera también $x + 0i = x$, $0 + yi = yi$, $0 + 0i = 0$.

La suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define por la fórmula

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{23.1}$$

Dicho de otro modo, las partes real e imaginaria de la suma $z_1 + z_2$ son iguales a las sumas de las partes reales e imaginarias correspondientes de z_1 y z_2.

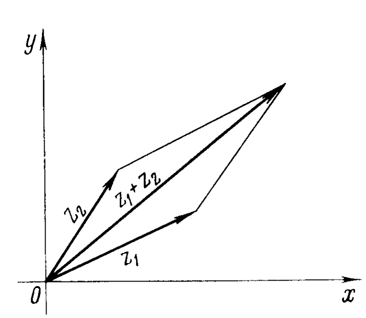


FIG. 104

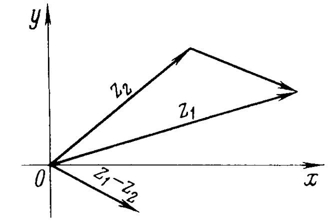


FIG. 105

La *diferencia* de números complejos se define como la operación inversa a la suma, es decir, la diferencia $z = z_1 - z_2$ es número z, tal que $z_2 + z = z_1$. Por consiguiente, si $z = x + iy$, entonces $x_2 + x + i(y_2 + y) = x_1 + iy_1$. De aquí, $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, es decir, las partes real e imaginaria de la diferencia $z_1 - z_2$ son iguales a las diferencias de las partes reales e imaginarias de los números z_1 y z_2, respectivamente.

Por cuanto geométricamente las partes real e imaginaria de un número complejo son sus coordenadas y en la suma (resta) de las coordenadas de los vectores los propios vectores también se suman (restan), entonces la fórmula (23.1) significa que geométricamente los números complejos se suman y restan como los vectores (figs. 104 y 105).

El *producto* de dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define por la fórmula

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \tag{23.2}$$

Hallemos las fórmulas de la multiplicación de números complejos en la forma trigonométrica. Si

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1),\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2),$$

entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2) &+ \\ + i(\cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2)] &= \\ = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]& \end{aligned}$$

y de esta forma

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,\quad \operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2\ ^{*)}. \tag{23.3}$$

Por el método de inducción matemática es fácil mostrar que

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| + |z_1|\cdot|z_2| \ldots |z_n|,$$
$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2 \ldots z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \ldots + \operatorname{Arg} z_n.$$

---

*) Esta igualdad, como en general todas las igualdades que contienen Arg, es necesario entenderla como la igualdad de los conjuntos correspondientes.

De aquí, considerando $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, para la potencia z^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, de un número complejo z tenemos

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{*)},$$

en particular, para $|z| = 1$, es decir, cuando $z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$,

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi. \tag{23.4}$$

Esta relación se llama fórmula de Moivre **).

La división $\dfrac{z_1}{z_2}$ de un número complejo z_1 por un número complejo $z_2 \neq 0$ se define como la operación inversa a la multiplicación, es decir, el número $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ se llama *cociente de la división* de z_1 por z_2 si $z_1 = z_2 z$. Por esto

$$|z_1| = |z_2|\,|z| \quad \text{y} \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{Arg} z,$$

de donde

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} + \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{23.5}$$

Con las fórmulas (23.5) el número complejo $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ para los z_1 y $z_2 \neq 0$ dados evidentemente está definido unívocamente. Una serie de propiedades de los números complejos como, por ejemplo, la conmutatividad y asociatividad de la adición y la multiplicación, la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición y otras propiedades se deducen directamente de las fórmulas, con ayuda de las cuales están definidas estas operaciones para los números complejos y de las propiedades correspondientes de los números reales. Por esto no nos detendremos detalladamente en ellas.

La raíz de n-ésimo orden $w = \sqrt[n]{z}$ del número complejo z se define como el número w, cuya n-ésima potencia es igual a la expresión subradical:

$$w^n = z.$$

Si

$$z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \quad \text{y} \quad w = \rho(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi)$$

entonces

$$\rho^n(\cos n\psi + i \operatorname{sen} n\psi) = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi);$$

de donde

$$\rho = \sqrt[n]{r}.$$

Aquí la raíz se entiende en el sentido aritmético como un número real no negativo, ya que según la definición, del módulo de un número complejo $\rho \geqslant 0$.

A continuación

$$n\psi = \varphi + 2k\pi \quad (k \text{ es entero}), \quad \text{ó} \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

*) Observemos que $\operatorname{Arg} z^n \neq n \operatorname{Arg} z$, $n = 2, 3, \ldots$

**) A. Moivre (1667—1754), matemático francés.

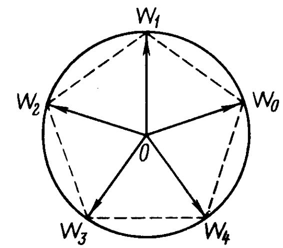


FIG. 106

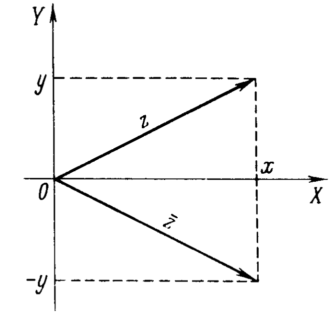


FIG. 107

En esencia se obtienen diferentes valores del argumento para los valores $k = 0, 1, \ldots, n - 1$: diferentes en el sentido de que si denotamos estos valores del argumento por ψ_k y hacemos $w_k = \rho(\cos\psi_k + i \operatorname{sen}\psi_k)$, entonces cuando $\rho \neq 0$ se obtendrán diferentes números complejos. Para todos los k restantes los valores de ψ se diferenciarán de los números ψ_k indicados, en un múltiplo de 2π, es decir, estos valores del argumento nos llevarán a uno de los números complejos w_k, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. De esta forma, la raíz $\sqrt[n]{z}$ tiene para $z \neq 0$ exactamente n valores $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$.

En el plano complejo, los números w_k, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, se encuentran en los vértices del polígono regular de n lados inscrito en el círculo de radio ρ con centro en el origen de coordenadas. Esto se deduce de que el argumento del número w_k se diferencia del argumento del número w_{k-1} para todos los $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ en un mismo número $2\pi/n$. En la fig. 106 está representado el caso de $n = 5$.

A cada número complejo $z = x + iy$ le corresponde el número $x - iy$ que se llama *conjugado* a z y se denota por $\bar{z}$; $\bar{z} = x - iy$. Geométricamente el número $\bar{z}$ se representa con el vector simétrico a z con respecto al eje Ox (fig. 107).

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS

1° $|\bar{z}| = |z|$, $\arg \bar{z} = -\arg z$.

2°. $z\bar{z} = |z|^2$.

3°. $\bar{\bar{z}} = z$.

4°. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

5°. $\overline{z_1 - z_2} + \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

6°. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

7°. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$.

La propiedad 1 es evidente (véase la fig. 107).

A continuación, por la regla de la multiplicación de números complejos

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \ \square$$

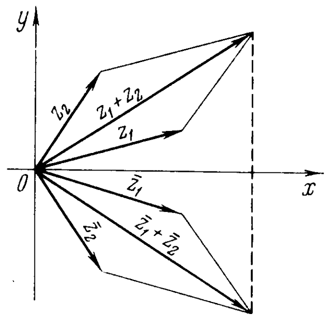


FIG. 108

La propiedad 3 también es evidente: si $z = x + iy$, entonces $\bar{z} = x - iy$ y $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$. □

De la validez de la propiedad 4 es posible convencerse geométricamente tomando un paralelogramo simétrico, con respecto al eje Ox, al paralelogramo construido con los vectores z_1 y z_2 como lados (fig. 108), es decir, el paralelogramo extendido sobre los vectores $\bar{z}_1$ y $\bar{z}_2$. Las diagonales de estos paralelogramos también serán simétricas una a otra con respecto al eje Ox y por consiguiente serán iguales a $\overline{z_1 + z_2}$ y $z_1 + z_2$, respectivamente. Por otro lado, la última diagonal, como la suma de los vectores $\bar{z}_1$ y $\bar{z}_2$ es igual también a $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$. □

La propiedad 5° se demuestra análogamente.

Las propiedades 6° y 7° se deducen de que los módulos y los argumentos de las expresiones que aparecen en las diferentes partes de las igualdades correspondientes coinciden. En efecto, utilizando la propiedad 1 obtendremos

$$|\overline{z_1 z_2}| = |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |\bar{z}_1| \cdot |\bar{z}_2| = |\bar{z}_1 \cdot \bar{z}|,$$

$$\operatorname{Arg} \overline{z_1 z_2} = -\operatorname{Arg} z_1 z_2 = -(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) =$$
$$= -\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} \bar{z}_1 + \operatorname{Arg} \bar{z}_2 + \operatorname{Arg} \bar{z}_1 \bar{z}_2. \ \square$$

De forma análoga se demuestra la propiedad 7°.

Para números complejos z_1 y z_2 cualesquiera es válida la *desigualdad triangular*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \text{ y su consecuencia } ||z_1| - |z|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

La primera de estas desigualdades geométricamente significa que la longitud de un lado de un triángulo no sobrepasa la suma de las longitudes de sus otros dos lados (véase la fig. 104) y la segunda, que la diferencia de las longitudes de dos lados de un triángulo no sobrepasa la longitud del tercer lado (véase la fig. 105).

23.2. *) TEORÍA FORMAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El lector reflexivo prestó atención a que el enunciado dado en p. 23.1 "la expresión del tipo $z = x + iy$ se llama número complejo" no es una definición exacta de los números complejos.

El conjunto de los números complejos $\boldsymbol{C}$ se puede definir como el conjunto de los pares ordenados (x, y) de números reales, $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$, en el cual están introducidas las operaciones de suma y multiplicación por la siguiente definición:

$$(x, y) + (x', y') \overset{\text{def}}{=} (x + x', y + y'),$$

$$(x, y)\,(x', y') \overset{\text{def}}{=} (xx' - yy', xy' + x'y),$$

$$(x, y) \in \boldsymbol{C}, \quad (x', y') \in \boldsymbol{C}.$$

No es difícil comprobar que como resultado de esta definición, el conjunto de los pares indicados se convierte en un campo, es decir, satisface las condiciones I, II, III del p. 2.1. El campo obtenido de esta forma y también cada campo isomorfo a él se llama *campo de los números complejos.*

Los pares $(x, 0)$ se denotan simplemente por x (su conjunto es isomorfo al campo de los números reales) y el par $(0, 1)$ se denota por i: $i \overset{\text{def}}{=} (0, 1)$.

Por la operación definida de multiplicación

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1, \quad \text{es decir,} \quad i^2 = -1.$$

Para cualquier número complejo (x, y) tiene lugar la identidad fácilmente comprobable

$$(x, y) = x + iy.$$

En efecto

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy,$$

y de nuevo llegamos a la escritura de los números complejos de la cual partimos en el p. 23.1.

23.3. ALGUNOS CONCEPTOS DEL ANÁLISIS EN LA REGIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los conceptos de sucesión numérica y su límite se generalizan fácilmente al caso de los números complejos.

Una función definida sobre un conjunto de números naturales cuyos valores son números complejos se llama *sucesión de números complejos.* Como en el caso de los números reales al número complejo z correspondiente al número natural n se le adjunta el índice n: z_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Definición 1. *Sea dada una sucesión de números complejos* $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *El número* $\zeta = \xi + i\eta$ *se llama su límite si para cualquier número real* $\varepsilon > 0$ *existe un número* n_ε *tal que para* $n \geqslant n_\varepsilon$ *se cumple la desigualdad*

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon.$$

En este caso se escribe $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \zeta$ y se dice que la sucesión $\{z_n\}$ converge al número ζ.

Así pues, por su forma, esta definición es exactamente la misma que la del límite de una sucesión de números reales.

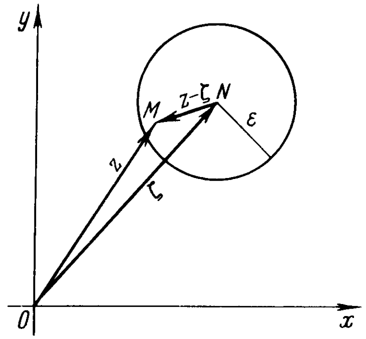


FIG. 109

Geométricamente, si denotamos por M_n el extremo del radio vector z_n, es decir, el punto con coordenadas (x_n, y_n) y por N el punto con coordenadas (ξ, η), entonces la igualdad $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \zeta$ tendrá lugar si y sólo si $\lim\limits_{n \to \infty} M_n + N$ en el sentido del p. 18.1. Esto se deduce directamente de que el conjunto de los extremos $M = (x, y)$ de los vectores $z = x + iy$ tales que $|z - \zeta| < \varepsilon$ forman un ε-entorno del punto $N = (\xi, \eta)$ (fig. 109).

De lo dicho se deduce (véase el p. 18.1) que la sucesión $z_n + x_n + iy_n$ converge al número $\zeta = \xi + i\eta$ si y sólo si

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = \eta.$$

La sucesión de números complejos que tiene el cero como su límite se llama *infinitesimal.*

A las sucesiones de números complejos, de forma natural, se extiende una serie de teoremas sobre los límites de las sucesiones de números reales, por ejemplo, el teorema sobre la unicidad del límite, sobre la acotación de una sucesión que tenga límite, el criterio de Cauchy, etc.

En el § 8 fueron introducidas las notaciones "o" y "O" para la comparación de funciones. En el futuro, se necesitarán esas mismas notaciones para las sucesiones.

Definición 2. *Diremos que la sucesión $\{z_n\}$ está acotada con respecto a la sucesión $\{w_n\}$ y escribiremos $z_n = O(w_n)$ *) si existe una constante $c > 0$ tal que* $|z_n| \leqslant c(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Esta definición en el caso de $w_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, es equivalente a la siguiente: para las dos sucesiones dadas $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ existen una constante $c' > 0$ y un número n_0 tales que

$$|z_n| \leqslant c' |w_n|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots .$$

*) A veces a esto se agrega: cuando $n \to \infty$.

En efecto, suponiendo en este caso

$$c = \text{máx}\left\{\left|\frac{z_1}{w_1}\right|, \left|\frac{z_2}{w_2}\right|, \ldots, \left|\frac{z_{n_0-1}}{w_{n_0-1}}\right| c'\right\}$$

obtendremos

$$|z_n| \leqslant c|w_n|, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

es decir, la definición inicial.

Definición 3. *Si $z_n = O(w_n)$ y $w_n = O(z_n)$, entonces diremos que las sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son de un mismo orden y escribiremos $z_n \asymp w_n$.*

Definición 4. *Diremos que la sucesión $\{z_n\}$ es infinitesimal con respecto a la sucesión $\{w_n\}$ y escribiremos $z_n = o(w_n)$ si existe una sucesión infinitesimal $\{\alpha_n\}$ tal que $z_n = \alpha_n w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Definición 5. *Las sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ se llaman equivalentes o iguales asintóticamente si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 1 \quad \text{y} \quad z_n = \varepsilon_n w_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

En este caso se escribe $z_n \sim w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que para que $z_n \sim w_n$ es necesario y suficiente que $z_n = w_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Demuéstrese: si $z_n = cw_n + o(w_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces $z_n = O(w_n)$.

También se pueden analizar las funciones de argumento complejo. Por ejemplo, $f(z) = |z|$, $f(z) = z^2$. Ambas funciones están definidas sobre el conjunto de todos los números complejos, la primera de ellas toma sólo valores reales no negativos, la segunda toma también valores esencialmente complejos.

Geométricamente, si la función $f(z)$ está definida sobre cierto conjunto X del espacio euclídeo n-dimensional R^n y toma valores complejos, entonces define una aplicación del conjunto X en el plano. Por ejemplo, la función del conjunto $w = |z|$ aplica el plano en una semirrecta y la función $w = z^2$ todo el plano en todo el plano, como se dice, de una forma doble, en el caso dado, esto significa que en la aplicación $w = z^2$ cada punto de la imagen menos el cero tiene una preimagen compuesta por dos puntos.

Si el conjunto X sobre el cual se da cierta función está en el plano R^2, entonces se puede analizar siempre para un sistema de coordenadas fijo como un conjunto de números complejos y la función dada como una función de argumento complejo.

Para las funciones de valores complejos definidas sobre un conjunto X del espacio n-dimensional R^n se pueden introducir muchos de los conceptos introducidos anteriormente para las funciones de valores reales (límite, continuidad, derivadas parciales, diferenciabilidad, integral y otros). En los párrafos próximos nos veremos obligados a encontrarnos sólo con el concepto de acotación y continuidad de funciones de valores complejos.

La función de valores complejos $f(P)$, $P \in X$ se llama *acotada sobre el comjunto X* si sobre este conjunto está acotada la función $|f(P)|$.

De esta forma, el concepto de que la función f de valores complejos es acotada se reduce al concepto de que la función $|f|$ de valores reales es acotada.

Definición 6. *Sea f una función de valores complejos definida sobre el conjunto $X \subset R^n$ y sea $P_0 \in X$. La función f se llama continua en el punto P_0 si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que para todos los puntos $P \in X$ que satisfacen la condición $\rho(P, P_0) < \delta$, se cumple la desigualdad*

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Vemos que por su forma esta definición coincide completamente con la definición de continuidad para las funciones de valores reales (compárese con el p. 19.3).

En el caso cuando X es un conjunto plano y por lo tanto sus puntos se pueden analizar como números complejos z, la definición de continuidad toma la forma: la función $f(z)$ es continua en el punto $z_0 \in X$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los $z \in X$ que satisfacen la condición $|z - z_0| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Una función de valores complejos continua en cada punto de cierto conjunto se llama continua sobre este conjunto. Por la definición de continuidad de una función y la desigualdad

$$||f(P)| - |f(P_0)|| \leqslant |f(P) - f(P_0)|,$$

es evidente que si la función $f(P)$ definida sobre el conjunto $X \subset R^n$, es continua en algún punto P_0 de este conjunto: $P_0 \in X$, entonces la función de valores reales $|f(P)|$ es continua sobre este conjunto. Por esto, si la función de valores complejos f es continua sobre el compacto $X \subset R^n$, entonces, por lo dicho, la función $|f|$ también es continua y por consiguiente acotada sobre este compacto. Esto, según la definición dada anteriormente de la acotación de función significa que la propia función f está acotada. De esta forma, para las funciones continuas de valores complejos es válido el análogo de la primera afirmación del teorema de Weierstrass (véase el teorema 3 en el p. 19.4): una función continua sobre un compacto está acotada sobre él.

A las funciones de valores complejos también se trasladan los teoremas de que si dos funciones f y g definidas sobre cierto conjunto $X \subset R^n$ son continuas en el punto $P_0 \in X$, entonces las funciones $f + g$, fg y si $g(P_0) \neq 0$, entonces también f/g son continuas en este punto. De este teorema se deduce, por ejemplo, que cualquier polinomio $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ con coeficientes complejos a_k, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$, es continuo en cualquier punto $z_0 \in C$ (compárese con el p. 7.1).

23.4. DESCOMPOSICIÓN DE POLINOMIOS EN FACTORES

Sea

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 \tag{23.6}$$

un polinomio con coeficientes complejos, en general, A_j, $j = 0, 1, \ldots, n$. Si $A_n \neq 0$, entonces el número n se llama *grado del polinomio*.

Del álgebra es conocido que si el grado m del polinomio $Q_m(x)$ no sobrepasa el grado n del polinomio $P_n(x)$, entonces existen los polinomios $S_k(x)$ de grado k y $R_l(x)$ de grado l, tales que $n = m + k$, $0 \leqslant l < m$, y el polinomio $P_n(x)$ es representable en la forma

$$P_n(x) = S_k(x) Q_m(x) = R_l(x).$$

Además, tal representación es única.

La operación de hallar los polinomios $S_k(x)$ y $R_l(x)$ según los polinomios dados $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ se llama *división del polinomio* $P_n(x)$ entre $Q_m(x)$; el polinomio $P_n(x)$, *dividendo*; $Q_m(x)$, *divisor*; $S_k(x)$, *cociente* y $R_l(x)$, *residuo* de la división de $P_n(x)$ entre $Q_m(x)$.

Señalemos que de $m = 1$ se deduce que $l = 0$, es decir, en este caso el residuo de la división es una constante.

El número complejo z_0 tal que

$$P_n(z_0) = 0,$$

se llama *raíz* del polinomio dado (23.6).

Si el polinomio $P_n(z)$ de grado $n \geqslant 1$ se divide por $z - \zeta$, donde ζ es un número complejo cualquiera, entonces obtendremos

$$P_n(z) = (z - \zeta) Q_{n-1}(z) + r,$$

donde $Q_{n-1}(z)$ es un polinomio de grado $n - 1$, y el resto r es una constante. De aquí se deduce directamente que el número z_0 es una raíz del polinomio $P_n(z)$ si y sólo si el polinomio $P_n(z)$ es divisible sin resto por $z - z_0$ (teorema de Bézout *)).

Si el polinomio $P_n(z)$ es divisible por $(z - z_0)^k$ (k es un entero positivo) y no es divisible por $(z - z_0)^{k+1}$, entonces el número k se llama *multiplicidad de la raíz* z_0.

De esta forma, si el número complejo z_0 es una raíz de multiplicidad k del polinomio $P_n(z)$, entonces

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z)$$

donde $Q_{n-k}(z)$ es un polinomio de grado $n - k$, tal que $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

El el curso de álgebra se demuestra que *cualquier polinomio $P_n(z)$ de grado $n \geqslant 1$ tiene al menos una raíz* z_1. Si su multiplicidad es igual a k_1, entonces, como se ha señalado, es válida la descomposición

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z), \quad Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0,$$

donde el grado del polinomio $Q_{n-k_1}(z)$ es menor que n. El polinomio $Q_{n-k_1}(z)$, si su grado es mayor que 1, tiene también al menos una raíz z_2. Si la multiplicadad de esta raíz es igual a k_2, entonces

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z),$$
$$Q_{n-k_1-k_2}(z_1) \neq 0, \quad Q_{n-k_1-k_2}(z_2) \neq 0.$$

*) E. Bézout (1730—1783), matemático francés.

Condinuando este proceso, después de un número finito m de pasos obtendremos un polinomio de grado cero $P_{n-k_1-\dots-k_m}(z) = A_n$, y por lo tanto, para el polinomio $P_n(z)$ es válida la siguiente descomposición en factores

$$P_n(z) = A_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}\dots(z - z_m)^{k_m}, \tag{23.7}$$

donde $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, de donde se deduce que *cada polinomio de grado $n \geqslant 1$ tiene exactamente n raíces, si cada raíz se cuenta tantas veces como sea su multiplicidad.*

Para el polinomio (23.6) designemos por $\bar{P}_n(z)$ al polinomio cuyos coeficientes son los números complejos conjugados de los coeficientes del polinomio $P_n(z)$:

$$\bar{P}_n(z) = \bar{A}_n z^n + \bar{A}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \bar{A}_1 z + \bar{A}_0.$$

El polinomio $\bar{P}_n(z)$ se llama polinomio *conjugado* del polinomio $P_n(z)$.

En virtud de las propiedades de los números complejos tenemos

$$\overline{P_n(z)} = \bar{P}_n(\bar{z})$$

En realidad,

$$\overline{P_n(z)} = \overline{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_n z + A_0} =$$
$$= \bar{A}_n \bar{z}^n + \bar{A}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{A}_n \bar{z} + \bar{A}_0 = \bar{P}_n(\bar{z})$$

Es evidente también que $\bar{\bar{P}}(z) = P(z)$.

Mostremos que si el número z_0 es una raíz del polinomio $P_n(z)$ de multiplicidad k, entonces el número conjugado de él $\bar{z}_0$ es una raíz del polinomio conjugado $\bar{P}_n(z)$ y además de la misma multiplicidad.

En efecto, pasando en las fórmulas

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

a las expresiones conjugadas, obtendremos

$$\bar{P}_n(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Suponiendo para mayor claridad $\zeta = \bar{z}(\bar{z}$ y también z son números complejos arbitrarios) transcribamos las fórmulas obtenidas en la forma

$$\bar{P}_n(\zeta) = (\zeta - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\zeta), \quad \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Esto significa que el número $\bar{z}_0$ es una raíz de multiplicidad k para el polinomio $\bar{P}_n(z)$.

Sean ahora todos los coeficientes del polinomio $P_n(z)$, números reales. En este caso el polinomio conjugado $\bar{P}_n(z)$, evidentemente coincide con el propio polinomio $P_n(z)$. Por esto, de lo demostrado se deduce que si el número complejo z_0 es una raíz de multiplicidad k del polinomio $P_n(z)$ con coeficientes reales, entonces también el número conjugado de él $\bar{z}_0$ es una raíz de multiplicidad k de este polinomio.

Señalemos a continuación que el producto $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ es siempre un polinomio (respecto a z) con coeficientes reales. En efecto, sea $z_0 = a + bi$, donde a y b son reales. Entonces $\bar{z}_0 = a - bi$, y por esto

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - a - bi)(z - a + bi) =$$
$$= (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a_2 + b^2 = z^2 + pz + q, \tag{23.8}$$

donde se ha hecho $p = -2a$ y $q = a^2 + b^2$, evidentemente p y q son reales. Señalemos que $\frac{p^2}{4} - q = -b^2$, por esto, cuando $b \neq 0$, es decir, cuando la raíz z_0 es un número esencialmente complejo se cumple la desigualdad

$$\frac{p^2}{4} - q < 0. \tag{23.9}$$

Prestemos atención también a la validez de la afirmación inversa: si se cumple la desigualdad (23.9), entonces las raíces del trinomio $z^2 + pz + q$ (p y q son reales) son números esencialmente complejos.

De lo dicho se deduce que para cualquier polinomio de grado n con coeficientes reales es válida la descomposición en factores del tipo

$$P_n(x) = A_n(x - a_1)^{\alpha_1}\dots(x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}\dots$$
$$\dots(x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}, \tag{23.10}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2\sum_{i=1}^{s} \beta_i = n, \quad \frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

y todos los coeficientes $A_n, a_1 \dots, a_r; p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$, son reales. En este caso $a_1, \dots, a_r$ son todas las raíces reales del polinomio $P_n(x)$, y a cada raíz esencialmente compleja z_0 y a su raíz conjugada $\bar{z}_0$ le corresponde un factor del tipo $x^2 + px + q = (x - z_0)(x - \bar{z}_0)$. En lugar de la letra z, que ha sido utilizada con anterioridad para designar el argumento del polinomio analizado, aquí se ha empleado la letra x, como es tradicional, para subrayar que el análisis se realiza en la región real.

La fórmula (23.10) se deduce directamente de las fórmulas (23.7) y (23.8): es necesario agrupar, en la descomposición (23.7), por parejas los factores con raíces conjugadas y escribir los productos del tipo $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ en la forma (23.8).

Entonces, notando que la multiplicidad de las raíces conjugadas z_0 y $\bar{z}_0$ son iguales, obtendremos la fórmula (23.10).

La descomposición de un polinomio en factores del tipo (23.10) es única, ya que se determina unívocamente por las raíces de este polinomio y por sus multiplicidades.

23.5.* MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE POLINOMIOS

Sea dado un polinomio $P(x)$. Cualquier polinomio $R(x)$, por el cual se divide el polinomio $P(x)$, es decir,

$$P(x) = R(x)r(x), \tag{12.11}$$

donde $r(x)$ también es un polinomio, se llama *divisor* del polinomio $P(x)$.

Hemos visto que el polinomio $P(x)$ se puede escribir en la forma

$$P(x) = A(x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}, \quad (23.12)$$

donde $a_1, \dots, a_r$ son las raíces reales del polinomio, y los factores del tipo $x^2 + p_jx + q_j$ corresponden a las raíces esencialmente complejas de este polinomio,

$$\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, s;$$

los coeficientes A, p_j y q_j ($j = 1, 2, \dots, s$) son reales. De aquí se deduce que cualquier divisor $R(x)$ del polinomio $P(x)$ puede ser escrito en la forma

$$R(x) = B(x - a_1)^{\lambda_1} \dots (x - a_r)^{\lambda_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\mu_s}, \quad (23.13)$$

donde $\lambda_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\mu_j \leqslant \beta_j$,

$$j = 1, 2, \dots, s. \quad (23.14)$$

En realidad, ningún otro factor que no sea del tipo

$$x - a \quad \text{y} \quad x^2 + px + q, \quad (23.15)$$

donde a, p y q son reales y $\frac{p^2}{4} - q < 0$, puede aparecer en la descomposición del polinomio $R(x)$, ya que por un lado, el polinomio $R(x)$, como cualquier polinomio puede ser descompuesto en factores del tipo (23.15), por otro lado, de la fórmula (23.11) se deduce que si en la descomposición de $R(x)$ en factores se tiene el factor del tipo $x - a$, respectivamente del tipo $x^2 + px + q$, entonces $x = a$, respectivamente las raíces del trinomio $x^2 + px + q$, son precisamente raíces del polinomio $P(x)$; por esto, los factores indicados aparecen en la descomposición (23.12). Las desigualdades (23.14) también son evidentes: de la misma fórmula (23.11) se deduce que la multiplicidad de una raíz del polinomio $R(x)$ no puede sobrepasar la multiplicidad de esa misma raíz del polinomio $P(x)$.

Sean ahora dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. Cualquier polinomio que sea divisor tanto del polinomio $P(x)$ como del polinomio $Q(x)$ se llama su *divisor común*. El divisor común de dos polinomios que se divide por cualquier divisor común de estos polinomios, se llama su *máximo común divisor*.

Si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ están escritos en el forma (23.12):

$$P(x) = A'(x - a_1')^{\alpha_1'} \dots (x - a'_{r'})^{\alpha'_{r'}}(x^2 + p_1' + q_1')^{\beta_1'} \dots$$
$$\dots (x^2 + p'_{s'}x + q'_{s'})^{\beta'_{s'}}, \quad (23.16)$$

$$Q(x) = A''(x - a_1'')^{\alpha_1''} \dots (x - a''_{r''})^{\alpha''_{r''}}(x^2 + p_1''x + q_1'')^{\beta_1''} \dots$$
$$\dots (x^2 + p''_{s''}x + q''_{s''})^{\beta''_{s''}}, \quad (23.17)$$

entonces cualquiera de sus divisores comunes $R(x)$ se puede escribir de la forma (23.13), donde los factores

$$x - a_k \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad x^2 + p_lx + q_l \quad (l = 1, 2, \dots, s) \quad (23.18)$$

aparecen tanto en la descomposición (23.16) como en la descomposición (23.17).

Supongamos que los índices de los coeficientes de los factores de (23.18) en las descomposiciones (23.16) y (23.17) son iguales a i_k', j_l' e i_k'', j_l'', respectivamente, entonces por las desigualdades (23.14) tenemos

$$\begin{aligned} &\lambda_k \leqslant \alpha'_{i_k'}, \quad \lambda_k \leqslant \alpha''_{i_k''}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \\ &\mu_l \leqslant \beta'_{j_l'}, \quad \mu_l \leqslant \beta''_{j_l''}, \quad l = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (23.19)$$

Para que el polinomio (23.13) sea el máximo común divisor de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es necesario y suficiente que los exponentes de las potencias λ_k, $k = 1, 2, \dots, r$ y μ_l, $l = 1, 2, \dots, s$ sean los máximos entre los posibles, es decir, que

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \min\{\alpha'_{i_k'}, \alpha''_{i_k''}\}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \\ &\mu_l = \min\{\beta'_{i_l'}, \beta''_{i_l''}\}, \quad l = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (23.20)$$

En efecto, cuando se cumplen estas condiciones el polinomio $R(x)$ será un divisor común de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ y además se dividirá por cualquier polinomio del tipo (23.13) para el cual se cumplen las condiciones (23.19), es decir, $R(x)$ se dividirá por cualquier divisor común de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. □

Del tipo hallado de un común divisor, en particular del máximo común divisor, se deduce en primer lugar, que al máximo común divisor de dos polinomios no es único, no obstante dos máximos comunes divisores de dos polinomios dados pueden diferenciarse uno de otro sólo en un factor constante (la constante B en la fórmula (23.13), se puede tomar arbitraria, no igual a cero); en segundo lugar, que el máximo común divisor de dos polinomios tiene un grado mayor que cualquiera de sus divisores comunes que no sea máximo común divisor.

En calidad de ejemplo útil para el futuro hallemos el máximo común divisor de un polinomio $P(x)$ y su derivada $P'(x)$.

Observemos previamente que si el número a es una raíz real de multiplicidad α del polinomio $P(x)$, es decir,

$$P(x) = (x - a)^\alpha P_1(x), \quad P_1(a) \neq 0, \quad (23.21)$$

entonces a es una raíz de multiplicidad $\alpha - 1$ del polinomio $P'(z)$.

En efecto, diferenciando (23.21) tenemos

$$P'(x) = \alpha(x - a)^{\alpha - 1}P_1(x) + (x - a)^\alpha P_1'(x) = (x - a)^{\alpha - 1}P_2(x),$$

donde

$$P_2(x) = \alpha P_1(x) + (x - a)P_1'(x)$$

y

$$P_2(a) = \alpha P_1(a) \neq 0.$$

De forma semejante, si

$$P(x) = (x^2 + px + q)^\beta P_3(x), \quad (23.22)$$

donde $\frac{p^2}{4} - q < 0$ y por lo tanto las raíces z_1 y z_2 ($z_2 = \bar{z}_1$) del trinomio $x^2 + px + q$ son esencialmente complejas, y si

$$P_3(z_1) \neq 0, \quad P_3(z_2) \neq 0, \quad \text{entonces } P'(x) = (x^2 + px + q)^{\beta - 1} P_4(x)$$

donde $P_4(z_1) \neq 0$, $P_4(z_2) \neq 0$, es decir, $P_4(z)$ no se divide por $x^2 + px + q$.

En efecto, diferenciando (23.22) obtendremos:

$$P'(x) = \beta(x^2 + px + q)^{\beta - 1}(2x + p)P_3(x) + \\ + (x^2 + px + q)^{\beta} P_3'(x) = (x^2 + px + q)^{\beta - 1} P_4(x),$$

donde $P_4(x) = \beta(2x + p)P_3(x) + (x^2 + px + q)P_3'(x)$ de donde se deduce que

$$P_4(z_1) = \beta(2z_1 + p)P_3(z_1) \neq 0, \quad P_4(z_2) = \beta(2z_2 + p)P_3(z_2) \neq 0,$$

ya que $z_1 \neq -p/2$ y $z_2 \neq -p/2$ al ser esencialmente complejas. □

De lo demostrado se deduce que si el polinomio $P(x)$ está escrito en la forma (23.12), entonces su derivada $P'(x)$ se puede representar en la forma

$$P'(x) = C(x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r - 1}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1} \dots \\ \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s - 1} P_5(x),$$

donde el polinomio $P_5(x)$ no se divide ni por $x - a_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, ni por $x^2 + p_j x + q_j$, $j = 1, 2, \dots, s$, es decir, no tiene raíces comunes con el polinomio $P(x)$.

De las fórmulas (23.13) y (23.20) obtenemos que el máximo común divisor $R(x)$ del polonomio $P(x)$ y su derivada $P'(x)$ tiene la forma

$$R(x) = (x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r - 1}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1} \dots \\ \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s - 1}. \quad (23.23)$$

El método desarrollado anteriormente de la obtención del máximo común divisor de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, en principio resuelve completamente la cuestión sobre la existencia y el aspecto del máximo común divisor. No obstante, prácticamente su aplicación puede provocar dificultades sustanciales: para la utilización de este método es necesario conocer las descomposiciones en factores del tipo (23.16) y (23.17) de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ dados, las cuales no siempre se logran escribir de forma explícita.

No obstante, existe otro método de obtención del máximo común divisor de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ llamado comúnmente *algoritmo de Euclides* *). Describámoslo.

Sea para mayor exactitud el grado del polinomio $P(x)$ mayor o igual al grado del polinomio $Q(x)$. Dividiendo $P(x)$ por $Q(x)$, obtendremos en calidad de cociente cierto polinomio $Q_1(x)$ y de residuo $R_1(x)$, cuyo grado evidentemente es menor que el grado del polinomio $Q(x)$ (en el caso contrario hubiera sido posible continuar el proceso de dividir por $Q(x)$):

$$P(x) = Q(x)Q_1(x) + R_1(x).$$

*) Euclides (apr. 365 — apr. 300 a. n. e.), matemático de la Antigua Grecia.

De esta fórmula se deduce: 1) si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se dividen por cierto polinomio $r(x)$, entonces el polinomio $R_1(x)$ también se divide por este polinomio: 2) si los polinomios $Q(x)$ y $R_1(x)$ se dividen por cierto polinomio $r(x)$, entonces el polinomio $P(x)$ también se divide entre este polinomio $r(x)$. De aquí a su vez se deduce que los divisores comunes de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, en particular sus máximos comunes divisores coinciden con los divisores comunes, respectivamente con los máximos comunes divisores, de los polinomios $Q(x)$ y $R_1(x)$.

Dividamos a continuación el polinomio $Q(x)$ por el polinomio $R_1(x)$:

$$Q(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x),$$

continuando el proceso más adelante, tendremos

$$R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_k(x) + R_k(x).$$

Los grados de los polinomios $R_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, decrecen, por esto existe un número (lo denotaremos por $m + 1$) tal que $R_{m+1}(x) = 0$ y por consiguiente

$$R_{m-1}(x) = R_m(x)Q_{m+1}(x).$$

Los pares de polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, $Q(x)$ y $R_1(x)$, $R_1(x)$ y $R_2(x)$ ... ... $R_{m-1}(x)$ y $R_m(x)$ tienen divisores comunes iguales y esto significa que tienen máximos comunes divisores iguales. Pero $R_{m-1}(x)$ se divide por $R_m(x)$, por lo que $R_m(x)$ es el máximo común divisor de $R_{m-1}(x)$ y $R_m(x)$, y quiere decir que también es el máximo común divisor de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

23.6. DESCOMPOSICIÓN DE LAS FRACCIONES RACIONALES PROPIAS EN FRACCIONES ELEMENTALES

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales.

La fracción racional $P(x)/Q(x)$ se llama propia si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$.

Si la fracción racional $P(x)/Q(x)$ no es propia, entonces realizando la división del numerador por el denominador según la regla de división de polinomios se puede representar en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \qquad (23.24)$$

donde $R(x)$, $P_1(x)$ y $Q_1(x)$ son ciertos polinomios y $P_1(x)/Q(x)$ es una fracción racional propia.

Lema 1. *Sea $P(x)/Q(x)$ una fracción racional propia. Si el número a es una raíz real de multiplicidad $\alpha \geqslant 1$ del polinomio $Q(x)$, es decir,*

$$Q(x) = (x - a)^{\alpha} Q_1(x) \quad \text{y} \quad Q_1(a) \neq 0,$$

entonces existen el número real A y el polinomio $P_1(x)$ con coeficientes reales tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)},$$

donde la fracción $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}$ *también es propia.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquiera que sea el número real A, restando de la fracción

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$$

la expresión $\dfrac{A}{(x-a)^\alpha}$ y luego agregándola obtendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \left[\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha}\right] =$$

$$= \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}. \quad (23.25)$$

Por condición el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x) = (x-a)^\alpha Q_1(x)$. Es evidente que el grado del polinomio $Q_1(x)$ también es menor que el grado del polinomio $Q(x)$ (ya que $\alpha \geqslant 1$) por lo que cualquiera que sea la elección del número A la fracción racional $\dfrac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^\alpha Q_1(x)}$ es regular.

Escojamos ahora el número A de tal forma que el número a sea raíz del polinomio $P(x) - AQ_1(x)$ y por consiguiente, que este polinomio sea divisible por $x - a$. Dicho de otro modo definamos A a base de la condición.

$$P(a) - AQ_1(a) = 0;$$

por cuanto por condición $Q_1(a) \neq 0$, entonces $A = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$. Para tal elección de A el segundo sumando de la parte derecha en la fórmula (23.25) se puede simplificar por $x - a$, como resultado obtendremos una fracción del tipo

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q_1(x)}.$$

Por cuanto ella se ha obtenido con la simplificación de una fracción racional propia con coeficientes reales por el factor $x - a$, donde a es real, entonces ella misma también es una fracción racional propia con coeficientes reales. □

OBSERVACIÓN 1. Si los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tienen coeficientes complejos y $z = a$ es una raíz compleja de multiplicidad $\alpha \geqslant 1$ del polinomio $Q(z)$, entonces la descomposición (23.25) también tiene lugar, pero el número A en este caso es ya, en general, un número complejo. La validez de esto se deduce directamente de los razonamientos realizados en la demostración del lema 1.

Lema 2. *Sea* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *una fracción racional propia. Si el número complejo* $z_1 = a + bi$ *(a y b son reales,* $b \neq 0$*) es una raíz de multiplicidad* $\beta \geqslant 1$ *del polinomio* $Q(x)$, *es decir,*

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\beta Q_1(x),$$

donde $Q_1(z_1) \neq 0$ *y* $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$, *entonces existen los números reales M, N y el polinomio* $P_1(x)$ *con coeficientes reales tales que*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1}Q_1(x)}$$

donde la fracción $\dfrac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1}Q_1(x)}$ *también es propia.*

DEMOSTRACIÓN. Para cualesquiera M y N reales tenemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)} =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \left[\frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta}\right] =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P(x) - (Mx + N)Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q_1(x)}, \quad (23.26)$$

y además el segundo sumando del segundo miembro de la igualdad (23.26) es, como no es difícil ver, una fracción propia.

Tratemos ahora de escoger M y N de forma tal que el numerador de esta fracción sea divisible entre $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$. Para esto es suficiente elegir M y N de forma tal que z_1 sea raíz del polinomio $P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$. En efecto, entonces, por lo dicho en el p. 23.3, el número $\bar{z}_1$, conjugado a z_1 también será raíz del polinomio indicado. De aquí se deduce que este polinomio, por la existencia de la descomposición del tipo (23.10) es divisible por $x^2 + px + q$. Así, sea

$$P(z_1) - (Mz_1 + N)Q_1(z_1) = 0. \quad (23.27)$$

Si esto tiene lugar, entonces $Mz_1 + N = \dfrac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$, donde por condición $Q_1(z_1) \neq 0$.

Sea $z_1 = a + bi$, $P(z_1)/Q(z_1) = A + Bi$, entonces

$$A + iB = Mz_1 + N = M(a + bi) + N.$$

De aquí, igualando las partes imaginarias y reales obtendremos las ecuaciones $Ma + N = A$ y $Mb = B$, por consiguiente

$$M = \frac{B}{b} \quad \text{y} \quad N = A - \frac{a}{b}B. \quad (23.28)$$

Para estos valores de M y N el polinomio

$$P(x) - (Mx + N)Q_1(x)$$

se dividará por el polinomio $x^2 + px + q$. Simplificando el segundo sumando de segundo miembro de la igualdad (23.26) por $x^2 + px + q$ obtendremos una fracción del tipo

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1}Q_1(x)}.$$

Por cuanto ella se obtuvo con la simplificación de una fracción racional propia con coeficientes reales por un polinomio con coeficientes reales, entonces ella misma es también una fracción racional propia con coeficientes reales. □

Enunciemos ahora el teorema principal de este punto.

Teorema 1. *Sean $P(x)/Q(x)$ una fracción racional propia* *), *$P(x)$ y $Q(x)$, polinomios con coeficientes reales.*

Si $Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \ldots$

$$\ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}, \quad (23.29)$$

donde a_i son raíces reales distintos dos a dos del polinomio $Q(x)$ de multiplicidad α_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, y $x^2 + p_jx + q_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j)$, donde z_j y $\bar{z}_j$ son raíces esencialmente complejas, distintos dos a dos para distintos j del polinomio $Q(x)$ de multiplicidad β_j, $j = 1, 2, \ldots, s$; entonces existen los números reales A_i^α, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i$,

$$M_j^{(\beta)} \text{ y } N_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \quad \beta = 1, 2, \ldots, \beta_j$$

tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_1^{\alpha_1}}{x - a_1} + \ldots +$$
$$+ \frac{A_r^{(1)}}{(x - a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x - a_r)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x - a_r} +$$
$$+ \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_s - 1}} + \ldots + \frac{M_1^{(\beta_1)}x + N_1^{(\beta_1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}} + \frac{M_s^{(2)}x + N_s^{(2)}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s - 1}} + \ldots + \frac{M_s^{\beta_s}x + N_s^{\beta_s}}{x^2 + p_sx + q_s}. \quad (23.30)$$

DEMOSTRACIÓN. De la descomposición (23.29) tenemos:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}Q_1(x).$$

Aquí

$$Q_1(x) = (x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}$$

---

*) Sin perder generalidad se puede considerar que el coeficiente del término de mayor grado del polinomio $Q(x)$ es igual a la unidad, ya que en él caso cuando él es igual a otro número (distinto de cero) se puede dividir el numerador y el denominador de la fracción $P(x)/Q(x)$ por este número, después de lo cual el polinomio obtenido en el denominador tiene el coeficiente del término de mayor grado igual a la unidad.

y por consiguiente $Q_1(a_1) \neq 0$, por lo que según él lema 1

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x - a)^{\alpha_1}} + \frac{P_1(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}Q_1(x)}.$$

Aplicando de forma semejante el mismo lema cuando $\alpha_1 > 1$ a la fracción racional $\dfrac{P_1(x)}{(x - a)^{\alpha_1 - 1}Q_1(x)}$ obtendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \frac{P_2(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 2}Q_2(x)}.$$

Continuando este proceso más adelante mientras que el exponente de la potencia del factor $x_1 - a$ se convierte en cero y procediendo luego de forma análoga respecto a los factores $x - a_i$, $i = 2, \ldots, r$, tendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x - a_1} +$$
$$+ \ldots + \frac{A_r^{(1)}}{(x - a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x - a_r)^{\alpha_r - 1}} + \ldots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x - a_r} + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

donde $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ de nuevo es una fracción racional propia y además $P^*(x)$ y $Q^*(x)$ son polinomios con coeficientes reales y el polinomio $Q^*(x)$ no tiene raíces reales.

Aplicando sucesivamente el lema 2 a la fracción $P^*(x)/Q^*(x)$ y a las expresiones obtenidas en este proceso, como resultado obtendremos la fórmula (23.30). □

Las fracciones racionales del tipo

$$\frac{A}{(x - a)^\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta},$$

donde a, p, q, A, M y N son números reales y $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$ (las raíces del trinomio $x^2 + px + q$ son esencialmente complejas) se llaman *fracciones racionales elementales.*

De esta forma el teorema demostrado afirma *que cualquier fracción racional propia puede ser descompuesta en la suma de fracciones racionales elementales.*

Cuando se cumple la descomposición del tipo (23.30) para una fracción concreta dada comúnmente resulta cómodo el así llamado método de los coeficientes indeterminados. Este consiste en lo siguiente. Para la fracción dada $P(x)/Q(x)$ se escribe la descomposición (23.30) en la cual los coeficientes $A_i^{(\alpha)}, M_j^{(\beta)}, N_j^{(\beta)}$ se consideran incógnitas ($i = 1, 2, \ldots, r$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i$, $j = 1, 2, \ldots, s$, $\beta = 1, 2, \ldots, \beta_j$). Después de esto ambos miembros de la igualdad se reducen a un denominador común y para los polinomios obtenidos en el numerador se igualan los coeficientes. Si el grado del polinomio $Q(x)$ es igual a n, entonces, en general, en el numerador del segundo miembro de la igualdad (23.30), después de reducirlo a un denominador común se obtiene un polinomio de grado $n - 1$ es decir, un polinomio con n coeficientes, el número de incógnitas $A_i^{(\alpha)}, M_j^{(\beta)}, N_j^{(\beta)}$ también es igual a n (véase (23.10)):

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2\sum_{j=1}^{s} \beta_j = n.$$

De esta forma obtenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. La existencia de solución para ella se deriva del teorema demostrado.

Señalemos que después de reducir la expresión (23.30) a un denominador común y de su eliminación en el caso cuando $Q(x)$ tiene raíces reales, es conveniente sustituir en ambos miembros de la igualdad obtenida sucesivamente estas raíces; como resultado se obtienen ciertas relaciones entre los coeficientes buscados, útiles para su determinación final.

Ejemplos. 1. Descompongamos la fracción $x/((x^2-1)(x-2))$ en fracciones elementales. Según (22.30) la descomposición buscada tiene la forma

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Reduciéndola al denominador común y eliminándolo, obtendremos

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1). \tag{23.31}$$

Tenemos el caso cuando todas las raíces del denominador son reales. Suponiendo en la igualdad (23.31), de acuerdo con lo dicho anteriormente, sucesivamente $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, hallaremos

$$1 = -2A, \quad -1 = 6B, \quad 2 = 3C,$$

de donde

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$

De esta forma la descomposición buscada será

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x-1)} + \frac{2}{3(x-2)}. \tag{23.32}$$

2. Hallemos la descomposición en fracciones elementales para $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$. La forma general de la descomposición en este caso es

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Reduciéndola al común denominador y eliminándolo tenemos

$$x^2 - 1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)(x^2+1)x.$$

Igualemos los coeficientes para las potencias iguales de x:

$$-1 = A, \quad 0 = C + E, \quad 1 = 2A + B + D, \quad 0 = E, \quad 0 = A + D$$

de aquí hallamos

$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = 1, \quad E = 0$$

y por esto la descomposición buscada tiene la forma

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}. \tag{23.33}$$

Es necesario observar que en los casos aislados la descomposición en fracciones elementales se puede obtener más fácil y simplemente, no recurriendo al método de los coeficientes indeterminados, sino actuando por cualquier otro camino. Por ejemplo, para la descomposición de la fracción

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$$

en la suma de fracciones elementales lo más fácil es dos veces añadir y restar en el numerador x^2 y realizar la división como se indica a continuación:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(x+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

La descomposición obtenida como resultado es la descomposición de la fracción dada en suma de fracciones elementales.

Ejercicio 3. Demuéstrese que la descomposición del tipo (23.30) de una fracción racional propia es única.

OBSERVACIÓN 2. Si los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tienen coeficientes complejos, entonces aplicando a la fracción $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ sucesivamente la fórmula (23.25) (véase la observación 1) obtendremos que cualquier fracción racional propia $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ es representable en la región compleja en la forma de una suma finita de fracciones elementales sólo del tipo $\dfrac{A}{(z-a)^k}$, $A \in C$, k es un número entero no negativo que no sobrepasa la multiplicidad α de la raíz a del polinomio $Q(z)$, es decir,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\alpha_j} \frac{A_j^k}{(z-a_j)^k}.$$

§ 24. INTEGRACIÓN DE FRACCIONES RACIONALES

24.1. INTEGRACIÓN DE FRACCIONES RACIONALES ELEMENTALES

En este párrafo y en el próximo serán analizados los métodos de integración de ciertas clases de funciones elementales. En cada caso, sin aclararlo especialmente, vamos a suponer que se habla del cálculo de la integral sobre cierto segmento, en todos los puntos del cual está definida la función elemental subintegral (dicho de otra forma, sobre el cual la fórmula que define la función subintegral, tiene sentido, véase sobre esto en el p. 4.3).

En el párrafo anterior fue demostrado, que cualquier fracción racional es representable en forma de suma de un polinomio y fracciones racionales elementales (véanse (23.24) y (23.30)). La integral de un polinomio se calcula y además de manera muy simple (véase el p. 22.2). Analicemos la cuestión sobre la integración de las fracciones racionales elementales.

Primero analicemos el cálculo de las integrales de las fracciones de tipo

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Si $n = 1$, entonces (véase la fórmula 2 en el p. 22.2)

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A \ln|x-a| + C, \tag{24.1}$$

y si $n \neq 1$, entonces (véase la fórmula 1 en el p. 22.2)

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C. \tag{24.2}$$

Analicemos ahora las integrales de las fracciones

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$$

donde $\frac{p^2}{4} - q < 0$, $n = 1, 2, \dots$ De nuevo comencemos por el caso de $n = 1$. Observando que

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right),$$

y suponiendo $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$, obtendremos:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2+a^2}\,dt = M\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2} +$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a} + C. \tag{24.3}$$

En el caso de $n > 1$, suponiendo, como anteriormente, $t = x + \frac{p^2}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, de forma semejante, obtendremos

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = M\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2N-pM}{2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \tag{24.4}$$

Analicemos en particular cada una de las integrales obtenidas en el segundo miembro de esta igualdad. Lo que respecta a la primera de ellas, se calcula inmediatamente:

$$\int\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C. \tag{24.5}$$

La segunda integral del segundo miembro de la igualdad (24.4) se calcula un tanto más complicado. Sea

$$I_n = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Integremos la integral I_n por partes, poniendo

$$u = \frac{1}{(t^2+a^2)^n}, \quad dv = dt \quad \text{y por la tanto,} \quad du = -\frac{2nt\,dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = t,$$

y después agregando y restando a^2 en el numerador de la función que se obtuvo bajo el signo de la integral y realizando la división como está señalado a continuación, obtendremos

$$I_n = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\left[\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\right],$$

es decir, $I_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1}$, de donde

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{24.6}$$

La integral I_1 se calcula fácilmente (véase en el p. 22.2 la fórmula 12); la fórmula (24.6) permite calcular I_2; conociendo I_2, por la misma fórmula se puede hallar I_3; continuando este proceso se puede hallar la expresión para cualquier integral I_n $(n = 1, 2, \dots)$.

24.2. CASO GENERAL

De los resultados del p. 23.6 y del p. anterior 24.1 se deduce directamente el siguiente teorema.

Teorema 1. *La integral indefinida de cualquier fracción racional sobre cualquier intervalo, sobre el cual el denominador de la fracción no se anula, existe y se expresa* *a través de funciones elementales, y concretamente es la suma algebraica de las superposiciones de fracciones racionales, arcas tangentes y logaritmos naturales.*

El teorema 1 es una consecuencia directa de las fórmulas (23.24), (23.30), (22.6), (22.8), (24.1) — (24.6). Estas fórmulas dan un método concreto del cálculo de la integral de una función racional: primero, dividiendo el numerador por el denominador, se separa la "parte entera", es decir, la fracción racional dada se representa en forma de suma de un polinomio y una fracción racional propia (23.24), después la fracción racional propia obtenida se descompone en una suma de fracciones elementales (23.30), después de lo cual utilizando linealidad de la integral (22.6) se pueden calcular las integrales de cada sumando por separado, por las fórmulas (22.8) y (24.1) — (24.6).

Ejemplos. 1. Calculemos $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)}$. Ya es conocido (véase (23.32)) que

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$$

por lo que

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C.$$

2. Calculemos $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. Por la regla general, separemos la parte entera, dividiendo el numerador entre el denominador obtendremos

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Para la fracción racional propia obtenida está hallada su descomposición en fracciones elementales (véase la fórmula (23.33)):

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1},$$

por lo que

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} +$$

$$+ \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Se debe tener en cuenta, que el método de cálculo señalado de la integral indefinida de una fracción racional es general; con su ayuda se puede calcular la integral indefinida de cualquier fracción racional, si se puede obtener una descomposición concreta del denominador en factores del tipo (23.10). No obstante, naturalmente en casos particulares aislados resulta más conveniente para una reducción esencial de los cálculos utilizar otros caminos.

Por ejemplo, para el cálculo de la integral

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}$$

es más sencillo no descomponer la función subintegral en fracciones elementales, sino utilizar la regla de integración por partes. Haciendo

$$u = x, \quad dv = \frac{x\,dx}{(1-x^2)^3} \text{ y por consiguiente } du = dx, \quad v = \frac{1}{4(1-x^2)^2}$$

obtendremos

$$I = -\frac{1}{2}\int x\,\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^3} = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1-x^2)^2}\,dx.$$

Agregando y restando x^2 del numerador de la función subintegral obtenida, realizando la división, obtenemos dos integrales de las cuales la primera es de tabla y la segunda se calcula fácilmente integrando por partes:

$$I = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1-x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{8}\int x\,\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{x}{8(1-x^2)} +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{x}{8(1-x^2)} + C.$$

24.3*. MÉTODO DE OSTROGRADSKI

En el punto (24.1) fue demostrado que cualquier fracción racional propia puede ser presentada en forma de suma de fracciones elementales. Pero del p. 24.1 se deduce que las primitivas de las fracciones elementales $\frac{1}{x-a}$ y $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $\left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$ son funciones trascendentes de tipo

A arctg $(a_1x + a_2) + B \ln (b_1x + b_2) + C$ (véase (24.1) y (24.3)); la primitiva de la fracción elemental

$$A/(x - a)^\alpha, \quad \alpha = 2, 3, \dots,$$

es una fracción racional; la primitiva de la fracción elemental $(Mx + N)/(x^2 + px + q)^\beta$, $\beta = 2, 3, \dots$, en virtud de las fórmulas (24.4), (24.5), (24.6) y la fórmula 12 del p. 22.2 puede ser, en general, representada en forma de suma de una fracción racional propia y una función trascendente del tipo A arctg $(a_1x + a_2) + C$, que es la primitiva de la fracción del tipo $\frac{B}{x^2 + px + q}$ $\left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$. Por esto, cualquier primitiva de cualquier fracción racional es representable, en general, en forma de suma de una fracción racional (parte algebraica) y una función trascendente que es la primitiva de la suma de las fracciones del tipo

$$\frac{A}{x - a} \quad \text{y} \quad \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}, \quad \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

De esta manera, si $P(x)/Q(x)$ es fracción racional propia y

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}$$

es la descomposición de su denominador en la forma (23.10), entonces

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \left[\sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{x - a_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{M_jx + N_j}{x^2 + p_jx + q_j}\right]dx; \quad (24.7)$$

de aquí, realizando bajo el signo de la integral la adición de las fracciones, tenemos

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \quad (24.8)$$

donde $Q_2(x) = (x - a_1) \dots (x - a_r)(x^2 + p_1x + q_1) \dots (x_2 + p_sx + q_s)$. De las fórmulas (24.2) y (24.6) se deduce que el polinomio $Q_1(x)$ tiene la forma

$$Q_1(x) = (x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r - 1}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1 - 1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s - 1},$$

es decir, el polinomio $Q_1(x)$ es el máximo común divisor del polinomio $Q(x)$ y su derivada $Q'(x)$ (vease (23.23)).

La fórmula (24.8) se llama fórmula *de Ostrogradski* *). El segundo sumando de la parte derecha de la fórmula (24.8) se llama parte trascendente de la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$; esto es natural ya que de lo dicho anteriormente se deduce que cualquier primitiva de la fracción $P_2(x)/Q_2(x)$ salvo un sumando constante representa

*) M. V. Ostrogradski (1801 — 1861), matemático ruso.

una combinación lineal de logaritmos y arcos tangentes de funciones racionales y esto significa, como se puede mostrar, que será en general una función trascendente. El primer sumando denominado parte algebraica puede ser hallado de manera completamente algebraica, si son conocidos los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ (y por lo tanto $Q'(x)$, es decir, sin integrar ninguna función). En realidad el polinomio $Q_1(x)$, siendo el máximo común divisor de los polinomios $Q(x)$ y $Q'(x)$, siempre puede ser hallado con ayuda del algoritmo de Euclides (véase el p. 23.5*), así mismo para hallar el polinomio $Q_1(x)$ no se exige el conocimiento de las raíces del polinomio $Q(x)$; no obstante, si las raíces del polinomio $Q(x)$ son conocidas, y por lo tanto se conoce su descomposición del tipo (23.17), entonces el polinomio $Q_1(x)$ se escribe directamente por la fórmula (23.23). El polinomio $Q_2(x)$ se halla como cociente de la división de $Q(x)$ entre $Q_1(x)$.

Para la búsqueda de los polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ se puede aplicar el método de los coeficientes indeterminados. Aclarémoslo. Denotemos el grado del polinomio $Q_1(x)$ por n_1, el grado del polinomio $Q_2(x)$ por n_2, entonces de la igualdad

$$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x) \quad (24.9)$$

obtendremos $n = n_1 + n_2$. Puesto que las fracciones $P_1(x)/Q_1(x)$ y $P_2(x)/Q_2(x)$ son propias, los grados de los polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ respectivamente no son superiores a $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ y por eso en estos polinomios la cantidad de coeficientes distintos de cero respectivamente no supera a n_1 y n_2; de esta manera, la cantidad de coeficientes desconocidos es igual a $n_1 + n_2 = n$. Diferenciando las primitivas que aparecen en ambas partes de la fórmula (24.8), tendremos (omitiendo, para mayor brevedad, la notación del argumento) la relación

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)' + \frac{P_2}{Q_2}.$$

Realizando la diferenciación, tendremos

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2}. \quad (24.10)$$

Observemos que

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1R}{Q_1Q_2}, \quad (24.11)$$

donde $R = Q_1'Q_2/Q_1$ es un polinomio. En realidad si z es una raíz del polinomio Q_1 de multiplicidad λ, entonces como conocemos (vease el p. 23.4), z es una raíz de multiplicidad $\lambda - 1$ para la derivada Q_1' y la raíz de multiplicidad uno del polinomio Q_2, por eso en este caso z es también una raíz de multiplicidad λ para el polinomio $Q_1'Q_2$. De aquí por la fórmula (23.7) directamente se deduce que el polinomio $Q_1'Q_2$ se divide, sin residuo, entre el polinomio Q_1, es decir, que R es también un polinomio. Así, de (24.9), (24.10) y (24.11) tenemos

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1'Q_2 - P_1R}{Q} + \frac{P_2}{Q_2},$$

de donde

$$P = P_1' Q_2 - P_1 R + P_2 Q_1. \qquad (24.12)$$

El polinomio P tiene grado no superior a $n - 1$ (ya que la fracción P/Q es propia). Igualando los coeficientes de las potencias iguales k, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, de la variable x en ambos miembros de la igualdad (24.12), tendremos n ecuaciones lineales con n incógnitas. Anteriormente se demostró (véase (24.8)), que los polinomios P_1 y P_2 siempre (en particular, para algún polinomio dado Q y para cualquier polinomio P de grado que no supera a $n - 1$) existen; por eso el sistema obtenido de ecuaciones lineales tiene solución para cualquier segundo miembro *). De aquí se deduce que el determinante de este sistema no es igual a cero, y esto significa que del sistema estudiado se puede decir no sólo que tiene solución sino que la solución es única. Con esto no sólo hemos obtenido un método para la definición de los coeficientes desconocidos en la fórmula (24.8), sino que además queda demostrada la unicidad de esta suposición.

La fórmula (24.8) reduce, en general, el problema de la integración de cualquier fracción racional propia, al problema de integración de una fracción racional propia en la cual el denominador $Q(x)$ tiene sólo raíces reales. Con ayuda de esta fórmula, integrando una fracción racional propia, se puede hallar por el método señalado anteriormente la parte algebraica de la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, y después integrar una fracción racional más sencilla $P_2(x)/Q_2(x)$, si claro no resulta casualmente que $P_2(x)$ es un cero idéntico: en este caso el problema ya está resuelto.

El método aquí descrito de integración de fracciones racionales lleva el nombre de *método de Ostrogradski.*

Al utilizar el método de Ostrogradski para la integración de fracciones racionales con frecuencia resulta más conveniente escribir la fórmula de Ostrogradski (24.8) en la forma (24.7), ya que en este caso después de hallar los coeficientes desconocidos en la función subintegral, ella se puede integrar directamente.

Los coeficientes desconocidos en la fórmula (24.7) se hallan por el mismo método que fue descrito para la fórmula (24.8): se deben diferenciar ambos miembros de la igualdad (24.7) y reducir a un denominador común todas las fracciones racionales obtenidas en ambos miembros de la igualdad, igualar los coeficientes de los mismos grados de la variable x en los polinomios que se encuentran en los numeradores y resolver el sistema de ecuaciones lineales obtenido.

Ejemplo. Apliquemos el método de Ostrogradski para el cálculo de la integral $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1 - x)^3(1 + x^2)^2}\,dx$. Según la fórmula (24.8),

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1 - x)^3(1 + x^2)^2}\,dx = \frac{Kx^3 + Lx^2 + Mx + N}{(1 - x)^2(1 + x^2)} + \int \frac{kx^2 + lx + m}{(1 - x)(1 + x^2)}\,dx,$$

*) Como es usual se supone que todos los términos de las ecuaciones que contienen incógnitas y sólo ellos se trasladan al primer miembro de la igualdad.

por eso

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1 - x)^3(1 + x^2)^2} = \left[\frac{Kx^2 + Lx^2 + Mx + N}{(1 - x)^2(1 + x^2)}\right]' + \frac{kx^2 + lx + m}{(1 - x)(1 + x^2)}.$$

Diferenciando, obtendremos

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1 - x)^3(1 + x^2)^2} = \frac{\begin{gathered}(3Kx^2 + 2Lx + M)(1 - x)(x^2 + 1) - (Kx^3 + Lx^2 + Mx + N)\times \\ \times[-2(1 + x^2) + (1 - x)2x]\end{gathered}}{(1 - x)^3(1 + x^2)^2} + \frac{kx^2 + lx + m}{(1 - x)(1 + x^2)}.$$

De aquí tenemos:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x &= (3Kx^2 + 2Lx + M)(-x^3 + x^2 - x + 1) - \\ &- (Kx^3 + Lx^2 + Mx + N)(-4x^2 + 2x - 2) + (kx^2 + lx + \\ &+ m)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1). \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes con iguales exponentes de x, obtendremos

$$\begin{gathered} M + 2N + m = 0, \\ -M + 2L + 2M - 2N - 2m + l = 1, \\ 3K - 2L + M + 2L - 2M + 4N + k - 2l + 2m = -2, \\ -M + 2L - 3K + 2K - 2L + 4M - 2K + 2l - 2m = 2, \\ 3K - 2L - 2K + 4L + 2k - 2l + m = 1, \\ -3K + 4K - 2k + l = 0, \\ k = 0, \end{gathered}$$

ó

$$\begin{gathered} M + 2N + m = 0, \\ 2L + M - 2N + l - 2m = 1, \\ 3K - M + 4N + k - 2l + 2m = -2, \\ -K + 3M - 2k + 2l - 2m = 2, \\ K + 2L + 2k - 2l + m = 1, \\ K - 2k + l = 0, \\ k = 0. \end{gathered}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, hallaremos

$$K = \frac{1}{2}, \quad L = -\frac{1}{2}, \quad M = \frac{3}{2}, \quad N = -1,$$
$$k = 0, \quad l = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2};$$

por eso

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

§ 25. INTEGRACIÓN DE ALGUNAS IRRACIONALIDADES

25.1. OBSERVACIONES PREVIAS

Las funciones del tipo

$$R(u_1, \dots, u_n) = \frac{P(u_1, \dots, u_n)}{Q(u_1, \dots, u_n)}, \tag{25.1}$$

donde P y Q son polinomios de las variables $u_1, \dots, u_n$, es decir, funciones del tipo

$$\sum_{k_1 + \dots + k_n \leqslant k} a_{k_1, \dots, k_n} u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}$$

se llaman *funciones racionales de* $u_1, \dots, u_n$.

Si en la fórmula (25.1) las variables $u_1, \dots, u_n$ a su vez son funciones de la variable x: $u_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la función

$$R[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]$$

se llama *función racional* de las funciones $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$.

Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}}$$

es una función racional de x y de los radicales $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2-1}$, y $\sqrt{x^2+1}$:

$$f(x) = R(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2-1}, \sqrt{x^2+1});$$

aquí $R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \dfrac{u_1 + u_3^2}{u_2 - u_4}$, $u_1 = x$, $u_2 = \sqrt{x}$, $u_3 = \sqrt[3]{x^2-1}$, $u_4 = \sqrt{x^2+1}$.

Si en la fórmula (25.1) las variables $u_1, \dots, u_n$ son funciones trigonométricas elementales, entonces la función compleja obtenida se llama función racional con relación a las funciones trigonométricas elementales. Un ejemplo de esta función es la siguiente:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x + \cos x} = R(\operatorname{sen} x, \cos x).$$

Pasemos ahora a las integrales de funciones de los tipos analizados y mostremos, que en una serie de casos, ellas se reducen a las integrales de funciones racionales.

25.2. INTEGRALES DEL TIPO $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx$

Analicemos las integrales señaladas en el título del punto con la condición de que las constantes $r_1, \dots, r_s$ son racionales y $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d son constantes). La última suposición es natural, ya que si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, entonces los coeficientes a, b serían proporcionales a los coeficientes c, d y por eso la relación $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ no dependería de x. La función subintegral en este caso sería una fracción racional ordinaria de una variable, el problema sobre la integración de la cual fue analizado anteriormente.

Sea m el denominador común de los numeros $r_1, \dots, r_s$:

$$r_i = \frac{p_i}{m}, \quad p_i \text{ es entero}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Hagamos

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{25.2}$$

de donde

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t); \tag{25.3}$$

$\rho(t)$ es una función racional, por eso $\rho'(t)$ es también una función racional, y más adelante

$$dx = \rho'(t)dt, \tag{25.4}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s. \tag{25.5}$$

Sustituyendo (25.3), (25.4) y (25.5) en la expresión subintegral analizada obtendremos

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s}\right)\rho'(t)dt = \int R^*(t)dt$$

donde $R^*(t) = R\left(\dfrac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s}\right)\rho'(t)$, evidentemente es una función racional de la variable t. De esta forma el cálculo de la integral

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx \tag{25.6}$$

se reduce a la integración de fracciones racionales.

Claro, para hallar la expresión de la integral inicial, es necesario, después del cálculo de la integral $\int R^*(t)dt$, haciendo el cambio inverso de la variable $t = ((ax + b)/(cx + d))^{1/m}$, regresar a la variable x inicial. En el futuro en situaciones análogas, no haremos cada vez la explicación de la necesidad del paso inverso a la variable inicial x.

Señalemos que en particular, al tipo de integrales analizado pertenecen las integrales del tipo

$$\int R[x, (ax + b)^{r_1}, \dots, (ax + b)^{r_s}]dx, \text{ en particular } \int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_s})dx.$$

Ejemplo. Calculemos la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$. Suponiendo por la regla general, $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$, obtendremos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^3}{t + 1}dt = 6\left[\int (t^2 - t + 1)dt - \int \frac{dt}{t + 1}\right] =$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t + 1|\right] + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

Integrales de otros tipos a veces se reducen a las integrales del tipo (25.6) con ayuda de transformaciones elementales, por ejemplo,

$$\int \sqrt{(x - a)(x - b)}\, dx.$$

Mostremos el método de cálculo de integrales semejantes en el ejemplo de la integral

$$\int \sqrt{(x - 1)(x - 2)}\, dx. \qquad (25.7)$$

Sacando en la función subintegral el factor $(x - 1)$ fuera del signo del radical, obtendremos una integral de tipo (25.6): precisamente cuando $x \geqslant 2$

$$\int \sqrt{(x - 1)(x - 2)}\, dx = \int (x - 1)\sqrt{\frac{x - 2}{x - 1}}\, dx$$

y cuando $x < 1$

$$\int \sqrt{(x - 1)(x - 2)}\, dx = \int (1 - x)\sqrt{\frac{x - 2}{k - 1}}\, dx.$$

Cuando $1 < x < 2$ la expresión subintegral es imaginaria pura.

Veamos, por ejemplo, el caso $x \geqslant 2$. Hagamos aquí (véase (25.2)) $t^2 = \frac{x - 2}{x - 1}$, entonces

$$x = \frac{2 - t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2t\, dt}{(1 - t^2)^2},$$

por eso

$$\int \sqrt{(x - 1)(x - 2)}\, dx = \int \left(\frac{2 - t^2}{1 - t^2} - 1\right)\frac{2t^2\, dt}{(1 - t^2)^2} = 2\int \frac{t^2\, dt}{(1 - t^2)^3},$$

o sea, se obtuvo una integral de una fracción racional que fue calculada anteriormente (véase el p. 24.2).

25.3. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$. SUSTITUCIONES DE EULER

Las integrales indicadas pueden ser reducidas con ayuda de un cambio de variable a las funciones racionales. Analicemos tres cambios de variable que llevan el nombre de *sustituciones de Euler* [*]. Así pues, sea dada la integral

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx, \quad a \neq 0. \qquad (25.8)$$

Primer caso: $a > 0$.

Hagamos el cambio de x por t de la siguiente manera:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t \qquad (25.9)$$

(los signos se pueden tomar en cualquier combinación). Elevemos ambas partes de la igualdad escrita al cuadrado:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}\, xt + t^2$$

de donde

$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2t\sqrt{a}} = R_1(t),$$

$R_1(t)$ es una función racional de t y esto significa que $R_1'(t)$ es también una función racional.

Más adelante, $dx = R_1'(t)dt$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm R_1(t)\sqrt{a} \pm t = R_2(t)$, donde, evidentemente, $R_1(t)$ es una función racional. Finalmente

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(R_1(t), R_2(t))R_1'(t)dt = \int R^*(t)dt$$

donde $R^*(t) = R(R_1(t), R_2(t))R_1'(t)$ es una fracción racional. □

Segundo caso: las raíces del trinomio $ax^2 + bx + c$ son reales.

Sean x_1 y x_2 reales y son las raíces del trinomio $ax^2 + bx + c$. Si $x_1 = x_2$, entonces

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)^2} = |x - x_1|\sqrt{a}.$$

De aquí se deduce que en este caso o bien bajo la raíz está una magnitud negativa para todos los valores $x \neq x_1$, es decir, la raíz toma sólo expresiones imaginarias, este caso tiene lugar cuando $a < 0$ y no lo analizamos, o bien cuando $a \geqslant 0$ después de la transformación elemental señalada obtenemos que la varialbe x no apare-

[*] L. Euler (1707 — 1783), matemático suizo.

ce bajo el signo de la raíz, es decir, bajo la integral está solamente una función racional de x, en general, diferente para cada uno de los segmentos $(-\infty, x_1)$ y $(x_1, +\infty)$.

Analicemos ahora el caso cuando $x_1 \neq x_2$. Observando que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ y sacando $x - x_1$ fuera del signo de la raíz obtenemos que

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) = R\left(x, |x - x_1| \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right) = R_3\left(x, \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right), \quad (25.10)$$

aquí $R_3(u, v)$ es una función racional de las variables u y v.

Como es conocido (véase el p. 25.1) la integral de la función (25.10) puede ser calculada con ayuda de la sustitución (véase (25.2)) $t^2 = \dfrac{a(x - x_2)}{(x - x_1)}$, que en nuestro caso da

$$\pm(x - x_1)t = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)},$$

o, tomando $t > 0$ cuando $x \geqslant x_1$ y $t < 0$ cuando $x \leqslant x_1$, $(x - x_1)t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. □

La integral (25.7) analizada en el punto anterior es un ejemplo del caso 2; esta integral fue reducida anteriormente a una fracción racional por el método que acabamos de examinar ahora en el caso general.

Los dos métodos de cálculo de la integral (25.8), estudiados por nosotros permiten siempre reducir esta integral a una integral de una fracción racional sobre cualquier intervalo, si sólo la raíz $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sobre este segmento no toma valores imaginarios puros (es natural, estudiando el análisis en el campo real, excluir este caso). En realidad, supongamos que no tienen lugar ni el primero ni el segundo caso, es decir, $a < 0$ y las raíces x_1 y x_2 del trinomio $ax^2 + bx + c$ son esencialmente complejas: $x_1 = g + hi$, $x_2 = g - hi$, $h \neq 0$. Entonces

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = \sqrt{a(x - g - hi)(x - g + hi)} = \sqrt{a[(x - g)^2 + h^2]},$$

y ya que $a < 0$ y $h \neq 0$ entonces bajo la raíz para x cualesquiera aparece una expresión negativa.

Tercer caso: $c > 0$.

En este caso se puede utilizar la sustitución

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

(la combinación de signos es arbitraria). Elevando al cuadrado obtendremos la igualdad

$$ax^2 + bx = \pm 2\sqrt{c}\, xt + x^2 t^2$$

de donde

$$x = \frac{b \pm 2t\sqrt{c}}{t^2 - a} R_4(t), \quad dx = R_4'(t)dt,$$

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm R_4(t)t = R_5(t)$, donde $R_4(t)$, $R_4'(t)$ y $R_5(t)$ son funciones racionales de t. Por esto

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(R_4(t), \quad R_5(t))R_4'(t)dt = \int \tilde{R}(t)dt,$$

donde $\tilde{R}(t) = R(R_4(t), R_5(t))R_4'(t)$ es una fracción racional. □

Las integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})\, dx$ se reducen mediante la sustitución

$$t^2 = ax + b \quad (25.11)$$

a las integrales analizadas del tipo (25.8).

En realidad, de (25.11) tenemos:

$$x = \frac{t^2 - b}{a}, \quad dx = \frac{2}{a} t\, dt, \quad \sqrt{cx + d} = \sqrt{\frac{c}{a} t^2 - \frac{cb}{a} + d} = \sqrt{At^2 + B},$$

donde $A = \dfrac{c}{a}$, $B = -\dfrac{cb}{a} + d$, por lo que

$$\int R(x, \quad \sqrt{ax + b}, \quad \sqrt{(cx + d})dx = \int R_6(t, \quad \sqrt{At^2 + B})dt,$$

donde $R_6(u, v)$ es una función racional de las variables u y v. En el segundo miembro de la última igualdad aparece una integral del tipo (25.8). □

El cálculo de integrales con ayuda de las sustituciones de Euler a menudo nos lleva a expresiones muy voluminosas, por lo que se deben utilizar en general sólo cuando la integral analizada no se logra calcular con otro método más breve. Por ejemplo, observando que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}$, no es difícil convencerse de que la integral (25.8) en el caso, cuando la expresión subradical es positiva sobre cierto intervalo, con ayuda de una sustitución lineal puede ser reducida (compárese con el p. 22.3) a una de las tres integrales:

$$\int R(t, \quad \sqrt{1 - t^2})dt, \quad \int R(t, \quad \sqrt{t^2 - 1})dt, \quad \int R(t, \quad \sqrt{t^2 + 1})dt$$

(claro, aquí con el símbolo R se denota, en general, otra función racional distinta a la de la fórmula (25.8)). Para el cálculo de las integrales obtenidas, a menudo resulta muy cómodo utilizar las sustituciones trigonométricas

$$t = \operatorname{sen} u, \quad t = \cos u, \quad t = \operatorname{tg} u,$$

y también las sustituciones hiperbólicas

$$t = \operatorname{st} h, \quad t = \operatorname{ch} u, \quad t = \operatorname{th} u.$$

25.4. INTEGRALES DEL BINOMIO DIFERENCIAL

La expresión $x^m(a + bx^n)^p\, dx (a \neq 0, b \neq 0)$ se llama *binomio diferencial*. Vamos a analizar el caso cuando n, m, y p son racionales y a y b son números reales.

Hagamos

$$x = t^{1/n}, \quad (25.12)$$

entonces

$$dx = \frac{1}{n} t^{1/n - 1}\, dt \quad \text{y} \quad \int x^m (a + bx^n)^p\, dx = \frac{1}{n} \int (a + bt)^p\, t^{\frac{m+1}{n} - 1}\, dt.$$

De esta forma, la integral

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx \tag{25.13}$$

se reduce mediante la sustitución (25.12) a la integral del tipo

$$\int (a + bt)^p\, t^q\, dt, \tag{25.14}$$

donde q y p son racionales. En el caso analizado

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Primer caso: p es un número entero.

Sea $q = \frac{r}{s}$, donde r y s son números enteros; por los resultados del p. 25.2 en este caso la sustitución $z = t^{1/s}$ reduce la integral (25.14) a una integral de una fracción racional.

Segundo caso: q es un número entero.

Sea ahora $p = r/s$, r y s son números enteros. Por los resultados del punto 25.2 la integral (25.14) se reducen en este caso, con la sustitución $z = (a + bt)^{1/s}$, a la integral de una fracción racional.

Tercer caso: $p + q$ es un entero.

Sean $p = r/s$ y s enteros. Escribamos, para mayor claridad, la integral (25.14) en una forma algo diferente:

$$\int (a + bt)^p\, t^q\, dt = \int \left(\frac{a + bt}{t}\right)^p t^{p+q}\, dt.$$

De nuevo tenemos una integral del tipo analizado en el mismo punto 25.2. Esta vez a la integral de una fracción racional la reduce la sustitución

$$z = \left(\frac{a + bt}{t}\right)^{1/s}.$$

Así, en los tres casos, cuando uno de los números p, q o $p + q$ es entero, la integral (25.14), con ayuda de las sustituciones señaladas anteriormente, se reduce a la integral de una fracción racional.

Este resultado, aplicado a la integral (25.13), toma la siguiente forma: cuando uno de los números p, $\frac{m+1}{n}$ o $\frac{m+1}{n} + p$ es entero, la integral (25.13) puede ser reducida a la integral de una fracción racional. Además, en el caso cuando p es un entero, esta reducción la realiza la sustitución

$$z = x^{n/s},$$

donde el número s es el denominador de la fracción $\frac{m+1}{n}$, es decir, $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$, en el caso cuando $\frac{m+1}{n}$ es entero, la sustitución

$$z = (a + bx^n)^{1/s},$$

donde el número s es el denominador de la fracción p, es decir, $p = r/s$; y en el caso cuando $\frac{m+1}{n} + p$ es entero la sustitución

$$z = (ax^{-n} + b)^{1/s}$$

donde el número s es también el denominador de la fracción p.

P. L. Chebishev [*] mostró que para los exponentes m, n y p, que no satisfacen las condiciones antes señaladas, la integral (25.13) no se expresa a través de funciones elementales.

Ejemplo. Analicemos la integral

$$I = \int \sqrt{x}\, \sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}}\, dx = \int x^{1/2} \left(1 - x^{-\frac{3}{2}}\right)^{1/4} dx.$$

Aquí $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{4}$ y $\frac{(m+1)}{n} = -1$; tenemos el segundo caso.

Hagamos la sustitución indicada anteriormente:

$$z = (1 - x^{-3/2})^{1/4}, \tag{25.15}$$

de donde

$$x = (1 - z^4)^{-\frac{2}{3}}, \quad dx = \frac{8}{3}(1 - z^4)^{-\frac{5}{3}} z^3\, dz,$$

y por esto

$$I = \frac{8}{3} \int \frac{z^4}{(1 - z^4)^2}\, dz = \frac{2}{3} \int zd\, \frac{1}{1 - z^4} = \frac{2}{3}\left(\frac{z}{i - z^4} - \int \frac{dz}{1 - z^4}\right) =$$

$$= \frac{2z}{3(1 - z^4)} - \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{1 - z^2} + \frac{1}{1 + z^2}\right) dz =$$

$$= \frac{2z}{3(1 - z^4)} - \frac{1}{6} \ln \left|\frac{1 + z}{1 - z}\right| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} z + C,$$

donde z se expresa a través de x por la fórmula (25.15).

25.5. INTEGRALES DEL TIPO $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$

Analicemos la integral

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx, \quad a \neq 0,$$

[*] P. L. Chebishev (1821 — 1894), matemático ruso.

donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado $n \geqslant 1$. En principio esta integral se puede reducir siempre a la integral de una fracción racional con ayuda de una de las sustituciones de Euler (véase el p. 25.3). No obstante, en el caso concreto dado, generalmente, nos lleva al objetivo mucho más rápido otro método.

Mostremos precisamente que es válida la fórmula

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (25.16)$$

donde $P_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado no superior a $n-1$ y α es cierto número.

Así, sea dado el polinomio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0. \quad (25.17)$$

Si existe el polinomio

$$P_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0 \quad (25.18)$$

que satisface la condición (25.16), entonces diferenciando esta igualdad obtendremos:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= P'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

o

$$2P_n(x) = 2P'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha. \quad (25.19)$$

Aquí a la izquierda aparece un polinomio de grado n y a la derecha cada sumando es también un polinomio de grado no mayor que n.

Observando que

$$P'_{n-1}(x) = (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_k x^{k-1} + \ldots + b_1 \quad (25.20)$$

y sustituyendo (25.17), (25.18) y (25.20) en (25.19) tenemos las igualdades

$$2(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) =$$
$$= 2(ax^2+bx+c)[(n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_k x^{k-1} + \ldots + b_1] +$$
$$+ (2ax+b)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_k x^k + \ldots + b_0) + 2\alpha.$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de x obtendremos el siguiente sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con $n+1$ incógnitas $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \alpha$:

$$2a_0 = 2cb_1 + bb_0 + 2\alpha,$$
$$2a_1 = 2bb_1 + 4cb_2 + 2ab_0 + bb_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2a_k = 2(k-1)ab_{k-1} + 2kbb_k + 2(k+1)cb_{k+1} + 2ab_{k-1} + bb_k, \quad (25.21)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2a_{n-1} = 2(n-2)ab_{n-2} + 2(n-1)bb_{n-1} + 2ab_{n-2} + bb_{n-1},$$
$$2a_n = 2(n-1)ab_{n-1} + 2ab_{n-1}.$$

De la última ecuación se halla inmediatamente b_{n-1}:

$$b_{n-1} = \frac{a_n}{n\alpha}.$$

Sustituyendo esta expresión en la penúltima ecuación y observando que en esta ecuación el coeficiente de la incógnita b_{n-2} es igual a $2a(n-1) \neq 0$ hallaremos el valor de b_{n-2}. Sustituyendo a continuación los valores de b_{n-1} y b_{n-2} en la ecuación anterior hallaremos el valor b_{n-3}, etc. Sucesivamente obtendremos todos los valores de las incógnitas b_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Después de esto, de la primera ecuación se halla inmediatamente la incógnita α.

De esta forma, el sistema (25.21) tiene solución para cualesquiera valores a_0, $a_1, \ldots, a_n$, por eso el determinante de este sistema es diferente de cero y la solución indicada es única.

En la práctica el polinomio $P_{n-1}(x)$ en la fórmula (26.16) se escribe con coeficientes indeterminados, los cuales se hallan resolviendo el sistema (25.21). Después de esto, el cálculo de la integral dada se reduce al cálculo de la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

la cual en el caso en que la expresión subradical es positiva en cierto intervalo se reduce fácilmente a una de tabla (véase el p. 22.3).

Las integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

con la sustitución

$$t = \frac{1}{x-\lambda}$$

se reducen fácilmente a integrales del tipo (25.16) analizado.

§ 26. INTEGRACIÓN DE ALGUNAS FUNCIONES TRASCENDENTES

26.1. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$

La sustitución

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi$$

reduce la integral indicada en el título a la integral de una función racional. En realidad, tenemos

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \tag{26.1}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2\,du}{1 + u^2},$$

por lo que

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx = 2 \int R\left(\frac{2u}{1 + u^2}, \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)\frac{du}{1 + u^2}.$$

De esta forma se obtuvo la integral de una función racional.

Calculemos por el método indicado la integral $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$. Utilizando las fórmulas (26.1) obtendremos:

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = 2 \int \frac{du}{(1 + u)^2} = -\frac{2}{1 + u} + C = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

Es necesario, no obstante, tener en cuenta que aunque por principio las integrales analizadas siempre se pueden reducir a la integral de una función racional con el método indicado, en su aplicación práctica a menudo nos lleva a cálculos muy voluminosos; mientras que otros métodos, en particular las sustituciones del tipo

$$u = \operatorname{sen} x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x \tag{26.2}$$

a veces permiten calcular la integral necesaria, sustancialmente más rápido.

Ejemplos. 1. Analicemos la integral $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Representémosla en la forma $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}$. Inmediatamente se ve, que en este caso es muy cómoda la sustitución $u = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)d\operatorname{tg} x = \int (1 + u^2)du = $$
$$= u + \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

2. Representando la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x}$ de la forma $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x \cos x}$ nos convencemos de lo conveniente que es la sustitución $u = \cos x$. En efecto,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\operatorname{sen}^4 x \cos x} = -\int \frac{du}{(1 - u^2)^2 u} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du^2}{(1 - u^2)^2 u^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1 - v)^2 v} {}^{*)} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1 - v) + v}{(1 - v)^2 v}dv = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1 - v)v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1 - v)^2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1 - v) + v}{(1 - v)v}dv - \frac{1}{2}\frac{1}{1 - v} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{1 - v} - \frac{1}{2}\frac{1}{1 - v} = -\frac{1}{2}\ln|v| +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln|1 - v| - \frac{1}{2}\frac{1}{1 - v} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C.$$

Claro está, las integrales analizadas en los ejemplos 1 y 2 pueden ser calculadas también con ayuda de la sustitución (26.1), por ejemplo,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \frac{1}{4}\int \frac{(1 + u^2)^3 du}{u^3(1 - u^2)};$$

no obstante, con este método hubiera sido necesario integrar una fracción racional más compleja que la del resultado de la aplicación de la sustitución $u = \cos x$.

3. A veces en el cálculo de integrales cuya expresión subintegral contiene $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, suele ser útil recurrir a otros métodos artificiales utilizando las fórmulas trigonométricas conocidas, como, por ejemplo, la fórmula $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Mostremos en el ejemplo que acabamos de analizar el método de aplicación de esta fórmula:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cos x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x \cos x}dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} =$$
$$= \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^3 x} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \int \frac{d\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{dv}{v^3} {}^{*)} =$$
$$= \ln|u| - \frac{1}{2}\frac{1}{v^2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C.$$

Como era de esperar, se obtuvo el mismo resultado que anteriormente obtuvimos.

26.2. INTEGRALES DEL TIPO $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$

Sean n y m números racionales. La integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ con ayuda de las sustituciones $u = \operatorname{sen} x$ ó $u = \cos x$ se reduce a la integral de un binomio diferencial.

En efecto, suponiendo, por ejemplo, $u = \operatorname{sen} x$, obtendremos

$$\cos x = (1 - u^2)^{1/2}, \quad du = \cos x\,dx, \quad dx = (1 - u^2)^{-1/2}du$$

---

*) Aquí fue hecha la sustitución $v = u^2$.

y por eso

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \int u^m (1 - u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du.$$

De esta forma, la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ se expresa o no a través de funciones elementales en dependencia de si posee o no esta propiedad la integral obtenida del binomio diferencial.

En el caso cuando m y n son números enteros (no obligatoriamente positivos), la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ pertenece al tipo de integrales analizadas en el punto anterior, para su cálculo, en particular, es conveniente aplicar la sustitución (26.2).

Por ejemplo, si $m = 2k + 1$ (respectivamente $n = 2k + 1$) es un número impar, entonces se puede hacer la sustitución $u = \cos x$ (respectivamente $u = \operatorname{sen} x$):

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d \cos x = \\ = -\int (1 - u^2)^k u^n\, du.$$

La integral analizada está reducida a la integral de una fracción racional.

Un resultado análogo se puede obtener también para la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx$ con ayuda de la sustitución $u = \operatorname{sen} x$.

Si $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$, entonces suele ser útil la sustitución $t = \cos 2x$:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^{2l+1} x\, dx = \int \operatorname{sen}^{2k} x \cos^{2l} x \operatorname{sen} x \cos x\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^l \left(-\frac{1}{2} d \cos 2x\right) =$$

$$= -\frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1 - t)^k (1 + t)^l\, dt,$$

es decir, de nuevo se obtuvo la integral de una fracción racional.

Si ambos exponentes m y n son positivos y pares (o uno de ellos es cero), entonces es conveniente aplicar las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

que evidentemente llevan la integral analizada a integrales del mismo tiempo, pero con exponentes menores, también no negativos. Por ejemplo,

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

26.3. INTEGRALES DEL TIPO $\int \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x\, dx$

Las integrales indicadas en el título del punto se calculan directamente si transformamos las funciones subintegral por las fórmulas

$$\operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (\alpha + \beta)x + \operatorname{sen} (\alpha - \beta)x],$$

$$\operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sen} \beta x = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta)x - \cos (\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta)x + \cos (\alpha - \beta)x].$$

Por ejemplo,

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos x\, dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x) dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x = C.$$

26.4. INTEGRALES DE FUNCIONES TRASCENDENTES CALCULABLES INTEGRANDO POR PARTES

A las integrales indicadas en el título de este punto pertenecen, por ejemplo, las integrales

$\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx$, $\int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\, dx$, $\int x^n \cos \alpha x\, dx$,

$\int x^n \operatorname{sen} \alpha x\, dx$, $\int x^n e^{\alpha x}\, dx$, $\int x^n \arcsen x\, dx$,

$\int x^n \arccos x\, dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x\, dx$, $\int x^n \operatorname{arcctg} x\, dx$,

$\int x^n \ln x\, dx$ (n es un entero no negativo).

Todas estas integrales se calculan, en general, con ayuda de la integración reiterada por partes.

En efecto, tenemos:

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = \int e^{\alpha x} d \frac{\operatorname{sen} \beta x}{\beta} = \frac{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x\, dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} d \left(-\frac{\cos \beta x}{\beta}\right) =$$

$$= \frac{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} i,$$

de donde

$$I = \frac{e^{\alpha x}(\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C. \tag{26.3}$$

De forma análoga también se calcula la integral $\int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx$.

En las integrales $\int x^n \cos \alpha x \, dx$, $\int x^n \operatorname{sen} \alpha x \, dx$, $\int x^n e^{\alpha x} \, dx$, haciendo $u = x^n$ y respectivamente $dv = \cos \alpha x \, dx$, $dv = \operatorname{sen} \alpha x \, dx$, $dv = e^{\alpha x} dx$, después de la integración por partes de nuevo llegaremos a una integral de uno de los tipos señalados, pero ya con un exponente menor en uno. Aplicando este método n veces llegaremos a una integral del tipo analizado con $n = 0$, la cual evidentemente se calcula inmediatemente. Por ejemplo,

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x d \operatorname{sen} x = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x -$$

$$- 2\int \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$$

Utilizando las integrales analizadas anteriormente se pueden calcular también integrales más complejas. Calculemos, por ejemplo, la integral

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

Integrando por partes y aplicando (26.3) tenemos:

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \int x^n d \left[\frac{e^{\alpha x} (\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} \right] =$$

$$= x^n e^{\alpha x} \frac{\beta \operatorname{sen} \beta x + \alpha \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{n\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx -$$

$$- \frac{n\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx.$$

Las integrales obtenidas en la parte derecha son del mismo tipo que la inicial, sólo que el exponente de x es menor en uno. Aplicando sucesivamente el método analizado llegaremos a integrales del tipo

$$\int e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \, dx \quad \text{y} \quad \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx,$$

las cuales fueron analizadas anteriormente.

Finalmente, las integrales

$$\int x^n \arcsen x \, dx, \quad \int x^n \arccos dx, \quad \int x^n \operatorname{arctg} x \, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arcctg} x \, dx \quad \text{y} \quad \int x^n \ln x \, dx$$

con la integración por partes se reducen a la integral de una función algebraica, si en ellas hacemos $dv = x^n dx$ y como función u tomamos la función trascendente restante, es decir, una de las funciones: $\arcsen x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$. Por ejemplo,

$$\int x \ln x \, dx = \int \ln x d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{2} + C.$$

26.5. INTEGRALES DEL TIPO $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \, dx$

La sustitución

$$u = \operatorname{th} \frac{x}{2}$$

reduce la integral $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \, dx$ a la integral de una fracción racional.

En efecto, para la sustitución indicada tenemos

$$\operatorname{sh} x = \frac{2u}{1 - u^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1 - u^2},$$

por eso

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \, dx = 2\int R \left(\frac{2u}{1 - u^2}, \frac{1 + u^2}{1 - u^2} \right) \frac{du}{1 - u^2}.$$

En ejemplos concretos a veces resulta cómodo utilizar la sustitución del tipo $u = \operatorname{sh} x$, $u = \operatorname{ch} x$ ó $u = \operatorname{th} x$, que permiten calcular la integral de una forma sustancialmente más simple (compárese con el p. 26.1).

Las integrales del tipo

$$\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x \, dx,$$

donde m y n son números racionales, con ayuda de la sustitución $v = \operatorname{sh} x (u = \operatorname{ch} x)$ se reducen a la integral de un binomio diferencial (compárese con el p. 26.2).

26.6. OBSERVACIONES SOBRE LAS INTEGRALES NO EXPRESABLES A TRAVÉS DE FUNCIONES ELEMENTALES

Hemos analizado diferentes clases de funciones elementales y hemos hallado sus primitivas, que también son funciones elementales. Sin embargo, no toda función elemental tiene en calidad de primitiva una función también elemental. Con una situación semejante ya nos hemos encontrado en el análisis de la integral de un binomio diferencial: en este caso la función subintegral es elemental (irracional) y su integral, como se señaló, no siempre se calcula.

Se puede mostrar que las integrales

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx$$

(n es un número natural) tampoco se expresan a través de funciones elementales.

Existe una serie de integrales de funciones elementales que no se expresan a través de funciones elementales y que juegan un gran papel tanto en el propio análisis matemático como en sus diversas aplicaciones. A tales integrales pertenece, por ejemplo, la integral

$$\int e^{-x^2}\,dx,$$

y también las así llamadas *integrales elípticas*

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx,$$

donde $P(x)$ es un polinomio de tercer o cuarto grado. En el caso general estas integrales no se expresan a través de funciones elementales. Muy a menudo aparecen las integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{y} \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 0 < k < 1,$$

que con la sustitución $x = \operatorname{sen}\varphi$ se reducen a combinaciones lineales de las integrales

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \quad \text{y} \quad \int \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi;$$

llamadas respectivamente integrales elípticas *de primero y segundo género en la forma de Legendre*[*].

Ejercicios. Calcúlense las integrales:

1. $\int |x|\,dx.$
2. $\int (2x-5)^2\,dx.$
3. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$
4. $\int \left(2x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right) dx.$
5. $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$
6. $\int x^2\sqrt[5]{2x^3-1}\,dx.$
7. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$
9. $\int xe^{-x}\,dx.$
10. $\int \ln x\,dx.$
11. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$
12. $\int x^2\ln x\,dx.$
13. $\int \sqrt{x^2+3}\,dx.$
14. $\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$
15. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}.$
16. $\int \frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}\,dx.$
17. $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}\,dx.$
18. $\int \frac{dx}{(1-x)(1+x^3)}.$

[*] A. Legendre (1752—1832), matemático francés.

19. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$
20. $\int \frac{x^7\,dx}{x^{16}+1}.$
21. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}.$
22. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx.$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}.$
24. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$
25. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx.$
26. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}.$
27. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x+4}}.$
28. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^8 x\,dx.$
29. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx.$
30. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$
31. $\int \frac{dx}{\cos x\operatorname{sen}^2 x}.$
32. $\int \frac{dx}{2+\cos x}.$
33. $\int \operatorname{sen} 3x\cos 5x\,dx.$
34. $\int \arccos^2 x\,dx.$
35. $\int x^2\operatorname{arcsen}^2 x\,dx.$
36. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} x}.$
37. $\int x^3\ln^3 x\,dx.$
38. $\int xe^x\operatorname{sen} x\,dx.$
39. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$
40. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}.$

§ 27. INTEGRAL DEFINIDA

27.1. DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL SEGÚN RIEMANN

Recordemos (véase el p. 16.5) que se llama *partición* τ del segmento $[a, b]$ cualquier sistema finito de sus puntos x_i, $i = 0, 1, \dots, k$, tal que

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Además se escribe $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$. Cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ se llama *segmento de la partición* τ, si longitud se denota por Δx_i, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

La magnitud

$$\delta_\tau = \max_{i=1,2,\dots,k} \Delta x_i$$

la llamaremos *finura de la partición* τ (en inglés, *mesh o finesse of a partition*).

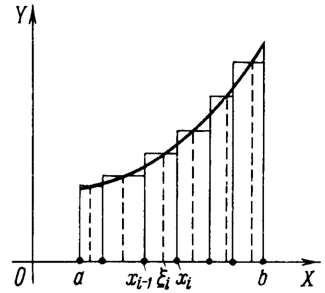


FIG. 110

La partición τ', del segmento $[a, b]$ se llama posterior a la partición τ (o continuadora de la partición τ) del mismo segmento, y también inscrita en la partición τ si cada punto de la partición τ' es también un punto de la partición τ, dicho de otro modo, que cada segmento de la partición τ' se contiene en cierto segmento de la partición τ (se dice además que τ' es un refino de la partición τ; en inglés *refinement of a partition*). En este caso se escribe $\tau' \prec \tau_0$ lo que es lo mismo, $\tau \prec \tau'$.

El conjunto de todas las particiones de un segmento dado posee las siguientes propiedades.

1°. Si $\tau_1 \prec \tau_2$ y $\tau_2 \prec \tau_3$, entonces $\tau_1 \prec \tau_3$.

2°. Para cualesquiera τ_1 y τ_2 existe τ tal que $\tau \succ \tau_1$ y $\tau \succ \tau_2$.

En realidad, la primera propiedad se deduce simplemente sólo de que por la condición $\tau_3 \succ \tau_2$, cada segmento de la partición τ_3 se contiene en cierto segmento de la partición τ_2, el cual a su vez por la condición $\tau_2 \succ \tau_1$ se contiene en algún segmento de la partición τ_1, de esta forma cualquier segmento de la partición τ_3 está sobre un determinado segmento de la partición τ_1 y esto significa que $\tau_3 \succ \tau_1$.

Para la demostración de la segunda propiedad de las particiones observemos sólo que si están dadas dos particiones τ_1 y τ_2, entonces la partición τ compuesta por todos los puntos que aparecen tanto en la partición τ_1 como en la partición τ_2, evidentemente continuará a τ_1 y a τ_2.

Supongamos ahora que sobre segmento $[a, b]$ está definida la función f y sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ alguna partición de este segmento

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

y δ_τ la finura de esta partición.

Fijemos de forma arbitraria los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, y formemos la suma

$$\delta_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Las sumas del tipo $\sigma_\tau(f; \xi_1 \dots \xi_k)$ se llaman *sumas integrales de Riemann**) de la función f (fig. 110). A veces para abreviar las denotaremos por $\sigma_\tau(f)$, $\sigma_\tau(\xi_1, \dots, \xi_k)$ o incluso simplemente por σ_τ.

*) B. Riemann (1826—1866), matemático alemán.

Geométricamente en el caso cuando la función f es no negativa (fig. 110) cada sumando de la suma integral de Riemann σ_τ es igual al área del rectángulo con base de longitud Δx_i y con altura $f(\xi_i)$. Toda la suma σ_τ es igual al área de la "figura escalonada" que se obtiene con la unión de todos los rectángulos indicados.

Definición 1. *La función f se llama integrable (según Riemann) sobre el segmento $[a, b]$ si existe un número A tal que para cualquier sucesión de particiones del segmento $[a, b]$*

$$\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{i=k_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

para la cual $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_{\tau_n} = 0$ *y para cualquier elección de los puntos*

$$\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}], \quad i = 1, 2, \dots, k_n, n = 1, 2, \dots,$$

existe e límite de la sucesión de sumas integrales $\sigma_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)})$ *y es igual a* A:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i^{(n)} = A \tag{27.1}$$

donde

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}; \quad i = 1, 2, \dots, k_n; \quad n = 1, 2, \dots.$$

Cuando se cumplen estas condiciones el número A se llama integral definida (de Riemann) de la función f sobre el segmento $[a, b]$ y se denota por $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

La expresión $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ se lee "integral de la función $f(x)\,dx$ entre los límites a y b; x se llama *variable de integración*; f, *función subintegral*; a, *límite inferior de la integral*; b, *superior*; y el segmento $[a, b]$ se llama *intervalo de integración*.

De esta forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sigma_{\tau_n}(f; \xi_i^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)}),$$

donde la sucesión τ_n es tal que $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_{\tau_n} = 0$

Para abreviar la escritura, en este caso escribiremos simplemente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\sigma_\tau \to \infty} \sigma_\tau(f).$$

De forma semejante a como la definición de límite de una función se puede enunciar de dos formas equivalentes, con ayuda de los límites de las sucesiones y con ayuda "lenguaje $\varepsilon - \delta$", así la definición de untegral se puede enunciar de otro modo.

Definición 2. *El número A se llama integral definida de la función f sobre el segmento $[a, b]$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que cualquiera que sea*

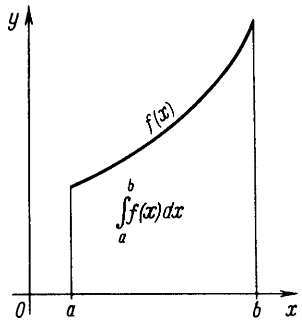


FIG. 111

la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ *del segmento* $[a, b]$, *la finura de la cual es menor que* δ: $\delta_\tau < \delta$ *y cualesquiera que sean los puntos* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *se cumple la desigualdad*

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i - A \right| < \varepsilon,$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que las dos definiciones de integral definida dadas anteriormente son equivalentes.

De la definición 1 se deduce que para las funciones no negativas la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es el límite, cuando $\delta_\tau \to 0$, de la sucesión de las áreas de las correspondientes figuras escalonadas, por lo que naturalmente está relacionada con el concepto de área y precisamente es igual al área de la figura*) (llamada "trapecio curvilíneo") cuya frontera es la gráfica de la función f, el segmento $[a, b]$ del eje de las x y, podría ser, los segmentos de las rectas $x = a$, $x = b$, las ordenadas de los puntos de los cuales varían respectivamente desde cero hasta $f(a)$ y hasta $f(b)$ (fig. 111). Para demostrar esto es necesario ante todo precisar el propio concepto de área de las figuras analizadas. Todo esto se hará más adelante en el § 31.

Observemos que el concepto de límite de las sumas integrales de Riemann introducido aquí es un concepto nuevo no contenido ni en el concepto de límite de una sucesión ni en el concepto de límite de una función.

En el futuro será necesario untilizar un concepto análogo de límite no sólo para las sumas integrales de Riemann sino también para otros objetos. Por esto enunciemos la definición general del límite de este tipo.

*) El término "figura" conocido de la geometría elemental se utiliza aquí siempre en el sentido de "conjunto plano".

Definición 3. *Analicemos el conjunto* $\mathfrak{T} = \{\tau\}$ *de todas las particiones del segmento* $[a, b]$. *Supongamos que sobre este conjunto está definida una función numérica, en general, multiforme* $\Phi(\tau)$, $\tau \in \mathfrak{T}$. *Diremos que la función* $\Phi(\tau)$ *tiene límite igual a* A *cuando* $\delta_\tau \to 0$ *y escribiremos*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \Phi(\tau) = A$$

si para cualquier sucesión de particiones $\tau_n \in \mathfrak{T}$, $n = 1, 2, \ldots$, *tal que* $\lim_{n\to\infty} \delta_{\tau_n} = 0$ *y para cualquier elección de los valores* $\Phi(\tau_n)$, *la sucesión numérica* $\Phi(\tau_n)$ *converge al número* A, *es decir,*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \Phi(\tau_n) = A$$

Este concepto de límite está definido con ayuda del concepto de límite de una sucesión, por eso para él resultan válidas muchas propiedades análogas a las propiedades correspondientes del límite de una sucesión. Con los ejemplos correspondientes nos encontraremos en el futuro.

Como en el caso del límite de las sumas integrales de Riemann, el concepto de este límite se puede enunciar en el "lenguaje ($\varepsilon - \delta''$)", lo que se le propone al lector.

Observemos como conclusión que la multiformidad de la función Φ sobre la cual se habla en la definición 3, en el caso de las sumas integrales de Riemann está relacionada con los diferentes métodos de elección de los puntos

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

27.2. ACOTACIÓN DE UNA FUNCIÓN INTEGRABLE

Establezcamos ante todo una condición necesaria que satisfacen las funciones integrales, su acotación.

Teorema 1. *Si una función es integrable sobre cierto segmento, entonces está acotada sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f no acotada sobre el segmento $[a, b]$ y sea dada cierta partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ de este segmento. En virtud de la no acotación de la función f sobre todo el segmento $[a, b]$, ella no está acotada al menos sobre un segmento de la partición τ. Sea la función f para mayor exactitud no acotada sobre el segmento $[x_0, x_1]$. Entonces, sobre este segmento existe una sucesión $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que*)

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty \tag{27.2}$$

Fijemos ahora de cualquier forma los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, 3, \ldots, k$. Entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i), \Delta x_i$$

*) En efecto, en virtud de la no acotación de la función f sobre el segmento $[x_0, x_1]$, por ejemplo, para cualquier natural $n = 1, 2, \ldots$ existe un punto $\xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1]$ tal que $|f(\xi_1^{(n)})| > n$. Es evidente que la sucesión $\{\xi_1^{(n)}\}$ satisface la condición (27.2).

tendrá un valor enteramente determinado. Por esto, según (27.2)

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_\tau(f;\xi_1^{(n)},\xi_2,\ldots,\xi_k)=\lim_{n\to\infty}[f(\xi_i^{(n)})\Delta x_1+\sum_{i=2}^{k}f(\xi_i)\,\Delta x_i]=\infty$$

y quiere decir que cualquiera que sea el número $M > 0$, siempre se puede escoger un número n_0 tal que si sobre el primer segmento $[x_0, x_1]$ tomamos el punto $\xi_i^{(n_0)}$, entonces

$$|\sigma_\tau(f;\xi_1^{(n_0)},\xi_2,\ldots,\xi_k| > M.$$

De aquí se deduce que las sumas σ_τ no pueden tender a ningún límite finito cuando $\sigma_\tau \to 0$.

En efecto, si existiera el límite finito $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau = A$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontraría $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todas las particiones $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ de finura $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$, para cualquier elección de los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ se cumpliría la desigualdad $|\sigma_\tau - A| < \varepsilon$ y, por consiguiente,

$$|\sigma_\tau| = |(\sigma_\tau - A) + A| \leqslant |\sigma_\tau - A| + |A| < \varepsilon + |A|.$$

En nuestro caso, es decir, en el caso de la no acotación de la función f, para cualquier partición τ (y entre ellas para tal que $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ si existiera el δ_ε indicado), para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo se pueden escoger los puntos ξ_i de tal forma que se cumple la desigualdad

$$|\sigma_\tau| > |A| + \varepsilon.$$

La contradicción obtenida demuestra el teorema. □

La condición de acotación de la función f siendo necesaria para su integrabilidad no es al mismo tiempo suficiente. De ejemplo que demuestra esta afirmación puede servir la así llamada *función de Dirichlet* (véase el p. 5.2)

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ es racional,}\\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.}\end{cases}$$

Analicémosla sobre el segmento $[0, 1]$. Evidentemente ella es acotada sobre él. Mostremos que no es integrable. Fijemos una partición arbitraria $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[0, 1]$. Si escojemos los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ racionales, entonces obtendremos

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k}\Delta x_i = 1,$$

y si tomamos los ξ_i irracionales, entonces

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

Ya que esto es cierto para cualquier partición τ, entonces las sumas integrales σ_τ a ciencia cierta no tienden a ningún cuando $\delta_\tau \to 0$.

27.3. SUMAS SUPERIORES E INFERIORES DE DARBOUX. INTEGRALES SUPERIOR E INFERIOR DE DARBOUX

Sea la función $f(x)$ definida sobre el segmento $[a, b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ cierta partición y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Pongamos (fig. 112)

$$M_i = \sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x),\quad m_i = \inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x),\quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} M_i\Delta x_i. \tag{27.3}$$

$$s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} m_i\Delta x_i. \tag{27.4}$$

Evidentemente $s_\tau < S_\tau$.

La suma S_τ se llama suma *superior de Darboux* y s_τ *inferior*.

Propiedades de las sumas de Darboux.

1°. *Si la función f es acotada, entonces para cualquier partición las sumas S_τ y s_τ están definidas.*

En realidad, en este caso M_i y m_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, son finitos y por esto las expresiones (27.3) y (27.4) tienen sentido.

2°. *Si $\tau' \succ \tau$, entonces $S_{\tau'} \leqslant S_\tau$ y $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ y $\tau' = \{x'_j\}_{j=0}^{j=k'}$ dos particiones del segmento $[a, b]$ tales que $\tau \prec \tau'$ y

$$m_i = \inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x),\quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$m'_j = \inf_{x'_{j-1}\leqslant x\leqslant x'_j} f(x),\quad j = 1, 2, \ldots, k',$$

Si $[x'_{j-1}, x'_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$, entonces evidentemente

$$m_i \leqslant m'_j \tag{27.5}$$

(la cota inferior cuando desminuye el conjunto sólo puede aumentar).

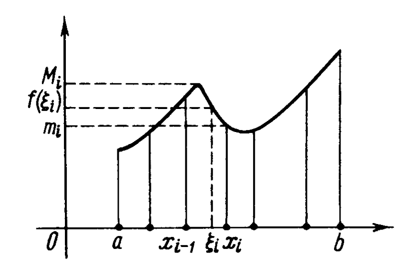


FIG. 112

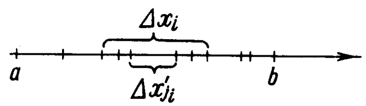


FIG. 113

En virtud de la condición $\tau \to\!\!\ni \tau'$ cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición τ es la unión de algunos segmentos de la partición τ'; denotaremos estos segmentos por $[x'_{(j-1)_i}, x'_{j_i}]$. De esta forma, si

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{y} \quad \Delta x'_{j_i} = x'_{j_i} - x'_{(j-1)_i},$$

entonces (fig. 113)

$$\Delta x_i = \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i}.$$

Utilizando estas notaciones y la desigualdad (27.5) obtendremos:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \sum_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m_i \Delta x'_{j_i} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i} m'_{j_i} \Delta x'_{j_i} = \sum_{j=1}^{k'} m'_j \Delta x'_j = s_{\tau'}.$$

Hemos demostrado que $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$.

De forma análoga se demuestra que $S_\tau \geqslant S_{\tau'}$ cuando $\tau \to\!\!\ni \tau'$. □

Corolario. *Para dos particiones cualesquiera τ_1 y τ_2 del segmento $[a, b]$ se cumple la desigualdad*

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}, \tag{27.6}$$

es decir, cualquier suma inferior de Darboux es menor que cualquier suma superior.

En efecto, si están dadas dos particiones τ_1 y τ_2 del segmento $[a, b]$, entonces existe una partición τ de este segmento tal que $\tau \to\!\!\ni \tau_1$ y $\tau \in\!\!\leftarrow \tau_2$ (véase el p. 27.1). Aplicando la propiedad 2° obtendremos

$$s_{\tau_1} \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant S_{\tau_2}. \;\square$$

Es evidente que las sumas de Riemann y Darboux están relacionadas por las desigualdades

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

La siguiente propiedad es una especificación de esta afirmación.

3°. *Si $\sigma_\tau = \sigma(f; \xi_1, \ldots, \xi_k)$ es alguna suma integral de Riemann correspondiente a una partición τ dada, entonces*

$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau, \quad S_\tau = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ una partición del segmento $[a, b]$ y $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Si están dados ciertos conjuntos numéricos X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, y las constantes $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para el conjunto

$$X = \left\{x : x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, x_i \in X_i, i = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

como es fácil ver son válidas las desigualdades (¿por qué?)

$$\sup X = \sum_{i=1}^{k} a_i \sup X_i, \; \inf X = \sum_{i=1}^{k} a_i \inf X_i.$$

Por esto tenemos:

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \inf_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i)\Delta x_i = \inf_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \inf_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sigma(f; \xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Análogamente

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i \\ i=1,2,\ldots,k}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_k). \;\square$$

4°. $S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i$, *donde $\omega_i(f)$ es la oscilación de la función f sobre el segmento* $[x_{i-1}, x_i]$ (véase el p. 19.6), $i = 1, 2, \ldots, k$.

DEMOSTRACIÓN. Señalemos primero que si para dos cunjuntos numéricos X e Y dados, ponemos,

$$Z = \{z : z = x - y, x \in X, y \in Y\}$$

entonces $\sup Z = \sup X - \inf Y$ (¿por qué?)

Utilizando esto obtendremos

$$M_i - m_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leqslant x_i \leqslant x_i} f(x) =$$

$$= \sup_{\substack{x_{i-1} \leqslant x' \leqslant x_i \\ x_{i-1} \leqslant x'' \leqslant x_i}} [f(x'')] = \omega_i(f), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

por lo que

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i. \;\square$$

Pongamos ahora

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, \quad I^* = \inf_\tau S_\tau.$$

I_* se llama *integral inferior de Darboux* de la función f sobre el segmento $[a, b]$ e I^* su *integral superior*.

De las propiedades 1° y 2° de las sumas de Darboux se deduce que la función f es acotada ya que tanto su integral inferior de Darboux como la superior son finitas. En virtud del corolario de la propiedad 2° tendremos también.

$$I_* \leqslant I^*. \tag{27.7}$$

27.4. CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES DE INTEGRABILIDAD

Teorema 2. *Para que una función acotada sobre cierto segmento sea integrable sobre él es necesario y suficiente que*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{27.8}$$

La condición (27.8) significa (véase la definición 3 en el p. 27.1) que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tal que para cualquier partición τ de finura $\delta_\tau < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|S_\tau - s_\tau| < \varepsilon. \tag{27.9}$$

Por cuanto $s_\tau \leqslant S_\tau$, entonces (27.9) es equivalente a la desigualdad

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea la función f acotada sobre el segmento $[a, b]$, integrable sobre él y sea $I = \int_a^b f(x)\,dx$; entonces $\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$. Por esto para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta_{(\varepsilon)} > 0$ tal que si $\delta_\tau < \delta$, entonces

$$|\sigma_\tau - I| < \varepsilon \quad \text{ó} \quad I - \varepsilon < \sigma_\tau < I + \varepsilon.$$

De aquí que para $\delta_\tau < \delta$ según la propiedad 3° de las sumas de Darboux (véase el p. 27.3) obtenemos la desigualdad

$$I - \varepsilon \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \varepsilon.$$

De esta forma, si $\delta_\tau < \delta$, entonces

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau \leqslant 2\varepsilon$$

y esto significa el cumplimiento de la condición (27.8).

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que la función f es acotada y se cumple la condición (27.8). De la definición de integrales superior e inferior de Darboux y de la desigualdad (27.7) tenemos

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau \tag{27.10}$$

por lo que

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau,$$

de donde por (27.8) se deduce que $I^* - I_* = 0$. Denotando el valor común de las integrales superior e inferior de Darboux por I, es decir, haciendo $I = I_* = I^*$ de (27.10) obtendremos

$$s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau.$$

y por esto

$$0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau, \quad 0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

De aquí, por (27.8) se deriva que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (I - s_\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - I) = 0,$$

y esto significa que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = I. \tag{27.11}$$

Pero según la propiedad 3° de las sumas integrales de Darboux (véase el p. 27.3)

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau \tag{27.12}$$

De (27.11) y (27.12) se deduce (compárese con las afirmaciones análogas en los p. 3.3 y 4.7) que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = I,$$

y esto significa la integrabilidad de la función f. □

Corolario 1. *Si la función f es integrable, entonces no sólo sus sumas integrales de Riemann, sino también sus sumas de Darboux tienden a su integral cuando la finura de la partición tiende a cero.*

En efecto, si la función f es integrable, entonces se cumple la condición (27.8) y de ella, como vimos, se deduce la afirmación del corolario, es decir, la igualdad (27.11). □

Corolario 2. *Para que una función f acotada sobre cierto segmento sea integrable sobre segmento es necesario y suficiente que*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = 0$$

donde $\omega_i(f)$ es la oscilación de la función f sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$.

Esto se deduce directamente de la propiedad 4° de las sumas de Darboux (véase el p. 27.3). □

Problema 19. Demuéstrese que para que una función sea integrable sobre un segmento es necesario y suficiente que sea acotada sobre él y que sus integrales superior e inferior de Darboux coincidan, además, el valor común de estas integrales es su integral.

27.5. INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y MONÓTONAS

Teorema 3. *Una función definida y continua sobre cierto segmento es integrable sobre él.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función f continua sobre el segmento $[a, b]$; entonces como es conocido, es acotada (véase el teorema 1 en el p. 6.1) y uniformemente continua (véase el teorema 5 en el p. 19.7) sobre este segmento. Fijamos arbitrariamente

$\varepsilon > 0$. En virtud de la continuidad uniforme existe $\delta > 0$ tal que para puntos cualesquiera $\xi \in [a, b]$ y $\eta \in [a, b]$ que satisfacen la condición $|\eta - \xi| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$|f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{27.13}$$

Tomemos cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ de finura $\delta_\tau < \delta$. Sea como siempre $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Por cuanto una función continua sobre un segmento alcanza sus cotas superior e inferior sobre este segmento, entonces existen los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que

$$f(\xi_i) = m_i, \quad f(\eta_i) = M_i.$$

Los puntos ξ_i y η_i pertenecen a un mismo segmento de la partición τ, por lo que

$$|\eta_i - \xi_i| \leqslant \Delta x_i \leqslant \delta_\tau \leqslant \delta.$$

De aquí, en virtud de (27.13) se deriva la desigualdad

$$f(\eta_i) - f(\xi_i) = |f(\eta_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, i = 1, 2, \dots, k.$$

Por consiguiente para cualquier partición τ de finura $\delta_\tau < \delta$ se cumple la condición

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S'_\tau - s_\tau) = 0$. Por esto, según el teorema 2, la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$. $\square$

Teorema 4. *Una función definida y monótona sobre el segmento* $[a, b]$ *es integrable sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la función $f(x)$ monótona sobre el segmento $[a, b]$, por ejemplo, crece sobre él. Entonces

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

De esta forma, la función f es acotada sobre el segmento $[a, b]$. Más adelante, para cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ evidentemente tenemos

$$m_i = f(x_{i-1}), \quad M_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

por esto

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i \leqslant \delta_\tau \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = [f(b) - f(a)]\delta_\tau,$$

ya que en la suma $\sum\limits_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$ se eliminan mutuamente todos los suman-

De la desigualdad obtenida se deduce que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [S_\tau(f) - s_\tau(f)] = 0.$$

Por esto, (véase el p. 27.4) la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$. $\square$

Ejercicio 2. Demuéstrese que si una función es acotada y continua sobre cierto segmento, excepto, podría ser, un número finito de puntos, entonces es integrable sobre este segmento.

§ 28. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES INTEGRABLES

28.1. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Sistemáticamente utilizaremos las notaciones y terminología introducidas en el párrafo anterior sin hacer llamados especiales.

Ante todo observemos que por cuanto la integral de una función es un número que se le hace corresponder a una función dada por la definición enunciada anteriormente, entonces, claro está, este número no depende de la elección de la notación para el argumento de la función subintegral, es decir, de la notación de la *variable de integración*:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(\xi)\, d\xi.$$

Pasemos ahora al análisis de las propiedades principales de la integral definida.

1°. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

En efecto, aquí la función subintegral es igual a la unidad por lo que para cualquier suma integral de Riemann σ_τ tenemos

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i = b - a. \square$$

2°. *Si la función f es integrable sobre el segmento* $[a, b]$, *entonces es integrable sobre cualquier segmento* $[a^*, b^*]$ *contenido en* $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, si la función f es acotada sobre el segmento $[a, b]$, entonces evidentemente es acotada sobre $[a^*, b^*]$. Más adelante, cualquiera que sea la partición $\tau^* = \{x^*_i\}_{i=0}^{i=k^*}$ del segmento $[a^*, b^*]$ de finura δ_{τ^*}, siempre se puede prolongar en la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ de ese mismo diámetro $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$; para esto es suficiente agregar a los puntos x^*_i, $i = 1, 2, \dots, k^*$ un número finito de puntos elegidos de la forma correspondiente, pertenecientes al segmento $[a, b]$, pero no pertenecientes al segmento $[a^*, b^*]$.

Haciendo

$$m^*_i = \inf_{x^*_{i-1} \leqslant x \leqslant x^*_i} f(x), \quad M^*_i = \sup_{x^*_{i-1} \leqslant x \leqslant x^*_i} f(x),$$

$$\Delta x^*_i = x^*_i - x^*_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k^*$$

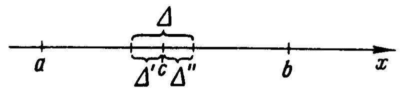


FIG. 114

y observando que cada sumando de la suma $\sum_{i=1}^{k} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^*$ es sumando de la suma $\sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i$ y que todos los sumandos de ambas sumas son no negativos tenemos

$$0 \leqslant S_{\tau^*} s_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{k^*} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^* \leqslant \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\Delta x_i = S_\tau - s_\tau. \quad (28.1)$$

Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$ entonces, como sabemos (véase el p. 27.4),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \quad (28.2)$$

Por cuanto $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$, entonces de (28.2) y de la desigualdad (28.1) se deduce que

$$\lim_{\delta_{\tau^*} \to 0} (S_{\tau^*} - s_{\tau^*}) = 0, \quad (28.3)$$

es decir, (véase el p. 27.4) la función f es integrable sobre el segmento $[a^*, b^*]$. □

3°. (Aditividad de la integral).

Sea $a < c < b$. Si la función f es integrable sobre los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y además

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \quad (28.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Si la función f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$, entonces es acotada sobre cada uno de estos segmentos y quiere decir que sobre todo el segmento $[a, b]$, es decir, existe la constante $A > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant A, \quad a \leqslant x \leqslant b. \quad (28.5)$$

Sea τ cierta partición del segmento $[a, b]$. Si el punto c no aparece en la posición τ, entonces denotemos por τ' la partición del segmento $[a, b]$ obtenida de τ agregando el punto c; evidentemente

$$\tau' \vdash \tau \quad (28.6)$$

Si el punto c aparece en la partición τ, entonces pondremos $\tau' = \tau$.

En el primer caso denotemos por Δ' y Δ'' las longitudes de los dos segmentos de la partición τ' contiguos al punto c por ambos lados. Evidentemente $\Delta = \Delta' + \Delta''$ es la longitud del segmento de la partición τ que contiene el punto c (fig. 114). Las sumas superiores de Darboux S_τ y $S_{\tau'}$ de la función f sobre el segmento $[a, b]$ se diferencian sólo en los sumandos correspondientes a los segmentos de las particiones τ y τ' que contienen el punto c.

Denotando por M', M'' y M la cota superior de la función $|f|$ sobre los segmentos analizados, las longitudes de los cuales están denotadas correspondientemente por Δ', Δ'' y Δ obtendremos (véase también (28.5))

$$0 \leqslant S_\tau - S_{\tau'} \leqslant M'\Delta' + M''\Delta'' + M\Delta \leqslant A(\Delta' + \Delta'' + \Delta) = 2A\Delta \leqslant 2A\delta_\tau.$$

En el segundo caso, es decir, cuando $\tau' = \tau$ simplemente

$$S_{\tau'} = S_\tau, s_{\tau'} = s_\tau,$$

Por esto en ambos casos

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - S_{\tau'}) = 0 \quad (28.7)$$

y análogamente

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (s_\tau - s_{\tau'}) = 0. \quad (28.8)$$

El conjunto de puntos de la partición τ' que pertencen al segmento $[a, c]$ forma su partición que denotaremos τ' $[a, c]$; el conjunto de los puntos de la partición τ' que pertenecen al segmento $[c, b]$, forma una partición de este segmento que la denotaremos por $\tau'[c, b]$.

Evidentemente

$$S_{\tau'} = S_{\tau'[a,c]} + S_{\tau'[c,b]}, \quad s_{\tau'} = s_{\tau'[a,c]} + s_{\tau'[c,b]} \quad (28.9)$$

y por esto

$$S_{\tau'} - s_{\tau'} = (S_{\tau'[a,c]} - s_{\tau'[a,c]}) + (S_{\tau'[c,b]} - s_{\tau'[c,b]}) \quad (28.10)$$

y ya que la función f por suposición es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$, entonces

$$\lim_{\delta_{\tau'[a,c]} \to 0} (S_{\tau'[a,c]} - s_{\tau'[a,c]}) = 0, \quad \lim_{\delta_{\tau'[c,b]} \to 0} (S_{\tau'[c,b]} - s_{\tau'[c,b]}) = 0.$$

Observando que $\delta_{\tau'[a,c]} \leqslant \delta_{\tau'}$, $\delta_{\tau'[c,b]} \leqslant \delta_{\tau'}$ hallamos por (28.10)

$$\lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'} - s_{\tau'}) = \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[a,c]} - s_{\tau'[a,c]}) + \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} (S_{\tau'[c,b]} - s_{\tau'[c,b]}) = 0. \quad (28.11)$$

Vimos anteriormente que el cumplimiento de semejante condición para cualesquiera particiones τ lleva consigo la integrabilidad de la función. Aquí las particiones τ' analizadas tienen un aspecto especial: necesariamente contienen el punto c. Para pasar a una partición τ arbitraria representemos la diferencia $S_\tau - s_\tau$ de la forma

$$S_\tau - s_\tau = (S_\tau - S_{\tau'}) + (S_{\tau'} - s_{\tau'}) + (s_{\tau'} - s_\tau).$$

Ahora de (28.7), (28.8) y (28.11) tenemos

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0; \quad (28.12)$$

y como τ era una partición arbitraria del segmento $[a, b]$ entonces de la acotación de la función f sobre el segmento $[a, b]$ y el cumplimiento de la condición (28.12) se deduce su integrabilidad sobre este segmento.

De la integrabilidad de la función f sobre los segmentos $[a, c]$, $[c, b]$ y $[a, b]$ se deduce (véase el p. 27.4) que

$$\lim_{\delta_{\tau'[a,c]} \to 0} S_{\tau'[a,c]} = \int_a^c f(x)\,dx, \quad \lim_{\delta_{\tau[c,b]} \to 0} S_{\tau'[c,b]} = \int_c^b f(x)\,dx, \quad \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} S_{\tau'} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por esto pasando al límite cuando $\delta_{\tau'} \to 0$ en la primera igualdad, de (28.9) obtenemos la fórmula (28.4). □

4°. *Si las funciones f y g son integrables sobre el segmento $[a, b]$, entonces su suma $f + g$ también es integrable sobre él y además*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.13}$$

DEMOSTRACIÓN. En realidad, cualesquiera que sean la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, tenemos

$$\sigma_\tau(x + g) = \sum_{i=1}^{k} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_\tau(f) + \sigma_\tau(g). \tag{28.14}$$

Por cuanto en virtud de la integrabilidad de las funciones f y g existen los límites de las sumas integrales $\sigma_\tau(f)$ y $\sigma_\tau(g)$ cuando $\delta_\tau \to 0$, entonces de (28.14) se deduce que existe también el límite (¿por qué?) de la suma integral $\sigma_\tau(f + g)$ y además

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f + g) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) + \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(g), \tag{28.15}$$

lo que significa la integrabilidad de la función $f + g$ sobre el segmento $[a, b]$.

De nuevo por la definición de integral

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f + g) = \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx,$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(g) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (28.15) obtendremos (28.13). □

5°. *Sean f una función integrable sobre el segmento $[a, b]$ y c una constante; entonces la función cf también es integrable sobre este segmento y*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Cualesquiera que sean la partición $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, tenemos

$$\sigma_\tau(cf) = \sum_{i=1}^{k} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sigma_\tau(f),$$

de donde realizando los razonamientos por el mismo esquema que en la demostración de la propiedad anterior obtendremos

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(cf) = \lim_{\delta_\tau \to 0} c\sigma_\tau(f) = c\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f) = c\int_a^b f(x)\,dx. \ \square$$

De las dos últimas propiedades se deriva el corolario: *si cada una de las funciones f_i, $i = 1, 2, \dots, n$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y λ_i son constantes arbitrarias, entonces la función $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ es integrable sobre $[a, b]$ y además*

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_a^b f_i(x)\,dx.$$

Esta propiedad de la integral definida se llama su *linealidad*.

6°. *Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ integrables sobre el segmento $[a, b]$. Entonces su producto $f(x)g(x)$ también es integrable sobre él.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la integrabilidad de las funciones f y g sobre el segmento $[a, b]$, son acotadas sobre este segmento, es decir, existen las constantes $A > 0$ y $B > 0$ tales que

$$|f(x)| \leqslant A, \quad |g(x)| \leqslant B \tag{28.16}$$

para todos los $x \in [a, b]$. Por esto, el producto $f(x)g(x)$ también es acotado: para todos los puntos $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)g(x)| \leqslant AB.$$

Sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ cualquier partición del segmento $[a, b]$. Estimemos la expresión $f(x'')g(x'') - f(x')g(x')$, para esto agreguemos y restemos de ella $f(x')g(x'')$:

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]g(x'') + [g(x'') - g(x')]f(x'). \tag{28.17}$$

Para los puntos $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ y $x'' \in [x_{i-1}, x_i]$, de (28.16) y (28.17) se deduce que

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g), \tag{28.18}$$

donde $\omega_i(f)$ y $\omega_i(g)$ son las oscilaciones de las funciones f y g sobre los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \dots, k$.

De la desigualdad (28.18) para la oscilación $\omega_i(fg)$ del producto fg sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ se deriva la estimación

$$\omega_i(fg) \leqslant B\omega_i(f) + A\omega_i(g), \tag{28.19}$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant B\sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i + A\sum_{i=1}^{k} \omega_i(g)\Delta x_i. \tag{28.20}$$

En virtud de la integrabilidad de las funciones f y g (véase el corolario 2 del teorema 2 en el p. 27.4)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(g)\Delta x_i = 0.$$

Por esto de la estimación (28.20) se deduce la igualdad

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(fg)\Delta x_i = 0,$$

que lleva consigo la integrabilidad del producto fg sobre el segmento $[a, b]$. □

Con el método de inducción matemática es fácil demostrar que si cada una de las funciones $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces también su producto será integrable sobre $[a, b]$. En particular, junto con la función $f(x)$ es integrable también $[f(x)]^n$ para cualquier natural n.

7°. *Si la función $f(x)$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y la cota inferior de la función $f(x)$ sobre $[a, b]$ es positiva, entonces* $1/f(x)$ también es integrable sobre $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN. Si en todos los puntos sobre $[a, b]$: $|f(x)| \geqslant m > 0$, entonces $\dfrac{1}{|f(x)|} \leqslant \dfrac{1}{m}$ para todos los $x \in [a, b]$; por esto, $\left|\dfrac{1}{f(x_2)} - \dfrac{1}{f(x_1)}\right| \leqslant \dfrac{|f(x_1) - f(x_2)|}{m^2}$ para cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$. De aquí se deduce que si $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ es una partición arbitraria del segmento $[a, b]$, entonces $\omega_i\left(\dfrac{1}{f}\right) \leqslant \dfrac{1}{m^2}\,\omega_i(f)$, por consiguiente

$$0 \leqslant \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i\left(\frac{1}{f}\right)\Delta x_i \leqslant \frac{1}{m^2} \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = 0. \ \square$$

Corolario. *Si las funciones f y g son integrables sobre el segmento $[a, b]$ y la cota inferior de la función $|g|$ es positiva, entonces f/g también es integrable sobre $[a, b]$.*

Esto se deriva de las propiedades 6° y 7° y de que $\dfrac{f}{g} = f\dfrac{1}{g}$. □

8°. *Si la función f es no negativa y es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \tag{28.21}$$

DEMOSTRACIÓN. En realidad, cualesquiera que sean la partición $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y los puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, para la función $f \geqslant 0$ tenemos

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0. \tag{28.22}$$

Si la función f es integrables sobre el segmento $[a, b]$, entonces pasando al límite en (28.22) cuando $\delta_\tau \to 0$ obtendremos la desigualdad (28.21). □

Corolario. *Si las funciones f y g son integrables sobre $[a, b]$ y para todos los $x \in [a, b]$*

$$f(x) \geqslant g(x), \tag{28.23}$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.24}$$

Si las funciones f y g satisfacen la condición (28.23), entonces

$$f(x) - g(x) \geqslant 0, \quad x \in [a, b];$$

por eso observando que sobre la base del corolario de las propidades 4° y 5° la función $f - g$ es integrable, en virtud de la desigualdad (28.21) tenemos

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geqslant 0.$$

Pero (véase el corolario indicado anteriormente)

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

y quiere decir que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0. \ \square$$

El corolario demostrado afirma que ambos miembros de la desigualdad del tipo (28.23) se pueden integrar respecto a un mismo intervalo. (En relación con esto observemos que la diferenciación de ambos miembros de la desigualdad sin suposiciones especiales complementarias no es admisible).

9°. *Sea la función f integrable sobre el segmento $[a, b]$. Si es no negativa sobre él: $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, y existe el punto $x_0 \in [a, b]$ en el cual la función f es continua y positiva: $f(x_0) > 0$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Según el corolario de la propiedad 2 de los límites de las funciones en el p. 5.10, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2}$ para todos los $x \in U(x_0, \delta) \cap [a, b]$. Sea $[\alpha, \beta] \subset U(x_0, \delta) \cap [a, b]$, $\alpha < \beta$; entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \frac{f(x_0)}{2}(\beta - \alpha) > 0. \ \square$$

Señalemos que si renunciamos a la condición de continuidad de la función f en el punto x_0, entonces puede ocurrir que para una función integrable no negativa sobre un segmento, positiva en cierto punto, la integral respecto a todo el segmento es igual a cero. Así, por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{cuando} \quad x = 0 \end{cases}$$

es integrable y no negativa, $f(0) > 0$, pero $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Esta igualdad se deduce fácilmente de la definición de integral.

10°. Fue introducido el concepto de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función f respecto a un segmento $[a, b]$. donde por la notación habitual, $a < b$.

Para cualquier función f definida en el punto a pongamos por definición

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{28.25}$$

y para una función f integrable sobre el segmento $[a, b]$,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b. \tag{28.26}$$

Estas definiciones en cierta medida son naturales. En el primer caso, cuando $a = b$ se debe considerar que todos los intervalos de la partición del segmento $[a, b]$ se convierten en puntos y sus longitudes Δx_i se anulan. Por esto, todas las sumas integrales $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ en este caso también son iguales a cero y junto con ellas se anula la integral que aparece en el primer miembro de (28.25).

En el segundo caso se debe considerar que los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ están orientados en el sentido negativo del eje Ox (el concepto de segmento orientado le es conocido al lector de la geometría analítica) y por esto sus longitudes Δx_i son negativas. De aquí se deduce que todas las sumas integrales formadas para la integral $\int_b^a f(x)\,dx$ se diferencian sólo en el signo de las sumas integrales correspondientes de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ lo que hace natural la fórmula (28.26).

A estos razonamientos intuitivos se les puede dar una forma lógica estricta introduciendo las definiciones correspondientes, no obstante, es mucho más simple y breve introducir las igualdades (28.25) y (28.26) por definición.

11°. *Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces la función $|f|$ es integrable sobre él y*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad a < b. \tag{28.27}$$

En efecto, en primer lugar, de la acotación de f evidentemente se deduce la acotación de la función $|f|$ y en segundo lugar, para dos puntos cualesquiera $\xi \in [a, b]$ y $\eta \in [a, b]$ tiene lugar la desigualdad

$$\big||f(\xi)| - |f(\eta)|\big| \leqslant |f(\xi) - f(\eta)|,$$

de donde se deduce que cualquiera que sea la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$, denotando por $\omega_i(f)$ y $\omega_i(|f|)$ respectivamente las oscilaciones de las funciones f y $|f|$ sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ obtendremos $\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f)$; $i = 1, 2, \dots, k$, por eso

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega_i(|f|)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i.$$

De aquí se deduce que si

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(f)\Delta x_i = 0, \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \omega_i(|f|)\Delta x_i = 0.$$

Esto significa (véase el p. 27.4) que de la integrabilidad de la función se deduce la integrabilidad de la función $|f|$.

Sea ahora $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, entonces

$$|\sigma_\tau(f)| = \left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |f(\xi_i)|\Delta x_i = \sigma_\tau(|f|).$$

Pasando en esta desigualdad al límite cuando $\delta_\tau \to 0$ y observando que

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} |\sigma_\tau(f)| = \left|\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f)\right| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|,$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(|f|) = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

obtendremos la desigualdad (28.27). □

Si renunciamos a la restricción $a < b$, es decir, aceptamos los casos $a = b$ y $a > b$, entonces el análogo de la desigualdad (28.27) tiene el aspecto

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|. \tag{28.28}$$

En efecto, sea $a < b$. Por cuanto (véase la propiedad 8°)

$$\left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

entonces la desigualdad (28.28) coincide en este caso con la desigualdad (28.27). Si $a > b$, entonces utilizando la propiedad (28.26) y la desigualdad (28.27) obtendremos

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \leqslant \int_b^a |f(x)|\,dx = \left|\int_b^a |f(x)|\,dx\right| = \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

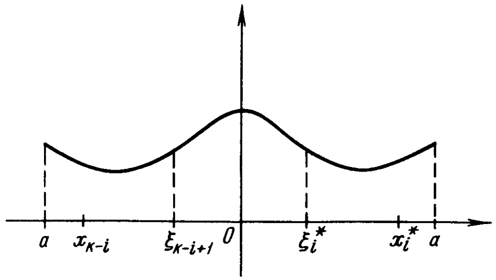


FIG. 115

Finalmente, para $a = b$ la desigualdad (28.28) es evidente.

Ejemplos. 1. Sea la función f par sobre el segmento $[-a, a]$ e integrable sobre el segmento $[0, a]$. Entonces es integrable sobre $[-a, a]$ y además

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \tag{28.29}$$

Demostremos que la función f es integrable sobre el segmento $[-a, 0]$ y que

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx, \tag{28.30}$$

de donde por la aditividad de la integral (propiedad 3°) se derivará inmediatamente la fórmula (28.29) ya que (eliminando la notación de la función subintegral):

$$\int_{-a}^{a} = \int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a} = 2\int_{0}^{a}.$$

Esto se deduce de que si f es una función par, entonces la transformación de simetría del eje numérico con respecto al cero convierte sus sumas integrales sobre el segmento $[0, a]$ en sumas integrales iguales respecto al segmento $[-a, 0]$ y viceversa. En realidad, si $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ es una partición del segmento $[-a, 0]$, entonces $\tau^* = \{x_i^*\}_{i=0}^{i=k}$ donde $x_i^* = -x_{k-i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, es una partición del segmento $[0, a]$ y además las finuras de ambas particiones evidentemente coinciden: $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$. Si para cada punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ponemos $\xi_i^* = -\xi_{k-i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k$, entonces en virtud de la paridad de la función f obtendremos $f(\xi_i^*) = f(\xi_{k-i+1})$ (fig. 115) y por consiguiente, a cualquier suma integral de Riemann $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$ de la función f sobre el segmento $[-a, 0]$ le corresponderá una suma integral igual a ella $\sigma_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i^*)\Delta x_i^* = \sigma_\tau$ de la misma función f, pero sobre el segmento $[0, a]$ (aquí

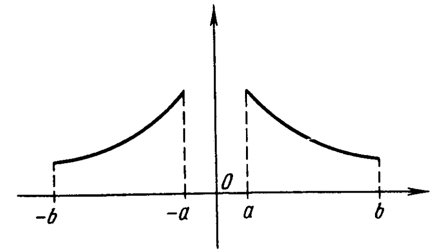


FIG. 116

como siempre $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta x_i^* = x_i^* - x_{i-1}^*$ y es fácil ver que $\Delta x_i = \Delta x_{k-i+1}^*$, $i = 1, 2, \dots, k$). Por esto

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_{\tau^*} \to 0} \sigma_{\tau^*} = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

De esta forma, el límite que aparece en el primer miembro de esta igualdad existe y esto significa que la función f es integrable sobre el segmento $[-a, 0]$. Por cuanto el límite indicado es también igual a la integral $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$, entonces la igualdad (28.30) queda demostrada. □

El ejemplo analizado se puede generalizar algo. Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y

$$f^*(x) \overset{\text{def}}{=} f(-x), \quad -b \leqslant x \leqslant -a,$$

(fig. 116), entonces la función f^* es integrable sobre el segmento $[-b, -a]$ y

$$\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{28.31}$$

Esta afirmación se demuestra análogamente al caso analizado anteriormente.

2. Analicemos ahora las funciones periódicas.

La función $f\colon x \to \boldsymbol{R}$, $X \subset \boldsymbol{R}$ se llama periódica sobre el conjunto X con período $T > 0$ si para cualquier $x \in X$ se cumple la inclusión $x + T \in X$ y la igualdad

$$f(x + T) = f(x).$$

Por ejemplo, para la función sen x el período es cualquier número múltiplo entero de 2π, es decir, un número del tipo $2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Para una función constante cualquier número positivo es su período.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que para la función de Dirichlet (véase el p. 5.2) cualquier número racional positivo es período y cualquier irracional positivo no lo es.

2. Demuéstrese que la función sen x + tg x tiene período mínimo y hállese.

3. Cítese un ejemplo de dos funciones que tienen período mínimo y la suma de las cuales no tiene período mínimo.

FIG. 117

4. Demuéstrese que cualquier función continua y periódica sobre todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$ es acotada sobre $\boldsymbol{R}$.

5. Demuéstrese que cualquier función continua y periódica sobre todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$ es uniformemente continua sobre $\boldsymbol{R}$. Véase también el problema 6 en el p. 6.2.

Si para $x \geqslant a$ la función f tiene período $T > 0$ y es integrable sobre el segmento $[a, a + T]$, entonces para cualquiera que sea $b \geqslant a$, es integrable sobre el segmento $[b, b + T]$ y tiene lugar la igualdad

$$\int_b^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx, \tag{28.32}$$

es decir, la integral de una función periódica respecto a un segmento igual por su longitud al período no depende de la ubicación de este segmento sobre el rayo $x \geqslant a$ (fig. 117).

Demostremos esto. Cualquiera que sea $b \geqslant a$ existe el número no negativo n tal que

$$a + nT \leqslant b < a + (n + 1)T$$

y, por consiguiente,

$$a + (n + 1)T \leqslant b + T < a + (n + 2)T,$$

$$a \leqslant b - nT < a + T$$

(ver la fig. 117).

Observemos que si para cierto $b \geqslant a$ la función f es integrable sobre el segmento $[b, b + c]$, $c > 0$, entonces para cualquier n entero no negativo la función f es integrable sobre el segmento $[b + nT, b + c + nT]$ y es válida la igualdad

$$\int_b^{b+c} f(x)\,dx = \int_{b+nT}^{b+c+nT} f(x)\,dx. \tag{28.33}$$

En efecto, por la periodicidad de la función f en la traslación del segmento $[b, b + c]$ al segmento $[b + nT, b + c + nT]$, es decir, en la trasformación del argumento $x' = x + nT$, en los puntos correspondientes unos a otros de estos segmentos la función f toma valores iguales. A base de esto se puede mostrar fácilmente por el mismo método que fue aplicado en el ejemplo anterior utilizando sólo en lugar de una simetría una traslación, que la función f es integrable sobre el segmento $[b + nT, b + c + nT]$ y que tiene lugar la igualdad (28.33).

Aplicando este resultado a los segmentos $[a, b - nT]$ y $[b - nT, a + T]$ y agregando en el primer caso a ambos extremos del segmento el número $(n + 1)T$ y

en el segundo el número nT obtendremos, en primer lugar, que la función f es integrable sobre los segmentos $[a + (n + 1)T, b + T]$ y $[b, a + (n + 1)T]$ y en segundo lugar que

$$\int_a^{b-nT} f(x)\,dx = \int_{a+(n+1)T}^{b+T} f(x)\,dx, \quad \int_{b-nT}^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{a+(n+1)T} f(x)\,dx. \tag{28.34}$$

Sumando estas igualdades, en virtud de la propiedad de aditividad de la integral (véase la propiedad 3°) obtendremos la fórmula (28.32). □

Señalemos que es válida en cierto sentido la afirmación inversa: si para algún $b \geqslant a$ la función f es integrable sobre el segmento $[b, b + T]$, entonces es integrable sobre el segmento $[a, a + T]$. Esto también se deduce de las fórmulas (28.34) sólo que en ellas esta vez están dadas las partes derechas.

28.2. PRIMER TEOREMA SOBRE EL VALOR MEDIO PARA LA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema 1. *Supongamos que*

1) *las funciones f y g son integrables sobre el segmento* $[a, b]$;

2) $m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]$; (28.35)

3) *la función g no cambia de signo sobre el segmento* $[a, b]$, *es decir, o bien es no negativa o bien es no positiva sobre él;*

entonces existe el número μ tal que

$$m \leqslant \mu \leqslant M \tag{28.36}$$

y

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.37}$$

Corolario. *En la suposición complementaria de la continuidad de la función f sobre el segmento $[a, b]$ existe un punto ξ sobre el intervalo (a, b) tal que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.38}$$

En particular para $g(x) = 1$ sobre $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a). \tag{28.39}$$

La última fórmula en el caso de una función f no negativa sobre el segmento $[a, b]$ tiene un sentido geométrico simple: el área del trapecio curvilíneo engendrado por la gráfica de la función f es igual al área del rectángulo con base de longitud $b - a$ y altura de longitud $f(\xi)$ (fig. 118).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Multiplicando la desigualdad (28.35) por $g(x)$ obtenemos para $g(x) \geqslant 0$

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

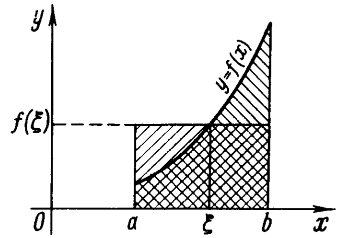


FIG. 118

y para $g(x) \leqslant 0$

$$mg(x) \geqslant f(x)g(x) \geqslant Mg(x).$$

Integrando estas desigualdades tendremos a base del corolario de la propiedad 8° (p. 28.1)

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx, \tag{28.40}$$

respectivamente,

$$m\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{28.41}$$

Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, entonces tanto en el primer caso, como en el segundo

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

De esta forma, si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, entonces ambos miembros de la igualdad (28.37) para cualquier μ se anulan, es decir, cuando se cumple la condición $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ la igualdad (28.37) es válida para cualquier elección del número μ, en particular para $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Si $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, entonces para $g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, tenemos $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ y para $g(x) \leqslant 0$, $x \in [a, b]$, respectivamente, $\int_a^b g(x)\,dx < 0$. Dividiendo las desigualdades (28.40) y (28.41) entre la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ obtendremos en ambos casos una misma desigualdad

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M. \tag{28.42}$$

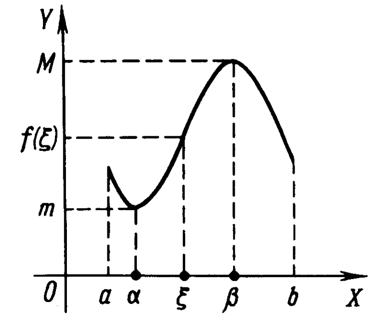


FIG. 119

Suponiendo

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}, \tag{28.43}$$

vemos que para tal elección de μ se cumple tanto la condición (28.36) (en virtud de (28.42)), como (28.37) (en virtud de (28.43)). □

DEMOSTRACIÓN DE COROLARIO. Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, entonces en virtud de la igualdad (28.37) obtenemos $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ y por lo tanto, la fórmula (28.38) es válida para cualquier elección del punto $\xi \in (a, b)$. En el futuro, para simplificar, consideraremos $g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ (el caso $g(x) \leqslant 0$, $x \in [a, b]$ se analiza análogamente o se reduce al anterior con la sistitución de la función $g(x)$ por la función $-g(x)$).

Sea ahora $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, entonces por la no negatividad de la función $g(x)$ se cumple la desigualdad

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0. \tag{28.44}$$

En el futuro consideraremos que $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Esta suposición es permisible ya que para tal elección de m y M se cumple la condición (28.35). En la fórmula (28.37) según la condición (28.36) son posible tres casos: $m < \mu < M$, $\mu = M$ y $\mu = m$.

Si $m < \mu < M$, entonces por el teorema de que una función continua sobre un segmento alcanza sobre él sus valores máximo y mínimo (véase el teorema 1 en el p.

6.1) existen los puntos $\alpha \in [a, b]$ y $\beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Por esto, según el teorema sobre los valores medios de una función continua (véase el teorema 2 y el corolario 2 de él en el p. 6.2), sobre el intervalo con extremos α y β se encuentra un punto ξ tal que $f(\xi) = \mu$. Evidentemente $\xi \in (a, b)$ (fig. 119).

Si $\mu = M$ (el caso $\mu = m$ se analiza análogamente), entonces la igualdad (28.37) toma la forma

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = M\int_a^b g(x)\,dx,$$

de donde

$$\int_a^b [M - f(x)]\,g(x)\,dx = 0. \tag{28.45}$$

Mostremos que existe el punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = M$. Previamente observemos que

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx. \tag{28.46}$$

En realidad, la función $g(x)$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y por esto es acotada sobre él, es decir, existe una constante $A > 0$ tal que para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|g(x)| \leqslant A$. De aquí tenemos

$$\left|\int_a^b g(x)\,dx - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{a+\varepsilon} g(x)\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} g(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^{a+\varepsilon} |g(x)|\,dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} |g(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant A\int_a^{a+\varepsilon} dx + A\int_{b-\varepsilon}^{b} dx = 2A\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < b - a.$$

De esta desigualdad se deduce inmediatamente (28.46).

En virtud de la desigualdad (28.44), de (28.46) se deriva la existencia de ε_0, $0 < \varepsilon_0 < b - a$, tal que

$$\int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\,dx > 0.$$

Si no existiera el punto $\xi \in (a, b)$ en el cual $f(\xi) = M$, entonces la función continua $M - f(\xi)$ sería positiva sobre el intervalo (a, b) y, por consiguiente, sobre el segmento $[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$. En particular, sería positiva en el mismo punto x_0 donde toma su valor mínimo:

$$M - f(x) \geqslant \min_{[a+\varepsilon_0,\, b-\varepsilon_0]} [M - f(x)] = M - f(x_0) > 0.$$

Por esto

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx \geqslant \int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} [M - f(x)]\,g(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant [M - f(x_0)] \int_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\,dx > 0,$$

y esto contradice la igualdad (28.45). □

El corolario del teorema 1 usualmente se llama *teorema integral sobre el valor medio*. Este nombre se explica con que en él se afirma la existencia de cierto punto sobre el segmento, "el punto medio" que posee una propiedad determinada relacionada con la integral de la función.

Las fórmulas (28.31) y (28.32) permanecen siendo ciertas de forma evidente cuando $a \geqslant b$.

28.3. INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES CONTINUAS A TROZOS

Generalicemos ahora el teorema 3 del párrafo anterior sobre la integrabilidad de las funciones continuas sobre el caso de las así llamadas funciones continuas a trozos.

Definición 1. *La función f definida sobre el segmento $[a, b]$ se llama continua a trozos sobre él si existe la partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ de este segmento tal que la función f es continua sobre cada uno de los intervalos (x_{i-1}, x_i) y existen los límites finitos*

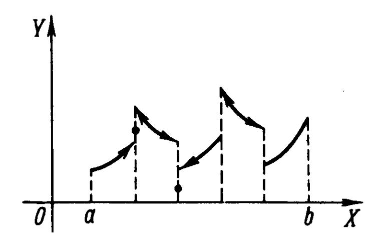
$$f(x_{i-1} + 0) = \lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x) \quad \text{y}$$

$$f(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Más breve, una función es continua a trozos sobre un segmento si sobre él tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad y además sólo de primer género (fig. 120).

Lema 1. *Sean las funciones f y φ definidas sobre el segmento $[a, b]$ y $f(x) = \varphi(x)$ sobre el intervalo (a, b). Entonces si la función f es integrable sobre $[a, b]$, la función φ también es integrable sobre $[a, b]$ y*

FIG. 120



$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dicho de otro modo, el cambio de los valores de la función sobre los extremos del segmento no influye ni sobre la integrabilidad de la función ni sobre el valor de la integral si la función es integrable. La afirmación análoga, por supuesto, es válida para la variación de los valores de la función en cualquier número finito de puntos.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. La función f es integrable y por consiguiente acotada: $|f(x)| \leqslant M$ para todas las $x \in [a, b]$. Sea $M_0 = \text{máx}\,\{M, \varphi(a), \varphi(b)\}$. Analicemos cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ y formemos las sumas integrales de Riemann $\sigma_\tau(f)$ y $\sigma_\tau(\varphi)$, eligiendo los mismos puntos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Sea como siempre $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Por cuanto

$$|f(\xi_1)\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau, \quad |f(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$
$$|\varphi(\xi_1)\Delta x_1| \leqslant M_0\delta_\tau \quad \text{y} \quad |\varphi(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant M_0\delta_\tau,$$

entonces

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_1)\Delta x_1 = \lim_{\delta_\tau \to 0} \varphi(\xi_k)\Delta x_k = 0.$$

Por esto

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(\varphi) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} \varphi(\xi_i)\Delta x_i =$$
$$= \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=2}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por consiguiente la integral $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ existe y es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$. □

Ejercicio 1. Demuéstrese que la variación del valor de la función en un número finito de puntos no influye ni en la integrabilidad de la función ni en su valor si ella existe.

Teorema 2. *Una función f continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$ es integrable sobre él.*

DEMOSTRACIÓN. Sean la función f *continua a trozos sobre el segmento* $[a, b]$ y $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ su partición indicada en la definición 1. Hagamos

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{cuando } x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_{i-1} + 0) & \text{cuando } x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0) & \text{cuando } x = x_i. \end{cases}$$

La función f_i es continua sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \ldots, k$ y por consiguiente es integrable sobre él (véase el p. 27.5).

Sobre cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ la función f diferencia tal vez de la función continua f_i sólo en los extemos de este segmento. Por consiguiente, según el lema, la función f es integrable sobre $[x_{i-1}, x_i]$ y

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Aplicando la propiedad 3° de las integrales, obtendremos que la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{x_{i-1}}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx. \; \square \tag{28.47}$$

OBSERVACIÓN. En el p. 44.5 será demostrada una condición suficiente de integrabilidad más general (véase el teorema 10 en el p. 44.5 y la observación 2 en el p. 44.7) de la cual en particular se deduce que cualquier función acotada sobre un segmento y continua sobre él en todos lor puntos excepto un número finito de puntos, es integrable. Así, la condición de la existencia de sólo un número finito de puntos de discontinuidad de *primer género* para una función f no es sustancial en el teorema 2: ellos pueden ser también de *segundo género* y la afirmación del teorema permanece válida.

Problema 20. Demuéstrese que para que una función acotada sobre un segmento sea integrable sobre él es necesario y suficiente que para cada $\varepsilon > 0$ exista un sistema de intervalos finito o numerable que contuviera todos los puntos de discontinuidad de la función dada y la suma de las longitudes de los cuales fuese menor que el ε dado.

28.4.* DESIGUALDADES INTEGRALES DE HÖLDER Y MINKOWSKI

Sean las funciones f y g definidas e integrables sobre el segmento $[a, b]$, $1 < p < +\infty$ y el número q se define por la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{28.48}$$

(véanse (20.49), (20.51) y (20.52)). Entonces tenemos:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q} \tag{29.49}$$

(desigualdad de Hölder*);

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \tag{28.50}$$

(desigualdad de Minkowski**).

*) O. Hölder (1859—1937), matemático alemán.

**) G. Minkowski (1864—1906) nació en Rusia, trabajó en Suiza y Alemania.

Demostremos estas desigualdades. Introduzcamos para abreviar las notaciones

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}, \quad \|g\|_q \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q}. \tag{28.51}$$

En la desigualdad (20.53)

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0,$$

pongamos

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|q\|_q}, \quad x \in [a, b].$$

Entonces para cualquier $x \in [a, b]$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\,\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Integrando esta desigualdad respecto al segmento $[a, b]$ y utilizando (28.51) y (28.49) hallaremos

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int_a^b |f(x)|_p^p\,dx + \\ + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int_a^b |g(x)|^q\,dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Por esto

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_p\|g\|_q,$$

es decir, la desigualdad (28.50) queda demostrada.

Demostremos la desigualdad (28.50). Es fácil convencerse de la validez de la desigualdad

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx + \int_a^b |g(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx.$$

Aplicando a cada una de las integrales obtenidas la desigualdad de Hölder y observando que $q(p - 1) = p$ (véase (28.42)) obtendremos:

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q} +$$

$$+ \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right]^{1/q} =$$

$$= \left\{\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\right\}\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}. \tag{28.52}$$

Si el primer miembro de esta desigualdad es igual a cero, entonces la desiguladad (28.50) evidentemente es válida, si no es igual a cero, entonces simplificando ambos miembros de la desigualdad (28.52) por el factor $\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right]^{1/q}$, en virtud de la relación (28.48) obtendremos la desigualdad de Minkowski. □

Señalemos un caso particular importante de la desigualdad de Hölder. Para $p = q = 2$ tenemos

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|\,dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|\,dx} \tag{28.53}$$

(*desigualdad de Cauchy*).

§ 29. INTEGRAL DEFINIDA CON LÍMITE SUPERIOR VARIABLE

29.1. CONTINUIDAD DE LA INTEGRAL RESPECTO AL LÍMITE SUPERIOR

Sea la función $f(x)$ integrable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces ella es integrable sobre cualquier segmento $[a, x]$, donde $a \leqslant x \leqslant b$, es decir, para cualquier $x \in [a, b]$ tiene sentido la integral $\int_a^x f(t)\,dt$.

Analicemos la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{29.1}$$

Esta función F está definida sobre el segmento $[a, b]$ y se llama *integral con límite superior variable*. Establezcamos sus propiedades principales.

Teorema 1. *Si la función f es integrable sobre el segmento* $[a, b]$, *entonces la función* (29.1) *es continua sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$. Entonces de la fórmula (29.1) se deduce que

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

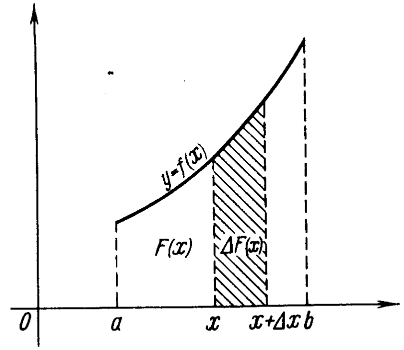


FIG. 121

por eso (fig. 121)

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \qquad (29.2)$$

Por cuanto la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$, es acotada sobre este segmento, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todos los $x \in [a, b]$. Aplicando esta desigualdad para la estimación de la expresión $|\Delta F|$ obtendremos (véase el p. 28.1):

$$|\Delta F| = \left|\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x}^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x}^{x+\Delta x} M\,dt\right| \leqslant M|\Delta x|.$$

De aquí se deduce que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$ para cualquier $x \in [a, b]$ y esto significa la continuidad de la función F en cada punto $x \in [a, b]$. □

29.2. DIFERENCIABILIDAD DE LA INTEGRAL RESPECTO AL LÍMITE SUPERIOR. EXISTENCIA DE LA PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

Teorema 2. *Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y es continua en el punto $x_0 \in [a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es diferenciable en el punto x_0 y*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0),$$

donde $\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0), x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Para esto estimemos el módulo de la diferencia $\dfrac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)$.

Observando que $\dfrac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$ y, por consiguiente, $f(x_0) = \dfrac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt$, tendremos

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)\,dt}{\Delta x}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|\,dt\right|. \qquad (29.3)$$

Sea dado $\varepsilon > 0$. En virtud de la continuidad de la función f en el punto x_0 existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $x \in [a, b]$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (29.4)$$

Escojamos Δx de forma tal que $|\Delta x| < \delta$. Entonces para los valores de t sobre el segmento respecto al cual se realiza la integración tendremos $|t - x_0| \leqslant |\Delta x| < \delta$ y, por consiguiente, de las desigualdades (29.3) y (29.4) obtendremos

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta x|}\left|\int_{x}^{x_0+\Delta x} dt\right| = \varepsilon,$$

y esto significa que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0)$.

En el caso cuando el punto x_0 coincide con uno de los extremos del segmento $[a, b]$, por $F'(x_0)$ se debe sobreentender la derivada unilateral correspondiente de la función $F(x)$. □

Ahora se puede resolver la cuestión sobre la existencia de la primitiva para una función continua arbitraria.

Teorema 3. *Si una función es integrable sobre un segmento y es continua en todos sus puntos excepto un conjunto finito de ellos, entonces sobre este segmento para ella existe una primitiva.*

Corolario. *Una función continua sobre un segmento tiene primitiva.*

DEMOSTRACIÓN. Si la función f es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y es continua en todos los puntos de este segmento excepto un conjunto finito de ellos, entonces por los teoremas 1 y 2 su primitiva sobre el segmento $[a, b]$ es, por ejemplo, la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

En realidad, ante todo, según el teorema 1 la función F es continua sobre el segmento $[a, b]$. Más adelante, si por E denotamos el conjunto finito, $E \subset [a, b]$, en los puntos del cual la función f no es continua, entonces para los puntos x restantes, es decir, para los puntos de continuidad de la función f: $x \in [a, b] \setminus E$, por el teorema 2 tiene lugar la igualdad

$$F'(x) = f(x).$$

Esto significa (véase la definición 1 en el p. 22.1) que la función F es una primitiva para la función f sobre el segmento $[a, b]$. □

La validez del corolario se deriva de que si la función es continua sobre cierto segmento, entonces por el teorema 3 del p. 27.5 es integrable sobre él y, por consiguiente satisface las condiciones del teorema demostrado (el conjunto finito de los puntos en los cuales la función es discontinua, en el caso dado es vacío).

De esta forma la operación de integración con límite superior variable aplicada a una función continua nos lleva a una primitiva, es decir, es la operación inversa a la diferenciación

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{29.5}$$

Esta afirmación (llamada *fórmula de deferenciación de la integral definida respecto al límite superior*) es básica para el cálculo deferencial e integral. De ella se deduce, en particular, que cualquier primitiva de una función $f(x)$ continua sobre un segmento $[a, b]$ tiene la forma

$$\int_a^x f(t)\,dt + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

En efecto, según lo demostrado la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva para la función $f(x)$ y cualquier otra primitiva puede diferenciarse de $f(x)$ sólo en una constante (véase el p. 22.1). De esta forma queda establecida la relación entre las integrales definida e indefinida en la forma

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dt + C.$$

Los teoremas demostrados muestran que la operación de integración con límite superior variable nos lleva al "mejoramiento" o "suavización" de las propiedades de la función: una función integrable pasa a ser continua y una continua, diferenciable.

Observemos que la operación de diferenciación en determinado sentido "empeora" las propiedades de la función: por ejemplo, la derivada de una función continua, si existe, puede ser ya una función discontinua.

De la fórmula de diferenciación respecto al límite superior de integración, es decir, de la fórmula (29.5) se puede obtener fácilmente la fórmula de diferenciación respecto al límite inferior de integración.

Sea la función f integrable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces sobre este segmento está definida la función

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

y además de la identidad

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$$

tenemos

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x). \tag{29.6}$$

Si la función f es continua en el punto $x \in [a, b]$, entonces como fue demostrado anteriormente, la función F es diferenciable en este punto. De la fórmula (29.6) se deduce que en este caso la función $G(x)$ también es diferenciable en el punto x y

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}.$$

De esta forma

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

OBSERVACIÓN. De las fórmulas de diferenciación de la integral de una función continua respecto al límite superior (inferior) de integración se deduce también que cualquier función continua sobre cierto intervalo (finito o infinito) tiene sobre él primitiva. En efecto, sea por ejemplo la función f continua sobre el intervalo (a, b). Escojamos un punto arbitrario $x_0 \in (a, b)$ y hagamos

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Entonces para todos los $x \in (a, b)$ es válida la igualdad $F'(x) = f(x)$, es decir, $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b).

Ejercicio 1. Sean la función $f(x)$ continua y $\varphi(x)$, $\psi(x)$ diferenciables en todos los puntos de R. Demuéstrense las siguientes generalizaciones de la fórmula (29.5):

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x); \quad \frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x).$$

29.3. FÓRMULA DE NEWTON — LEIBNIZ

Teorema 4 (teorema principal del cálculo integral). *Sea la función f continua sobre el segmento $[a, b]$. Si la función Φ es una primitiva arbitraria sobre este segmento, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{29.7}$$

Esta fórmula se llama *fórmula de Newton**) — *Leibniz*.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Por la demostración del corolario de teorema 3 del p. 29.2 la función F es una primitiva para la función f sobre el segmento $[a, b]$. De esta forma F y Φ son dos primitivas de una misma función f sobre el segmento $[a, b]$, por eso

$$F(x) = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

donde C es cierta constante, es decir,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Para $x = a$ de aquí se deduce que $C = -\Phi(a)$ por consiguiente

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Haciendo aquí $x = b$ obtendremos la fórmula (29.7). □

Para abreviar la escritura a menudo se utiliza la notación

$$\Phi(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} \Phi(b) - \Phi(a),$$

ó

$$[\Phi(x)]_a^b \overset{\text{def}}{=} \Phi(b) - \Phi(a).$$

Si en la demostración realizada del teorema 4 en lugar del corolario del teorema 3 utilizamos el propio teorema, entonces se obtendrá la demostración de una afirmación más general. Enunciémosla también en forma de teorema.

Teorema 4*. *Sea la función f integrable sobre el segmento $[a, b]$ y continua en todos sus puntos excepto un conjunto finito de ellos. Si la función Φ es cualquiera de sus primitivas sobre este segmento, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Esta fórmula también se llama fórmula de Newton — Leibniz. Señalemos que ella es válida también para $a > b$. En efecto, si en ella a y b cambien de puesto, entonces sus miembros primero y segundo cambiarán de signo.

OBSERVACIÓN 1. Se puede mostrar que la condición de integrabilidad de la función sobre el segmento a condición de ser continua en todos los puntos de este segmento, excepto un conjunto finito de ellos, es equivalente a la acotación de la función sobre este segmento. Esto se deduce directamente de la acotación de una función integrable y de la integrabilidad de una función acotada con un conjunto finito de puntos de discontinuidad (véase la observación al final del p. 28.3).

*) I. Newton (1643—1727), físico, mecánico, astrónomo y matemático inglés.

OBSERVACIÓN 2. Es evidente que las funciones continuas a trozos (véase el p. 28.3) siendo integrables (véase el teorema 2 en el p. 28.3) satisfacen las condiciones del teorema 4*. Prestemos atención no obstante a la circunstancia de que el teorema 4* está demostrado para funciones de un tipo más general que las continuas a trozos: en él no se hace ninguna suposición sobre el carácter de los puntos de discontinuidad de las funciones analizadas, es decir, ellos pueden ser tanto de primer género como de segundo.

Ejemplos 1. Hallamos $\int_0^1 x^2\,dx$. Es conocido que

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C, \text{ por eso } \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Hallemos $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$. Tenemos

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$$

Así pues, fue demostrado que si la función f es integrable sobre segmento y el conjunto de sus puntos de discontinuidad es finito, entonces sobre este segmento ella tiene primitiva F y además es válida la fórmula de Newton — Leibniz.

Mostremos ahora que la fórmula de Newton — Leibniz tiene lugar sólo en la suposición de la existencia de la primitiva para una función f integrable, es decir, que para la validez de la fórmula de Newton — Leibniz no es necesario exigir que el conjunto de puntos de discontinuidad de la función f sea finito (no obstante, recordemos que esta propiedad se utilizó sustancialmente en la demostración de la existencia de la primitiva).

Teorema 5. *Sea la función f integrable sobre el segmento $[a, b]$ y F su primitiva sobre este segmento. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{29.8}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de primitiva, la función F es continua sobre el segmento $[a, b]$ y existe un conjunto finito de puntos $E_f \subset [a, b]$ tal que para todas las $x \in [a, b] \setminus E_f$ se cumple la igualdad $F'(x) = f(x)$. Denotemos por $a_1, a_2, \ldots, a_m$ los puntos del conjunto finito E_f y analicemos cualquier partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ que contenga a todos los puntos $a_1, \ldots, a_m$. Entonces sobre cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ la función F es continua y en su interior tiene derivada $F'(x) = f(x)$. Por esto, a la función F sobre el segmento indicado se le puede aplicar la fórmula de los incrementos finitos (teorema de Lagrange sobre el valor medio):

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{29.9}$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

Sumando las igualdades obtenidas desde 1 hasta k y observando que

$$\sum_{i=1}^{k} F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x_k) - F(x_0) = F(b) - F(a),$$

obtendremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{29.10}$$

En la parte derecha de esta igualdad aparece una suma integral de Riemann de la función f.

Sea ahora $\tau = \tau_n$, $n = 1, 2, \dots$, una sucesión de particiones que contienen a los puntos $a_1, \dots, a_m$, para la cual $\delta_{\tau_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pasando al límite cuando $n \to \infty$ en (29.10) y observando que el primer miembro de esta igualdad es constante e igual a $F(b) - F(a)$ y el segundo, en virtud de la integrabilidad de f (véase el teorema 3 en el p. 28.3), tiende a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, obtendremos la fórmula (29.8). □

De la fórmula (29.8) se deduce que si dos funciones integrales f y f_1 sobre el segmento $[a, b]$ tienen una misma primitiva F, entonces sus integrales respecto a este segmento son iguales ya que son iguales al número $F(b) - F(a)$. Por otra parte, no es difícil demostrar esto directamente, ya que en este caso las funciones integrables f y f_1 pueden diferenciarse una de otra sólo en los valores en un número finito de puntos (véase el p. 22.1).

OBSERVACIÓN 3. La fórmula de Newton — Leibniz a veces se escribe en la forma

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{29.11}$$

Aquí se supone que la función F es continua sobre el segmento $[a, b]$ y en todos sus puntos, excepto un conjunto finito, tiene derivada F'. Así pues, la función subintegral en la fórmula (29.11) puede resultar definida no en todos los puntos del segmento $[a, b]$ y por esto exige una aclaración sobre qué se entiende en este caso por la integral $\int_a^b F'(x)\,dx$. En la fórmula (29.11) se supone complementariamente que existe un función f integrable sobre el segmento $[a, b]$ (y por lo tanto definida ya en cada uno de sus puntos) para la cual la función F es su primitiva y por consiguiente existe un conjunto finito E_f tal que para todos los puntos $x \in [a, b] \setminus E_f$ tiene lugar la igualdad $F'(x) = f(x)$. La integral $\int_a^b F'(x)\,dx$ por definición se toma igual a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir,

$$\int_a^b F'x\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{29.12}$$

Esta definición es correcta ya que no depende de la elección de la función f indicada: para cualquier elección tendrá una misma primitiva F y, por consiguiente, en virtud del teorema 5, un mismo valor de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ igual a $F(b) - F(a)$.

Todo lo dicho hace natural la siguiente definición.

Definición 1. *La función F definida sobre el segmento $[a, b]$ se llama función con derivada integrable sobre este segmento si esixten el conjunto finito $E \subset [a, b]$ y la función f integrable sobre $[a, b]$ tales que para cualquier punto $x \in [a, b] \setminus E$ la función F tiene derivada y $F'(x) = f(x)$.*

Dicho de otro modo, la función F se llama función con derivada integrable sobre cierto segmento si sobre este segmento ella es una primitiva de una función integrable.

Ahora el teorema 5 se puede parafrasear de la siguiente forma.

Teorema 5. *Si la función F es continua sobre el segmento $[a, b]$ y tiene sobre él derivada integrable, entonces*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ejercicio 2. Demuéstrese que si las funciones F_1 y F_2 integrables sobre el segmento $[a, b]$ tienen derivadas integrables sobre este segmento, entonces su producto F_1F_2 también tiene derivada integrable sobre $[a, b]$.

§ 30. FÓRMULA DEL CAMBIO DE VARIABLE EN LA INTEGRAL E INTEGRACIÓN POR PARTES

30.1. CAMBIO DE VARIABLE

Teorema 1. *Sean*

1) *la función $f(x)$ continua sobre el intervalo (a, b);*

2) *la función $\varphi(t)$ definida y continua junto con su derivada $\varphi'(t)$ sobre el intervalo (α, β) y además para todos los $t \in (\alpha, \beta)$ se cumple la desigualdad $a < \varphi(t) < b$. En este caso si $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$, $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$, $a_0 = \varphi(\alpha_0)$, $b_0 = \varphi(\beta_0)$,* entonces

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{30.1}$$

Esta fórmula se llama fórmula *del cambio de variable* en la integral definida o fórmula de integración por *sustitución*.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo observemos que según la condición, la función f, a ciencia cierta, está definida sobre el conjunto de valores de la función φ (fig. 122) por eso tiene sentido la función compuesta $f[\varphi(t)]$. Según las suposiciones hechas las funciones subintegrales en ambas partes de la fórmula (30.1) son continuas por eso ambas integrales en esta fórmula existen.

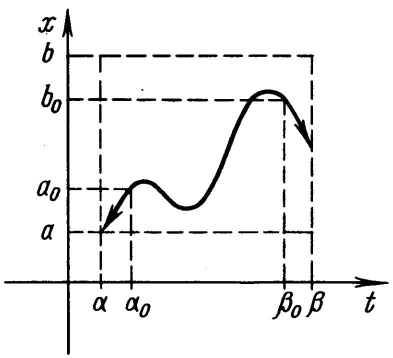


FIG. 122

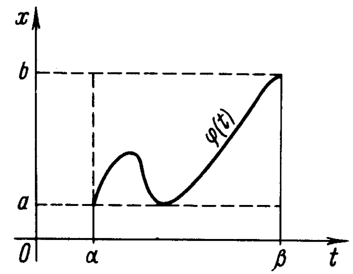


FIG. 123

Sea $\Phi(x)$ cualquier primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b). Entonces para los puntos t del intervalo (α, β), tiene sentido la función compuesta $\Phi[\varphi(t)]$ que es una primitiva de la función $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Por la fórmula de Newton — Leibniz (véase el p. 29.3),

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)\,dx = \Phi(b_0) - \Phi(a_0),$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \Phi[\varphi(\beta_0)] - \Phi[\varphi(\alpha_0)] = \Phi(b_0) - \Phi(a_0).$$

De estas igualdades se deduce la fórmula (30.1) □

Como se ve de la demostración, la fórmula (30.1) es válida tanto para $\alpha_0 \leqslant \beta_0$ como para $\alpha_0 > \beta_0$.

Es interesante señalar que algunos valores de la función $\varphi(t)$ pueden no pertenecer al segmento $[a_0, b_0]$ respecto al cual se integra (véase la fig. 122) en la parte izquierda de la igualdad (30.1).

Si utilizamos la fórmula para las derivadas unilaterales de una función compuesta (véase la observación 2 en el p. 9.7), entonces la fórmula (30.1) se puede demostrar para el caso cuando la función f se da sobre el segmento $[a, b]$, la función $\varphi(t)$ sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ y el conjunto de los valores de la función φ se contiene en el segmento $[a, b]$ y además $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (fig. 123). En este caso la fórmula del cambio de variable puede ser aplicada a todo el segmento $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (30.2)$$

Al utilizar el símbolo de la integral definida siempre escribimos bajo el signo de la integral la expresión $f(x)\,dx$ donde x es una variable independiente. Además, cuando se daba la definición de integral definida no se suponía que $f(x)\,dx$ es la diferencial de alguna función. Luego (véase el p. 29.2) fue mostrado que al menos para una función f continua la expresión $f(x)\,dx$ siempre es la diferencial de cierta fun-

ción $F(x)$: $dF(x) = f(x)\,dx$. Por esto es natural considerar que en este caso las escrituras $\int_a^b dF(x)$ y $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene el mismo valor, es decir,

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En general permitiremos bajo el signo de la integral definida cualquier escritura de una diferencial, es decir, por definición, para una función $g(x)$ diferenciable haremos:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

(si por supuesto la integral que aparece en el segundo miembro de la igualdad existe). Con ayuda de esta notación, por ejemplo, la fórmula (30.2) toma la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

De esta forma, al cambiar la variable $x = \varphi(t)$ en la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se debe formalmente sustituir en todos los casos x por $\varphi(t)$ y de la forma correspondiente cambiar los límites de integración.

Prestemos atención a que al utilizar la fórmula (30.1) (respectivamente, la fórmula (30.2)) de forma semejante al caso de la integral indefinida, se puede aplicarla tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. No obstante, a diferencia de la integral indefinida donde al final del cálculo debíamos regresar a la variable de integración inicial, aquí no es necesario hacer esto, ya que nuestro objetivo es hallar un número, que en virtud de las fórmulas demostradas es igual al valor de cada una de las integrales analizadas.

Ejemplos. 1. Calculemos la integral $\int_0^2 e^{x^2} x\,dx$. Aplicando la fórmula (30.1) de derecha a izquierda (aquí el papel de la variable t lo juega x), obtendremos

$$\int_0^2 e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^4 e^y\,dy = \frac{1}{2}\,e^y\Big|_0^4 = \frac{e^4 - 1}{2}.$$

2. Supongamos que se exige calcular la integral $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$. Tratemos de simplificar la expresión subintegral haciendo $\sqrt{e^x - 1} = t$. Dicho de otro modo, hagamos el cambio de variable $x = \ln(1 + t^2)$; entonces $dx = \dfrac{2t\,dt}{1 + t^2}$ y por cuanto para $0 \leqslant t \leqslant 1$ tenemos $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$, entonces aplicando la fórmula (30.1) de izquierda a derecha obtendremos

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = 2\int_0^1 \frac{t^2 dt}{1 + t^2} = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt = 2[t - \operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{4 - \pi}{2}.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese que si la función f es continua sobre $[a, b]$ y para todos los $t \in [0, b - a]$: $f(a + t) = f(b - t)$, entonces

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a + b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

La fórmula del cambio de variable en una integral definida con ayuda de la fórmula de Newton — Leibniz puede ser generalizada al caso cuando la función f, permaneciendo integrable, tendrá un número finito de puntos de discontinuidad.

30.2. INTEGRACIÓN POR PARTES

Teorema 2. *Si las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son continuas sobre el segmento $[a, b]$ y tienen sobre él derivadas integrables, entonces*

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \tag{30.3}$$

Esta fórmula se llama *fórmula de integración por partes* para la integral definida.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos:

$$\int_a^b (uv)'\, dx = \int_a^b (uv' + u'v)\, dx = \int_a^b udv + \int_a^b vdu. \tag{30.4}$$

Todas las integrales escritas existen ya que las funciones subintegrales son integrables. De acuerdo con la fórmula de Newton — Leibniz (29.11) tenemos

$$\int_a^b (uv)'\, dx = [uv]_a^b. \tag{30.5}$$

Comparando las fórmulas (30.4) y (30.5) obtendremos la igualdad

$$\int_a^b udu + \int_a^b vdu = [uv]_a^b,$$

de donde se deduce la fórmula (30.3). □

El teorema 2 se generaliza fácilmente al caso de las así llamadas funciones continuamente diferenciables a trozos. Definamos estas funciones.

Supongamos que la función $f(x)$ está definida sobre el segmento $[a, b]$, existe una partición $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ tal que la función $f(x)$ es continua sobre cada uno de los intervalos (x_{i-1}, x_i) y existen los límites finitos $f(x_{i-1} + 0)$, $f(x_i - 0)$, $i = 1, 2, \dots, k$. (Por consiguiente, la función f es continua a trozos

sobre el segmento $[a, b]$, véase la definición 1 en el p. 28.3). Introduzcamos como se hizo anteriormente (véase la demostración del teorema 2 en el p. 28.3) las funciones

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_{i-1} + 0) & \text{si } x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0) & \text{si } x = x_i. \end{cases}$$

Definición 1. *Si cada función $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$, es (continuamente) diferenciable sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$, entonces la función $f(x)$ se llama (continuamente) diferenciable a trozos sobre el segmento $[a, b]$.*

Teorema 2′. *Sean las funciones $u(x)$ y $v(x)$ continuas y continuamente diferenciables a trozos sobre el segmento $[a, b]$; entonces para ellas el válida la fórmula (30.3) de integración por partes.*

La demostración del teorema 2 permanece válida también en este caso. En realidad, el producto uv es continuo y su derivada $(uv)' = uv' + u'v$ es continua a trozos. Por esto, según el teorema 5 del p. 29.2 a la integral que aparece en la parte izquierda de (30.5) se le puede aplicar también la fórmula de Newton — Leibniz. □

Ejemplos. 1. Hallemos el valor de la integral $\int_1^2 \ln x\, dx$. Apliquemos la fórmula de integración por partes:

$$\int_1^2 \ln x\, dx = x \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

2. Mostremos que para cualquier $n = 0, 1, 2, \dots$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(n - 1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{cuando } n \text{ es par}^{*)} \\ \dfrac{(n - 1)!!}{n!!} & \text{cuando } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{30.7}$$

Observemos ante todo que la igualdad de las integrales que aparecen en (30.7) se establece fácilmente con ayuda del cambio de variable $x = \pi/2 - t$. Más adelante integrando por partes obtendremos:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-1} x\, d(-\cos x) =$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + (n - 1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx =$$

$$= (n - 1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx = (n - 1)I_{n-2} - (n - 1)I_n,$$

*) Por $n!!$, $n \in N$, $n > 1$, se sobrentiende el producto de todos los números naturales que no sobrepasan n y que tienen la misma paridad que n.

de donde

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Observemos que $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1$. Por esto para $n = 2k + 1$, es decir, para n impar, tendremos

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \dots = \frac{2k(2k-2)\dots 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

y para $n = 2k$, es decir, para n par

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \dots = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{2k(2k-2)\dots 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2},$$

$$k = 1, 2, \dots . \ \square$$

De la fórmula (30.7) se obtiene fácilmente la así llamada *fórmula de Wallis**), que necesitaremos en el futuro

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2. \tag{30.8}$$

Demostrémosla. Integrando la desigualdad

$$\operatorname{sen}^{2n+1} x \leqslant \operatorname{sen}^{2n} x \leqslant \operatorname{sen}^{2n-1} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,$$

respecto al segmento $[0, \pi/2]$ tendremos

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx \leqslant \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n-1} x\, dx$$

(no es difícil mostrar que en realidad aquí tienen lugar desigualdades estrictas). En virtud de (30.7)

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

de donde

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \overset{\text{def}}{=} y_n. \tag{30.9}$$

Por cuanto según esta desigualdad

$$y_n - x_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} \to 0$$

*) J. Wallis (1616—1703), matématico inglés.

cuando $n \to \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$, es decir, las longitudes de los segmentos $[x_n, y_n] \ni \pi/2$ tienden a cero y, por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pi/2, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \pi/2.$$

La primera de estas igualdades por la definición de x_n (véase (30.9)) significa la validez de la fórmula de Wallis. $\square$

Ejercicios. Calcúlense las integrales definidas:

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 4. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$.

3. $\int_0^2 |x-1|\, dx$. 5. $\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} + \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right) dx$.

30.3*. SEGUNDO TEOREMA SOBRE EL VALOR MEDIO PARA LA INTEGRAL DEFINIDA

Lema 1. *Sea f continua y g una función creciente, no negativa, continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces existe el punto $\xi \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b g(x)f(x)\, dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\, dx. \tag{30.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_x^b f(t)\, dt, a \leqslant x \leqslant b. \tag{30.11}$$

La función F siendo la integral de una función integrable f (incluso continua) con límite inferior variable, es continua sobre el segmento $[a, b]$ y por esto alcanza sobre él su valor máximo y mínimo. Si

$$m = \min_{[a,b]} F(x), \quad M = \max_{[a,b]} F(x), \tag{30.12}$$

entonces, evidentemente

$$m \leqslant F(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]. \tag{30.13}$$

Observando que $dF(x) = -f(x)\, dx$ e integrando por partes la integral que aparece en el primer miembro de la igualdad (30.10) obtendremos

$$\int_a^b g(x)f(x)\, dx = -\int_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b + \int_a^b F(x)g'(x)\, dx =$$

$$= g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)\, dx \tag{30.14}$$

ya que por (30.11) $F(b) = 0$.

Como consecuencia del crecimiento de la función g tenemos $g'(x) \geqslant 0$ para todos los $x \in [a, b]$. Aplicando esta desigualdad y las desigualdades (30.13) y observando que del hecho de que la función g es no negativa sobre $[a, b]$ se deduce en particular que $g(a) \geqslant 0$ obtendremos las estimaciones

$$g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \leqslant Mg(a) + M\int_a^b g'(x)\,dx =$$

$$= Mg(a) + M[g(b) - g(a)] = Mg(b),$$

$$g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \geqslant mg(a) + m[g(b) - g(a)] = mg(b).$$

De esta forma (véase (30.14)) tenemos

$$mg(b) \leqslant \int_a^b g(x)f(x)\,dx \leqslant Mg(b).$$

Si $g(b) = 0$, entonces del hecho de que la función g es no negativa y crece se deduce que $g(x) \equiv 0$ sobre $[a, b]$. En este caso la fórmula (30.10) es válida para cualquier elección de $\xi \in [a, b]$.

Si $g(b) > 0$, entonces

$$m \leqslant \frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)\,dx \leqslant M.$$

Por cuanto la función F continua sobre el segmento $[a, b]$ toma sobre este segmento cualquier valor entre su valor mínimo m y máximo M (véase (30.12)), entonces existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que

$$F(\xi) = \frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)\,dx.$$

Por la condición (30.11) ésta es la fórmula (30.10). □

Teorema 3 (Bonnet*)). *Sea f continua y g una función monótona, continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{30.15}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos inicialmente que la función g crece sobre el segmento $[a, b]$; entonces la función $h(x) \overset{\text{def}}{=} g(x) - g(a)$, $a \leqslant x \leqslant b$, será una función no negativa, creciente y continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$.

*) O. Bonnet (1819—1892), matemático francés.

Según el lema existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b h(x)f(x)\,dx = h(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Sustituyendo aquí por la expresión de $h(x)$ obtendremos

$$\int_a^b [g(x) - g(a)]f(x)\,dx = [g(b) - g(a)]\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

de donde

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx = g(a)\int_a^b f(x)\,dx - g(a)\int_\xi^b f(x)\,dx +$$

$$+ g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

es decir, se obtuvo la fórmula (30.15).

Si la función g decrece sobre el segmento $[a, b]$, entonces para la demostración del teorema es suficiente aplicar la fórmula (30.15) a la función $-g$, que evidentemente crece. □

Señalemos que el teorema 2 es válido también en restricciones más débiles: es suficiente exigir de la función f su integrabilidad y de g, su monotonía.

30.4. INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

De forma análoga a como fueron definidas las integrales de una función numérica, se pueden definir las integrales de funciones vectoriales, cuyos valores pertenecen al espacio vectorial n-dimensional R^n (véase el p. 18.4).

Supongamos que $r(t) \in R^n$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una función vectorial, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ es una partición del segmento $[a, b]$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, δ_τ es la finura de la partición τ. Si para cualquier elección indicada de los puntos ξ_i existe el límite*)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} r(\xi_i)\Delta t_i,$$

que no depende de la elección de la sucesión de particiones, entonces se llama *integral de la función $r(t)$* respecto al segmento $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b r(t)\,dt.$$

*) El concepto de límite en este caso se define o bien con ayuda del límite de una sucesión vectorial o bien en el lenguaje ($\varepsilon - \delta$) de forma completamente análoga al caso de las funciones escalares analizado en el p. 27.1 y se propone al lector.

Para a y b constantes ella es un vector constante en R^n.

Sea $r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Por cuanto en la adición de vectores se sumaron sus coordenadas, en la multiplicación de vectores por un número, sus coordenadas se multiplican por ese mismo número y el límite de una función vectorial es igual al vector cuyas coordenadas son los límites de las coordenadas correspondientes, entonces

$$\int_a^b r(t)\,dt = \left(\int_a^b x_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b x_n(t)\,dt\right).$$

En virtud de esta igualdad, muchas propiedades de las integrales de las funciones numéricas se trasladan a las integrales de las funciones vectoriales. En particular, la función vectorial $F(t)$ definida sobre cierto intervalo E finito o infinito se llama *primitiva para la función* $r(t) \in R^n$ dada, definida sobre ese mismo intervalo si en todos sus puntos interiores t tiene lugar la igualdad $F'(t) = r(t)$ y sobre cada extremo del intervalo E que pertenece a E, la función F es continua.

Para las funciones vectoriales es válida la afirmación análoga al teorema principal del cálculo integral (véase el teorema 4 del p. 29.3):

si la función vectorial $r(t) \in R^n$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$ y continua en sus puntos interiores (en particular, si es continua sobre todo el segmento $[a, b]$) entonces para ella existe la primitiva sobre este segmento y para cualquiera de sus primitivas $F(t)$ es válida la fórmula

$$\int_a^b r'(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

que se llama fórmula de Newton — Leibniz como en el caso de las funciones escalares.

La validez de esta afirmación se deduce de la validez de la fórmula de Newton — Leibniz para todas las coordenadas de la función $r(t)$.

OBSERVACIÓN. En el p. 15.2 fue demostrado el siguiente teorema: si la función vectorial $r(t)$) es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en su interior, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$|r(b) - r(a)| \leqslant |r'(\xi)|\,(b - a).$$

La demostración de esta afirmación realizada en el p. 15.2 tuvo un carácter algo artificial, era necesario notar la necesidad de utilizar cierta función auxiliar. Con ayuda del concepto de integral (suponiendo la continuidad de la derivada de la función vectorial analizada) la demostración se puede realizar de forma maś natural.

Supongamos que la función vectorial $r(t) \in R^n$ tiene derivada continua sobre el segmento $[a, b]$. Entonces aplicando la fórmula de Newton — Leibniz obtenemos

$$|r(b) - r(a)| = \left|\int_a^b r'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |r'(t)|\,dt.$$

En la parte derecha se obtuvo la integral de una función escalar continua. Por el teorema integral sobre la media (véase el corolario del teorema 1 en el p. 28.2) existe

el punto $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b |r'(t)|\,dt = |r'(\xi)|(b - a);$$

por consiguiente

$$|r(b) - r(a)| \leqslant |r'(\xi)|(b - a), \xi \in (a, b). \square$$

§ 31. MEDIDA DE LOS CONJUNTOS ABIERTOS PLANOS

31.1. DEFINICIÓN DE MEDIDA (ÁREA) DE CONJUNTOS ABIERTOS

Analicemos el plano sobre el cual está fijo cierto sistema de coordenadas rectangular. Denotemos por T_0 una partición de este plano en cuadrados cerrados que se obtienen al trazar todas las rectas posibles $x = p$, $y = q$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. A tal partición la llamaremos *cuadrilaje del plano de rango* 0 y a los cuadrados indicados, *cuadrados de rango nulo*. Dividamos cada uno de los cuadrados de rango nulo en 100 cuadrados iguales por rectas paralelas a los ejes de coordenadas (dos rectas vecinas cualesquiera se encuentran a una distancia de 1/10 una de otra). Al conjunto de cuadrados obtenidos lo denotaremos por T_1. Continuando este proceso obtenemos los cuadrilajes T_m, $m = 1, 2, \dots$, del plano compuesto por cuadrados formados como resultado del trazo de todas las rectas posibles del tipo

$$x = \frac{p}{10^m}, \quad y = \frac{q}{10^m}, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

y por consiguiente con lados de longitud $1/10^m$. A los cuadrados que pertenecen al cuadrilaje T_m los llamaremos *cuadrados de rango m*, $m = 1, 2, \dots$

Sea G un conjunto abierto plano. Denotemos por $s_0 = s_0(G)$ el conjunto de puntos de todos los cuadrados de rango nulo que están, junto con su frontera, en el conjunto G y por $s_1 = s_1(G)$ el conjunto de los puntos de todos los cuadrados de primer rango que están en G junto con su frontera. En general por $s_m = s_m(G)$ denotaremos el conjunto de todos los cuadrados de rango m que están junto con su frontera en el conjunto G, $m = 0, 1, \dots$ Es evidente que (fig. 124)

$$s_0 \subset s_1 \subset \dots \subset s_m \subset \dots \subset G. \tag{31.1}$$

Los conjuntos $s_0, s_1, \dots, s_m, \dots$ son "polígonos" compuestos por un número finito o infinito de cuadrados del rango correspondiente. En el caso cuando s_m está compuesto por un número finito de cuadrados, denotaremos el área del polígono s_m por ar. s_m, si s_m está compuesto por un número infinito de cuadrados, hacemos ar. $s_m = +\infty$. Si algún s_m está compuesto por un número infinito de cuadrados, entonces todos los s_m posteriores, $m \geqslant m_0$ también están compuestos por un número infinito de cuadrados.

De las inclusiones (31.1) en virtud del acuerdo sobre el símbolo $+\infty$ (véase el p. 3.1) se deduce que siempre

$$\text{ar.}\, s_0 \leqslant \text{ar.}\, s_1 \leqslant \dots \leqslant \text{ar.}\, s_m \leqslant \dots. \tag{31.2}$$

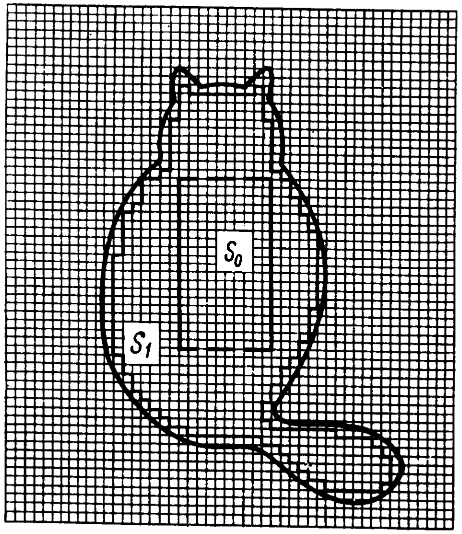


FIG. 124

Son posibles dos casos.

1. Todas las ar. s_m son finitas, entonces (31.2) es una sucesión creciente monótonamente y por esto tiene o bien un límite finito o bien tiende a $+\infty$. Este límite en este caso se llama *área, o medida, del conjunto abierto G* y se denota por mes G*).

2. Si existe un número m_0 tal que ar. $s_{m_0} = +\infty$, entonces ar. $s_m = +\infty$ también para todos los números $m \geqslant m_0$. En este caso haremos

$$\text{mes}\, G = +\infty.$$

Por la definición de límite de una sucesión de elementos de la recta numérica extendida $\overline{R}$ (véase el p. 4.2) la sucesión de elementos a_n, $n = 1, 2, \ldots$, que pertenecen al conjunto ampliado de los números reales $\overline{R}$ tales que comenzando desde cierto número todos son iguales a $+\infty$, tiene $+\infty$ en calidad de su límite $\lim a_n = +\infty$.

Utilizando este concepto ambos casos anteriormente analizados se pueden unir en uno. Enunciemos la definición final.

Definición 1. *El límite* $\lim\limits_{m\to\infty}$ ar.$s_m(G)$ *(finito o infinito) se llama área, o medida, del conjunto abierto G y se denota por* mes G:

$$\text{mes}\, G = \lim_{m\to\infty} \text{ar.}\, s_m(G). \tag{31.3}$$

Tal definición de medida de un conjunto abierto es natural, ya que la sucesión de conjuntos s_m, $m = 0, 1, \ldots$, agota el conjunto abierto, es decir,

*) Del vocablo francés mésure, medida, talla.

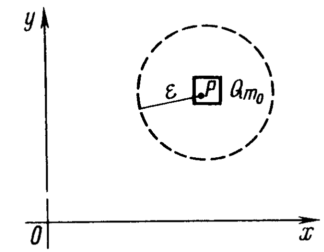


FIG. 125

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} s_m = G,$$

dicho de otro modo, para cualquier punto $P \in G$ existe el polígono s_{m_0} tal que

$$P \in s_{m_0}.$$

En efecto, cualquiera que sea el punto $P \in G$, por ser el conjunto G abierto, existe la circunferencia esférica $U(P; \varepsilon) \subset G$, $\varepsilon > 0$. Observando ahora que el diámetro del cuadrado de rango m es igual a $\sqrt{2}/10^m$, escojamos m_0 de forma tal que

$$\frac{1}{10^{m_0}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{31.4}$$

Para cualquier punto del plano existe al menos un cuadrado de cada rango que contiene este punto. Sea Q_{m_0} un cuadrado de rango m_0 que contiene el punto P. En virtud de la desigualdad (31.4) $Q_{m_0} \subset U(P; \varepsilon)$ lo que significa que $Q_{m_0} \subset G$ y, por consiguiente, $Q_{m_0} \subset s_{m_0}$, pero $P \in Q_{m_0}$, por lo que $P \in s_{m_0}$ (fig. 125). □

Si el conjunto abierto G es acotado, entonces siempre mes $G < +\infty$. En realidad, si G es acotado, entonces existe un cuadrado cerrado Q que contiene el conjunto $G (G \subset Q)$ y que es una unión de cuadrados de rango nulo, entonces $s_m(G) \subset Q$ para cualquier $m = 0, 1, \ldots$ y quiere decir que ar. $s_m(G) \leqslant$ ar. Q.

De esta forma la sucesión (31.2) está acotada superiormente y por lo tanto el límite (31.2) es finito.

Problema 21. Demuéstrese que la medida de un conjunto abierto plano no depende de la elección del sistema rectangular sobre el plano sobre el cual está ubicado.

Del curso de matemática elemental es conocido que en el caso cuando el conjunto abierto S es un polígono, entonces su área, siendo por definición, el área del polígono cerrado $\overline{S}$, coincide con la medida definida por nosotros:

$$\text{ar.}\, \overline{S} = \text{ar.}\, S = \text{mes}\, S^{*)}.$$

*) Véase también el p. 44.2 (conjuntos cuadrables).

31.2. PROPIEDADES DE LA MEDIDA DE LOS CONJUNTOS ABIERTOS

Teorema 1 (monotonía de la medida). *Si G y Γ son conjuntos abiertos planos y*

$$G \subset \Gamma, \tag{31.5}$$

entonces

$$\text{mes}\, G \leqslant \text{mes}\, \Gamma. \tag{31.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos, como anteriormente, por $s_m(G)$ y por $s_m(\Gamma)$ los conjuntos de cuadrados de rango m que se contienen junto con su frontera en los conjuntos G y Γ, $m = 1, 2, \dots$, respectivamente. Entonces de la condición (31.5) se deduce que

$$s_m(G) \subset s_m(\Gamma),$$

de donde

$$\text{ar.}\, s_m(G) \leqslant \text{ar.}\, s_m(\Gamma). \tag{31.7}$$

En el caso cuando ambos conjuntos $s_m(G)$ y $s_m(\Gamma)$ están compuestos por un número finito de cuadrados esto se deduce de que el área del polígono que abarca no es menor que el área del polígono abarcado y en el caso cuando menos uno de los conjuntos $s_m(G)$ y $s_m(\Gamma)$ contiene un número infinito de cuadrados, del acuerdo sobre la utilización del símbolo $+\infty$.

Pasando al límite en la desigualdad (31.7) cuando $m \to \infty$ por (31.3) obtendremos la desigualdad (31.6). □

Teorema 2. *Sean G y G_k, $k = 1, 2, \dots$, conjuntos planos abiertos $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset \dots$ y $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_k$,* entonces

$$\lim_{k \to \infty} \text{mes}\, G_k = \text{mes}\, G. \tag{31.8}$$

Observemos que si para cierto k_0 tiene lugar mes $G_k = +\infty$, entonces por el teorema 1, para todos los $k \geqslant k_0$ también mes $G_k = +\infty$; en este caso la igualdad (31.8) significa que mes $G = +\infty$.

Demostremos previamente un lema.

Lema 1. *Sean G_k, $k = 1, 2, \dots$, conjuntos abiertos planos,*

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \dots \tag{31.9}$$

y

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} G_k. \tag{31.10}$$

Entonces si X es compacto y

$$X \subset G, \tag{31.11}$$

pues existe un número k_0 tal que

$$X \subset G_{k_0}. \tag{31.12}$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. De (31.10) y (31.11) se deduce que el sistema $\{G_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, forma un recubrimiento abierto del conjunto X. Por esto, según el teorema sobre los recubrimientos abiertos de un compacto (véase el teorema 4 en el p. 18.3) existe un recubrimiento finito $\{G_{k_1}, \dots, G_{k_m}\}$ del conjunto X

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i}.$$

Denotemos por k_0 el mayor de los números $k_1, \dots, k_m$. En virtud de la condición (31.9) tenemos la igualdad

$$\bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i} = G_{k_0}.$$

Por consiguiente $X \subset G_{k_0}$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2. Previamente observemos que de la condición $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset \dots$ se deduce (véase el teorema 1) que

$$\text{mes}\, G_1 \leqslant \text{mes}\, G_2 \leqslant \dots \leqslant \text{mes}\, G_k \leqslant \dots, \tag{31.13}$$

por eso la sucesión G_k, $k = 1, 2, \dots$, siempre tiene límite finito o igual a $+\infty$.

Analicemos dos casos.

1. Supongamos que todos los conjuntos $s_m(G)$, $m = 0, 1, \dots$, están compuestos por un número finito de cuadrados. En este caso cada uno de los conjuntos $s_m(g)$ es un conjunto acotado y cerrado y, por consiguiente, compacto. Por esto, según el lema 1, para cada número m existe el número k_m tal que

$$s_m(G) \subset G_{k_m}, \quad m = 1, 2, \dots . \tag{31.14}$$

Además, escojamos k_m de forma tal que $k_{m'} > k_m$ para $m' > m$. Esto siempre se puede hacer, por ejemplo, de la siguiente forma. Si están escogidos los números $k_1 < k_2 < \dots < k_{m-1}$, y para el conjunto $s_m(G)$, por el lema 1, se ha hallado el conjunto G_n tal que

$$s_m(G) \subset G_n, \tag{31.15}$$

entonces denotaremos por k_m cualquier número natural tal que $k_m > k_{m-1}$ y $k_m \geqslant n$; entonces $G_n \subset G_{k_m}$ y quiere decir que $s_m(G) \subset G_{k_m}$. De esta forma la sucesión construida k_m, $m = 1, 2, \dots$, es una subsucesión de la sucesión de los números naturales.

Denotemos ahora por $\tilde{s}_m(G)$ el conjunto de todos los puntos interiores del conjunto $s_m(G)$. Evidentemente $\tilde{s}_m(G)$ es un conjunto abierto y $\tilde{s}_m(G) \subset s_m(G) \subset G_{k_m}$ por eso en virtud del teorema 1

$$\text{mes}\, \tilde{s}_m(G) \leqslant \text{mes}\, G_{k_m}. \tag{31.16}$$

Por cuanto $G_k \subset G$, $k = 1, 2, \dots$, entonces por el mismo teorema 1

$$\text{mes}\, G_{k_m} \leqslant \text{mes}\, G. \tag{31.17}$$

Uniendo las desigualdades (31.16) y (31.17) obtendremos:

$$\text{mes}\, s_m(G) = \text{mes}\, \tilde{s}_m(G) \leqslant \text{mes}\, G_{k_m} \leqslant \text{mes}\, G.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$ en esta desigualdad, tendremos

$$\lim_{m \to \infty} \text{mes}\, G_{k_m} = \text{mes}\, G,$$

ya que por (31.3): $\lim\limits_{m \to \infty} \text{mes}\, s_m(G) = \text{mes}\, G$.

La sucesión $\{\text{mes}\, G_k\}$ como se señaló anteriormente, tiene límite finito o infinito, por eso coincide con el límite de cualquiera de sus subsucesiones, por consiguiente

$$\lim_{k \to \infty} \text{mes}\, G_k = \text{mes}\, G,$$

es decir, se cumple la igualdad (31.8).

2. Supongamos que existe el conjunto $s_m(G)$ que contiene número infinito de cuadrados, entonces ar. $s_m(G) = +\infty$, por eso mes $G = +\infty$. Mostremos que en este caso

$$\lim_{k \to \infty} \text{mes}\, G_k = +\infty. \tag{31.18}$$

Sea dado $\varepsilon > 0$ y supongamos que $s_m(G)$ está compuesto por un conjunto infinito de cuadrados. El área de cada cuadrado de rango m es igual a $\frac{1}{10^{2m}}$. Fijemos el número natural n de forma tal que

$$n/10^{2m} > \varepsilon, \tag{31.19}$$

y escojamos de $s_m(G)$ n cuadrados cualesquiera. Denotemos el conjunto de sus puntos por D. El conjunto D es un polígono (es la unión de un número finito de cuadrados) y, por consiguiente, es un conjunto acotado y cerrado, es decir, un compacto, además

$$\text{ar.}\, D = \frac{n}{10^{2m}}. \tag{31.20}$$

Por el lema existe un número k tal que

$$D \subset G_k. \tag{31.21}$$

Denotemos pos $\tilde{D}$ el conjunto de los puntos interiores del polígono D. De acuerdo con el teorema 1 y las fórmulas (31.19), (31.20) obtendremos

$$\text{mes}\, G_k \geqslant \text{ar.}\, \tilde{D} = \text{ar.}\, D > \varepsilon.$$

En virtud de (31.13), para todos los $k' \geqslant k$

$$\text{mes}\, G_k > \varepsilon.$$

Esto significa el cumplimiento de la condición (31.18). □

Como ejemplo de región plana no acotada que tiene medida infinita sirve la franja

$$G = \{(x, y) : 0 < y < 1\}.$$

Ella contiene en sí un conjunto infinito, por ejemplo, de cuadrados de primer rango y por lo tanto

$$\text{mes}\, G = +\infty.$$

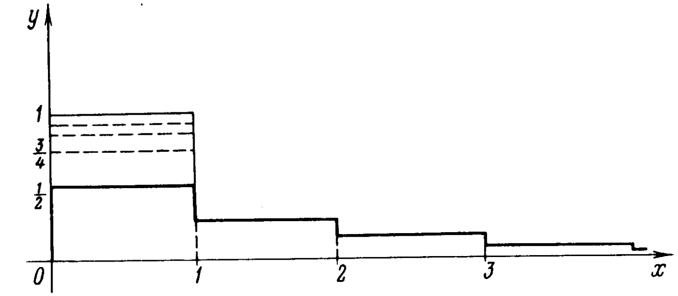


FIG. 126

Para construir un ejemplo de región no acotada con área finita obremos de la siguiente forma. Sea Q un cuadrado unitario:

$$Q = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

Hagamos

$$G_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, \quad 0 < y < \frac{1}{2}\},$$

$$G_2 = G_1 \cup \{(x, y) : 1 \leqslant x < 2, \quad 0 < y < \frac{1}{4}\},$$

en general

$$G_{k+1} = G_k \cup \{x, y) : k \leqslant x < k+1, \quad 0 < y < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Cada conjunto G_k es abierto (¿por qué?).

Gráficamente la formación de los conjuntos G_k podemos representarla de la siguiente forma: G_1 es la mitad del cuadrado Q; para obtener G_2 se toma la mitad de la mitad restante de Q y se une de la forma correspondiente a G_1, se obtiene G_2; más adelante la mitad de la parte restante del cuadrado Q se une ya a G_3 (fig. 126), etc.

Evidentemente tenemos una cadena de inclusiones

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots. \subset G_k \subset \ldots.$$

y

$$\text{ar.}\, G_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Hagamos $G_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$.

El conjunto G es abierto y no acotado. Hallemos, aplicando el teorema 2, su área:

$$\text{mes}\, G = \lim_{k \to \infty} \text{mes}\, G_k = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 1.$$

La medida (volumen) de los conjuntos abiertos en el espacio tridimensional y en general n-dimensional ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) se define con ayuda de una construcción análoga, sólo se debe, naturalmente, partir no de una partición del plano en cuadrados, sino de una partición del espacio en los cubos n-dimensionales correspondientes. Al caso n-dimensional también se trasladan los teoremas demostrados en este párrafo. Aún regresaremos al estudio de la medida en los capítulos futuros, véase el p. 44.1. En ese punto se desarrollarán más completamente las propiedades de la medida (por ejemplo, su comportamiento en la unión de conjuntos, la tal llamada aditividad de la medida), lo que se puede leer inmediatamente después del presente párrafo.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que el área de un rectángulo es igual al producto de sus lados.

2. Sea G un cilindro recto circular, cuya base es el círculo K y cuya altura tiene una longitud h. Demuéstrese que mes $G = h$ mes K donde mes G es la medida de G en el espacio y mes K es la medida de K sobre el plano.

§ 32. ALGUNAS APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

32.1. CÁLCULO DE LAS ÁREAS

En este punto se deducirán las fórmulas para el cálculo de las áreas de algunas regiones planas. Además nos serviremos de las propiedades del área de las figuras planas más simples (polígonos, sectores) conocidas de la matemática elemental, por ejemplo, de que en la unión de tales figuras que no tengan puntos interiores comunes, sus áreas se suman. Además, esta afirmación será demostrada estrictamente en el p. 44.1.

Teorema 1. *Sea f una función definida, no negativa y continua sobre el segmento $[a, b]$. Entonces el área S del conjunto*

$$G = \{(x, y) : a < x < b, 0 < y < f(x)\}$$

se expresa por la fórmula

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{32.1}$$

El conjunto G es un conjunto abierto y acotado. En efecto, su acotación se deduce de que la función f siendo continua sobre el segmento $[a, b]$ es acotada sobre él.

Mostremos que el conjunto G es abierto. Sea $(x_0, y_0) \in G$, entonces $0 < y_0 < f(x_0)$. Tomemos cualquier número $\eta > 0$ tal que $0 < y_0 - \eta < y_0 < y_0 + \eta < f(x_0)$. En virtud de la continuidad de la función f en el punto x_0, existe $\delta > 0$ tal que para todas las $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple la desigualdad $f(x) > y_0 + \eta$. Claro está que el entorno rectangular $P((x_0, y_0); \delta, \eta)$ pertenece al conjunto G, es decir, el punto (x_0, y_0) es su punto interior.

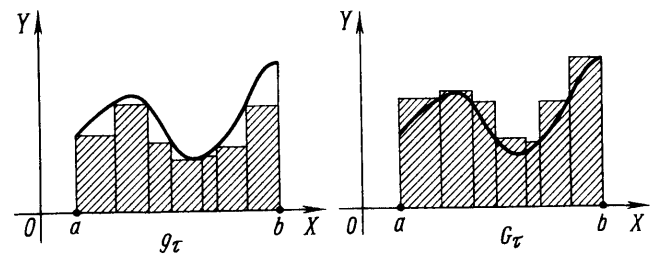


FIG. 127

La frontera del conjunto G se contiene en la unión de la gráfica de la función f, del segmento $[a, b]$ del eje Ox y de los segmentos $[0, f(a)]$ y $[0, f(b)]$ de las rectas $x = a$ $x = b$, respectivamente. Usualmente este conjunto se llama *trapecio curvilíneo* (véase la fig. 111) engendrado por la gráfica de la función f.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ cierta partición del segmento $[a, b]$. Denotemos por G_τ y g_τ los polígonos cerrados compuestos por todos polígonos del tipo

$$G_{\tau,i} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\quad 0 \leqslant y \leqslant M_i,\quad i = 1, 2, \dots, k\},$$

$$g_{\tau,i} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\quad 0 \leqslant y \leqslant m_i,\quad i = 1, 2, \dots, k\},$$

donde $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$.

De esta forma (fig. 127)

$$G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{\tau,i},\ g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{\tau,i}. \tag{32.2}$$

Si denotamos por $\tilde{G}_\tau$ y $\tilde{g}_\tau$ el conjunto de los puntos interiores de los polígonos G_τ y g_τ, entonces

$$\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau. \tag{32.3}$$

Si S_τ y s_τ son las sumas superior e inferior de Darboux respectivamente de la función f sobre el segmento $[a, b]$, correspodientes a su partición τ, entonces es evidente que ar. $\tilde{g}_\tau = s_\tau$, ar. $\tilde{G}_\tau = S_\tau$. Por esto, de (32.3), por la monotonía de la medida, se deduce que

$$s_\tau \leqslant \text{mes}\, G \leqslant S_\tau. \tag{32.4}$$

Por cuanto

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{32.5}$$

entonces

$$\text{mes}\, G = \int_a^b f(x)\,dx. \ \square$$

Como es conocido (véase el p. 27.4)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx$$

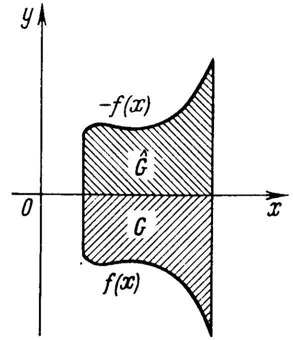


FIG. 128

por eso en virtud de la fórmula (32.1)

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \operatorname{mes} G.$$

De esta forma, las sumas integrales de Riemann y las sumas de Darboux geométricamente son iguales al valor aproximado del área del trapecio cuvilíneo analizado y además, se alcanza cualquier exactitud con la elección de una finura suficiente de la partición τ y el límite de las sumas integrales es igual al valor verdadero del área indicada.

Sea ahora f una función continua y no positiva sobre el segmento $[a, b]$. Hagamos en este caso

$$G = \{(x, y) : a < x < b, f(x) < y < 0\}.$$

Sea $\hat{G}$ el conjunto simétrico al conjunto G respecto al eje Ox*) (fig. 128), entonces

$$\operatorname{mes} \hat{G} = \operatorname{mes} G. \tag{32.6}$$

En el caso analizado la función $-f$ es no negativa sobre el segmento $[a, b]$ por lo que

$$\operatorname{mes} \hat{G} = \int_a^b [-f(x)]\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx. \tag{32.7}$$

Comparando (32.6) y (32.7) obtendremos

$$\operatorname{mes} G = -\int_a^b f(x)\, dx,$$

es decir, aquí la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ es igual al valor del área del trapecio curvilíneo G salvo el signo.

*) Esto significa que $\hat{G} = \{(x, y) : (x, -y) \in G\}$.

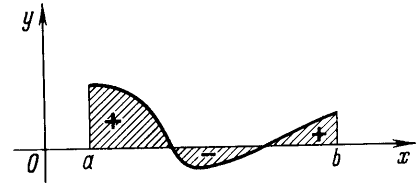


FIG. 129

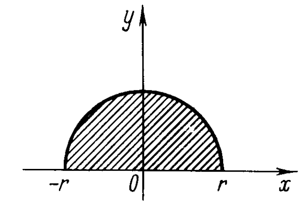


FIG. 130

Si la función f cambia de signo sobre el segmento $[a, b]$ en un número finito de puntos, entonces la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ es igual a la suma algebraica de las áreas de los trapecios curvilíneos correspondientes, acotados por partes de la gráfica de la función f, segmentos del eje Ox y podría ser por segmentos paralelos al eje Oy (fig. 129).

Como se ve, uno de los problemas que de forma natural nos lleva al concepto de integral definida es el problema del cálculo de las áreas. El aparato desarrollado del cálculo integral da un método general y único para el cálculo de las áreas de diversas figuras planas.

Ejemplos. 1. Hallemos el área S del círculo de radio r. Coloquemos el origen de coordenadas en el centro del círculo indicado. Entonces la ecuación de la semicircunferencia que está en el semiplano superior, tiene la forma $y = \sqrt{r - x^2}$ (fig. 130). Por esto el área del semicírculo de radio r se calcula, de acuerdo con el teorema 1, según la fórmula (32.1)

$$S = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = r^2 \int_0^{\pi} sen^2\, t\, dt = r^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt = \frac{\pi r^2}{2}$$

(en el cálculo de la integral se hizo el cambio de variable $x = r \cos t$), de donde el área del círculo buscada es igual a πr^2.

De forma semejante se halla también el área S_φ del sector del círculo (de radio r) correspondiente al ángulo central φ. Considerando para simplificar que $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ tenemos (fig. 131).:

$$S_\varphi = \int_0^{r\cos\varphi} x \operatorname{tg}\varphi\, dx + \int_{r\cos\varphi}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{x^2 \operatorname{tg}\varphi}{2}\Big|_0^{r\cos\varphi} + r^2 \int_0^{\varphi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt =$$
$$= \frac{r^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{2} + \frac{r^2\varphi}{2} - \frac{r^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{4} = \frac{r^2\varphi}{2}.$$

2. Hallemos el área S acotada por el eje Ox y un arco de la senusoide (fig. 132)

$$S = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2.$$

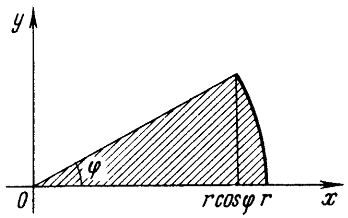


FIG. 131

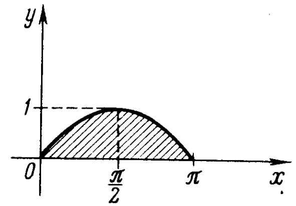


FIG. 132

Aquí, como se hará siempre en el futuro, hablando de una región acotada por cierta curva que es un contorno simple cerrado (véase el p. 16.1) tendremos en cuenta la región acotada cuya frontera es el contorno dado. Cualquier región no acotada cuya frontera es un contorno semejante se llamará exterior (para el contorno dado). En el caso analizado el contorno externo es el "exterior" de la región rayada en la fig. 132. La región exterior siempre tiene área infinita. En efecto, cualquier curva es acotada (véase el p. 16.3), por eso en la región exterior de cualquier contorno simple se contiene, por ejemplo, un cuadrado con lado todo lo grande que se desea. De aquí se deduce inmediatamente que el área de la región exterior es infinita.

3. Hallemos el área S acotada por la hipérbola $y = 1/x$, el eje Ox, el segmento de recta $x = 1$ y el segmento de la recta que pasa por el punto del eje Ox con abscisa igual a x y paralela al eje de las ordenadas (fig. 133):

$$S = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln\Big|_1^x = \ln x.$$

4. Calculemos el área acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Por cuanto la semielipse que se encuentra por encima del eje de las abscisas se describe por la ecuación $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, entonces para la cuarta del área S buscada tenemos (véase el ejemplo 5 en el p. 22.3 o el ejemplo 1 en el p. 22.4):

$$\frac{1}{4}S = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a}{b}\left[\frac{a^2}{2}\arcsen\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right]_0^a = \frac{ab\pi}{4},$$

de donde $S = \pi ab$.

5. La desigualdad (20.50) demostrada en el p. 20.8 tiene un simple sentido geométrico. Analicemos la curva $y = x^{p-1}$ o lo que es lo mismo $x = y^{q-1}$, donde $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (véanse (20.55) y (20.56)). Escojamos arbitrariamente $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ y calculemos las áreas S_1 y S_2 (fig. 134):

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{b^q}{q}.$$

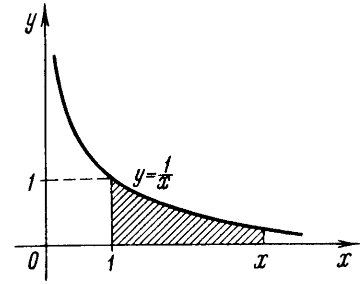


FIG. 133

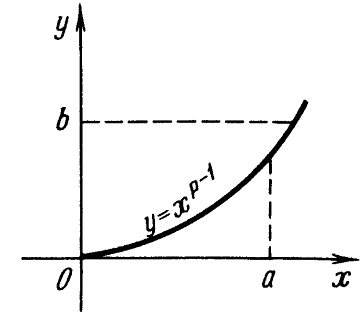


FIG. 134

Geométricamente está claro que el área del rectángulo con lados a y b no sobrepasa la suma $S_1 + S_2$, es decir, $ab \leqslant S_1 + S_2$ o más detalladamente.

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1$$

y ésta es la desigualdad (20.50). Además, es evidente que $ab = S_1 + = S_2$ si y sólo si $b = a^{p-1}$.

Hallemos ahora la fórmula para el área de un sector de curva dada con una ecuación que relaciona sus cooredenadas polares: $\rho = \rho(\varphi)$, donde $\rho = \rho(\varphi)$ es una función no negativa, continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Sea G un conjunto abierto cuya frontera está compuesta por la curva $\widehat{AB}$, descirta en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$, y, podría ser, por los segmentos OA y OB de los rayos $\varphi = \alpha$ y $\varphi = \beta$ (fig. 135), $G = \{(\rho, \varphi)\colon \alpha < \varphi < \beta, 0 < \rho < \rho(\varphi)\}$.

Sea $\tau = \{\varphi_i\}_{i=0}^{i=k}$ cierta partición del segmento $[\alpha, \beta]$. Hagamos

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad m_i = \inf_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi), \quad M_i = \sup_{\varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i} \rho(\varphi),$$

$$g_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi)\colon \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant m_i\},$$
$$G_{i,\tau} = \{(\rho, \varphi)\colon \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant M_i\}.$$

Inscribamos en el conjunto G y circunscribámoslo las figuras escalonadas g_τ y G_τ compuestas por los sectores circulares $g_{i\tau}$ y $G_{i\tau}$, $i = 1, 2, \ldots, k$:

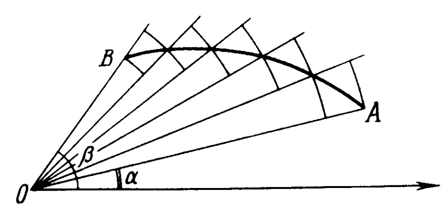


FIG. 135

$$g_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} g_{i,\tau}, \quad G_\tau = \bigcup_{i=1}^{k} G_{i,\tau}.$$

Denotemos por $\tilde{g}_\tau$ y $\tilde{G}_\tau$ los conjuntos de todos los puntos interiores de los conjuntos g_τ y G_τ. Es evidente que $\tilde{g}_\tau$ y $\tilde{G}_\tau$ son conjuntos abiertos y $\tilde{g}_\tau \subset G \subset \tilde{G}_\tau$ por eso según la propiedad de monotonia del área

$$\text{ar.}\, \tilde{g}_\tau \leqslant \text{mes}\, G \leqslant \text{ar.}\, \tilde{G}_\tau.$$

Pero ar. $\tilde{g}_\tau$ = ar. g_τ, ar. $\tilde{G}_\tau$ = ar. G_τ, por consiguiente

$$\text{ar.}\, g_\tau \leqslant \text{mes}\, G \leqslant \text{ar.}\, G_\tau. \tag{32.8}$$

Las áreas de los sectores circulares $g_{i,\tau}$ y $G_{i,\tau}$ son iguales respectivamente a $\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ y $\frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$. De la matemática elemental es conocido que en la unión de figuras planas sus áreas se suman (véase sobre esto también en el p. 44.1), quiere decir que

$$\text{ar.}\, g_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad \text{ar.}\, G_\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

De estas igualdades se ve que ar. g_i y ar. G_τ son respectivamente las sumas inferior y superior de Darboux para la función $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ sobre el segmento $[\alpha, \beta]$: s_τ = ar. g_τ, S_τ = ar. G_τ por consiguiente

$$s_\tau \leqslant \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi \leqslant S_\tau.$$

Restando esta desigualdad de la desigualdad (32.8) transcrita en la forma $S_\tau \geqslant \text{mes}\, G \geqslant s_\tau$ obtendremos

$$s_\tau - S_\tau \leqslant \text{mes}\, G - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

De aquí pasando al límite cuando $\delta_\tau \to 0$ tenemos

$$\text{mes}\, G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi. \ \square \tag{32.9}$$

En calidad de ejemplo hallemos el área S de la figura acotada por la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (véase el p. 17.5) que está representada en la fig. 136. Por la fórmula (32.9) obtendremos

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi + $$
$$+ a^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

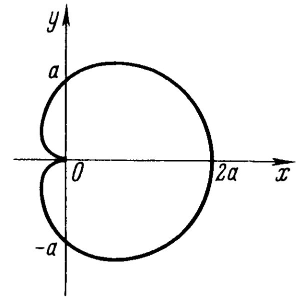


FIG. 136

32.2. VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN

Al final del p. 31.2 se señaló que el concepto de volumen en el espacio se reduce al concepto análogo de área sobre el plano. Deduzcamos la fórmula para el cálculo de los volúmenes de los cuerpos de revolución.

Teorema 2. *Sean la función $f(x) \geqslant 0$ continua sobre el segmento $[a, b]$ y Q el cuerpo obtenido con la rotación del trapecio curvilíneo G engendrado por la gráfica de la función f. Enonces para su volumen* mes Q *es válida la fórmula*

$$\text{mes}\, Q = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{32.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por q_τ y Q_τ los cuerpos formados por la rotación alrededor del eje Ox de las figuras escalonadas $\tilde{g}_\tau$ y $\tilde{G}_\tau$ (véase la demostración del teorema 1). De la inclusión (32.3) se deduce que $q_\tau \subset Q \subset Q_\tau$ y por esto

$$\text{mes}\, q_\tau \leqslant \text{mes}\, Q \leqslant \text{mes}\, Q_\tau. \tag{32.11}$$

Los volúmenes v_τ y V_τ de los conjuntos q_τ y Q_τ son iguales a las sumas de los volúmenes de los cilindros formados por la rotación de los rectángulos $g_{\tau,i}$ y $G_{\tau,i}$ (fig. 137):

$$v_\tau = \text{mes}\, q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi m_i^2 \Delta x_i,$$
$$V_\tau = \text{mes}\, Q_\tau = \sum_{i=1}^{k} \pi M_i^2 \Delta x_i.$$

De estas igualdades se ve que v_τ y V_τ son las sumas inferior y superior de Darboux de la función $\pi f^2(x)$ y ya que la función f^2 es continua y por consiguiente integrable, entonces

$$v_\tau \leqslant \pi\int_a^b f^2(x)\, dx \leqslant V_\tau. \tag{32.12}$$

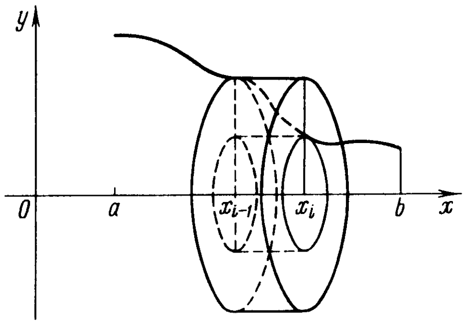


FIG. 137

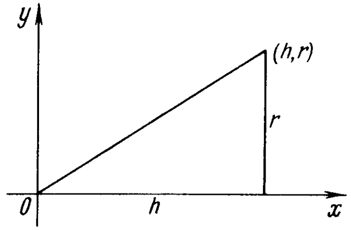


FIG. 138

y

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} [V_\tau - v_\tau] = 0. \tag{32.13}$$

De las desigualdades (32.11) y (32.12) se deduce que

$$v_\tau - V_\tau \leqslant \pi \int_a^b f^2(x)\,dx - \operatorname{mes} Q \leqslant V_\tau - v_\tau,$$

de donde por (32.13) se deriva la fórmula (32.10). □

Ejemplo. 1. Hallemos el volumen V de una bola de radio r. Analizando esta bola como un cuerpo formado por la rotación de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ alrededor del eje Ox (véase la fig. 96), por la fórmula (32.10) obtendremos:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-r}^{r} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Hallemos el volumen V del cono circular recto con altura igual a h y radio de la base r. Analizando el cono indicado como un cuerpo obtenido con la rotación del triángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(h, 0)$ y (h, r), alrededor del eje Ox (fig. 138), es decir, con la rotación del "trapecio curvilíneo" engendrado por la gráfica de la función $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leqslant x \leqslant h$, obtendremos por la fórmula (32.10)

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3. Hallemos el volumen V del cuerpo obtenido con la rotación alrededor del eje Ox del trapecio curvilíneo engendrado por la gráfica de la función $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$, llamada *catenaria* (fig. 139). Según la fórmula (32.10) tenemos

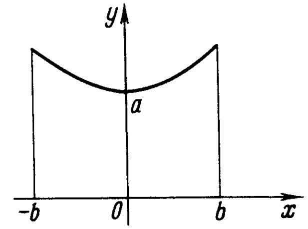


FIG. 139

$$V = \pi a^2 \int_{-b}^{b} \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx = \frac{\pi a^2}{2}\int_{-b}^{b}\left(1 + \operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{\pi a^2 x}{2} + \frac{\pi a^3}{4}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right]_{-b}^{b} = \pi a^2 b + \frac{\pi a^3}{2}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}.$$

De los ejemplos analizados en este párrafo ya se ve claramente la fuerza y generalidad de los métodos del cálculo integral: con un método único se obtienen rápida y simplemente las fórmulas para las áreas y volúmenes tanto conocidas anteriormente del curso de matemática elemental como otras completamente nuevas. En los puntos siguientes analizaremos una serie de problemas más, que se resuelven también fácilmente aplicando los métodos del cálculo integral.

32.3. CÁLCULO DE LA LONGITUD DE CURVA

Hemos analizado una serie de problemas que llevan al concepto de integral definida. Todos ellos tienen en común que en ellos el hallar el valor de alguna magnitud nos llevaba a la definición del límite de cierta suma integral cuando la finura de la partición tendía a cero, es decir, a una integral definida.

Existe, no obstante, otro grupo de problemas que nos llevan al concepto de integral definida. En ellos es conocida la velocidad de variación de una magnitud respecto a otra y se exige hallar la primera magnitud, más exactamente, se da la derivada de una función y se exige hallar la propia función, es decir, a partir de una función dada hallar una de sus primitivas. Este problema también se resuelve con ayuda de la integral definida ya que tal primitiva es, por ejemplo, la integral definida con límite superior variable. En calidad de ejemplo de semejante problema analicemos el cálculo de la longitud del arco de una curva.

Sea dada la curva Γ paramétricamente por la representación vectorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

donde la función $\mathbf{r}(t)$ es continuamente diferenciable sobre el segmento $[a, b]$. Entonces, como sabemos, la curva Γ es rectificable y la variable longitud del arco $s(t)$ calculada desde el punto origen (su radio vector es $\mathbf{r}(a)$) de la curva Γ es también una función continuamente diferenciable del parámetro t sobre el segmento $[a, b]$, además (véase el p. 16.3)

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|.$$

Por esto, según la fórmula de Newton — Leibniz, observando que $s(a) = 0$ para la longitud $S = s(b)$ de la curva Γ obtendremos

$$S = s(b) - s(a) = \int_a^b \frac{ds}{dt}\, dt,$$

de donde

$$S = \int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt.$$

Si $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces

$$S = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt. \tag{32.14}$$

En el caso cuando la curva Γ es la gráfica de la función continuamente diferenciable $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, la fórmula (32.14) toma la forma

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{32.15}$$

Ejemplos. 1. Hallemos la longitud S del arco de la parábola $y = ax^2$, $0 \leqslant x \leqslant b$. Observando que $y' = 2ax$, por la fórmula (32.15) tenemos

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx. \tag{32.16}$$

La integral indefinida $I = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx$ calculémosla de la siguiente forma: integrémosla inicialmente por partes, luego sumemos y restemos la unidad al numerador de la función obtenida bajo el signo de la integral; efectuemos la división e integremos (sustituyendo $y = 2ax$) la fracción obtenida:

$$I = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx = x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \frac{4a^2x^2}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - \int \sqrt{1 + 4a^2x^2}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1 + 4a^2x^2} - I + \frac{1}{2a} \ln |2ax + \sqrt{1 + 4a^2b^2}|.$$

Esta igualdad analizada como una ecuación respecto a la integral I da la posibilidad de hallar su valor:

$$I = \frac{1}{2} x\sqrt{1 + 4a^2x^2} + \frac{1}{4a} \ln |2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2}| + C.$$

Ahora es fácil obtener la mangitud de la integral (32.16):

$$S = \frac{1}{2} b\sqrt{1 + 4a^2b^2} + \frac{1}{4a} \ln |2ab + \sqrt{1 + 4a^2b^2}|$$

2. Hallemos la longitud de la astroide $x = a\cos^3 t$ $y = a \operatorname{sen}^3 t$ (véase la fig. 84). La astroide es simétrica respecto al origen de coordenadas. A la parte de ésta que está en el primer cuadrante le corresponde la variación del parámetro t desde 0 hasta $\pi/2$. Calculemos la longitud S de esta parte (igual, evidentemente, a una cuarta de la longitud de toda la astroide). Observando que

$$x' = -3a\cos^2 t \operatorname{sen} t, \quad y' = 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t,$$

según la fórmula (32.14) (en la cual se debe hacer $z' = 0$) obtendremos:

$$S = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9a^2 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t}\, dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\, dt = \frac{3a}{2}.$$

De esta forma, la longitud de toda la astroide es igual a $6a$.

3. Hállese la longitud S del arco de la elipse $x = a \operatorname{sen} t$, $y = b \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $0 < b \leqslant a$ desde el extremo superior del semieje menor hasta el punto correspondiente al valor del parámetro $t \in [0, 2\pi]$. Hagamos $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ (ε es la excentricidad de la elipse) entonces

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 t}$$

por eso

$$S = a\int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt, \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1. \tag{32.17}$$

Obtuvimos una integral elíptica de segundo orden la cual como es conocido (véase el p. 26.6) no se expresa a través de funciones elementales. es decir, la fórmula (32.17) en el caso dado es la respuesta final. Los valores aproximados de las longitudes de los arcos de la elipse se pueden obtener o bien directamente calculando aproximadamente la integral (32.17) o bien sirviéndonos de las tablas existentes de los valores de las integrales elípticas.

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si una curva plana está dada en coordenadas polares por una representación continuamente diferenciable $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, entonces para su longitud S es válida la fórmula

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \tag{32.18}$$

2. Hállese la longitud del arco de la *espiral logarítmica* $r = ae^{b\varphi}$ desde el punto (φ_0, r_0) hasta el punto (φ, r).

La fórmula integral para la longitud de una curva permite expresar su longitud no sólo como la cota superior de las longitudes de todas las posibles quebradas inscritas, sino como su límite a condición de que las finuras de las particiones correspondientes tienden a cero. Para demostrar esto necesitamos un lema.

Lema. *Sean* $\gamma = \{r = r(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ *una curva continuamente diferenciable en* R^3, *s su variable longitud del arco y* $\Delta r = r(s + \Delta s) - r(s)$. *Entonces la relación* $\left|\dfrac{\Delta r}{\Delta s}\right|$ *tiende a la unidad, cuando* $\Delta s \to 0$, *uniformemente sobre el segmento* $[0, S]$. *Esto significa que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para cualquier punto* $s \in [0, S]$ *y para cualquier incremento* Δs $(s + \Delta s \in [0, s])$ *que satisface la condición* $|\Delta s| < \delta$ *se cumple la desigualdad*

$$\left|\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right| - 1\right| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ existe el punto $s_\delta \in [0, S]$ y el incremento Δs_δ, $|\Delta s_\delta| < \delta$, tales que para $\Delta r_\delta = r(s_\delta + \Delta s_\delta) - r(s_\delta)$ se cumple la desigualdad

$$\left|\left|\frac{\Delta r_\delta}{\Delta s_\delta}\right| - 1\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Tomaremos la sucesión $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, y además los puntos correspondientes s_δ y los incrementos Δs_δ los denotaremos por s_n y Δs_n. Entonces para todos los números naturales n se cumplirán las desigualdades

$$\left|\left|\frac{\Delta r_n}{\Delta s_n}\right| - 1\right| \geqslant \varepsilon_0, \quad |\Delta s_n| < \frac{1}{n},$$

donde $\Delta r_n = r(s_n + \Delta s_n) - r(s_n)$.

Extraigamos de la sucesión $\{s_n\}$ la subsucesión convergente $\{s_{n_k}\}$, entonces $s_0 \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{k \to \infty} s_{n_k} \in [0, S]$. Por la continuidad de la derivada $r'(s)$ en el punto s_0, existe $\delta_0 > 0$ tal que para $|s - s_0| < \delta_0$ es válida la desigualdad

$$|r'(s) - r'(s_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

o lo que es lo mismo

$$r'(s) = r'(s_0) + \alpha(s), \quad |\alpha(s)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{cuando} \quad |s - s_0| < \delta, \quad s \in [0, S].$$

Escojamos ahora un natural k_0 de forma tal que tengan lugar las desigualdades

$$|s_{n_{k_0}} - s_0| < \frac{\delta_0}{2}, \quad \frac{1}{n_{k_0}} < \frac{\delta_0}{2};$$

entonces observando que de acuerdo con la elección de los incrementos Δs_n se cumple la desigualdad $|\Delta s_{n_{k_0}}| < \dfrac{1}{n_{k_0}}$, tenemos $|\Delta s_{n_{k_0}}| < \dfrac{\delta_0}{2}$. Por consiguiente, para todos los s sobre el segmento con extremos en los puntos $s_{n_{k_0}}$ y $s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}$ tendremos

$$|s - s_0| \leqslant |s - s_{n_{k_0}}| + |s_{n_{k_0}} - s_0| < |\Delta s_{n_{k_0}}| + \frac{\delta_0}{2} < \delta_0.$$

Por esto, observando que $|r'(s_0)| = 1$ y que

$$\Delta r_{n_{k_0}} = r(s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}) - r(s_{n_{k_0}}) = \int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}} r'(s)\, ds =$$

$$= \int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}} [r'(s_0) + \alpha(s)]\, ds = r'(s_0)\Delta s_{n_{k_0}} + \int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}} \alpha(s)\, ds,$$

obtendremos

$$\left|\left|\frac{\Delta r_{n_{k_0}}}{\Delta s_{n_{k_0}}}\right| - 1\right| = \left|\left|r'(s_0) + \frac{1}{\Delta s_{n_{k_0}}} \int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}} \alpha(s)\, ds\right| - |r'(s_0)|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{|\Delta s_{n_{k_0}}|} \int\limits_{s_{n_{k_0}}}^{s_{n_{k_0}} + \Delta s_{n_{k_0}}} |\alpha(s)|\, ds\right| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0.$$

Esto contradice la suposición hecha. □

Teorema 3. *Sea* $\gamma = \{r = r(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ *una curva continuamente diferenciable en* R^3, *s, su variable longitud del arco*, $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ *una partición del segmento* $[0, S]$, $\lambda_\tau = \sum\limits_{i=1}^{k} |r(s_i) - r(s_{i-1})|$, *entonces*

$$S = \lim_{\delta_\tau \to 0} \lambda_\tau.$$

Aquí λ_τ es evidentemente la longitud de la quebrada con vértices en los puntos $r(s_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ inscrita en la curva γ.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $\Delta r_i = r(s_i) - r(s_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Observando que $s = \sum\limits_{i=1}^{k} \Delta s_i$ y $\lambda_\tau = \sum\limits_{i=1}^{k} |\Delta r_i|$ obtendremos

$$|S - \lambda_\tau| = \left|\sum_{i=1}^{k} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i|\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left|1 - \left|\frac{\Delta r_i}{\Delta s_i}\right|\right| \Delta s_i.$$

Según el lema, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si sólo $|\Delta s_i| < \delta$ entonces tiene lugar la desigualdad

$$\left|\left|\frac{\Delta r_i}{\Delta s_i}\right| - 1\right| < \frac{\varepsilon}{S}.$$

Por esto para cualquier partición τ de finura $\delta_\tau < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|S - \lambda_\tau| < \frac{\varepsilon}{S}\sum_{i=1}^{k} \Delta s_i = \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \lambda_\tau = S$. □

32.4. AREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

El concepto de superficie y de su área será estudiado especialmente en el § 50. Aquí nos limitaremos al caso especial de las superficies formadas por la rotación de curvas alrededor de algunos ejes. Como siempre supondremos que en el espacio R^3 está fijado un sistema rectangular de coordenadas cartesianas.

Sean $\gamma = \{r = r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ una curva en el semiplano $y > 0$ del plano de las variables x, y; $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=k}$, una partición del segmento $[a, b]$. Inscribamos en la curva γ la quebrada con vértices en los puntos $r(t_i) = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ (fig. 140). Cuando el eslabón $\Delta r_i = r(t_i) - r(t_{i-1})$ de esta quebrada gira alrededor del eje Ox se obtiene la superficie de un cono truncado (en particular, tal vez de un cilindro) con área

$$l_i = \pi(y_{i-1} + y_i)|\Delta r_i|$$

y cuando gira toda la quebrada, una superficie con área

$$L_\tau = \sum_{i=1}^{k} l_i = \pi\sum_{i=1}^{k} (y_{i-1} + y_i)|\Delta r_i|.$$

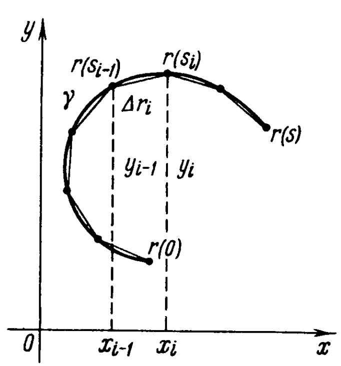


FIG. 140

Definición 1. *Si existe el límite* $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} L_\tau$, *entonces se llama área L de la superficie formada por la rotación de curva* γ *alrededor del eje Ox.*

De esta forma

$$L \overset{\text{def}}{=} \lim_{\delta_\tau \to 0} L_\tau. \tag{32.19}$$

Teorema 4. *Sea* $\gamma = \{r = r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ *una curva continuamente diferenciable sin puntos singulares, que está en el semiplano* $y > 0$ *del plano de las variables* x, y. *Entonces para el área L de la superficie obtenida con la rotación de la curva* γ *alrededor del eje de las x, es válida la fórmula*

$$L = 2\pi\int_a^b y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = 2\pi\int_0^S y(s)\,ds, \tag{32.20}$$

donde s es la variable longitud del arco de la curva γ, $0 \leqslant s \leqslant S$.

DEMOSTRACIÓN. Como es conocido, en las suposiciones hechas en el teorema (véase el p. 16.5), la función $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una transformación admisible del parámetro y por consiguiente la longitud del arco s puede ser tomada por parámetro:

$$\gamma = \{r = r(s) = (x(s), y(s)), 0 \leqslant s \leqslant S\}.$$

Sea $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ una partición del segmento $[0, S]$,

$$\Delta r_i = r(s_i) - r(s_{i-1}), \quad \Delta s_i = s_i - s_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Comparemos la suma

$$L_\tau = \pi\sum_{i=1}^{k} (y_{i-1} + y_i)|\Delta r_i|, \quad y_i \overset{\text{def}}{=} y_i(s), \quad i = 0, 1, \dots, k, \tag{32.21}$$

con la suma integral (de la función $2\pi y(s)$)

$$\sigma_\tau = 2\pi\sum_{i=1}^{k} y_i\,\Delta s_i. \tag{32.22}$$

Para esto observemos que la función $y(s)$ siendo continua sobre el segmento $[0, S]$ es acotada sobre él, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $s \in [0, S]$ se cumple la desigualdad $|y(s)| \leqslant M$. Denotando por $\omega(\delta, y)$ el módulo de continuidad de la función $y(s)$ y por λ_τ la longitud de la quebrada con vértice en los puntos $r(s_i)$ y observando que $|\Delta r_i| \leqslant \Delta s$, $i = 1, 2, \dots, k$, obtendremos

$$|\sigma_\tau - L_\tau| = \left|\pi\sum_{i=1}^{k} 2y_i\Delta s_i - \pi\sum_{i=1}^{k} [2y_i + (y_{i-1} - y_i)]|\Delta r_i|\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\sum_{i=1}^{k} |y_i|(\Delta s_i - |\Delta r_i|) + \pi\sum_{i=1}^{k} |y_i - y_{i-1}||\Delta r_i| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi M\left(\sum_{i=1}^{k} \Delta s_i - \sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i|\right) + \pi\omega(\delta_\tau; y)\sum_{i=1}^{k} |\Delta r_i| =$$

$$= 2\pi M(S - \lambda_\tau) + \pi\omega(\delta_\tau; y)\lambda_\tau.$$

Aquí $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S - \lambda_\tau) = 0$ (véase el teorema 3), $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau, y) = 0$ (véase el teorema 5 en el p. 19.6) y $0 \leqslant \lambda_\tau \leqslant S$. Por esto $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (\sigma_\tau - L_\tau) = 0$ y ya que $\lim \sigma_\tau = 2\pi\int\limits_0^S y(s)\, ds$, entonces $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} L_\tau = 2\pi\int\limits_0^S y(s)\, ds$ también. Haciendo el cambio de variable $s = s(t)$ en la última integral y recordando que $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$ obtendremos

$$L = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt. \ \square$$

Si curva γ está dada por la ecuación explícita $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, entonces la fórmula para el área de la superficie formada con la rotación de la gráfica de la función f alrededor del eje Ox tiene la forma

$$L = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{32.23}$$

Recordando que (véase el p. 16.4) $\sqrt{1 + y'^2}\, dx = ds$, la fórmula (32.23) se puede transcribir en la forma

$$L = 2\pi\int\limits_0^S y\, ds.$$

La deducción presentada de la fórmula (32.20) tiene cierto defecto ya que durante esta deducción ya se utilizó el concepto de área de superficie y su aditividad, claro, sólo en el caso más simple, o sea, para las superficies del cono truncado y sus uniones. Se puede introducir el concepto general de área de una superficie sin utilizar el concepto de área de una superficie para cualesquiera superficies elementales y obtener sus propiedades necesarias. Estas cuestiones serán analizadas en el futuro en el p. 50.5.

Ejemplos. 1. Hallemos el área S de la esfera de radio r. La esfera indicada puede ser obtenida por la rotación de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leqslant x \leqslant r$ alrededor del eje Ox. No obstante esta representación explícita de la semicircunferencia no es continuamente diferenciable: la derivada $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ se hace infinita cuando $x = \pm r$. Es mucho más cómodo tomar la representación paramétrica de la semicircunferencia

$$x = r\cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Entonces $x' = -r \operatorname{sen} t$, $y' = r\cos t$, por eso el área S de la superficie de la esfera de radio r se calcula fácilmente de acuerdo con la fórmula (32.20):

$$S = \int\limits_0^\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 2\pi r^2\int\limits_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt = 4\pi r^2.$$

2. Hallemos el área S de la superficie formada por la rotación alrededor del eje Ox del arco de la catenaria (véase la fig. 119) $y = a \operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$ (esta superficie se llama *catenoide*). Por la fórmula (32.23) tenemos:

$$S = 2\ a\int\limits_{-b}^{b} \operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\, dx =$$

$$= 2\pi a\int\limits_{-b}^{b} \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\, dx = \pi a\int\limits_{-b}^{b}\left(1 + \operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right) dx\ \pi a\left(2b + a \operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

32.5. TRABAJO DE UNA FUERZA

Supongamos que el punto material M se mueve por la curva continuamente diferenciable $\Gamma = \{r = r(s)\}$, donde s es la variable longitud de arco, $0 \leqslant s \leqslant S$. Supongamos que sobre el punto material que se encuentra en la posición $r(s)$ actúa la fuerza $F(s)$ orientada por la tangente a la trayectoria, en el sentido del movimiento.

Tomemos cualquier partición $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[0, S]$. A ella le corresponde la partición de la trayectoria en las partes

$$\Gamma_i = \{r(s), s_{i-1} \leqslant s \leqslant s_i\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Escojamos arbitrariamente un punto $\xi_i \leqslant [s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$ (fig. 141). La magnitud $F(\xi_i)\Delta s_i$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$, se llama *trabajo elemental* de la fuerza F en el tramo Γ_i y se toma como el valor aproximado del trabajo que realiza la fuerza F actuando sobre un punto material, cuando el último recorre la curva Γ_i. La suma de todos los trabajos elementales $\sum\limits_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ es la suma integral de Riemann de la función $F(s)$.

Definición 2. *El límite al cual tiende la suma* $\sum\limits_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$ *de todos los trabajos elementales cuando la finura* δ_τ *de la partición* τ *tiende a cero se llama trabajo de la fuerza* F *a lo largo de la curva* Γ.

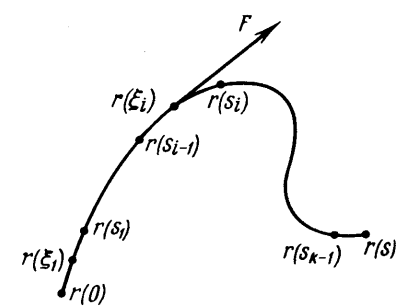


FIG. 141

De esta forma, si denotamos este trabajo con la letra W, entonces en virtud de la definición dada

$$W = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} F(\xi_i)\Delta s_i$$

y por consiguiente

$$W = \int_0^S F(s)\, ds. \tag{32.24}$$

Si la posición del punto sobre la trayectoria de su movimiento se describe con ayuda de cualquier otro parámetro t (por ejemplo, el tiempo) y si la magnitud del camino recorrido $s = s(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una función continuamente diferenciable, entonces de la fórmula (32.24) obtendremos:

$$W = \int_a^b F[s(t)]s'(t)\, dt.$$

32.6. CÁLCULO DE LOS MOMENTOS ESTÁTICOS Y DE LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA CURVA

Sea M un punto material de masa m con coordenadas x e y. Los productos my y mx se llaman sus *momentos estáticos* respecto a los ejes Ox y Oy respectivamente.

Sea $\Gamma = \{r(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ una curva rectificable donde s es la variable longitud de arco. Consideraremos que la curva Γ tiene masa y que la masa de su arco es directamente proporcional a la longitud del arco: si Δm es la masa del arco de longitud Δs, entonces $\Delta m = \rho\Delta s$, donde ρ es cierta constante llamada *densidad lineal de la curva* Γ. Tales curvas en la mecánica se llaman *homogéneas*. Por cuanto $\rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta s}$, entonces la densidad es igual a la masa de la longitud del arco de curva que le corresponde a la unidad de longitud de arco. Para simplificar consideraremos que $\rho = 1$, es decir, que la masa de la parte de la curva de longitud Δs es también igual a Δs, en particular la masa de toda la curva numéricamente, es igual a S.

Sea ahora $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=k}$ cualquier partición del segmento $[0, S]$, $\Delta s = s_i - s_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. A la partición τ le corresponde la partición de la curva Γ en las partes $\Gamma_i = \{r(s),\ s_{i-1} \leqslant s \leqslant s_i\}$. Escojamos un punto cualquiera $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$ y hagamos $x_i = x(\xi_i)$, $y_i = y(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Las magnitudes $y_i\Delta s_i$ para cualquier elección de los puntos indicados ξ_i se llaman *momentos estáticos elementales* de la parte Γ_i de la curva Γ respecto al eje Ox. Evidentemente el momento estático elemental de Γ_i numéricamente es igual al momento estático del punto material con masa Δs con coordenada y_i, es decir, como si cambiáramos la curva continua dada Γ por puntos materiales.

Definición 3. *El límite al cual tiende la suma*

$$\sum_{i=1}^{k} y_i\Delta s_i \tag{32.25}$$

de todos los momentos estáticos elementales, cuando la finura de la partición τ tiende a cero, se llama momento estático M_x de la curva Γ respecto al eje Ox.

Este límite siempre existe ya que por la definición de curva, la función $r = r(s)$ y por lo tanto sus funciones coordenadas $x = x(s)$, $y = y(s)$ son continuas sobre el segmento $[0, S]$, la suma (32.25) es una suma integral de Riemann de la función $y(s)$ y por eso, cuando $\delta \to 0$, tiende a la integral $\int_0^S y(s)\, ds$. De esta forma

$$M_x = \int_0^S y\, ds. \tag{32.26}$$

De forma análoga se define y se calcula el momento estático M_y de la curva Γ respecto al eje Ox:

$$M_y = \int_0^S x\, ds. \tag{32.27}$$

Definición 4. *El punto del plano $P = (x_0, y_0)$ que posee la propiedad de que si en él colocamos un punto material de masa igual a la masa de la curva (en el caso analizado, de masa S), entonces este punto tiene un momento estático respecto a cualquier eje coordenado numéricamente igual al momento estático de la curva respecto al mismo eje, se llama centro de gravedad de la curva dada.*

De esta forma

$$Sx_0 = M_y, \quad Sy_0 = M_x,$$

de donde en virtud de las fórmulas (32.26) y (32.27), para las coordenadas del centro de gravedad obtendremos las fórmulas

$$x_0 = \frac{1}{S}\int_0^S x\, ds, \quad y_0 = \frac{1}{S}\int_0^S y\, ds. \tag{32.28}$$

Comparando las fórmulas para la ordenada del centro de gravedad de la curva $y_0S = \int_0^S y\, ds$ y para el área L de la superficie obtenida de la rotación de esta curva alrededor de un eje $L = 2\pi\int_0^S y\, ds$, obtendremos una relación interesante $L = 2\pi y_0S$ (aquí por curva se entiende una curva continuamente diferenciable sin puntos singulares) que forma el contenido del así llamado *primer teorema de Goulden**).

Teorema 5 (de Goulden). *El área de la superficie obtenida de la rotación de una curva alrededor de un eje que no la interseque es igual a la longitud de esta curva multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de esta curva.*

En el caso cuando es conocida la posición del centro de gravedad de la curva el teorema de Goulden permite sencillamente hallar el área de la superficie correspondiente de revolución. Por ejemplo, el área de la superficie obtenida por la rotación

*) P. Goulden (1577 — 1643), matemático suizo.

de la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $0 < r < a$, alrededor del eje Oy (esta superficie se llama *toro*) fácilmente se calcula por el método indicado: $L = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$, ya que el centro de gravedad de la circunferencia coincide con su centro.

En calidad de ejemplo de cálculo del centro de gravedad de una curva según la fórmula (32.28) hallemos el centro de gravedad de la catenaria $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $-b \leqslant x \leqslant b$. En virtud de la simetría de esta línea con respecto al eje Oy tenemos $M_y = 0$. En realidad, tomando como punto de referencia de los arcos un punto de la catenaria que está en el eje Oy y denotando la longitud de toda la catenaria por $2S$, obtendremos

$$M_y = \int_{-S}^{S} x(s)\,ds = 0,$$

ya que $x(s)$ es una función impar. De la igualdad $M_y = 0$ en virtud de la fórmula (32.28) se deduce que $x_0 = 0$.

Por el teorema de Goulden $L_x = 2\pi y_0 \cdot 2S$, donde $2S$ es la longitud de la curva, en el caso dado de la catenaria analizada, y L_x es el área de la superficie de revolución formada por la rotación de esta línea alrededor del eje Ox. El área L_x fue calculada en el p. 32.4:

$$L_x = \pi a\left(2b + a \operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)$$

y la longitud $2S$ de la catenaria fácilmente se calcula por la fórmula (32.15):

$$2S = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx =$$

$$= \int_{-b}^{b} \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a \operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{-b}^{b} = 2a \operatorname{sh}\frac{b}{a};$$

por la fórmula (32.28) obtendremos

$$y_0 = \left(2b + a \operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)\Big/ 4 \operatorname{sh}\frac{b}{a}.$$

Ejercicios. 3. Hállese el área de la región finita, acotada por la parábola $y^2 = 2x + 1$ y la recta $y = x - 1$.

4. Hállese el área de la región acotada por la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

y por la recta $y = 0$.

5. Hállese el área de la región acotada por la curva $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (esta curva se llama lemniscata).

6. Hállese el volumen del cuerpo de revolución formado por la rotación de un arco del sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, alrededor del eje Ox.

7. Hállese la longitud de la curva $y = \ln \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant a < \frac{\pi}{2}$.

8. Hállese la longitud del arco de la *espiral de Arquímedes* $\rho = a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

9. Hállese el área de la superficie formada por la rotación de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ alrededor del eje Ox.

10. Hállese las coordenadas del centro de gravedad del arco del círculo

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi, \quad |\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

11. Demuéstrese la unicidad del centro de gravedad para una curva continuamente diferenciable, dicho de otro modo, demuéstrese que el punto del plano definido por las fórmulas (32.28), no depende de la elección de las coordenadas cartesianas sobre el plano.

§ 33. INTEGRALES IMPROPIAS

33.1. DEFINICIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS

Una función no acotada sobre un segmento no es integrable sobre él según Riemann (teorema 1, del p. 27.2). Si la función está definida sobre un intervalo infinito, entonces no se puede hablar de su integrabilidad según Riemann sencillamente por que la definición de la integral se refiere sólo a las funciones dadas sobre un segmento. En el presente párrafo el concepto de integral se generaliza tanto al caso de funciones definidas sobre intervalos no acotados, así como para el caso de funciones definidas sobre intervalos acotados, pero no acotados en ellos. Esto se hace con ayuda de un paso límite complementario al límite con cuya ayuda se introduce la integral de Riemann.

Definición 1. *Sea la función f definida sobre un intervalo semiabierto finito o infinito $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, e integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Si existe $\lim\limits_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx$, entonces la función f se llama integrable en el sentido impropio sobre el intervalo $[a, b)$ y el límite señalado se llama su integral impropia y se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$.*

De esta manera (fig. 142)

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx. \tag{33.1}$$

Si el límite (33.1) existe (y por consiguiente es finito) entonces también se dice que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge*, en el caso contrario que *diverge*. A

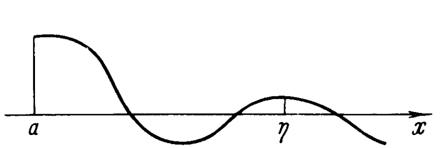


FIG. 142

diferencia de la integral impropia la integral ordinaria de Riemann se llama a veces *integral propia.*

La existencia de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es equivalente a la existencia de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ para cualquier $c \in (a, b)$. En realidad la integral $\int_a^\eta f(x)\,dx$ se diferencia de la integral $\int_c^\eta f(x)\,dx$ (cuando $c < \eta < b$) en una magnitud finita $\int_a^c f(x)\,dx$ que no depende de η:

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\eta f(x)\,dx .$$

Por esto cuando $\eta \to b$ ambas integrales $\int_a^\eta$ y $\int_c^\eta$ tienen o no límite simultáneamente, además en el caso de su existencia

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{33.2}$$

De la definición (33.1) de la integral impropia y de (33.2) se deduce que si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge entonces

$$\lim_{c \to b} \int_c^b f(x)\,dx = 0. \tag{33.3}$$

Señalemos que no se puede tomar el cumplimiento de esta condición en calidad de definición de la integral convergente $\int_a^b f(x)\,dx$ ya que la integral $\int_c^b f(x)\,dx$ también es impropia, y se puede hablar de su tendencia a cero cuando $c \to b$ sólo al tener ya la definición de integral impropia convergente.

Si la función f es no negativa y continua sobre el intervalo $[a, b)$, entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área del conjunto abierto no acotado:

$$G = \{(x, y) : a < x < b; 0 < y < f(x)\},$$

es decir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \operatorname{mes} G. \tag{33.4}$$

En realidad (en la fig. 143 está representado el caso de un b finito) tomemos una sucesión cualquiera $\eta_k \in [a, b)$, $k = 1, 2, \dots$, de forma tal que $\lim\limits_{k \to \infty} \eta_k = b$ y hagamos

$$G_k = \{(x, y) : a < x < \eta_k, 0 < y < f(x)\}.$$

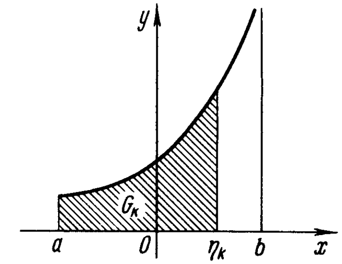


FIG. 143

Entonces por el teorema 1 del p. 32.1

$$\operatorname{mes} G_k = \int_a^{\eta_k} f(x)\,dx. \tag{33.5}$$

Por cuanto G_k son conjuntos abiertos, $k = 1, 2, \dots$, y

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_k \subset \dots \text{ y } \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G,$$

entonces en virtud del teorema 2 del p. 31.2

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G.$$

Por la misma definición de integral impropia

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^{\eta_k} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por esto pasando al límite en la igualdad (33.5) cuando $k \to \infty$ obtendremos (33.4).

Señalemos que la definición (33.1) de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ en el caso del intervalo finito $[a, b)$ tiene sentido sólo en el caso cuando la función f no es acotada en cualquier entorno del punto $x = b$, es decir, sobre cualquier intervalo $(b - \varepsilon, b)$ $(0 < \varepsilon < b - a)$. Esto está relacionado con el hecho de que -no es difícil mostrar- toda función integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b < +\infty$, y acotada sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$ será integrable según Riemann también sobre el segmento $[a, b]$ al definirla complementariamente en el punto $x = b$. En este caso la integral de Riemann de la función definida de esta manera es igual al límite (33.1) y por lo tanto no depende de la elección del valor complementario de la función cuando $x = b$. En este sentido la integral de Riemann es un caso particular de la integral impropia. Por esto toda la exposición siguiente tiene sentido sólo cuando la función está definida sobre intervalo infinito o

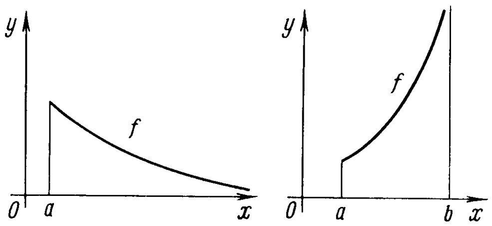


FIG. 144

finito con la particularidad de que en el último caso es no acotada (fig. 144). Lo dicho se comprende en el sentido de que para las funciones subintegrales acotadas, definidas en intervalos acotados, los teoremas demostrados a continuación o bien son triviales o bien han sido demostrados anteriormente.

Ejercicios. 1. Sea la función f acotada sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, e integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Demuéstrese que en este caso el límite $\lim\limits_{\eta \to b} \int\limits_a^\eta f(x)\, dx$ siempre existe, además si la función f se define complementariamente de modo arbitrario cuando $x = b$, entonces este límite será igual a la integral de Riemann respecto al segmento $[a, b]$ de la función definida complementariamente.

2. Cítese un ejemplo de una función f no negativa cuando $x \geqslant 1$ y no acotada en cualquier entorno de $+\infty$ para la cual converge la integral impropia $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

Si la función f está definida sobre el intervalo semiabierto del tipo $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, y es integrable según Riemann sobre todos los segmentos $[\xi, b]$, $a < \xi \leqslant b$, entonces la integral impropia $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ se define por la fórmula

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\xi \to a} \int\limits_\xi^b f(x)\, dx. \tag{33.6}$$

Si la función f está definida sobre el intervalo (a, b) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, y para una elección del punto $c \in (a, b)$ existen las integrales impropias $\int\limits_a^c f(x)\, dx$ (en el sentido de (33.6)) y $\int\limits_c^b f(x)\, dx$ (en el sentido de (33.1)) entonces por definición se supone

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx. \tag{33.7}$$

Además la existencia y el valor de la integral $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ no dependen de la elección del punto $c \in (a, b)$. En realidad en el caso analizado la función f evidentemente es integrable según Riemann sobre todo segmento $[\xi, \eta]$, $a < \xi < \eta < b$, y la definición (33.7) en virtud de las definiciones (33.1) y (33.6) es equivalente a la siguiente:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\xi \to a \\ \eta \to b}} \int\limits_\xi^\eta f(x)\, dx, \qquad a < \xi < \eta < b.$$

Aquí la parte derecha es el límite de la función de dos variables ξ y η, además las variables ξ y η tienden respectivamente a a y a b independientemente una de otra.

Supongamos ahora que existe un número finito de puntos x_i, $i = 0, 1, \dots, k$, $-\infty \leqslant a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b \leqslant +\infty$ (por x_0 se puede suponer también $-\infty$ y por $x_k, +\infty$) tales que todas las integrales impropias

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

existen. Entonces la integral impropia $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ se define por la fórmula

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx. \tag{33.8}$$

De esta definición y de la definición (33.7) se deduce que la integral impropia en el caso general se reduce a integrales del tipo (33.1) y (33.6). Por esto en lo adelante nos limitaremos sólo al estudio de integrales impropias de los dos tipos señalados.

Ejercicios. 3. Demuéstrese que la existencia y el valor de la integral impropia $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ en la definición (33.8) no depende de la elección de los puntos x_i, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, que satisfacen las condiciones formuladas anteriormente.

4. Demuéstrese que si la integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge y existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, entonces este límite es igual a cero:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Ejemplo 1. Mostremos que la integral impropia de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ respecto al intervalo semiabierto $(0, 1]$ diverge. En realidad

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \int\limits_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +0} \ln x \Big|_\xi^1 = -\lim_{\xi \to +0} \ln \xi = +\infty.$$

Como siempre los cálculos realizados se escriben brevemente:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = +\infty.$$

2. Aclaremos para cuáles $\alpha \neq 1$ converge y para cuáles diverge la integral de la función $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ respecto al intervalo $(0, 1]$. Tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{para} \quad \alpha < 1, \\ +\infty & \text{para} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Señalemos que cuando $\alpha \leqslant 0$ la integral analizada es propia. Uniendo los resultados obtenidos en los ejemplos 1 y 2 obtendremos.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{cuando} \quad \alpha < 1, \\ \text{diverge} & \text{cuando} \quad \alpha \geqslant 1. \end{cases} \tag{33.9}$$

3. Analicemos ahora la función $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ sobre un intervalo infinito $[1, +\infty)$. Si $\alpha = 1$, entonces

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

Si además $\alpha \neq 1$ entonces

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} & \text{cuando} \quad \alpha > 1, \\ +\infty & \text{cuando} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

De esta manera

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{cuando} \quad \alpha > 1, \\ \text{diverge} & \text{cuando} \quad \alpha \leqslant 1. \end{cases} \tag{33.10}$$

4. Si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge y

$$f^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(-x), \quad -b \leqslant x \leqslant -a,$$

entonces la integral $\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx$ también converge y

$$\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En efecto, supongamos, por ejemplo, que la función f es integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$, y por consiguiente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx$$

(el caso general de la integral impropia en virtud de la definición (33.8) se reduce a integrales semejantes, más exacto a integrales del tipo (33.1) y (33.6)). Por las fórmulas (28.31) (véase el p. 28.1) tiene lugar la igualdad

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = \int_{-\eta}^{-a} f^*(x)\,dx.$$

Por lo que

$$\lim_{-\eta \to -b} \int_{-\eta}^{-a} f^*(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

pero el límite del primer miembro de la igualdad es precisamente la integral $\int_{-b}^{-a} f^*(x)\,dx$, de esta manera

$$\int_{-b}^{-a} f^*(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

En particular, si la función f es *par* sobre el segmento $[-a, a]$ y la integral $\int_0^a f(x)\,dx$ converge, entonces converge también la integral $\int_{-a}^0 f(x)\,dx$, además

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx,$$

y por consiguiente

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

5. Sea la función f definida cuando $x \geqslant a$, periódica con período $T > 0$ y la integral $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ converge, entonces para cualquier $b \geqslant a$ la integral $\int_b^{b+T} f(x)\,dx$ también converge y

$$\int_b^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx.$$

Es válida también la afirmación inversa en cierto sentido: si para algún $b \geqslant a$ la integral $\int_b^{b+T} f(x)\,dx$ converge, converge también la integral $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ y por consiguiente es válida la fórmula escrita anteriormente.

Para la demostración es suficiente observar que las fórmulas (28.34) (véase el p. 28.1) son válidas también en el caso cuando las integrales que figuran en ellas son impropias. Esto se demuestra mediante un paso límite de la igualdad de las integrales propias correspondientes (su igualdad se deduce de la fórmula (28.33)), el límite de las cuales son las integrales impropias analizadas.

Hemos introducido un nuevo concepto, el concepto de integral impropia. Ante todo es natural aclarar qué propiedades tiene esta integral. ¿Se conservan o no para ella las propiedades de la integral común? ¿Surgen para la integral impropia (si surgen entonces cuáles) nuevos problemas y cuestiones específicas sólo para ella? Obtendremos las respuestas a estas preguntas en los puntos siguientes de este párrafo.

33.2. FÓRMULAS DE CÁLCULO INTEGRAL PARA LAS INTEGRALES IMPROPIAS

En éste y en los puntos siguientes al analizar las propiedades de las integrales impropias vamos a detenernos más detalladamente sólo en las integrales de funciones definidas sobre intervalos finitos o infinitos del tipo $[a, b)$ e integrables según Riemann sobre todos los segmentos $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$. Otras suposiciones cualesquiera serán especialmente comentadas.

En virtud de las propiedades del límite y la definición de integral impropia, como del límite de la integral ordinario de Riemann, a las integrales impropias se extienden muchas propiedades de la integral definida. Analicemos algunas de ellas.

1°. **(Fórmula de Newton — Leibniz para las integrales impropias).** *Si la función f es continua sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$ y F es una primitiva sobre él, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} F(b-0) - F(a) & \text{si } b \text{ es finito,} \\ F(+\infty) - F(a) & \text{si } b = +\infty. \end{cases} \tag{33.11}$$

Aquí $F(b-0) = \lim\limits_{x \to b-0} F(x)$ en el caso cuando b es finito y $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ y por primitiva F de la función f sobre el intervalo $[a, b)$ se entiende la función F continua sobre él, diferenciable en todos sus puntos interiores y tal que $F'(x) = f(x)$, $a < x < b$.

La igualdad (33.11) se entiende en el sentido de que o bien ambos miembros tienen sentido simultáneamente y entonces son iguales, o bien ellas no tienen sentido simultáneamente, es decir, los límites que aparecen en ellas no existen. En realidad según la fórmula de Newton — Leibniz para las funciones integrables según Riemann (véase el p. 29.3) para cualquier $\eta \in [a, b)$ tenemos

$$\int_a^\eta f(x)\,dx = F(\eta) - F(a).$$

Pasando en esta igualdad al límite cuando $\eta \to b$, $a \leqslant \eta < b$ obtenemos la fórmula (33.11).

Subrayamos que esta fórmula está demostrada en la suposición de que la función f es integrable en el sentido común sobre cada intervalo del tipo $[a, \eta)$, $a \leqslant \eta < b$. Para las integrales del tipo (33.8) en el caso cuando en la parte derecha se tiene más de un sumando, la fórmula análoga no siempre es cierta. Dicho figuradamente, si en cierto punto interior del intervalo dado la función se convierte en infinito, entonces sobre todo este intervalo no se puede, en general, aplicar la fórmula de Newton — Leibniz. Por ejemplo, si a la integral $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ le aplicamos formalmente la fórmula de Newton — Leibniz, entonces ella será igual al número $-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$. No obstante, como ya sabemos, la integral en cuestión no existe. De esta forma, en este ejemplo la aplicación de la fórmula de Newton — Leibniz sobre todo el intervalo de integración es imposible de hecho.

La fórmula análoga (33.11) es válida, claro, para las integrales impropias del tipo (33.6). Si además la integral impropia se define por la igualdad (33.8), entonces la fórmula de Newton — Leibniz se debe aplicar (si es posible) para cada sumando de la parte derecha por separado.

2°. **(Linealidad de la integral impropia).** *Si las integrales impropias $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ convergen, entonces para números cualesquiera λ, μ converge también la integral impropia $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx$, además*

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

En realidad,

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx =$$
$$= \lim_{\eta \to b} [\lambda \int_a^\eta f(x)\,dx + \mu \int_a^\eta g(x)\,dx] =$$
$$= \lambda \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx + \mu \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta g(x)\,dx =$$
$$= \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx, \quad a \leqslant \eta < b.$$

De forma semejante se demuestran las siguientes propiedades de las integrales impropias, análogas a las propiedades correspondientes de la integral de Riemann.

3°. **(Integración de desigualdades).** *Si las integrales $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ convergen, y para todos los $x \in [a, b)$ se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant g(x)$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

4°. **(Regla de integración por partes).** *Si las funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son continuamente diferenciables sobre el intervalo $[a, b)$, entonces*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{33.12}$$

además, si dos expresiones cualesquiera de las tres $\int_a^b u\,dv$, $uv\Big|_a^b$ y $\int_a^b v\,du$ tienen sentido (es decir, los límites correspondientes son finitos), *entonces tiene sentido también la tercera.*

5°. **(Cambio de variable en una integral impropia).** *Sean la función f continua sobre $[a, b)$, la función $\varphi(t)$ continuamente diferenciable sobre el intervalo semiabierto $[\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$, además $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < b = \lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t)$ cuando $\alpha \leqslant t < \beta$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)]\,dt. \tag{33.13}$$

En este caso las integrales en ambas partes de esta fórmula simultáneamente convergen o no.

Puede suceder que con ayuda de un cambio de variable la integral impropia se convierte en ordinario. Por ejemplo, realizando en la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ el cambio de variable $x = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$, obtenemos la integral propia

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Señalemos que cualquier integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ respecto al intervalo finito $[a, b)$ puede ser reducida mediante un cambio de variable a una integral impropia respecto a un intervalo no acotado. En efecto, al realizar, por ejemplo, el cambio de variable.

$$x = \frac{bt + a}{t+1}, \quad dx = \frac{b-a}{(t+1)^2}\,dt,$$

obtendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^{+\infty} f\left(\frac{bt+a}{t+1}\right)\frac{dt}{(t+1)^3}.$$

Por analogía con la integral de Riemann la integral impropia convergente $\int_a^b f(x)\,dx$, $a < b$, según la definición, deberá ser

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Se debe prestar atención a que no todas las propiedades de la integral definida de Riemann se trasladan a las integrales impropias. Así, por ejemplo, el producto de dos funciones integrables por Riemann sobre cierto intervalo, es una función también integrable por Riemann sobre él. El análogo de esta afirmación para las integrales impropias no es siempre válido. Existen funciones f y g, cuyas integrales sobre cierto intervalo convergen, y la integral de su producto sobre este mismo intervalo diverge. En efecto, supongamos, por ejemplo, $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Como ya sabemos (p. 33.1) la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge y la integral

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} \text{ diverge.}$$

La observación hecha nos recuerda una vez más que utilizando los análogos de las propiedades de la integral de Riemann al tratar integrales impropias, no se debe olvidar la necesidad de revisar la validez para la integral impropia de cualquier afirmación análoga a la afirmación correspondiente para la integral propia.

Ejemplos. Calculemos las siguientes integrales impropias utilizando las propiedades enunciadas anteriormente:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Por medio del cambio de variable $x = \frac{1}{t}$, obtendremos

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsen}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2};$$

2. $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n\,dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Integrando por partes (cuando $n > 0$), tenemos

$$I_n = x(\ln x)^n\Big|_0^1 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\,dx = -nI_{n-1},$$

ya que $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^n = 0$. Esta igualdad se obtiene fácilmente, si aplicamos n veces la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} x(\ln x)^n = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^n}{1/x} = -n\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^{n-1}}{1/x} = \ldots = (-1)^{n+1}n!\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Observando que $I_0 = \int_0^1 dx = 1$, obtendremos $I_n = (-1)^n n!$ *);

---

*) Recordemos que por definición $0! = 1$.

3. $J_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. De nuevo integrando por partes la integral dada cuando $n > 0$, obtendremos

$$J_n = -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = n\,I_{n-1}$$

y por cuanto

$$J_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

entonces

$$J_n = n!$$

4. Siguen siendo válidas para las integrales impropias las desigualdades de Minkovski y Hölder (véase el p. 28.4*):

$$\left(\int\limits_0^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_a^b |(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q},$$

$$1 < p < +\infty,\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para la demostración es suficiente escribir las desigualdades correspondientes para las integrales sobre el segmento $[a, \eta]$ y pasar al límite cuando $\eta \to b$.

En el siguiente punto nos ocuparemos de un problema específico de la teoría de las integrales impropias: determinación de los criterios de su convergencia.

Ejercicios. Calcúlense las integrales impropias:

4. $\displaystyle\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$, $a > 0$.

5. $\displaystyle\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^3 + a^3}$, $a > 0$.

6. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\,dx$.

7. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + ax + a^2}$, $a > 0$.

8. $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $0 \leqslant a < b$.

9. Hallése $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^b (t^p + a^p)^q\,dt}{x^{pq+1}}$, $a, p, q > 0$.

Indicación: utilícese la regla de L'Hospital.

33.3. INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIONES NO NEGATIVAS

El estudio de los criterios de convergencia de las integrales impropias lo comenzaremos con el caso cuando la función subintegral es no negativa. Además vamos a atenernos al acuerdo enunciado al inicio del punto anterior.

Lema 1. *Si la función f es no negativa sobre el intervalo semiabierto $[a, b)$, entonces para la convergencia de la integral impropia $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ es necesario y suficiente que todas las integrales*

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx,\quad a \leqslant \eta < b$$

sean acotadas en conjunto, es decir, que exista una constante $M > 0$ tal que para todos los $\eta \in [a, b)$ se cumple la desigualdad

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx \leqslant M. \tag{33.14}$$

Cuando se cumple esta condición

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sup_{a\leqslant\eta<b} \int\limits_a^\eta f(x)\,dx. \tag{33.15}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la función

$$\varphi(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)\,dx,\ a \leqslant \eta < b. \tag{33.16}$$

Por cuanto $f \geqslant 0$ la función φ crece: en realidad si $a \leqslant \eta < \eta' < b$, entonces (véase la propiedad 8° de la integral en el p. 28.1)

$$\int\limits_\eta^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant 0,$$

por esto

$$\varphi(\eta') = \int\limits_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \int\limits_\eta^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^\eta f(x)\,dx = \varphi(\eta).$$

Observemos ahora que la integral impropia $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ converge si y sólo si existe el límite $\lim\limits_{\eta\to b}\int\limits_a^\eta f(x)\,dx = \lim\limits_{\eta\to b}\varphi(\eta)$, y el último límite existe cuando y sólo cuando (véase el teorema 5 en el p. 4.10) la función φ está acotada superiormente, es decir, cuando se cumple la condición (33.14). Además,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b}\varphi(\eta) = \sup_{a\leqslant\eta<b}\varphi(\eta) = \sup_{a\leqslant\eta<b}\int\limits_a^\eta f(x)\,dx. \ \square$$

Del lema demostrado se deduce que para que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función no negativa diverja, es necesario y suficiente que la función $\varphi(\eta)$ (véase (33.16)) sea no acotada superiormente, pero entonces en virtud de su crecimiento

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)\,dx = \lim_{\eta \to b} \varphi(\eta) = +\infty.$$

Por esto, si la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función no negativa diverge, entonces se escribe $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$. Con este acuerdo permanece válida la igualdad (33.15).

Teorema 1 (criterio de comparación). *Sean las funciones f y g no negativas sobre el intervalo semiabierto* $[a, b)$ *y*

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to b^{*)}. \tag{33.17}$$

Entonces

1) *si la integral* $\int_a^b g(x)\,dx$ *converge, entonces converge también la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$;

2) *si la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge, entonces diverge también la integral* $\int_a^b g(x)\,dx$.

Corolario. *Sean las funciones f, g no negativas sobre el intervalo semiabierto* $[a, b)$, $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b)$ *y existe*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k, a \leqslant x < b. \tag{33.18}$$

Entonces

1) si la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ *converge y* $0 \leqslant k < +\infty$ *entonces la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *también converge*;

2) *si la integral* $\int_a^b g(x)\,dx$ *diverge y* $0 < k \leqslant +\infty$ *entonces la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *también diverge.*

En particular, si f y g son funciones equivalentes cuando $x \to b$: $f \sim g$, $x \to b$ (véase el p. 8.2), *entonces las integrales* $\int_a^b f(x)\,dx$ *y* $\int_a^b g(x)\,dx$ *convergen o divergen simultáneamente.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Supongamos que la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ converge. De la condición (33.17) se deduce la existencia de un η_0, $a \leqslant \eta_0 < b$, y $c > 0$ tales

*) En particular $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a, b)$.

que para todos los $x \in [\eta_0, b)$ se cumple la desigualdad

$$f(x) \leqslant cg(x) \tag{33.19}$$

(véase el p. 8.2). De la convergencia de la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ se deduce la convergencia de la integral $\int_{\eta_0}^b g(x)\,dx$. En virtud de la necesidad de las condiciones del lema para la convergencia de la integral, existe un número $M > 0$ tal que para cualquier $\eta \in [\eta_0, b)$ es válida la desigualdad

$$\int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx \leqslant M.$$

De aquí y de la desigualdad (33.19) tenemos

$$\int_{\eta_0}^{\eta} f(x)\,dx \leqslant c \int_{\eta_0}^{\eta} g(x)\,dx \leqslant cM.$$

De esta desigualdad, en virtud de la suficiencia de las condiciones del lema para la convergencia de la integral de una función no negativa obtenemos que la integral $\int_{\eta_0}^b f(x)\,dx$ y por consiguiente también la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ convergen.

La primera afirmación del teorema está demostrada. La segunda lógicamente es equivalente a la primera. En particular, si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x)\,dx$ no puede converger, ya que si ella fuera convergente, entonces por la primera afirmación del teorema ya demostrada convergería también la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. De esta forma la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Del cumplimiento de la condición (33.18) para k, que satisface la condición $0 \leqslant k < +\infty$, se deduce que existe un $\eta \in [a, b)$ tal que si $\eta < x < b$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k + 1, \quad \text{es decir,} \quad f(x) < (k+1)g(x)$$

y esto significa que

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to b.$$

Por esto la afirmación 1) del corolario se deriva directamente de la afirmación 1) del teorema 1.

Supongamos ahora que la condición (33.18) se cumple para cierto k, que satisface la condición $0 < k \leqslant +\infty$. Entonces para cualquier $k' \in (0, k)$ existe tal $\eta \in$

$\in [a, b)$ que si $\eta < x < b$ entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k' \quad \text{o} \quad g(x) < \frac{1}{k'} f(x).$$

Esto significa que $g(x) = O(f(x))$, $x \to b$. Por esto la afirmación 2) del corolario se deriva directamente de la afirmación 2) del teorema 1. □

La función $g(x)$ en la afirmación 1 del teorema 1 y en su corolario, con cuya ayuda se demuestra la convergencia de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, se llama *función de comparación*. Si en particular $f(x) \leqslant g(x)$ para todos los $x \in [a, b)$, entonces se dice también que $f(x)$ se mayorea por la función $g(x)$ o que $g(x)$ sirve de *mayorante* para $f(x)$.

La efectividad de la utilización del criterio de comparación para resolver el problema sobre la convergencia de la integral depende, claro, de la reserva de funciones de comparación, sobre las cuales es sabido si converge o diverge la integral impropia de ellas tomada en el intervalo analizado, y las cuales de esta manera se puede tratar de utilizarlas para analizar la convergencia de la integral dada. Señalemos que la afirmación análoga al teorema 1, es válida, claro, también para las integrales impropias del tipo (33.6).

En calidad de funciones de comparación $g(x)$ a menudo es suficiente tomar funciones potenciales. Exactamente en el caso de intervalos finitos $[a, b)$ y $(a, b]$ se toman respectivamente las funciones $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ y $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$, cuyas integrales $\int_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $\int_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^\alpha}$ convergen cuando $\alpha < 1$ y divergen cuando $\alpha \geqslant 1$ (de esto es fácil convencerse reduciendo las integrales señaladas con un cambio de variable lineal a las integrales $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^\alpha}$, analizadas en el p. 33.1). En el caso de intervalos infinitos $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$ como funciones de comparación se toman respectivamente $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ y $g(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha}$ cuyas integrales $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ y $\int_{-\infty}^{-1} \dfrac{dx}{|x|^\alpha}$ convergen cuando $\alpha > 1$ y divergen cuando $\alpha \leqslant 1$ (véanse los ejemplos en el p. 33.1).

Señalemos además que de manera evidente todos los criterios enunciados de convergencia y divergencia de las integrales quedan vigentes (con evidentes variaciones), si en ellas la condición de que la función f es no negativa se cambia por la condición de su no positividad (esto se deduce de que la integral $\int_a^b (-f(x))\,dx$ converge si y sólo si converge la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ejemplos. 1. La integral

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx \tag{33.20}$$

converge. En efecto, denotando por f la función subintegral $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ y tomando en calidad de función de comparación

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, \quad \text{aquí} \quad \alpha = \frac{1}{3},$$

tenemos

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-0} \sqrt[3]{1-x}\,\frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

por eso, según el corolario del teorema 1, la integral (33.20) converge.

2. La integral $\int_0^1 \dfrac{1}{1-x^2}\,dx$ diverge. Para convencerse de esto es suficiente tomar en calidad de función de comparación $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$, aquí $\alpha = 1$.

En los ejemplos analizados se podría elegir inmediatamente el exponente α en la función de comparación partiendo del tipo concreto de la función subintegral dada. En ocasiones cuando esta elección de inmediato no está clara, se hace necesario previamente realizar algunos análisis complementarios, por ejemplo, tratar de separar su parte principal recurriendo a la fórmula de Taylor. Analicemos ejemplos semejantes.

3. La integral

$$\int_0^1 \ln x\,dx \tag{33.21}$$

converge. En realidad, por la regla de L'Hospital para cualquier $\alpha > 0$, en particular cuando $0 < \alpha < 1$, tenemos

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to+0} x^\alpha = 0,$$

por esto, de acuerdo con el corolario del teorema 1 (más exacto, con su análogo para las funciones no positivas) la integral (33.21) converge.

Geométricamente la convergencia y la divergencia de las integrales (33.9), (33.10) y (33.21) significa lo finito o infinito de las áreas de los respectivos "trapecios curvilíneos infinitos" cuya disposición comparativa está representada en la fig. 145.

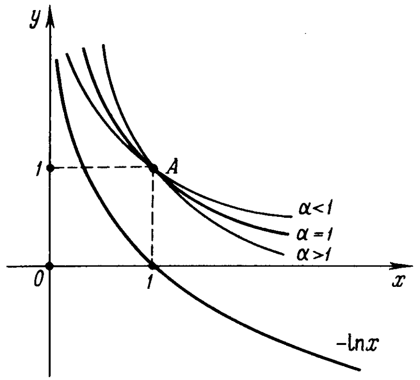


FIG. 145

4. Para aclarar la cuestión sobre la convergencia de la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} \tag{33.22}$$

observemos que $\ln x = \ln [1 + (x - 1)] \sim x - 1$ cuando $x \to 1$ y tomemos como función de comparación $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $(\alpha = 1)$. Entonces $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{\ln x} = -1$ y por consiguiente la integral (33.22) diverge.

5. La integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}\, dx \tag{33.23}$$

converge. En efecto, tenemos $\alpha = \dfrac{3}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Entonces aplicando de nuevo la regla de L'Hospital, obtendremos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon} \ln x}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+1}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}} = 0.$$

Escojamos $\varepsilon > 0$ tal que $\dfrac{3}{2} - \varepsilon > 1$; en este caso la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}$ convergence, y por ello, según el corolario del teorema 1, converge también la integral (33.23).

6. Analicemos la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln \cos \frac{1}{x}}{x^p}\, dx. \tag{33.24}$$

Aquí la función subintegral es siempre negativa. Evidentemente la integral (33.24) converge o diverge simultáneamente con la integral

$$\int_1^{+\infty} \left(- \frac{\ln \cos \frac{1}{x}}{x^p} \right) dx \tag{33.25}$$

en la cual la función subintegral es siempre positiva. Desarrollando la función $\ln \cos \dfrac{1}{x}$ según la fórmula de Taylor, obtendremos

$$-\ln \cos \frac{1}{x} = -\frac{\ln \left[1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]}{x^p} =$$

$$= -\frac{-\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p} = \frac{1}{2x^{2+p}} + o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right), \quad x \to +\infty.$$

De esta manera, $-\dfrac{\ln \cos \frac{1}{x}}{x^p} \sim \dfrac{1}{2x^{2+p}}$ cuando $x \to +\infty$ y por consiguiente, la integral (33.24) converge cuando $2 + p > 1$, es decir, cuando $p > -1$ y diverge cuando $p \leqslant -1$.

En los ejemplos 2 y 3 sería posible establecer la convergencia de las integrales allí analizadas, calculándolas por la fórmula de Newton — Leibniz. No obstante la aclaración de la convergencia de las integrales con ayuda del criterio de comparación habitualmente exige menos operaciones que mediante su cálculo preliminar por la fórmula de Newton — Leibniz. Es importante señalar que utilizando el criterio de comparación, se puede aclarar la convergencia de las integrales, naturalmente, también en el caso cuando la primitiva de la función subintegral no es elemental y por consiguiente, mediante el método común, con ayuda de la fórmula de Newton — Leibniz, la integral a ciencias ciertas no se calcula, como ocurrió en los ejemplos 4 y 5.

Subrayemos una vez más que el criterio de comparación para aclarar la cuestión sobre la convergencia de la integral impropia se puede aplicar sólo para las funciones que no cambian de signo. Surge la pregunta: ¿comó se aclara si converge o diverge la integral impropia en el caso cuando la función subintegral cambia el signo? En los siguientos puntos nos ocuparemos del estudio de esta cuestión.

33.4. CRITERIO DE CAUCHY DE LA CONVERGENCIA DE INTEGRALES IMPROPIAS

En este punto ya no vamos a suponer que los valores de las funciones analizadas conservan un mismo signo en el intervalo semiabierto $[a, b)$ — ellas pueden tomar valores de cualquier signo —, pero como antes supondremos que todas las funciones analizadas para cualquier elección de un número $\eta \in [a, b)$ son integrables según Riemann sobre el segmento $[a, \eta)$.

Teorema 2. *Para la convergencia de la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista un número* $\eta = \eta(\varepsilon)$, $a \leqslant \eta < b$, *tal que si* $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, *entonces*

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{33.26}$$

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\varphi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx$, $a \leqslant \eta < b \leqslant +\infty$. Entonces la convergencia de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir, la existencia del límite (33.1) significa la existencia del límite $\lim\limits_{\eta \to b} \varphi(\eta)$. En virtud del criterio de Cauchy para la existencia del límite finito de la función $\varphi(\eta)$ cuando $\eta \to b$ es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un entorno reducido por la izquierda $\mathring{U}(b, \eta) = \{x : \eta < x < b\}$ del punto b, es decir, que exista un número η, $a \leqslant \eta < b$, tal que para todos los $\eta' \in \mathring{U}(b, \eta)$ y $\eta'' \in \mathring{U}(b; \eta)$ (que es equivalente a la condición: $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$) se cumpla la desigualdad

$$|\varphi(\eta'') - \varphi(\eta')| < \varepsilon \tag{33.27}$$

Por cuanto

$$\varphi(\eta'') - \varphi(\eta') = \int_a^{\eta''} f(x)\,dx - \int_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx,$$

entonces la desigualdad (33.27) es equivalente a la condición (33.26) (fig. 146). □

El teorema 2 se llama *criterio de Cauchy de convergencia de la integral.*

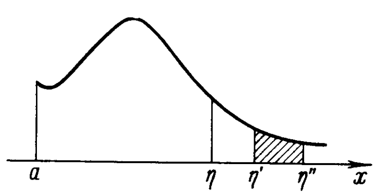


FIG. 146

33.5. INTEGRALES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Un concepto importante para las integrales impropias de las funciones que varían el signo es el concepto de la integral absolutamente convergente.

Definición 2. *La integral impropia* $\int_a^b f(x)\,dx$ *se denomina absolutamente convergente si converge la integral* $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Las funciones para las cuales la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolutamente se llaman absolutamente integrables (en sentido impropio) sobre el intervalo con extremos a y b. En el caso cuando a y b son finitos se dice también que la función f es absolutamente integrable sobre el segmento $[a, b]$.

Del teorema 2 se deduce directamente el criterio de convergencia absoluta de la integral.

Teorema 3. *Para que la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converja absolutamente es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista un* $\eta = \eta(\varepsilon)$ *tal que si* $\eta < \eta' < b$ *y* $\eta < \eta'' < b$, *entonces*

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon.$$

Este teorema se llama *criterio de Cauchy de convergencia absoluta de la integral.*

Recordemos que como siempre aquí se supone que la función f es integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$ donde $a \leqslant \eta < b$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

El criterio de convergencia de las integrales de funciones no negativas evidentemente lo aplicaremos también para la aclaración de la convergencia absoluta de las integrales. Supongamos, por ejemplo, que se exige aclarar: converge o no la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \tag{33.28}$$

Por cuanto $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ y la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge entonces por el criterio de comparación converge también la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$, es decir, la integral (33.28) converge absolutamente.

Una relación importante entre la convergencia y la convergencia absoluta de las integrales se establece con el siguiente teorema.

Teorema 4. *Si la integral converge absolutamente, entonces simplemente converge.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado $\varepsilon > 0$. Si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolutamente, entonces por el criterio de Cauchy de la convergencia absoluta de la integral (véase el teorema 3) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\eta = \eta(\varepsilon)$ tal que si $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, entonces

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon. \qquad (33.29)$$

Por cuanto $\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\, dx \right| \leqslant \left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\, dx \right|$, entonces en virtud de la desigualdad (33.29) para cualesquiera η' y η'' indicados tenemos

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

por eso según el criterio de Cauchy sobre la convergencia de las integrales (véase el teorema 2) la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ converge. □

Ejercicio 10. Si la integral impropia de una función definida sobre un segmento converge absolutamente, entonces ella sencillamente converge. La integral de Riemann es un caso particular de integral impropia. Por consiguiente, si existe la integral de Riemann de la magnitud absoluta de la función, entonces existe también la integral de Riemann de la propia función. Esto no es válido (cítese el ejemplo correspondiente). ¿Dónde está el error en el razonamiento realizado?

Es esencial observar que una integral puede converger, pero no converger absolutamente. En calidad de ejemplo analicemos la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx. \qquad (33.30)$$

Ante todo, señalemos que por cuanto $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ entonces la función subintegral definida complementariamente con la unidad cuando $x = 0$, será continua sobre la semirrecta $x \geqslant 0$ y por lo tanto integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[0, \eta]$, en particular, sobre el segmento $[0, 1]$. Por esto la cuestión sobre la convergencia, respectivamente sobre la convergencia absoluta, de la integral (33.30) es equivalente a la cuestión sobre la convergencia, respectivamente sobre la convergencia absoluta, de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx. \qquad (33.31)$$

Para analizar su convergencia realicemos la integración por partes:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, d(\cos x) =$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \cos x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

En la parte derecha se obtuvo la integral (33.28) la cual como es conocido converge absoluta y, por lo tanto, simplemente.

De esta manera ambas expresiones obtenidas en la parte derecha tienen sentido y, por lo tanto, son finitas. Por esto, en primer lugar la integración por partes hecha es válida y en segundo lugar la parte izquierda es también finita, es decir, la integral (33.31) converge.

Señalemos que como resultado de la integración por partes, hemos sustituido la integral (33.31) por la suma de una expresión finita y otra integral impropia la cual en el denominador de la expresión subintegral tiene el exponente de la variable de integración más alto que en (33.31) y en el numerador, una función acotada, como en (33.31). En la integral obtenida la función subintegral tiende a cero más rápido que en la integral inicial, en el sentido de que

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{cuando} \quad x \to \infty.$$

Por esto su convergencia resultó más fácil de investigar directamente que la convergencia de la integral inicial: ella resulta incluso no simplemente convergente, sino absolutamente convergente.

El método que permite reducir el análisis de la convergencia de la integral dada al análisis de la convergenica de otra integral que en un determinado sentido "converge mejor" que la integral dada se llama *método de mejoramiento de la convergencia.*

Mostremos ahora que la integral (33.31) no converge absolutamente, es decir, que la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \qquad (33.32)$$

diverge. En realidad, de la desigualdad

$$|\operatorname{sen} x| \geqslant \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

para cualquier $\eta > 1$ tenemos:

$$\int_1^{\eta} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geqslant \frac{1}{2} \int_1^{\eta} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^{\eta} \frac{\cos 2x}{x}\, dx. \qquad (33.33)$$

La integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge y es igual a $+\infty$. La integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx$ converge. Para convencernos de esto integrémosla por partes:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,d(\operatorname{sen} 2x) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} 2x\, d\frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen} 2}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\,dx.$$

En virtud de esta fórmula la convergencia de la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ directamente se deduce de la convergencia absoluta de la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\,dx$, la cual a su vez se deriva de la desigualdad evidente

$$\left|\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Pasando ahora al límite cuando $\eta \to +\infty$, en la desigualdad (33.33) obtenemos que el segundo miembro y, por consiguiente, el primer miembro de esta desigualdad tienden a $+\infty$ y por esto la integral (33.32) diverge.

De esta forma la integral (33.31), así como la integral (33.30) no convergen absolutamente.

Demostremos otra afirmación auxiliar útil para el futuro.

Lema 2. *Si la función f es absolutamente integrable y la función g es integrable según Riemann sobre el segmento $[a, b]$ entonces su producto gf es también absolutamente integrable sobre $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Como acordamos anteriormente se analizan sólo las funciones f tales que para cualquier $\eta \in [a, b)$ son integrables según Riemann sobre el segmento $[a, \eta]$. Por cuanto según la condición la función g es integrable según Riemann sobre el segmento $[a, b]$, entonces es integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$, $\eta \in [a, b)$ (véase la propiedad 2 en el p. 28.1). Por esto el producto gf es también integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, \eta]$ indicado (véase la propiedad 6 en p. 28.1). Esto significa que tiene sentido el estudio de la integral impropia $\int_a^b g(x)f(x)\,dx$.

En virtud de la integrabilidad según Riemann de la función g sobre el segmento $[a, b]$, ésta es acotada sobre él, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|g(x)| \leqslant M$. Por consiguiente, para todos los $x \in [a, b)$ es válida también la desigualdad $|g(x)f(x)| \leqslant M|f(x)|$. Observando que en virtud de la integrabilidad absoluta de la función f sobre el segmento $[a, b]$ la integral $\int_a^b M|f(x)|\,dx = M\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, obtendremos según el criterio de comparación que converge también la integral $\int_a^b |g(x)f(x)|\,dx$, es decir, que el producto gf es absolutamente integrable sobre el segmento $[a, b]$. □

Todo lo dicho en este punto de forma natural se transfiere a las integrales impropias de otros tipos analizadas en el p. 33.1, es decir, a las integrales del tipo (33.6) y también a las integrales del tipo general (33.8).

33.6. ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA DE LAS INTEGRALES

Demostremos un criterio suficiente de convergencia de las integrales, denominado comúnmente *criterio de Dirichlet.*

Teorema 5 (criterio de Dirichlet). *Supongamos que*

1) *la función f es continua y tiene primitiva acotada F cuando $x \geqslant a$;*
2) *la función g es continuamente diferenciable y decrece cuando $x \geqslant a$;*
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

entonces la integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \tag{33.34}$$

converge.

DEMOSTRACIÓN. Ante todo observemos que según las suposiciones hechas la función fg es continua y, por lo tanto, integrable según Riemann sobre cualquier segmento $[a, b]$, $a < b < +\infty$, y por esto tiene sentido hablar de la integral impropia (33.34).

Integrando por partes el producto $f(x)g(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ obtendremos:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)dF(x) = g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx. \tag{33.35}$$

Investiguemos el comportamiento de ambos sumandos de la parte derecha cuando $b \to +\infty$. Por la acotación de la función F (véase la condición 1 del teorema)

$$M = \sup |F(x)| < +\infty, \quad \text{por esto} \quad |g(b)F(b)| \leqslant Mg(b).$$

En virtud de la condición 3 del teorema $\lim\limits_{b\to+\infty} g(b)F(b) = 0$.

Más adelante, del hecho de que la función g decrece monótonamente se deduce que $g'(x) \leqslant 0$ cuando $x \geqslant a$ y por esto

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx \leqslant M\int_a^b |g'(x)|\,dx = -M\int_a^b g'(x)\,dx =$$
$$= M[g(a) - g(b)] \leqslant Mg(a),$$

ya que de las condiciones 2 y 3 del teorema se deduce que $g(x) \geqslant 0$, en particular, que $g(b) \geqslant 0$.

De esta forma, las integrales $\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$ están acotadas en conjunto para todos los $b > a$ y por esto la integral

$$\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$$

converge absoluta y también simplemente, es decir, existe el límite finito

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Demostremos que en la parte derecha de la igualdad (33.35) ambos sumandos cuando $b \to +\infty$ tienen límite finito, por ello el límite de la parte izquierda cuando $b \to +\infty$, es finito lo que significa la convérgencia de la integral (33.34). □

OBSERVACIÓN. La obtención de las estimaciones necesarias en la demostración realizada recuerda los razonamientos en la demostración del segundo teorema integral sobre la media (véase el p. 30.3*). Esto no es casual, si utilizamos el teorema señalado para la estimación de la integral $\int_b^\eta f(x)g(x)\,dx$, $a < b < \eta < +\infty$, entonces el criterio de Dirichlet se puede demostrar más breve. No hemos hecho esto para mostrar una vez más como con ayuda de la integración por partes se puede mejorar la convergencia de la integral.

Ejemplos. 1. Apliquemos el criterio de Dirichlet al análisis de la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx,\quad \alpha > 0. \tag{33.36}$$

La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tiene primitiva acotada $F(x) = -\cos x$, la función continuamente diferenciable $g(x) = 1/x^\alpha$ cuando $\alpha > 0$ decrece monótonamente y tiende a cero cuando $x \to +\infty$. Todas las condiciones del teorema 5 se cumplen, por esto la integral (33.36) converge.

2. Es necesario, no obstante, tener en cuenta que el criterio de Dirichlet da sólo condiciones suficientes y no necesarias de convergencia de la integral, por esto no siempre con su ayuda se puede resolver el problema sobre la convergencia de la integral. Por ejemplo, analicemos la convergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x^\alpha - \operatorname{sen} x},\quad \alpha > 0. \tag{33.37}$$

Tratemos de aplicar el criterio de Dirichlet, haciendo $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha - \operatorname{sen} x}$. Es evidente que $g(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Hallemos la derivada:

$$g'(x) = \frac{-\alpha x^{\alpha-1} + \cos x}{(x^\alpha - \operatorname{sen} x)^2}.$$

De aquí se ve que cuando $\alpha < 1$ esta derivada si $x \to +\infty$, cambia su signo infinitas veces y por consiguiente la propia función $g(x)$ no es una función monótonamente decreciente.

De esta forma cuando $\alpha < 1$ el criterio de Dirichlet no es aplicable, por el método señalado, a la aclaración de la cuestión sobre la convergencia de la integral (33.37). En este caso es natural probar a recurrir de nuevo al método de selección de la parte principal.

Aplicando el desarrollo de la función $(1 - t)^{-1}$, $-1 < t < 1$, según la fórmula de Taylor (véase el p. 13.3) obtendremos, cuando $x \to +\infty$,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha - \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,\frac{1}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}} = \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\left[1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} + \frac{1}{2x^{2\alpha}} - \frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right). \tag{33.38}$$

Las integrales

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx \text{ y } \int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}}\,dx \tag{33.39}$$

convergen por el criterio de Dirichlet para todos los $\alpha > 0$. La integral

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right]dx \tag{33.40}$$

también converge cuando $2\alpha > 1$, es decir, cuando $\alpha > \frac{1}{2}$, y diverge cuando $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. En realidad, de la fórmula (33.38) se deduce que la función $o(1/x^{2\alpha})$ en la fórmula indicada es continua respecto a x cuando $x \geqslant 1$, $\alpha > 0$ y, por consiguiente, tiene sentido hablar de la integral (33.40). Las funciones $\dfrac{1}{2x^{2\alpha}}$ y $\dfrac{1}{2x^{2\alpha}} + o(1/x^{2\alpha})$ son no negativas en cierto entorno de $+\infty$ y equivalentes cuando $x \to +\infty$, por esto la integral (33.40) converge y diverge para los mismos valores del parámetro α, que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2\alpha}}$ (véase el corolario del teorema 1 en el p. 33.3).

De esta forma cuando $\alpha > \frac{1}{2}$ todas las integrales (33.39) y (33.40) convergen y por eso, en virtud de (33.38) converge también la integral (33.37). Cuando $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ las integrales (33.39) convergen y la integral (33.40) diverge, por consiguiente, diverge también la integral (33.37).

Observemos que cuando $\alpha \leqslant 0$ la integral (33.37) diverge. Efectivamente, en este caso el denominador de la función subintegral se anula infinitas veces, y además si $x_0^\alpha - \operatorname{sen} x_0 = 0$, entonces la función $x^\alpha - \operatorname{sen} x$ en un entorno del punto x_0 según la fórmula de Taylor es de la forma (¿por qué?) $x^\alpha - \operatorname{sen} x = (x - x_0)^k \varphi(x)$ donde k es cierto número natural y $\varphi(x_0) \neq 0$. Por cuanto $\operatorname{sen} x_0 \neq 0$, entonces en cada punto x_0 semejante tenemos una particularidad no integrable.

Se debe prestar atención a que para cada $\alpha > 0$ dado las funciones

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha - \operatorname{sen} x} \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}$$

son equivalentes cuando $x \to +\infty$, es decir,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} = \varepsilon(x) \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha - \operatorname{sen} x},$$

donde $\varepsilon(x) = 1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} \to 1$ cuando $x \to +\infty$; no obstante si $0 < \alpha \leqslant 1/2$, entonces la integral (33.37) de la primera de ellas diverge y la integral (33.36) de la segunda de ellas converge.

De esta forma, el cambio de la función subintegral por una equivalente puede cambiar la convergencia de la integral (si, naturalmente, la integral no converge absolutamente).

3. Analicemos la convergencia y la convergencia absoluta de la integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) dx. \tag{33.41}$$

Por cuanto $\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right| \sim \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}$ cuando $x \to +\infty$ y la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} dx$ diverge (véase (33.32)), entonces diverge también la integral

$$\int_1^{+\infty} \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right| dx,$$

es decir, la integral (33.41) no converge absolutamente.

Es fácil comprobar que cuando $y \to 0$

$$\operatorname{tg} y = y + O(y^3), \tag{33.42}$$

además en calidad de entorno que participa en la definición del símbolo O (véase la definición 1 en el p. 8.2), aquí se puede tomar el intervalo $(-1, 1)$: existe una constante $c > 0$ tal que

$$|O(y^3)| \leqslant c|y|^3, \quad |y| < 1.$$

En lo adelante en virtud de la fórmula (33.42) cuando $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ la integral (33.41) se puede representar en la forma

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right) dx. \tag{33.43}$$

Por cuanto la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ converge (por ejemplo, según el criterio de Dirichlet) y la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ converge absolutamente, entonces la integral (33.41) es convergente.

Ejercicios. Analícense la convergencia y la convergencia absoluta de los siguientes integrales:

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$.

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$.

15. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx$.

16. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^{10}} dx$.

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$.

18. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

19. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

20. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx$.

22. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{1 + x}} dx$.

23. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x\, dx, \; -\infty < \alpha < +\infty$.

24. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + (\ln x)^p}, \; -\infty < p < +\infty$.

25. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{x} dx$.

26. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x + \cos x)^\alpha}\, dx.$ 27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}\, dx.$

§ 34*. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LAS INTEGRALES CON LÍMITES DE INTEGRACIÓN VARIABLES

A menudo resolviendo problemas resulta necesario no sólo determinar la convergencia o la divergencia de la integral analizada, sino también poder estimar en un sentido determinado el grado de velocidad de su convergencia o el carácter de la divergencia. No vamos aquí a demostrar ningunos teoremas generales relacionados con esta cuestión (sobre algunos métodos generales de estudio del comportamiento asintótico de las funciones véase en el p. 37.10*) sino que sólo la ilustraremos en ejemplos aislados de búsqueda del grado de las integrales con límite superior variable, cuando ellas tienden a cero o al infinito. Específicamente, si, por ejemplo, la integral $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, entonces se analizará el orden de la tendencia a cero cuando $x \to +\infty$ de la integral $\int_x^{+\infty} f(t)dt$. Precisamente, este orden se llama velocidad de convergencia de la integral impropia convergente dada $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Si además la integral $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge y es igual a $+\infty$ ó $-\infty$, entonces se estudiará el orden de tendencia al infinito de la integral $\int_a^{x} f(t)dt$ cuando $x \to +\infty$. Este orden se llama velocidad o grado de divergencia de la integral impropia divergente analizada.

Ejemplos. 1. Analicemos la integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} \tag{34.1}$$

para distintos valores reales de los parámetros α y β. Analizaremos inicialmente el caso de $\alpha > 0$ y de cualquier $\beta \in \boldsymbol{R}$. Para tales valores de los parámetros la integral (34.1) converge, lo que es fácil establecer por el criterio de comparación, si en calidad de función de comparación tomamos por ejemplo la función $g(t) = t^{-\frac{\alpha}{2}-1}$, cuya integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{\alpha}{2}+1}}$ converge.

Por la convergencia de la integral (34.1) para los valores indicados de los parámetros α y β en la igualdad $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} = \int_2^{x} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}$ el segundo sumando de su segundo miembro tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

Estidiemos el grado de su decrecimiento, o sea, mostremos la validez de la igualdad asintótica

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t} \sim \frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \to +\infty. \tag{34.2}$$

Para la demostración hagamos

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}, \quad \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}.$$

Por la convergencia de la integral (34.1) cuando $\alpha > 0$, $\beta \in \boldsymbol{R}$ tenemos $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Evidentemente, también $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0$. Por cuanto

$$F'(x) = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x}, \; \Phi'(x) = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}\ln^{\beta+1} x},$$

entonces aplicando la regla de L'Hospital, obtendremos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \ln x}\right) = 1,$$

es decir, la relación (34.2) está demostrada.

En el caso $\alpha = 0$, $\beta > 1$ por integración directa obtendremos incluso la expresión explícita de la integral que nos interesa:

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \int_x^{+\infty} \frac{d\ln t}{\ln^\beta t} = \left.\frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1} t}\right|_x^{+\infty} = \frac{1}{(\beta-1)\ln^{\beta-1} x}. \tag{34.3}$$

Mostremos ahora que para $\alpha < 0$ y cualquier $\beta \in \boldsymbol{R}$ la integral (34.1) diverge y más aún tiene lugar la igualdad asintótica

$$\int_2^{x} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^\beta t} \sim -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x}, \quad x \to +\infty. \tag{34.4}$$

Haciendo en este caso

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_2^{x} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^\beta t}, \quad \Phi(x) \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{\alpha x^\alpha \ln^\beta x},$$

y aplicando la regla de L'Hospital, obtendremos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi'(x)}{F'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha \ln x}\right) = 1,$$

es decir, la igualdad (34.4) está demostrada.

Para los valores restantes de los parámetros α y β la integral

$$\int_2^{x} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^\beta t} \tag{34.5}$$

se calcula en funciones elementales. Si $\alpha = 0$ y $\beta < 1$ entonces

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \int_2^x \frac{d\ln t}{\ln^\beta t} = \frac{1}{(1-\beta)\ln^{\beta-1}t}\Bigg|_2^x = \frac{\ln^{1-\beta}x - \ln^{1-\beta}2}{1-\beta},$$

y si $\alpha = 0$, $\beta = 1$ entonces

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln t} = \int_2^x \frac{d\ln t}{\ln t} = \ln\ln t\Big|_2^x = \ln\frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Así, la integral (34.1) converge para $\alpha > 0$ y cualquier $\beta \in \boldsymbol{R}$ y también cuando $\alpha = 0$ y $\beta > 1$; además se han establecido las igualdades asintóticas, respectivamente exactas (34.2) y (34.3), para la integral $\int\limits_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln^\beta t}$. Para los valores restantes de los parámetros α y β la integral (34.1) diverge y fue obtenida la característica asintótica o exacta de la integral (34.5).

2. Analicemos la integral

$$\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt, \tag{34.6}$$

donde para $t \geqslant T$ la función f es continua no negativa:

$$f(t) \geqslant 0 \tag{34.7}$$

tiene período T:

$$f(t+T) = f(t) \tag{34.8}$$

y la integral de ella respecto al período es positiva

$$\int_T^{2T} f(t)dt > 0. \tag{34.9}$$

Mostremos que la integral (34.6) diverge y que

$$\int_t^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \ln x, \quad x \to +\infty, \tag{34.10}$$

es decir, que la función en la parte izquierda de esta fórmula cuando $x \to +\infty$ tiene orden $\ln x$ (véase el p. 8.2).

Por cuanto la función f es continua, entonces es acotada sobre el segmento $[T, 2T]$ y, por consiguiente, en virtud de su periodicidad es acotada para todos los $t \geqslant T$, es decir, existe el número $M > 0$ tal que para todos los $t \geqslant T$ se cumple la desigualdad

$$f(t) \leqslant M. \tag{34.11}$$

Por esto tenemos

$$\int_T^x \frac{f(t)}{t}\,dt \underset{\substack{(34.7)\\(34.11)}}{\leqslant} M\int_T^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln T = O(\ln x), \quad x \geqslant T. \tag{34.12}$$

Denotemos ahora por I la integral de la función f por el período, es decir,

$$I = \int_T^{2T} f(t)dt. \tag{34.13}$$

Realizando en las integrales escritas a continuación el cambio de variable $t = u + (k-1)T$ sobre los segmentos $[kT, (k+1)T]$, $k = 2, 3, \ldots$, obtendremos

$$\int_T^{nT} \frac{f(t)}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{f(t)}{t}\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \int_T^{2T} \frac{f(u+(k-1)T)}{u+(k-1)T}\,du \underset{(34.8)}{=} \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n-1} \int_T^{2T} \frac{f(u)}{\frac{u}{T}+k-1}\,du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2+k-1}\int_T^{2T} f(u)du \underset{(34.13)}{\geqslant} \frac{I}{T}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}. \tag{34.14}$$

Observemos que para los números x que están en el segmento $[k+1, k+2]$ se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k+1},$$

integrándola se obtiene la desigualdad

$$\int_{k+1}^{k+2} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k+1}. \tag{34.15}$$

Por esto

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \underset{(34.15)}{\geqslant} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k+1}^{k+2} \frac{dx}{x} = \int_2^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln 2 \geqslant \ln(n+1).$$

Sustituyendo esta estimación en la desigualdad (34.14) obtendremos

$$\int_T^{nT} \frac{f(t)}{t}\,dt \geqslant \frac{I}{T}\ln(n+1). \tag{34.16}$$

Observemos que por cuanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)T} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{\ln T}{\ln(n+1)}} = 1,$$

entonces existe un n_0 natural tal que cuando $n > n_0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)T} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{34.17}$$

Más adelante para cada número x existe un entero n tal que

$$nT \leqslant x \leqslant (n+1)T. \tag{34.18}$$

Ahora para cualquier x, para el cual en la desigualdad (34.18) tiene lugar $n \geqslant n_0$ tenemos

$$\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt \underset{(34.18)}{\geqslant} \int_0^{nT} \frac{f(t)}{t}\,dt \underset{(34.16)}{\geqslant} \frac{I}{T}\ln(n+1) \underset{(34.17)}{\geqslant} \frac{I}{2T}\ln(n+1)T \underset{(34.18)}{\geqslant} \frac{I}{2T}\ln x. \tag{34.19}$$

Las desigualdades (34.12) y (34.19) demuestran precisamente la validez de la fórmula (34.10).

Tomando en la fórmula (34.10) en calidad de función f diferentes funciones concretas que satisfacen las condiciones enumeradas anteriormente obtendremos que las integrales correspondientes tendrán orden $\ln x$. Por ejemplo,

$$\int_1^x \frac{\ln(1+\cos^2 t)}{t}\,dt \asymp \ln x, \quad \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt \asymp \ln x.$$

No obstante, a veces se logra obtener una estimación más exacta. Así para la segunda integral tenemos

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt + \int_1^x \frac{1-\cos 2t}{2t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln x + \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt. \tag{34.20}$$

Por cuanto $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} = 0$, entonces la función $\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}$, siendo definida complementariamente por cero para $t = 0$, será una función continua y, por consiguiente, integrable sobre el segmento $[0, 1]$, es decir, la integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt$ es finita. La integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\,dt$ converge (esto, por ejemplo, se deduce directamente del criterio de Dirichler, véase el p. 33.6). De lo dicho se deriva que la función

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\,dt \tag{34.21}$$

siendo continua para todos los $x \geqslant 0$ y teniendo límite finito

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\,dt,$$

es acotada sobre el semieje no negativo. Por esto de la igualdad

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt \underset{\substack{(34.20)\\(34.21)}}{=} \frac{1}{2}\ln x + F(x)$$

se desprende que

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt \sim \frac{1}{2}\ln x,$$

es decir, en este caso se logra definir no sólo el orden de la integral con límite de integración variable x, sino también su comportamiento asintótico cuando $x \to +\infty$: es equivalente a $\frac{1}{2}\ln x$.

En los ejemplos analizados el comportamiento asintótico de las integrales se determinó con ayuda de métodos más o menos especiales que resultaron ser cómodos en los casos concretos analizados. Un método más general que da a menudo la posibilidad de hallar el comportamiento asintótico de las integrales es la integración ordinaria por partes.

3. Analicemos en calidad de ejemplo las así llamadas *integrales de Fresnel* *).

$$\int_0^\infty \cos\theta^2\,d\theta, \quad \int_0^\infty \operatorname{sen}\theta^2\,d\theta,$$

cuya velocidad de convergencia se define por el grado de decrecimiento de las integrales

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2\,d\theta, \quad \int_x^{+\infty} \operatorname{sen}\theta^2\,d\theta, \quad x > 0. \tag{34.22}$$

El estudio del comportamiento asintótico de las integrales (34.22) cuando $x \to +\infty$ se realiza con el mismo método. Por esto analizaremos sólo una de ellas, por ejemplo, la primera. Realizando en ella el cambio de variable $\theta^2 = t$, inmediata-

*) A. Fresnel (1788 — 1827), físico francés.

mente nos convencemos según el criterio de Dirichlet de que esta converge. Después, integrando dos veces por partes la integral obtenida tendremos

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\Bigg|_{x^2}^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t\sqrt{t}}\, dt =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x^2}{2x} + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t\sqrt{t}}\, dt = -\frac{\operatorname{sen} x^2}{2x} + \frac{\cos x^2}{4x^3} - \frac{3}{8}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\, dt \qquad (34.23)$$

(según la terminología anterior, véase el p. 33.5, mejoramos por medio de la integración por partes la convergencia de la integral).

Por cuanto $\frac{\cos x^2}{4x^3} = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$, $x - \infty$, y

$$\left|\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\, dt\right| \leqslant \int_{x^2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{t}} = -\frac{2}{3t^{3/2}}\Bigg|_{x^2}^{+\infty} = \frac{2}{3x^3},$$

entonces tendremos

$$\int_{x^2}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}}\, dt = O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to +\infty.$$

Por consiguiente,

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2 d\theta = -\frac{\operatorname{sen} x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \to +\infty.$$

De esta forma, hemos logrado con exactitud hasta $O\left(\frac{1}{x^3}\right)$, $x \to +\infty$, hallar una expresión simple para la integral $\int_x^{-\infty} \cos\theta^2 d\theta$, que da, en particular, una idea sobre el carácter de su decrecimiento cuando $x \to +\infty$. Si realizamos la posterior integración por partes de la integral que se encuentra en la parte derecha de la fórmula (34.22), entonces se pueden obtener fórmulas asintóticas para la integral $\int_x^{+\infty} \cos\theta^2 d\theta$ con exactitud hasta $O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$, $x \to +\infty$, para cualquier n natural.

Ejercicios. Analícese la velocidad de convergencia (divergencia) de las siguientes integrales para diferentes valores reales de los parámetros α y β:

1. $\int_0^\infty e^{-2\alpha t - t^2} t^{\beta - 1} dt.$
2. $\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + \alpha t\right) dt.$
3. $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2(\alpha + \ln t)^{1/3}}.$

CAPÍTULO CUARTO

SERIES

§ 35. SERIES NUMÉRICAS

35.1. DEFINICIÓN DE SERIE Y SU CONVERGENCIA

En el presente párrafo el concepto de suma se generaliza a algunos casos de conjunto infinito de sumandos y se estudian las propiedades de estas sumas generalizadas. Muchas de las cuestiones analizadas a continuación son válidas no sólo para los números reales sino también para los complejos. Por esto a diferencia de lo anterior en este capítulo vamos a realizar el análisis en la región compleja.

La expresión analítica que formalmente tiene aspecto de suma que contiene número infinito de sumandos se llama *serie infinita* o más breve *serie*. Daremos la definición estricta de serie y de su suma.

Definición 1. *Sea dada una sucesión de números complejos u_n, $n = 1, 2, \ldots$ Compongamos una nueva sucesión de números s_n, $n = 1, 2, \ldots$, de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \end{aligned}$$

El par de sucesión $\{u_n\}$ y $\{s_n\}$ se llama serie numérica (más detalladamente, serie numérica con término general u_n) y se denota por

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{35.1}$$

ó

$$\sum_{n=1}^{\infty} u^n. \tag{35.2}$$

Los elementos de la sucesión inicial $\{u_n\}$ se llaman términos de la serie (35.1) *y los elementos de la sucesión $\{s_n\}$ sumas parciales de esta serie, además u_n se llama término n-ésimo de la serie y la suma finita s_n, suma parcial n-ésima de la serie, $n = 1, 2, \ldots,$*

Si la sucesión de sumas parciales de la serie (35.1) *converge, entonces ésta se llama convergente, y si diverge, entonces, divergente.*

Definición 2. *La serie cuyos términos son términos de la serie* (35.1) *tomados, comenzando por el* $(n + 1)$*-ésimo, en el mismo orden que en la serie inicial, se llama resto n-ésimo de la serie* (35.1) *y se denota por*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad ó \quad u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots ,$$

Definición 3. *Si la serie* (35.1) converge, *entonces el límite*

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

se llama su suma.

En este caso se escribe

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots ,$$

ó

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.3}$$

De esta forma vamos a utilizar un mismo símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ tanto para denotar la propia serie (35.1) como para la notación de su suma, si ella converge.

Si $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \infty$, o bien $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = +\infty$ o bien $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = -\infty$ entonces respectivamente se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty \quad ó \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty.$$

Así, cada serie es un par de dos sucesiones tales que la primera puede ser tomada arbitrariamente (la sucesión de los términos de la serie) y la segunda, formada de manera definida por los términos de la primera (la sucesión de las sumas parciales de los términos de la serie). No obstante la serie unívocamente se define por cada una de estas sucesiones. En efecto, si está dada una sucesión de los términos u_n de la serie, entonces los términos de la sucesión de sus sumas parciales se hallan según la definición 1 por las fórmulas $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Si está dada la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales de la serie, entonces sus términos se definen por las fórmulas $u_1 = s_1$, $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$. De aquí se deduce que para cualquier sucesión siempre se puede hallar una serie tal que ella será la sucesión de sus sumas parciales. En realidad, sea dada la sucesión de números complejos $\{z_n\}$. Hagamos

$$u_1 = z_1, \quad u_2 = z_2 - z_1, \ldots , \quad u_n = z_n - z_{n-1}, \ldots$$

y analicemos la serie

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots ,$$

Entonces para sus sumas parciales tenemos:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \\ = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) = z_n.$$

Esto significa que el análisis de las series es equivalente al análisis de las sucesiones. Cualquier cuestión enunciada en términos de series, se puede parafrasear en una cuestión enunciada en términos de sucesiones y viceversa. Por ejemplo, el problema del estudio de la convergencia de las series es equivalente al problema del estudio de la convergencia de sucesiones.

Subrayemos que siempre si no se acuerda lo contrario, los términos de las series analizadas se suponen complejos.

Si el resto n-ésimo de la serie (35.1) (véase la definición 2) converge, entonces su suma la denotaremos por r_n:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k. \tag{35.4}$$

y nombraremos para mayor brevedad sencillamente *resto de la serie.*

Cualquier suma de un número finito de sumandos

$$s_{n_0} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_0}$$

se puede analizar como una serie agregándole los términos

$$u_{n_0+1} = u_{n_0+2} = \ldots = 0.$$

La suma de la serie obtenida evidentemente coincidirá con la suma dada, ya que para todos los $n \geqslant n_0$ sus sumas parciales son iguales s_{n_0}.

Si no se sabe de antemano si la suma contiene un número finito o infinito de sumandos, entonces a veces es cómodo en ambos casos llamarla serie considerando que la suma finita es una serie en el sentido señalado anteriormente.

Señalemos una propiedad sustancial de las series convergentes.

Teorema 1 (condición necesaria de convergencia de una serie). *Si la serie* (35.1) *converge, entonces*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0. \tag{35.5}$$

DEMOSTRACIÓN. Si la serie (35.1) converge, entonces la sucesión de sus sumas parciales s_n, $n = 1, 2, \ldots$, y s_{n-1}, $n = 2, 3, \ldots$, evidentemente tienen un mismo límite igual a la suma s de esta serie. Por esto observando que $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} s_n - \lim_{n \to \infty} s_{n-1} = 0. \ \square$$

Con ayuda del teorema 1 a veces se logra establecer la divergencia de la serie analizada: *si para la serie dada la condición* (35.5) *no se cumple, entonces ésta diverge.*

Ejemplos. 1. Sea q un número complejo y $|q| < 1$. Entonces la serie $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$ con términos $u_n = q^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, que forman *una progresión geométrica decreciente infinita*, converge.

En realidad,

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q},$$

y ya que $\lim \dfrac{q^{n+1}}{1-q} = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

2. La serie cuyos términos forman una progresión geométrica $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$ cuando $|q| \geqslant 1$ diverge, ya que su término general $u_n = q^n$ no tiende a cero: $|u_n| = |q|^n \geqslant 1$.

3. La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$ con términos $u_n = (-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, diverge.

En realidad en este caso

$$s_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s_{2k+1} = 1, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

por esto la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ no tiene límite.

La divergencia de la serie analizada, se deduce naturalmente también de que todos sus términos por su valor absoluto son iguales a la unidad y por esto no se cumple la condición necesaria (35.5) de convergencia de la serie.

35.2. PROPIEDADES DE LAS SERIES CONVERGENTES

Teorema 2. *Sea c un número complejo. Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in C$ *converge, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ *llamada producto de la serie dada por el número c también converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.6}$$

Este teorema significa que el factor numérico "se puede sacar del paréntesis" también en el caso del conjunto infinito de sumandos si éstos forman una serie convergente. "Se puede" en el sentido que es válida la igualdad (35.6).

DEMOSTRACIÓN. Sean $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ y $s_n' = \sum_{k=1}^{n} cu_k$, entonces, evidentemente

$$s_n' = cs_n. \tag{35.7}$$

Por condición $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe, por esto en virtud de (35.7) $\lim_{n\to\infty} s_n'$ también existe y

$$\lim_{n\to\infty} s_n' = c \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Según la definición de suma de una serie de aquí directamente se deduce (35.6). □

Teorema 3. *Supongamos que las series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *convergen, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, *llamada suma de las series dadas, también converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{35.8}$$

Este teorema significa que las series convergentes "se puede sumar término a término" (el término n-ésimo con el n-ésimo), "se puede" en el sentido que es válida la igualdad (35.8).

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad s_n' = \sum_{k=1}^{n} v_k \quad \text{y} \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k),$$

entonces $\sigma_n = s_n + s_n'$ y ya que $\lim_{n\to\infty} s_n$ y $\lim_{n\to\infty} s_n'$ por condición existen, entonces $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ también existe y

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (s_n + s_n') = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s_n'.$$

Esta igualdad es equivalente a la igualdad (35.8). □

Teorema 4. *Si la serie converge, entonces cualquiera de sus restos converge. Si cualquier resto de la serie* (35.1) *converge, entonces la propia serie también converge. Además si*

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad s_m = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k,$$

entonces

$$s = s_m + r_m.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $n = 1, 2, \ldots$, sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, y $s_k^{(m)} = u_{m+1} + \ldots + u_{m+k}$, sumas parciales de su resto m-ésimo

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k} + \ldots.$$

Es evidente que

$$s_n = s_m + s_k^{(m)}, \quad n = m + k \tag{35.9}$$

de donde para m fijo se deduce, que el límite

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

existe cuando y sólo cuando existe

$$\lim_{k\to\infty} s_k^{(m)}.$$

Dicho de otro modo la serie converge cuando y sólo cuando converge alguno de sus restos $r_m = \lim_{k\to\infty} s_k^{(m)}$. Por cuanto el número natural m era arbitrario, entonces la primera parte del teorema está demostrada.

Pasando, finalmente, al límite en la igualdad (35.9) cuando $k \to \infty$ y m es fijo, tenemos $s = s_m + r_m$, ya que $n = m + k \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim_{k\to\infty} s_k^{(m)} = r_m$. □

De este teorema se deduce que la eliminación o adición de un número finito de términos a la serie dada no influye sobre su convergencia.

De la fórmula $s = s_m + r_m$ evidentemente se deduce que si la serie converge, entonces su resto tiende a cero:

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty} (s - s_m) = 0. \tag{35.10}$$

Señalemos que sin ninguna duda la condición (35.10) no se puede tomar en calidad de definición de serie convergente ya que el resto de la serie es también una serie y se puede hablar sobre su tendencia a cero sólo dominando la definición de convergencia de la serie.

35.3. CRITERIO DE CAUCHY DE LA CONVERGENCIA DE LA SERIE

El criterio de Cauchy para la convergencia de las sucesiones puede ser fácilmente parafraseado conforme a las series. En realidad, como es conocido (véase el p. 4.7 y 23.3) para que una sucesión de números complejos $\{s_n\}$ sea convergente, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número n_ε tal que para números cualesquiera $n \geqslant n_\varepsilon$ y cualesquiera enteros $p \geqslant 0$ se cumpla la desigualdad

$$|s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Para mayor comodidad de la utilización de este criterio en el caso de series escribimos aquí la diferencia $s_{n+p} - s_{n-1}$ en lugar de la diferencia $s_{n+p} - s_n$, que escribimos anteriormente en el p. 3.7. Esto, naturalmente, no influye sobre la esencia del problema. Además por cuanto la suma s_0 no está definida, consideraremos siempre según la definición que $s_0 = 0$.

Si ahora por $\{s_n\}$ se entiende la sucesión de sumas parciales de la serie (35.1), entonces

$$s_{n+p} - s_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p},$$

y el criterio enunciado en estas notaciones toma la siguiente forma.

Teorema 5 (criterio de Cauchy). *Para que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converja, es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un número* n_ε *tal que para cualquier* $n \geqslant n_\varepsilon$ *y cualquier entero* $p \geqslant 0$ *se cumple la desigualdad*

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{35.11}$$

Del criterio de Cauchy de convergencia de una serie se puede fácilmente obtener de nuevo la condición suficiente (35.5) de convergencia de la serie. En realidad, en este caso la desigualdad (35.11) se cumple para cualquier $p \geqslant 0$ y, en particular, para $p = 0$. Por esto para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ tenemos $|u_n| < \varepsilon$ y en virtud de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario esto significa que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

La propiedad (35.5) brevemente se expresa diciendo que *"el término general de una serie convergente tiende a cero"*.

Ejemplo. Analicemos la así llamada *serie armónica*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

Aquí el término n-esímo $u_n = 1/n$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, pero la serie diverge. En realidad, para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ tenemos

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} >$$
$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \tag{35.12}$$

es decir, para cualquier n cuando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $p = n - 1$ la desigualdad (35.11) no se cumple.

De esta forma, del criterio de Cauchy se deduce que la serie armónica diverge. Este ejemplo muestra que la condición (35.5) siendo necesaria para la convergencia de la serie, no es al mismo tiempo suficiente.

Del ejemplo analizado se deduce que la serie

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \tag{35.13}$$

cuando $\alpha < 1$ diverge. En realidad, observando que cuando $\alpha < 1$ para cualquier $n = 2, 3, \ldots$ es válida la desigualdad $n^\alpha < n$ tenemos por (35.12) la desigualdad

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} > \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \ldots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2}.$$

Por esto en el caso de la serie (35.13) cuando $\alpha < 1$ para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ cuando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $p = n - 1$ la desigualdad (35.11) tampoco se cumple y, por consiguiente, en virtud del criterio de Cauchy la serie (35.13) cuando $\alpha < 1$ también diverge.

Ejercicios. Demuéstrese partiendo de la definición 1 que las siguientes series son convergentes y hállese la suma de cada una de ellas:

1. $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} + \ldots, (a, b > 0).$
2. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$
3. $a + (a+d)q - (a+2d)q^2 + \ldots + (a+nd)q^n + \ldots, |q| < 1.$

Problema 22. Demuéstrese que para cualquier serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con términos no negativos $a_n \geqslant 0$, existe una sucesión $\{b_n\}$ creciente e infinitamente grande $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $b_n \leqslant b_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ también converge.

35.4. SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS

En este punto nos ocuparemos del estudio de las series, todos los términos de las cuales son números reales no negativos.

Lema 1. *Sean todos los términos de la serie* (35.1) *no negativos:*

$$u_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.14}$$

Para que esta serie converja, es necesario y suficiente que exista al menos una subsucesión convergente de la sucesión de sus sumas parciales.

En efecto, de la condición (35.14) se deduce que

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = s_n + u_{n+1} \geqslant s_n,$$

es decir, la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ de la serie analizada es creciente. Una sucesión monótona converge si y sólo si converge al menos una de sus subsucesiones (véase la observación después del teorema 3 en el p. 4.5). □

Lema 2. *Para que la serie* (35.1) *con términos no negativos converja, es necesario que la sucesión de sus sumas parciales sea acotada superiormente y suficiente que sea acotada superiormente al menos una subsucesión* $\{s_{n_k}\}$ *de la sucesión* $\{s_n\}$ *de sus sumas parciales, además si*

$$s = \sup_k \{s_{n_k}\},$$

entonces s es la suma de la serie (35.1).

En efecto, la convergencia de la serie significa la convergencia de la sucesión de sus sumas parciales, y cualquier sucesión convergente es acotada, en particular, acotada superiormente. De esta forma la primera parte del lema es válida sin la suposición de que son no negativos los términos de la serie.

No obstante en el caso general la condición de acotación incluso de todas las sumas parciales de la serie (y no sólo de alguna de sus subsucesiones) no es suficiente para la convergencia de la serie, como esto se muestra, por ejemplo, en el ejemplo 3, analizado en el p. 35.1. Por esto la condición de que son no negativos los términos de la serie es sustancial para la validez de la segunda parte del lema 2. Demostrémosla.

Del hecho de que los términos de la serie son no negativos, como nos convencimos en la demostración del teorema anterior, se deduce que la sucesión de sus sumas parciales es no decreciente. Por esto si existe una subsucesión $\{s_{n_k}\}$ acotada superiormente de la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}$ de la serie que se analiza, entonces tampoco decrece (como cualquier subsucesión de una sucesión no decreciente) y por consiguiente (véase el teorema 3 en el p. 3.5) converge, además

$$s = \sup_k \{s_{n_k}\} = \lim_{k\to\infty} s_{n_k}.$$

Por el lema anterior de la convergencia de la subsucesión de las sumas parciales $\{s_{n_k}\}$ se deduce la convergencia de la serie, es decir, la existencia del límite finito $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, y por lo tanto, el límite de la sucesión convergente coincide con el límite de cualquier subsucesión suya, entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s. \; \square$$

Del lema 2 se deduce que si la serie con términos no negativos diverge, entonces la sucesión de sus sumas parciales no es acotada superiormente y por su monotonía

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty.$$

Por esto para las series divergentes con términos no negativos por el acuerdo hecho en el p. 35.1 se escribe

$$\sum_{u=1}^{\infty} u_n = +\infty.$$

Los lemas demostrados por sus enunciados recuerdan las afirmaciones correspondientes para las integrales impropias (véase el p. 33.3). Entre la convergencia de las series con términos no negativos y la convergencia de las integrales impropias de las funciones no negativas se puede a veces establecer también una relación más directa. Para las funciones decrecientes esto será hecho en el p. 35.7.

Ejemplo. Analicemos ahora la serie (35.13) cuando $\alpha > 1$. Mostremos que en este caso ella converge. Tomemos inicialmente las sumas parciales de esta serie de órdenes $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ agrupando sus sumandos en k grupos cuya forma general es

$$\frac{1}{2^{p\alpha}} + \frac{1}{(2^p+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^p+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^\alpha}, \quad p = 0, 1, \ldots, k-1,$$

es decir,

$$s_{2^k-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \\ + \ldots + \left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right).$$

Observando que para cada sumando del grupo de orden p-ésimo es válida la desigualdad

$$\frac{1}{(2^p+m)^\alpha} \leqslant \frac{1}{2^{p\alpha}}, \quad m = 0, 1, \ldots, 2^p - 1,$$

y que en este grupo hay 2^p sumandos, obtendremos

$$s_{2^k-1} < 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)\alpha}} < \\ < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{(k-1)(\alpha-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

De esta forma la sucesión de sumas parciales s_{2^k-1} de la serie (35.13), cuando $\alpha > 1$, es acotada superiormente. Más adelante en virtud de la positividad de los términos de la serie analizada la sucesión de sus sumas parciales crece. Por esto existe el límite finito o infinito $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Pero entonces cualquier subsucesión de $\{s_n\}$, en particular, la subsucesión $\{s_{2^k-1}\}$, tiene el mismo límite s y por cuanto según lo demostrado esta sucesión es acotada, entonces el límite s es finito.

Señalemos que en el caso de $p = 2$ la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ se demuestra mucho más fácil. En efecto, para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ tenemos:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir, las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ son acotadas superiormente y, por consiguiente, según el lema 2 ella converge. De aquí para cualquier $p > 2$ en virtud de la desigualdad

$$\frac{1}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

directamente se deduce la acotación de las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, cuando $p \geqslant 2$, y por esto también su convergencia (un método parecido para establecer la convergencia de la serie con términos no negativos será analizado en el caso general en el próximo punto). De esta forma sólo por el caso $1 < p < 2$ fue necesario aplicar anteriormente un método más complejo de estimación de las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$, para establecer su convergencia.

35.5. CRITERIO DE COMPARACIÓN PARA LAS SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS. MÉTODO DE SELECCIÓN DE LA PARTE PRINCIPAL DEL TÉRMINO DE LA SERIE

Pasemos ahora a los criterios de comparación para las series que también por su forma recuerdan los criterios correspondientes de convergencia de las integrales impropias.

Teorema 6 (criterio de comparación). *Sea*

$$u_n \geqslant 0, \quad v_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.15}$$

y

$$u_n = O(v_n)^{*)}. \tag{35.16}$$

Entonces, si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.17}$$

[*] En particular, $u_n \leqslant v_n$. Véase la explicación de la notación "O" en el p. 23.3.

converge, converge también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{35.18}$$

y si la serie (35.18) *diverge, entonces diverge también la serie* (35.17).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se cumple la condición (35.16). Entonces existe un $c > 0$ tal que

$$u_k \leqslant cv_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{35.19}$$

Si ahora la serie (35.17) converge, entonces por el lema 2 la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales es acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{35.20}$$

Denotemos por σ_n la suma parcial de la serie (35.18). Entonces en virtud de las desigualdades (35.19) y (35.20)

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant c \sum_{k=1}^{n} v_k = cs_n \leqslant cM, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Por el lema 2 de la acotación superior de las sumas parciales de la serie (35.18) se deduce su convergencia. Así, si la serie (35.17) converge, entonces la serie (35.18) también converge.

Si la serie (35.18) diverge, entonces la serie (35.17) también diverge, ya que si ella convergiera, entonces por lo demostrado convergería también la serie (35.18) lo que contradice la condición. ☐

Corolario. *Sea* $v_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \tag{35.21}$$

en este caso

1) *si la serie* (35.17) *converge y* $0 \leqslant k < +\infty$, *entonces la serie* (35.18) *también converge;*

2) *si la serie* (35.17) *diverge y* $0 < k \leqslant +\infty$, *entonces la serie* (35.18) *también diverge.*

En particular si $u_n \sim v_n$ *(*u_n *y* v_n *son equivalentes, véase el p.* 23.3), *entonces las series* (35.17) *y* (35.18) *convergen o divergen simultáneamente.*

Del cumplimiento de la condición (35.21) para $0 \leqslant k < +\infty$ se deduce la existencia de n_0 tal que si $n \geqslant n_0$, entonces

$$\frac{u_n}{v_n} < k + 1, \quad \text{es decir,} \quad u_n < (k+1)v_n,$$

y esto significa que

$$u_n = O(v_n).$$

Por esto la afirmación 1 del corolario se deriva directamente de la afirmación 1 del teorema.

Del cumplimiento de la condición (35.21) para $0 < k \leqslant +\infty$ se deduce que si fijamos k' tal que $0 < k' < k$, entonces existe el número $n_0 = n_0(k')$ que tiene la propiedad de que si $n \geqslant n_0$, entonces

$$\frac{u_n}{v_n} > k', \quad \text{es decir,} \quad v_n < \frac{1}{k'} u_n,$$

y esto significa que

$$v_n = O(u_n).$$

Por esto la afirmación 2 del corolario se deriva directamente de la afirmación 2 del teorema. □

Ejemplos. 1. Sea $u_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2 n\alpha}{2^n}$.

Entonces $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, y ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ converge (véase el p. 35.1), entonces también converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 n\alpha}{2^n}$.

2. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ diverge ya que $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{n}{2\sqrt{n}}$, $p = 1, 2, \ldots$, y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ como hemos visto (véase el estudio de la serie (35.13)) diverge.

La efectividad de la utilización del criterio de comparación para el análisis de la convergencia de una serie depende, naturalmente, de la reserva de "series de comparación", es decir, de las series de las cuales ya sabemos si convergen o divergen, y que por esto podemos tratar de utilizar para el análisis de la convergencia de la serie dada.

Si en calidad de "serie de comparación" (35.17) tomamos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, de la cual ya sabemos para que α converge, entonces del teorema 6 se deduce directamente la validez del siguiente teorema.

Teorema 7. *Sea $u_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces si $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ y $\alpha > 1$, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{35.22}$$

converge; si $\dfrac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$ y $\alpha \leqslant 1$, la serie (35.22) diverge.

Corolario. *Sea $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = k$ y en este caso*

1) si $\alpha > 1$ y $0 \leqslant k < +\infty$, entonces la serie (35.22) converge;

2) si $\alpha \leqslant 1$ y $0 < k \leqslant +\infty$, entonces la serie (35.22) diverge.

En particular, si $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, entonces la serie (35.22) converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha \leqslant 1$.

Si los términos u_n de la serie (35.22) están dados con ayuda de una fórmula que representa una función de n, la cual tiene sentido para todos los valores reales no negativos suficientemente grandes de la variable n y más aún es una función "suficientemente suave" de esta variable, entonces para la aplicación práctica del teorema 7 habitualmente resulta conveniente desarrollar el término u_n con ayuda de la fórmula de Taylor según las potencias de $1/n$.

Si el término principal del desarrollo obtenido tiene la forma de $1/n^\alpha$, entonces tomando en calidad de serie de comparación la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ y aplicando el teorema 7 se puede definir si converge o diverge la serie dada.

En un sentido conocido se puede decir que este método de análisis de la convergencia de la serie es el más cómodo y además suficientemente general.

Ejemplos. Analicemos la convergencia de las series cuyos términos generales se definen por las fórmulas dadas a continuación.

1. $u_n = 1 - \cos\dfrac{\pi}{n}$. Evidentemente, $u_n > 0$. Ya que (véase la observación al final del p. 13.3) $\cos x = 1 + O(x^2)$, $x \to 0$, y por consiguiente,

$$u_n = 1 - \left[1 + O\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

entonces según el teorema 7 la serie con término general u_n converge.

2. $u_n = \ln\cos\dfrac{1}{n}$. Aquí $u_n < 0$. Recordando que $\ln(1+x) = O(x)$, $x \to 0$, y aplicando sucesivamente la fórmula de Taylor para el coseno y el logaritmo obtendremos:

$$u_n = \ln\cos\frac{1}{n} = \ln\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty,$$

y por esto en virtud del teorema 7 la serie con términos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-u_n)$ converge y junto con ella converge también la serie dada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

3. $u_n = \ln\dfrac{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$, $n = 3, 4, \ldots$. Tenemos $u_n \geqslant 0$ y $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{\pi}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, por eso

$$u_n = \ln\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) - \ln\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} + o\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De esta manera $u_n \sim \frac{2\pi}{n}$, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ diverge, entonces diverge también la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}$.

35.6. CRITERIOS DE D'ALEMBERT Y DE CAUCHY PARA SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS

A veces resultan útiles algunos criterios especiales de convergencia de la serie. Señalemos entre ellos el así llamado criterio de D'Alembert *) y el criterio de Cauchy que se obtienen directamente del criterio de comparación, si en calidad de serie de comparación tomamos la progresión geométrica escogida de manera correspondiente.

Teorema 8 (criterio de D'Alembert). *Sea dada una serie con términos positivos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n > 0 \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.23}$$

Así pues,

1) *si existen un número q, $0 < q < 1$, y un número n_0 tales que para todos los $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q,$$

entonces la serie dada converge;

2) *si existe un número n_0 tal que para todos los $n > n_0$* se cumple la desigualdad

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$

entonces la serie dada diverge.

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 < q < 1$ y supongamos que existe un número n_0 tal que para $n \geqslant n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q, \quad \text{es decir,} \quad u_{n+1} \leqslant q u_n.$$

Entonces

$$u_{n_0+1} \leqslant u_{n_0} q,$$
$$u_{n_0+2} \leqslant u_{n_0+1} q \leqslant u_{n_0} q^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{n_0+p} \leqslant u_{n_0+p-1} q \leqslant \ldots \leqslant u_{n_0} q^p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*) J. D'Alembert (1717 — 1783), filósofo y matemático francés.

y ya que la serie $u_{n_0} q + u_{n_0} q^2 + \ldots + u_{n_0} q^p + \ldots$ siendo la suma de una progresión geométrica decreciente infinita con denominador $q (0 < q < 1)$ converge, entonces por el criterio de comparación converge también la serie

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \ldots + u_{n_0+p} + \ldots ,$$

así como la serie original (35.23).

Si existe n_0 tal que para todos los $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, entonces

$$u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0},$$
$$u_{n_0+2} \geqslant u_{n_0+1} \geqslant u_{n_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y ya que, por suposición, $u_{n_0} > 0$, entonces el término n-ésimo de la serie siendo acotado inferiormente por una constante positiva no tiende a cero. Por consiguiente no se cumple la condición necesaria de convergencia de una serie (véase el teorema 1 de este párrafo) y por esto la serie (35.23) diverge. □

Corolario. *Supongamos que existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *En este caso, si $l < 1$, entonces la serie* (35.23) *converge, y si $l > 1$, la serie* (35.23) *diverge.*

Esto se deriva directamente del teorema demostrado.

En calidad de ejemplo analicemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Aquí $u_n = \frac{1}{n!}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, por esto según el corolario del teorema 10 la serie dada converge. Naturalmente, su convergencia se puede establecer comparándola por ejemplo, con la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ejemplos con más contenido de la aplicación del criterio de D'Alembert se darán más adelante (véase, por ejemplo, el p. 36.1).

Teorema 9 (criterio de Cauchy). *Sea dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.24}$$

En este caso

1) *si existen q, $0 \leqslant q < 1$, y n_0 tales que para todos los $n \geqslant n_0$ es cumple la desigualdad*

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q,$$

entonces la serie dada converge;

2) *si existe un número n_0 tal que para todos los $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad*

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1,$$

entonces la serie dada diverge.

DEMOSTRACIÓN. Si para $n \geqslant n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q, \quad \text{es decir,} \quad u_n \leqslant q^n,$$

entonces según el criterio de comparación la serie (35.24) converge ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ cuando $0 < q < 1$ converge. Si

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1, n \geqslant n_0,$$

entonces $u_n \geqslant 1$ y esto significa que la serie (35.24) diverge (véase el teorema 1). □

Corolario. *Supongamos que existe*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Si $l < 1$, la serie (35.24) converge y si $l > 1$, ella diverge.

La demostración del corolario es evidente.

Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Ya que $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces por el corolario del teorema 9 la serie dada converge. Su convergencia se establece fácilmente con ayuda del teorema 7.

OBSERVACIÓN. Si de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n > 0, n = 1, 2, \ldots$ es conocido sólo que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \quad \text{ó} \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1, \tag{35.25}$$

entonces no se puede decir nada definido sobre su convergencia: la serie puede tanto converger como diverger. Por ejemplo, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

satisfacen ambas condiciones (35.25), no obstante la primera de ellas diverge y la segunda converge.

Ejercicios. Analícese la convergencia de las series:

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \pi\sqrt{n^2 + a^2}$ ($a = \text{const} \in R$).

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} \frac{n}{n+1}\right)$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \ln \frac{2n+1}{2n-1}\right)$.

10. Sea $0 < p < q < 1$. Demuéstrese que la serie
$p + q^2 + p^3 + q^4 + \ldots$
converge y $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = \infty$.

11. Sea $0 < \alpha < \beta < 1$. Demuéstrese que la serie
$\frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\beta}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots$
converge y $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \infty$.

35.7. CRITERIO INTEGRAL DE CONVERGENCIA DE LAS SERIES CON TÉRMINOS NO NEGATIVOS

Si para la serie dada (35.1) se logra escoger una función definida para $x \geqslant 1$ y tal que $f(n) = u_n$, entonces a determinadas condiciones, de la convergencia o divergencia de la integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

se puede juzgar también sobre la convergencia o divergencia de la serie (35.1).

Teorema 10 (criterio integral de convergencia de las series). *Si la función $f(x)$, definida para todos los $x \geqslant 1$, es no negativa y decrece, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{35.26}$$

converge si y sólo si converge la integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx. \tag{35.27}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $k \leqslant x \leqslant k + 1$, en virtud del decrecimiento de la función $f(x)$ (fig. 147).

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

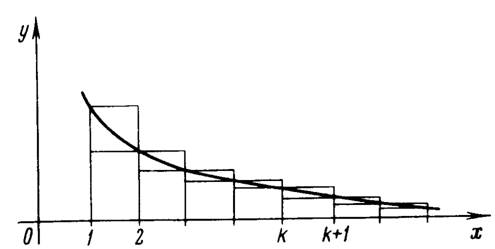


FIG. 147

por esto integrando respecto al segmento $[k, k + 1]$ tendremos

$$f(k) \geqslant \int_{k}^{k+1} f(x)dx \geqslant f(k + 1), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Sumando estas desigualdades desde $k = 1$ hasta $k = n$, obtendremos

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_{1}^{n+1} f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k + 1)$$

y suponiendo

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

tendremos

$$s_n \geqslant \int_{1}^{n+1} f(x)dx \geqslant s_{n+1} - f(1), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{35.28}$$

Si la integral (35.27) converge, entonces por el lema 1 del p. 33.3 para cualquier $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_{1}^{n+1} f(x)dx \leqslant \int_{1}^{+\infty} f(x)dx.$$

De aquí y de la desigualdad (35.28) se deduce, que

$$s_{n+1} \leqslant f(1) + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx,$$

es decir, la sucesión de las sumas parciales de la serie (35.26) es acotada superiormente y significa según el teorema anterior que esta serie converge.

Si la serie (35.26) converge y su suma es igual a s, entonces por este mismo teorema, $s_n \leqslant s$ para todos los $n = 1, 2, \ldots$, y por la desigualdad (35.17) para todos los $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_{1}^{n+1} f(x)dx \leqslant s.$$

Si ahora $\xi \geqslant 1$, entonces tomando n tal que $n \geqslant \xi$ obtendremos en virtud de que la función f es no negativa

$$\int_{1}^{\xi} f(x)dx \leqslant \int_{1}^{n} f(x)dx \leqslant s.$$

Así, el conjunto de todas las integrales $\int_{1}^{\xi} f(x)dx$, $\xi \geqslant 1$, es acotado superiormente y por esto la integral (35.27) converge (véase el lema 1 del p. 33.3). □

Este teorema a menudo facilita sustancialmente el análisis de la convergencia de las series ya que si para la serie dada se logra escoger la función f correspondiente, en este caso reducir la cuestión sobre el estudio de la convergencia de la serie al estudio de la convergencia de la integral, entonces esto da la posibilidad de aplicar el aparato del cálculo integral desarrollado en el capítulo anterior.

Ejemplos. 1. Analicemos de nuevo (véase el p. 35.3) la serie

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots \tag{35.13}$$

con término n-ésimo $u_n = 1/n^\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$.

En el caso dado, la función $f(x)$ señalada en el teorema se encuentra fácilmente:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geqslant 1.$$

Ya que la integral $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha \leqslant 1$, entonces la serie (35.13) converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leqslant 1$.

Estos hechos fueron establecidos anteriormente por otro método en el p. 35.3 (véanse allí los ejemplos 1 y 2). Como se ve de lo anteriormente expuesto la aplicación del criterio integral de convergencia de las series al estudio de la serie (35.13) considerablemente simplificó el problema del análisis de la convergencia de esta serie.

2. Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)\ln(n + 1)}. \tag{35.29}$$

Esta serie se puede fácilmente analizar con ayuda del criterio integral de convergencia: del hecho de que la integral $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x + 1)\ln(x + 1)} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge se deduce que la serie (35.29) también diverge.

Enunciemos ahora un sencillo corolario del teorema 10 que a menudo es útil en las aplicaciones.

Si existe n_0 natural tal que la función no negativa f decrece cuando $x \geqslant n_0$, entonces la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

converge si y sólo si converge la integral

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Este caso se reduce al analizado en el teorema con el cambio de variable $x = y + n_0 - 1$.

35.8*. DESIGUALDADES DE HÖLDER Y DE MINKOWSKI PARA LAS SUMAS FINITAS E INFINITAS

Sean dados los números (en general complejos) $x_1, \ldots, x_n, \ldots, y_1, \ldots, y_n$, $1 < p < +\infty$ y el numéro q se define por la igualdad $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (véanse el p. 20.8

y el p. 28.4*). Entonces son válidas las desigualdades

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \tag{35.30}$$

(desigualdad de Hölder) y

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{35.31}$$

(desigualdad de Minkowski).

Su demostración se realiza por el mismo esquema que en el caso de las desigualdades integrales correspondientes (véase el p. 28.4*).

Introduzcamos para mayor brevedad las notaciones

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|y\|_q \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}. \tag{35.32}$$

Aplicando la desigualdad (20.53) $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ a

$$a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \quad b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

tendremos

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|x_i|}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Sumando estas desigualdades por i desde 1 hasta n por (35.32) y la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, obtendremos:

$$\frac{1}{\|x\|_q \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \frac{1}{p\|x\|_p^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q;$$

de este modo la desigualdad (35.30) queda demostrada.

La desigualdad de Minkowski (35.31) se deduce de la desigualdad de Hölder (35.30): de la relación evidente

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1},$$

aplicando a cada sumando en el segundo miembro la desigualdad de Hölder, obtendremos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}.$$

Si el primer miembro es igual a cero, entonces la desigualdad de Minkowski es válida evidentemente; si éste no es igual a cero, entonces reduciendo ambos miembros por el factor $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q}$ y observando que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q(p-1) = p$, obtendremos la desigualdad (35.31).

Con los casos particulares de las desigualdades de Hölder y de Minkowski cuando $p = q = 2$ ya nos hemos encontrado anteriormente en el § 18 (véanse (18.2) y (18.3)).

Para dos series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ cualesquiera son válidas las desigualdades análogas

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}. \tag{35.33}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p}. \tag{35.34}$$

En efecto, para todas las sumas parciales de un mismo orden de las series dadas son válidas las desigualdades de Hölder y de Minkowski. Pasando en ellas al límite cuando $n \to \infty$ obtendremos las desigualdades (35.33) y (35.34).

De las desigualdades demostradas se deduce, en particular, que si las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q$$

convergen, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ converge, y si convergen las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q,$$

entonces converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p$.

35.9. SERIES DE TÉRMINOS DE SIGNO VARIABLE

En este punto se analizan las series con términos reales, cuyos signos, en general varían con la variación del número, estas series se llaman de *términos de signo variable*.

Analicemos ante todo las así llamadas series *alternadas*, es decir, las series cuyos términos son consecutivamente positivos o negativos.

Teorema 11 (de Leibniz). *Si*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0 \tag{35.35}$$

y

$$u_n \geqslant u_{n+1} > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.36}$$

entonces la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{35.37}$$

converge. Además cualquier suma parcial s_n de la serie (35.37) *se diferencia de su suma s en una magnitud menor que término siguiente u_{n+1}, dicho de otra forma, la magnitud absoluta del resto de la serie r_n en este caso no es mayor que el valor absoluto de su primer término, es decir,*

$$|r_n| = |s - s_n| \leqslant u_{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos las sumas parciales de orden par de la serie (35.37)

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} u_n.$$

Estas se pueden escribir en la forma

$$s_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k}), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

En virtud de la condicion (35.36) las expresiones entre paréntesis son no negativas y por esto $s_{2k} \leqslant s_{2k+2}$, es decir, la sucesión de sumas parciales de orden par de la serie (35.37) crece.

Observando que las sumas parciales s_{2k} se pueden escribir también en la forma

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

y que las expresiones entre paréntesis por la condición (35.36) son no negativas y $u_{2k} > 0$, obtenemos que $s_{2k} < u_1$, es decir, la sucesión $\{s_{2k}\}$ es acotada superiormente. Del crecimiento y la acotación superior de la sucesión $\{s_{2k}\}$ se deduce que ésta converge

$$\lim_{k \to \infty} s_{2k} = s. \tag{35.38}$$

Mostremos que las sumas parciales de orden impar de la serie (35.37) también tienden al mismo límite. En efecto

$$s_{2k+1} = s_{2k} + u_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{35.39}$$

y ya que por (35.35) $\lim\limits_{k \to \infty} u_{2k+1} = 0$, entonces por (35.38) y (35.39) tenemos

$$\lim_{k \to \infty} s_{2k+1} = s. \tag{35.40}$$

De (35.38) y (35.40) se deduce que

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

Ahora señalemos que para la serie (35.37) es válida la desigualdad

$$s_{2k} \leqslant s \leqslant s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{35.41}$$

En efecto por un lado, ya vimos que s es el límite de la sucesión creciente $\{s_{2k}\}$, por esto $s_{2k} \leqslant s$. Por otro lado

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} - (u_{2k} - u_{2k+1}) \leqslant s_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

es decir, la sucesión $\{s_{2k-1}\}$ decrece y ya que s es también el límite de la sucesión $\{s_{2k-1}\}$ (véase (35.40)), entonces $s \leqslant s_{2k-1}$. De la desigualdad (35.41) se deduce

$$s - s_{2k} \leqslant s_{2k+1} - s_{2k} = u_{2k+1},$$

$$s_{2k-1} - s \leqslant s_{2k-1} - s_{2k} = u_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

y esto significa que para todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|s - s_n| \leqslant u_{n+1}$. □

Si las condiciones de alternación de los signos de la serie y la monotonía se cumplen no a partir del primer término, sino comenzando desde cierto número n_0, entonces, cuando se cumple la condición (35.35), es decir, cuando el término general de la serie tiende a cero, la serie analizada también converge. Esto se deduce de que la eliminación de un número finito de términos de la serie no influye sobre su convergencia (véase el teorema 4 en el p. 35.2).

En calidad de ejemplo analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{35.42}$$

Sus términos satisfacen, evidentemente, las condiciones del teorema 11, y por eso converge. Observando que en ella $s_1 = 1$ y $s_2 = 1/2$ para su suma S, tenemos la estimación

$$\frac{1}{2} \leqslant S \leqslant 1. \tag{35.43}$$

A las series se extienden no todas las propiedades de las sumas finitas. Aclaremos esto en el ejemplo de la misma serie (35.42). Si

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots, \tag{35.44}$$

entonces

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

sumando término a término esta serie con la serie (35.44) obtendremos la igualdad

$$\frac{3}{2} S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{8} + \ldots, \tag{35.45}$$

es decir, la serie formada por los mismos términos que la serie dada (35.44) tomados sólo en otro orden, por eso $\frac{3}{2} S = S$, de donde se deduce que $S = 0$ lo que contradice la desigualdad (35.43).

A pesar de la aparente evidencia de la legalidad de nuestros razonamientos hemos cometido un grave error. ¿Dónde? Un análisis detallado de esto será dado en uno de los siguientes puntos.

35.10. SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES. APLICACIÓN DE LAS SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES A LA INVESTIGACIÓN DE LA CONVERGENCIA DE LAS SERIES ARBITRARIAS

En este punto de nuevo se estudian las series cuyos términos en general son números complejos.

Definición 4. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \in C \tag{35.46}$$

se llama absolutamente convergente, si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{35.47}$$

converge.

Aplicando el criterio de Cauchy de convergencia de una serie a la serie (35.47) obtendremos: *para que la serie* (35.46) *converja absolutamente es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista un número* n_ε *tal que para todos los* $n \geqslant n_\varepsilon$ *y todos los enteros* $p \geqslant 0$ *se cumpla la desigualdad*

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Ejemplos. 1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{n+1}$ converge absolutamente ya que $\left|\frac{i^n}{2^n} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, como sabemos, converge, no obstante no absolutamente ya que la serie formada por los valores absolutos de sus términos, es decir, la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Teorema 12. *Si la serie converge absolutamente, entonces también converge simplemente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (35.46) converge absolutamente, es decir, la serie (35.47) converge. Entonces por la necesidad del cumplimiento de la condición de Cauchy para la convergencia de la serie (véase el teorema 5) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$ se cumple la desigualdad

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

De aquí y de la desigualdad $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$ se deduce que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $p = 0, 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon.$$

Y esto significa también en virtud de la suficiencia del cumplimiento de la condición de Cauchy para la convergencia de una serie que la serie (35.46) converge. □

OBSERVACIÓN. Se dede tener en cuenta que la propiedad del valor absoluto de la suma de no superar la suma de los valores absolutos de los sumandos permanece válida también para las series convergentes:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{35.48}$$

Esta desigualdad tiene sentido cuando su segundo miembro es finito, es decir, cuando la serie analizada converge absolutamente. En este caso el primer miembro de la desigualdad siempre tiene sentido, ya que de la convergencia absoluta de la serie se deduce su convergencia común. Formalmente la desigualdad (35.48) según nuestro acuerdo sobre la utilización del símbolo $+\infty$ (véanse las págs. 42 y 570) es cierta también para cualquier serie convergente si la serie del segundo miembro (35.48) diverge.

Para la demostración de la desigualdad (35.48) en el caso de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ observemos que para cualquier m natural

$$\left|\sum_{n=1}^{m} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |u_n|.$$

Pasando aquí al límite cuando $m \to \infty$, obtendremos la desigualdad (35.44).

Denotemos por

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{35.49}$$

la serie compuesta por los mismos términos que la serie (35.46), pero tomados, en general, en otro orden.

Teorema 13. *Si la serie* (35.46) *converge absolutamente, entonces la serie* (35.49) *también converge absolutamente y tiene la misma suma.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (35.46) converge absolutamente, es decir, converge la serie (35.47) y sea la suma de la serie (35.46) igual a s:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{35.50}$$

Mostremos inicialmente que la serie (35.49) también converge y más aún su suma es igual a la suma de la serie (35.46), es decir, a s. Denotemos las sumas parciales de la serie (35.46) por s_n:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y las sumas parciales de la serie (35.49) por s_n^*:

$$s_m^* = \sum_{k=1}^{m} u_k^*,$$

además, pongamos

$$\bar{s} = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad \bar{s}_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Sea fijo arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, entonces por la convergencia de la serie (35.47) existe un número n_ε tal que

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| = \bar{s}_n - \bar{s}_{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{35.51}$$

por consiguiente se cumple también la desigualdad

$$|s - s_n| = \left| \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.52}$$

Elijamos, más adelante, un número m_ε de forma tal que la suma parcial $s_{m_\varepsilon}^*$ de la serie (35.49) contenga en calidad de sumandos todos los términos de la serie (35.46), que aparecen en la suma s_{n_ε} (dicho de otro modo, el número m_ε es tal que todos los términos de la serie (35.46) con números no superiores a n_ε, tienen en la serie (35.49) números no mayores que m_ε). Sea $m \geqslant m_\varepsilon$. Hagamos

$$s_m^{**} = s_m^* - s_{n_\varepsilon}.$$

Por cuanto $|s_m^{**}|$ no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos que entran en s_m^{**} y por cuanto los números de estos sumandos son mayores que n_ε y por consiguiente todos ellos están contenidos en la suma $\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n|$, entonces por (35.51) tenemos

$$|s_m^{**}| \leqslant \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{35.53}$$

Utilizando (35.52) y (35.53) obtendremos cuando $m \geqslant m_\varepsilon$

$$|s - s_m^*| = |s - (s_{n_\varepsilon} + s_m^{**})| \leqslant |s - s_{n_\varepsilon}| + |s_m^{**}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto significa que

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* = s.$$

Queda demostrar que la serie (34.49) también converge absolutamente. Esto se deduce directamente de la afirmación, que acabamos de demostrar, si la aplicamos a la serie (34.47). En efecto esta serie converge absolutamente (como cualquier serie convergente con términos no negativos) y por esto, según lo demostrado, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} |u_m^*|$ formada por los valores absolutos de la serie (34.49) no sólo converge (lo que significa también la convergencia absoluta de la serie (34.49)) sino que su suma coincide con la suma de la serie (34.47). □

Teorema 14. *Si la serie* (35.46) *converge absolutamente y c es un número cualquiera, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ *también converge absolutamente.*

Esto se deduce del criterio de Cauchy de convergencia de las series y de la igualdad

$$\sum_{n=1}^{n+p} |cu_k| = |c| \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|.$$

Teorema 15. *Si las series* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *convergen absolutamente, entonces su suma* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *también converge absolutamente.*

Esto se deduce del criterio de Cauchy de convergencia de las series y de la desigualdad

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k + v_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| + \sum_{k=n}^{n+p} |v_k|.$$

Teorema 16. *Si las series*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{35.54}$$

convergen absolutamente, entonces la serie formada por todos los productos dos a dos posibles $u_m v_n$ *de los términos de estas series, situados en cualquier orden, también converge absolutamente. Si la suma de esta serie es igual a s y la suma de las series* (35.54) *son iguales respectivamente a s′ y s″, es decir,*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = s', \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s'',$$

entonces

$$s = s's''. \tag{35.55}$$

DEMOSTRACIÓN. Hagamos la siguiente tabla de los productos dos a dos de los términos de las series (35.54):

u_1v_1	u_1v_2	$\ldots$	u_1v_n	$\ldots$
u_2v_1	u_2v_2	$\ldots$	u_2v_n	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
u_mv_1	u_mv_2	$\ldots$	u_mv_n	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Compongamos de los elementos de esta tabla la serie

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + \ldots, \tag{35.56}$$

en la cual los elementos están dispuestos en el orden mostrado en el siguiente esquema donde en el lugar de cada producto de la tabla está señalado su número de orden como término de la serie (35.56):

1	2	5	10	$\ldots$
4	3	6	11	$\ldots$
9	8	7	12	$\ldots$
16	15	14	13	$\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Demostremos que la serie (35.56) converge absolutamente, es decir, que converge la serie

$$|u_1v_1| + |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| + \ldots \tag{35.57}$$

Para esto, en virtud de que sus términos son no negativos es suficiente demostrar que existe al menos una subsucesión acotada superiormente de sus sumas parciales (véase el lema 2 en el p. 35.4).

Denotemos por $\tilde{s}_n'$ y $\tilde{s}_n''$ las sumas parciales de las series respectivamente

$$\tilde{s}' \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|, \quad \tilde{s}'' \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|.$$

las que por la convergencia absoluta de las series (35.54) convergen, es decir, $0 \leqslant \tilde{s}' < +\infty$, $0 \leqslant \tilde{s}'' < +\infty$. Entonces para las sumas parciales de orden n^2 de la serie (35.57) tendremos

$$\tilde{s}_1 = |u_1v_1| = \tilde{s}_1'\tilde{s}_1'' \leqslant \tilde{s}'\tilde{s}'',$$

$$\tilde{s}_4 = |u_1v_1| + |u_1v_2| + |u_2v_2| + |u_2v_1| = \\ = (|u_1'| + |u_2|)(|v_1| + |v_2|) = \tilde{s}_2'\tilde{s}_2'' \leqslant \tilde{s}'',$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\tilde{s}_{n^2} = |u_1v_1| + \ldots + |u_1v_n| + \ldots + |u_nv_n| + \ldots + |u_nv_1| = \\ = (|u_1| + \ldots + |u_n|)(|v_1| + \ldots + |v_n|) = \tilde{s}_n'\tilde{s}_n'' \leqslant \tilde{s}'\tilde{s}'',$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Así, la subsucesión de sumas parciales $\{\tilde{s}_{n^2}\}$ de la serie (35.57) es acotada superiormente y por consiguiente esta serie converge. Esto significa la convergencia absoluta de la serie (35.56) y de cualquier serie obtenida por una reordenación arbitraria de sus términos (véase el teorema 13). De esta forma, cualquier serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{m_k}v_{n_k} \tag{35.58}$$

formada por todos los productos dos a dos posibles u_mv_n de los términos de las series (35.54) converge y además absolutamente.

Para la demostración de las fórmulas (35.55) nos aprovechemos de que la suma de la serie (35.58) no depende del orden de sus términos y de nuevo los ubicaremos del modo más cómodo para nosotros, precisamente, analicemos de nuevo la serie (35.56). Denotando por s_n' y s_n'' las sumas parciales de las series (35.54) para las sumas parciales s_{n^2}, $n = 1, 2, \ldots$, de la serie (35.56), evidentemente, obtenemos

$$s_{n^2} = s_n's_n''. \tag{35.59}$$

Pero

$$\lim_{n\to\infty} s_n' = s', \quad \lim_{n\to\infty} s_n'' = s'', \quad \lim_{n\to\infty} s_{n^2} = s,$$

por esto pasando al límite en la igualdad (35.59) cuando $n \to \infty$ obtenemos la igualdad (35.55). □

Los teoremas 13 — 16 muestran que las propiedades de las series absolutamente convergentes son muy parecidas a las propiedades de las sumas finitas: la magnitud de la suma de esta serie no depende del orden de los sumandos, las series absolutamente convergentes se pueden multiplicar término a término, etc. En el siguiente punto será demostrado que para las series convergentes, que no convergen absolutamente estas propiedades no tienen lugar.

OBSERVACIÓN. Como conclusión de este punto subrayemos que cuando los términos de la serie son reales o complejos, pero cambian de signo, el problema de la convergencia de esta serie no se puede resolver sólo con ayuda de la definición de orden de decrecimiento del término n-ésimo. Por ejemplo los términos n-ésimos de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tienen un mismo orden cuando $n \to \infty$, no obstante la primera serie diverge y la segunda converge.

Más aún, no es difícil citar el ejemplo de dos series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, cuyos términos n-ésimos son equivalentes ($u_n \sim v_n$, $n = 1, 2, \ldots$), de las cuales una converge y la otra diverge.

En calidad de series tales se pueden tomar, por ejemplo, la serie con término n-ésimo

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

y la serie con término n-ésimo

$$v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

Por otro lado, aquí $u_n \sim v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ya que

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)\ln(n+1)}$$

y por esto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

Por otro lado la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es una serie del tipo (35.37), por eso converge. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge. En efecto, si convergiera, entonces convergería también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

es decir, la serie (35.29) la cual, como ya vimos, diverge.

Sería un error, no obstante, considerar que el método de selección de la parte principal es útil sólo en el caso de series con términos reales que tienen un mismo signo. El método de selección de la parte principal puede utilizarse con éxito para aclarar la convergencia de cualquier serie. La esencia de este método en el caso analizado está basada en la siguiente observación: sea dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Si representamos sus términos de la forma $u_n = v_n + w_n$ donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge y diverge simultáneamente con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (¿por qué?). Por esto para la investigación de la convergencia de la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_n$ es conveniente tratar de representar sus términos, por ejemplo, en la forma $u_n = v_n + w_n$ de tal modo que $w_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ cuando $\alpha > 1$. Por cuanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge (incluso absolutamente) entonces la convergencia de la serie dada se reduce a la investigación de la convergencia de la serie $\sum_{n \to \infty}^{\infty} v_n$. Este método, claro está, es conveniente en el caso, cuando la serie obtenida $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ se somete con más facilidad a la investigación de la convergencia, que la serie dada (compárese con la investigación análoga de la convergencia de las integrales en el p. 33.6).

Por ejemplo, analicemos la serie con término general

$$u_n = \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right].$$

Por cuanto (véase la observación en el p. 13.3)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad x \to 0,$$

entonces

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Hagamos $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n}$ y $w_n = u_n - v_n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge como la diferencia de series, de las cuales una converge y la otra diverge. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge, e incluso absolutamente ya que $w_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, $n \to \infty$.

De esta forma, la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge aunque su "parte principal" $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ es una serie convergente. Así estas series son un ejemplo más de dos series cuyos términos forman sucesiones equivalentes de las cuales una converge y la otra diverge.

35.11. CRITERIOS DE D'ALEMBERT Y CAUCHY PARA SERIES NUMÉRICAS ARBITRARIAS

Si en el caso de la serie numérica (35.1) $u_n \neq 0$, $u_n \in C$, $n = 1, 2, \ldots$, existen un q, $0 < q < 1$ y un número n_0 tal que para todos los $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant q \text{ ó } \sqrt[n]{|u_n|} \leqslant q,$$

entonces por el criterio de D'Alembert, respectivamente de Cauchy (véase el p. 35.6) la serie dada converge y además absolutamente.

Si existe un número n_0 tal que para todos los $n \geqslant n_0$ tiene lugar la desigualdad

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1 \qquad (35.60)$$

ó

$$\sqrt[n]{|u_n|} \geqslant 1, \qquad (35.61)$$

entonces a base de los criterios de D'Alembert y Cauchy sólo se puede afirmar que en este caso la serie de las magnitudes absolutas de los términos de la serie (35.1), es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge, lo cual sólo significa que la serie dada no converge absolutamente.

En realidad, de (35.60) y de (35.61) se deduce que la serie dada (35.1) en general diverge. En efecto, como se ve de la demostración del criterio de D'Alembert, respectivamente del criterio de Cauchy, aplicable a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (véanse los teoremas 8 y 9 en el p. 35.6) cuando se cumple cada una de las condiciones (35.60) y (35.61) por separado la sucesión $\{|u_n|\}$ no tiende a cero, por lo tanto tampoco tiende a cero la sucesión $\{u_n\}$, es decir, no se cumple la condición necesaria de convergencia de la serie.

Los criterios obtenidos de divergencia de la serie también se llaman habitualmente *criterios de D'Alembert y de Cauchy.*

35.12. SERIES CONVERGENTES QUE NO CONVERGEN ABSOLUTAMENTE. TEOREMA DE RIEMANN

Si una serie converge, pero no absolutamente, entonces como será mostrado a continuación ya no se puede afirmar que reordenando sus términos obtendremos una serie convergente a la misma suma. La paradoja al final del p. 35.9 se explica con esta circunstancia: la serie allí obtenida (35.45) se diferencia, en el orden de los términos, de la serie dada (35.42) convergente, pero no absolutamente y por esto no se podía afirmar que su suma es también igual a S. Más aún la contradicción obtenida muestra que esto a ciencia cierta no es así.

Así, la suma de la serie depende del orden de los sumandos, es decir, la ley comutativa de la suma no tiene lugar para las series convergentes no absolutamente.

Si en la serie dada agrupamos de alguna manera sus términos sin infringir su orden y los sumamos, entonces la sucesión de las sumas parciales de la serie obtenida será una subsucesión de las sumas parciales de la serie inicial. Por esto si la serie original converge, entonces convergerá también la nueva serie obtenida, además las sumas de ambas series serán iguales. No obstante, si la serie dada diverge, entonces la segunda serie puede converger. Por ejemplo, la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + + \ldots$ diverge. Al agrupar dos a dos sus términos $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - - 1) + \ldots$ obtendremos una serie convergente. De esta forma, en general, para las series no es cierta tampoco la ley asociativa de la suma.

Analicemos algunas propiedades de las series convergentes, pero no absolutamente, con términos reales. Sea dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (35.62)$$

Denotemos por $u_1^+, u_2^+, \ldots, u_n^+, \ldots$ sus términos no negativos: $u_n^+ \geqslant 0$, y por $-u_1^-, -u_2^-, \ldots, -u_n^-, \ldots$ sus términos negativos: $u_n^- > 0$, tomados en el mismo orden que estén situados en la serie (35.56). Analicemos las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \qquad (35.63)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-, \qquad (35.64)$$

Señalemos que si la serie (35.63) contiene sólo un número finito de términos diferentes de cero, o la serie (35.64), todos los términos de la cual por definición son distintos de cero, está formada sólo por un número finito de términos, entonces comenzando desde un número, todos los términos de la serie original (35.62) tienen el mismo signo y por lo tanto su convergencia es equivalente a la convergencia absoluta.

Lema 3. *Si la serie* (35.62) *converge, pero no absolutamente, entonces ambas series* (35.63) *y* (35.64) *divergen.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (35.62) converge, es decir, existe el límite finito

$$\lim_{n \to \infty} s_n \qquad (35.65)$$

donde s_n son sus sumas parciales, $n = 1, 2, \ldots$. Denotemos por s_m^+, $m = 1, 2, \ldots$, la suma parcial de orden m de la serie (35.63) y por s_k^-, $k = 1, 2, \ldots$, la suma parcial de orden k de la serie (35.64). Para comodidad hagamos además $s_0^+ = s_0^- = 0$. Entonces para cualquier natural n existen $m = m(n)$ y $k = k(n)$ enteros no negativos tales que

$$s_n = s_m^+ - s_k^-, \quad n = m + k; \qquad (35.66)$$

además, por cuanto la serie (35.62) converge no absolutamente, entonces ambas series (35.63) y (35.64) contienen un número infinito de términos diferentes de cero y por consiguiente

$$\lim_{n \to \infty} m(n) = \lim_{n \to \infty} k(n) = +\infty. \qquad (35.67)$$

Denotemos ahora por $\tilde{s}_n$ la suma parcial de orden n de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \qquad (35.68)$$

Entonces evidentemente

$$\tilde{s}_n = s_m^+ + s_k^-. \tag{35.69}$$

Por cuanto la serie dada (35.62) no converge absolutamente, es decir, por cuanto diverge la serie (35.68) entonces

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n = +\infty. \tag{35.70}$$

Ambos sumandos del segundo miembro de la igualdad (35.69) son no negativos, por eso de (35.70) y de (35.67) se deduce que al menos uno de los sumandos señalados tiende al infinito cuando $n \to \infty$. Volviéndonos ahora a la igualdad (35.66) vemos que el primer miembro de esta igualdad tiene límite finito (véase (35.65)) y una de las sumas s_m^+ y s_k^-, según lo demostrado, tiende a infinito cuando $n \to \infty$. Esto es posible sólo con la condición de que la segunda de las sumas analizadas también tiende a infinito cuando $n \to \infty$.

Así, ambas series (35.63) y (35.64) divergen. □

Teorema 17 (de Riemann). *Si la serie* (35.62) *converge, pero no absolutamente, entonces, cualquiera que sea el número A, se pueden reordenar los términos de esta serie de tal forma que la suma de la serie obtenida será igual a A.*

DEMOSTRACIÓN. Analicemos de nuevo las series (35.63) y (35.64). Por el lema

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^+ = +\infty, \tag{35.71}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = +\infty. \tag{35.72}$$

Sea para mayor exactitud $A \geqslant 0$. Escojamos un número n_1 tal que

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1}^+ > A, \tag{35.73}$$

además en el caso cuando el número $n_1 = 1$ no satisface esta condición, la elección de n_1 la llevaremos a cabo aún de forma tal que se cumpla también la desigualdad

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ \leqslant A. \tag{35.74}$$

La existencia de los números n_1 para los cuales se cumple la condición (35.73) se deduce de la condición (35.71), para que además se cumpla también la condición (35.74) es necesario tomar el menor de estos números n_1.

Más adelante escojamos de la serie (35.64) los n_2 primeros términos tales que

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- < A,$$

además, en el caso cuando el número $n_2 = 1$ no satisface esta condición, la elección de n_2 la llevaremos a cabo de forma tal que se cumpla también la desigualdad

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2-1}^- \geqslant A.$$

La existencia de tal número n_2 se demuestra partiendo de (35.72) análogamente a la existencia del número n_1.

Escojamos de nuevo una subserie de la serie (35.63) con términos hasta cierto número n_3 de tal forma que se cumple la desigualdad

$$u_1^+ + \ldots u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3-1}^+ > A$$

y (cuando $n_3 > n_1 + 1$) la desigualdad

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3-1}^+ \leqslant A.$$

Continuando este proceso obtendremos la serie

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots$$
$$\ldots + u_{n_3}^+ - u_{n_2+1}^- - \ldots - u_{n_4}^- + \ldots. \tag{35.75}$$

Para la sucesión de sus sumas parciales

$$s_{n_1}, s_{n_1+n_2}, s_{n_2+n_3}, \ldots s_{n_k+n_{k+1}}, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

a base de la construcción se cumplen las desigualdades

$$s_{n_1} > A, s_{n_1+n_2} < A, s_{n_2+n_3} > A, \ldots,$$

además, la desviación del número A de cada una de las sumas parciales señaladas $s_{n_k+n_{k+1}}$ no es mayor que su último término

$$|A - s_{n_k+n_{k+1}}| \leqslant u_{n_{k+1}}^{\pm}. \tag{35.76}$$

Aquí por $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ está denotada la magnitud absoluta del término de la serie (34.75) con número n_{k+1} en la serie (34.75) y con el índice superior correspondiente "+" ó "−".

Por la convergencia de la serie original (35.62) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

y ya que cuando $k \to \infty$ el número del término $u_{n_{k+1}}^{\pm}$ en la serie (35.62) también tiende a ∞, entonces

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_{k+1}}^{\pm} = 0.$$

Por esto de (35.76) se deduce que

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k+n_{k+1}} = A. \tag{35.77}$$

Si ahora tomamos cualquier suma parcial s_n de la serie (35.75), entonces por la construcción de esta serie siempre se puede hallar un número $k = k(n)$ tal que tendrá lugar o bien la desigualdad

$$s_{n_k+n_{k+1}} \leqslant s_n \leqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

o bien la desigualdad

$$s_{n_k+n_{k+1}} \geqslant s_n \geqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}},$$

y por esto de (35.77) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = A. \ \square$$

Ejercicio 12. Demuéstrese que si la serie (35.62) converge pero no absolutamente, entonces se puede reordenar sus términos de forma tal que la serie obtenida divergerá. En particular se puede hacer de forma tal que su suma sea igual a $+\infty$, $-\infty$, e incluso que la sucesión de sus sumas parciales no tenga límite finito ni infinito.

35.13. TRANSFORMACIÓN DE ABEL. CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE DIRICHLET Y DE ABEL

En este punto serán demostrados los criterios suficientes de convergencia de series numéricas, aplicables también para las series con términos complejos.

Preliminarmente analicemos una transformación de las sumas del tipo

$$S = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \tag{35.78}$$

donde a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son números complejos. Hagamos

$$B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \ldots, B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

entonces

$$b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \ldots, b_n = B_n - B_{n-1}$$

y

$$S = a_1B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}).$$

Abriendo los paréntesis y agrupando nuevamente los términos, obtenemos la igualdad

$$S = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n.$$

De esta forma, finalmente tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})B_i + a_nB_n. \tag{35.79}$$

Esta transformación de las sumas del tipo (35.78) se denomina *transformación de Abel**), ella es en cierto sentido un análogo de la integración por partes. Esta analogía se ve especialmente si escribimos la fórmula (35.79) de la forma

$$\sum_{i=2}^{n} a_i(B_i - B_{i-1}) = (a_nB_n - a_1B_1) - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)B_i.$$

Demostremos un lema con ayuda de la transformación de Abel.

Lema 4 (desigualdad de Abel). *Si*

$$a_i \geqslant a_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{35.80}$$

ó

$$a_i \leqslant a_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{**)} \tag{35.81}$$

*) N. Abel (1802 — 1829), matemático noruego.

**) De estas desigualdades se deduce que los números a_i, $i = 1, 2, \ldots n$, son reales.

y

$$|b_1 + \ldots + b_i| \leqslant B, \quad b_i \in C, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{35.82}$$

entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \leqslant B(|a_1| + 2|a_n|). \tag{35.83}$$

En efecto por las condiciones (35.80) ó (35.81) todas las diferencias $a_i - a_{i+1}$ en la fórmula (35.79) son de un mismo signo y por esto en virtud de las fórmulas (35.79) y la condición (35.82) tenemos:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}|\,|B_i| + |a_n|\,|B_n| \leqslant$$

$$\leqslant B\left[\left|\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})\right| + |a_n|\right] = B[|a_1 - a_n| + |a_n|] \leqslant B[|a_1| + 2|a_n|]. \ \square$$

Es sustancial prestar atención a que en la desigualdad de Abel la estimación de la suma analizada se da a través del primero y el último de sus términos y no depende del número de sumandos en esta suma.

Teorema 18 (criterio de Dirichlet). *Sea dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n \tag{35.84}$$

tal que la sucesión $\{a_n\}$ tiende a cero monótonamente y la sucesión de sumas parciales $\{B_n\}$ de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \in C, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es acotada, entonces la serie (35.78) *converge.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la acotación de la sucesión $\{B_n\}$ existe un número $B > 0$ tal que $|B_n| \leqslant B$ para todos los $n = 1, 2, \ldots$. De aquí se deduce que para cualquier $n = 2, 3, \ldots$ y cualquier entero $p \geqslant 0$

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} b_i\right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leqslant |B_{n+p}| + |B_{n-1}| \leqslant 2B. \tag{35.85}$$

Sea dado $\varepsilon > 0$. De la condición $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ se deduce la existencia de un número n_ε tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}. \tag{35.86}$$

Ahora aplicando la desigualdad de Abel (35.83) a la suma $\sum\limits_{i=n}^{n+p} a_ib_i$ donde $n \geqslant n_\varepsilon$ y prestando atención a las desigualdades (35.85) y (35.86) obtendremos:

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_ib_i\right| \leqslant 2B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon,$$

de aquí, por el criterio de Cauchy se deduce que la serie (35.84) converge. $\square$

En calidad de ejemplo analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n}. \tag{35.87}$$

Ante todo, si $\alpha \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen} k\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\alpha\operatorname{sen}\frac{n}{2}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

y por esto

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Si $\alpha = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces todos los términos de las sumas $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha$ son iguales a cero, por esto, estas sumas para cualquier n son iguales a cero y por consiguiente acotadas. De esta forma para todos los α, las sumas $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} k\alpha$ son acotadas.

Por otro lado la sucesión $\{1/n\}$ decrece monótonamente y tiende a cero, por esto por el criterio de Dirichlet la serie (35.87) converge para cualquier α.

Observemos que el criterio de Leibniz (véase el p. 35.9) se deduce del criterio de Dirichlet. En efecto, si en la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{35.88}$$

donde $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$, hacemos $b_n = (-1)^n$, entonces, evidentemente, las sumas $b_1 + \ldots + b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, son iguales a cero o a la unidad y por esto son acotadas; en este caso en virtud del criterio de Dirichlet la serie (35.88) converge.

De la desigualdad de Abel (35.88) se puede obtener otro criterio más de convergencia de una serie.

Teorema 19 (criterio de Abel). *Si la sucesión $\{a_n\}$ es monótona y acotada, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \in C$, $n = 1, 2, \ldots$, converge, entonces la serie* (35.78) *también converge.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la acotación de la sucesión $\{a_n\}$ existe un número $M > 0$ tal que para todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumple la desigualdad $|a_n| \leqslant M$.

Sea ahora dado $\varepsilon > 0$. De la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se deduce la existencia de un número n_ε tal que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$ se cumple la desigualdad $\left|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Por esto para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$ por el lema 4, es válida la desigualdad

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}(|a_n| + 2|a_{n+p}|) < \varepsilon.$$

Por el criterio de Cauchy de convergencia de las series esto significa que la serie (35.84) converge. □

Señalemos que el teorema 19 puede ser obtenido del teorema 18. En efecto, si se cumplen las condiciones del teorema 19, entonces por la monotonía y la acotación de la secesión $\{a_n\}$ existe el límite finito $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y por consiguiente la sucesión $c_n = a_n - a$, $n = 1, 2, \ldots$, tiende a cero monótonamente. La sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es acotada ya que esta serie converge por condición. Por esto, según el teorema 18 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n$ converge. Pero $c_n b_n = a_n b_n - a b_n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a b_n = a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también converge. Por consiguiente, como suma de dos series convergentes, converge también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ejemplo. Investigamos la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha \cos\frac{\pi}{n}}{\ln\ln n}. \tag{35.89}$$

Observemos que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\ln\ln n}$ converge por el criterio de Dirichlet: la sucesión $\frac{1}{\ln\ln n}$ tiende a cero monótonamente y la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{sen} n\alpha$ es acotada (véase el ejemplo anterior). La sucesión $\cos\frac{\pi}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$, es monótona, por esto, según el criterio de Abel la serie (35.89) converge para todos los α.

35.14.*. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LOS RESTOS DE LAS SERIES CONVERGENTES Y DE LAS SUMAS PARCIALES DE ALGUNAS SERIES DIVERGENTES

De forma semejante a las integrales impropias, para las series es necesario a veces aclarar no sólo la cuestión de su convergencia, sino en el caso de convergencia de la serie estimar su velocidad, y en el caso de divergencia aclarar el carácter del comportamiento de sus sumas parciales cuando crece su número.

En el caso de las series de tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

donde f es una función decreciente no negativa, para problemas semejantes a veces se logra obtener respuesta con ayuda del método aplicado en la demostración del criterio integral de convergencia de las series (véase el p. 35.7). En efecto, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, y por consiguiente converge la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$, entonces, denotando como siempre, por r_n el resto de la serie analizada obtendremos la desigualdad

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_{n}^{+\infty} f(x)dx. \tag{35.90}$$

Esta es la estimación buscada del resto de la serie que muestra que cuando $n \to \infty$ este resto decrece no más lento que la integral $\int_n^{+\infty} f(x)dx$.

Análogamente se obtiene la estimación inferior para el resto de la serie:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)dx = \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx. \tag{35.91}$$

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ diverge y por consiguiente diverge también la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$, entonces, observando que

$$0 \leqslant f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k) - f(k+1)$$

y sumando estas desigualdades por k desde 1 hasta n, obtendremos:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant f(1) - f(n+1) < f(1).$$

De las desigualdades anteriores se deduce que la sucesión

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

crece monótonamente y es acotada superiormente y por eso tiende a un límite finito. Dicho de otro modo, existe una constante c tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx\right] = c. \tag{35.92}$$

Esta igualdad se puede transcribir en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^{n+1} f(x)dx + c + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{35.93}$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Ella muestra que con exactitud hasta una sucesión infinitesimal las sumas parciales de la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ crecen, así como $\int_1^{n+1} f(x)dx + c$ donde c es cierta constante.

Ejemplos. 1. Analicemos la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que suponiendo $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geqslant 1$, escribiremos en la forma $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

La función $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geqslant 1$ satisface las condiciones del teorema 10 y por cuanto $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$, entonces de lo demostrado se deduce que existe una constante C tal que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + C + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Esta constante C se llama *constante de Euler*. Observando que $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$ cuando $n \to \infty$ en la fórmula obtenida se puede sustituir $\ln(n+1)$ por $\ln n$ (además, naturalmente, varía la sucesión ε_n, pero ésta permanece siendo una sucesión infinitesimal)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{35.94}$$

Es curioso observar que hasta ahora no se logra aclarar la naturaleza de la constante euleriana en el sentido que no se conoce incluso si es un número racional o no.

De la fórmula (35.94) evidentemente se deduce la igualdad asintótica

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \ln n, \quad n \to \infty.$$

2. Analicemos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

En este caso tomemos la función $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x \geqslant 1$, entonces

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

De (35.92) y (35.93) para el caso dado se deduce que existe una constante c_α, tal que

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} + c_\alpha + \varepsilon_n,$$

donde $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. De aquí obtenemos la igualdad asintótica

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Analicemos la serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$.

Tomando de nuevo en calidad de función f la función $\frac{1}{x^\alpha}$ y observando que

$$\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}}$$

en virtud de las fórmulas (35.90) y (35.91) obtendremos:

$$\frac{1}{(\alpha - 1)(n+1)^{\alpha - 1}} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}},$$

de donde

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}}.$$

4. Analicemos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{35.95}$$

Ya sabemos que esta serie converge y que su límite es igual al número (véase el ejemplo 6 en el p. 4.9):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{35.96}$$

Estimemos el resto r_n de esta serie

$$0 = r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n!(n+1)^2} < \frac{1}{n!n}. \tag{35.97}$$

Por consiguiente si s_n es una suma parcial de la serie (35.96), entonces

$$e = s_n + r_n \tag{35.98}$$

y por la desigualdad (35.97) es válida la siguiente estimación del error al cambiar e por s_n:

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

De esta forma el número e se puede calcular aproximadamente en forma de la suma

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

además, la estimación obtenida señala la exactitud de las aproximaciones obtenidas.

OBSERVACIÓN. Si hacemos

$$\theta_n \stackrel{\text{def}}{=} r_n n! n,$$

entonces de (35.97) obtendremos

$$0 < \theta_n < 1,$$

y por consiguiente en virtud de (35.98)

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \quad 0 < \theta_n < 1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{35.99}$$

De aquí se deduce fácilmente que el número e es irracional. En efecto si e fuera un número racional: $e = \frac{m}{n}$, $m \in N$, $n \in N$, entonces por (35.99) sería válida la igualdad

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n},$$

de donde
$$n!m - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) n!n = \theta_n.$$
Pero esta igualdad es imposible ya que a la izquierda aparece un número entero y a la derecha θ_n, donde $0 < \theta_n < 1$. □

35.15. SOBRE LA SUMABILIDAD DE SERIES POR EL MÉTODO DE LAS MEDIAS ARITMÉTICAS

A veces tiene interés el estudio de las series divergentes, es decir, de las series cuyas sumas parciales no tienden a un límite finito. Como ya vimos series semejantes dan la posibilidad de obtener fórmulas asintóticas (véanse el p. 35.14* y también el p. 37.10*). El estudio de las series divergentes es conveniente en particular en el caso cuando para ellas se logra definir con el método adecuado el concepto de suma. Los distintos métodos de definición de las sumas de series se llaman *métodos de sumación de series*. El método de sumación de una serie se llama regular si para una serie convergente su suma definida por este método coincide con su suma ordinaria (en este caso se dice: el método regular suma a la serie convergente a su suma).

Analicemos el así llamado método de sumación de la serie con las medias aritméticas de sus sumas parciales. Sea dada la serie
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$
y sea
$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
una sucesión de sus sumas parciales. Denotemos por σ_n la media aritmética de los primeros n términos de esta sucesión
$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}.$$

Definición 5. *Una serie se llama sumable por el método de las medias aritméticas al número σ, si la sucesión $\{\sigma_n\}$ de las medias aritméticas de sus sumas parciales converge a σ:*
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma.$$

El método de sumación con las medias aritméticas es un método regular de sumación, pues, del hecho de que cierta sucesión $\{x_n\}$ tiene límite se deduce que la sucesión compuesta por las medias aritméticas de sus primeros n términos
$$\left\{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
tiene ese mismo límite (véase el ejemplo 5 en el p. 3.1).

Por otro lado, existen series divergentes que se suman por el método de las medias aritméticas. Tal ejemplo es la serie
$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \qquad (35.100)$$

En este caso $s_{2k} = 0$, $s_{2k-1} = 1$, $\sigma_{2k} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$, es decir, la serie (35.100) se suma por el método de las medias aritméticas.

Con la aplicación de la sumación de las series por el método de las medias aritméticas nos encontraremos en el p. 55.6.

Ejercicios. Investíguense la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{-n}}{n^3+1}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n \ln n}{n^2}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$.

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+1}{n-1}$.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln\frac{n-1}{n+1}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right]$.

25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right]$.

Problema 23 (criterio de Du Bois Reymond*) de convergencia de una serie). Demuéstrese que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (a_n y b_n son números complejos) converge, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente.

*) P. Du Bois Reymond (1831 — 1899), matemático alemán.

Problema 24 (criterio de Dedekind de convergencia de una serie). Demuéstrese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (a_n y b_n son números complejos) converge, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_{n+1})$ converge absolutamente, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son acotadas.

§ 36. SUCESIONES FUNCIONALES Y SERIES DE FUNCIONES

36.1. CONVERGENCIA DE SUCESIONES FUNCIONALES Y SERIES DE FUNCIONES

En el presente párrafo analizaremos las sucesiones y series cuyos términos son ciertas funciones de valores complejos, es decir, las sucesiones

$$f_n(x) \in C, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.1}$$

y respectivamente las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) \in C, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{36.2}$$

Para cada valor fijo del argumento x estas sucesiones y series, evidentemente, representan las sucesiones y series numéricas y analizadas.

Sea X cierto conjunto de elementos, en particular, el conjunto de puntos de una recta, de un plano de un espacio n-dimensional o en general de elementos de naturaleza arbitraria y sea (36.1), una sucesión de funciones que están definidas sobre el conjunto X y cuyos valores son en general números complejos.

Definición 1. *La sucesión* (36.1) *se llama acotada sobre el conjunto X, si existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumplen las desigualdades*

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

(A veces en este caso la sucesión (36.1) se llama también *uniformemente acotada.*)

Definición 2. *La sucesión* (36.1) *se llama decreciente (creciente) sobre el conjunto X si para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumplen las desigualdades*

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

(respectivamente, si para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$ se cumplen las desigualdades

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)).$$

Esta definición, evidentemente, supone que las funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, toman valores reales.

Definicion 3. *La sucesión* (36.1) *se llama convergente en el punto**) $x_0 \in X$, *si la sucesión numérica* $\{f_n(x_0)\}$ *converge.*

*) Llamamos puntos a los elementos del conjunto X.

La sucesión (36.1) *se llama convergente sobre el conjunto X si converge en cada punto del conjunto X.*

Si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in X$, *entonces se dice que la sucesión* (36.1) *converge a la función* $f(x)$, $x \in X$.

Una definición análoga se puede dar también para la serie (36.2).

Definición 3′. *La serie* (36.2) *se llama convergente en el punto $x_0 \in X$ si converge la serie numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

La serie (36.2) *se llama convergente sobre el conjunto X si converge en cada punto de este conjunto.*

Definición 4. *La serie* (36.2) *se llama convergente absolutamente sobre el conjunto X si sobre el conjunto X converge la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. De forma semejante al caso de las series numéricas, la suma

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

se llama suma parcial n-ésima de la serie (36.2), el límite de las sumas parciales de la serie (36.2) convergente sobre el conjunto X se llama su *suma* $s(x)$

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

La serie

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \tag{36.3}$$

se llama *resto n-ésimo de la serie* (36.2). El resto de la serie converge sobre X si y sólo si sobre X converge la misma serie (36.2). Si en este caso la suma del resto de la serie la denotamos por $r_n(x)$, entonces

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

Como en el caso de las series numéricas, por definición, cada serie de funciones es un par de sucesiones $\{u_n(x)\}$ y $\{s_n(x)\}$ donde $u_n(x)$ son sus términos y $s_n(x)$, sus sumas parciales

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Además para cada sucesión funcional (36.1) existe la serie (36.2) para la cual es una sucesión de sus sumas parciales. Los términos de esta serie se definen unívocamente

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots$$

Esta circunstancia da la posibilidad de parafrasear cualquier teorema, demostrado para las series de funciones, en el teorema correspondiente para las sucesiones funcionales y viceversa. Utilizaremos repetidas veces esta circunstancia.

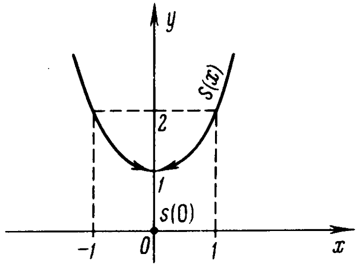


FIG. 148

Ejemplos 1. Sea dada la serie

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \tag{36.4}$$

z es un número complejo. Investiguemos su convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la seire con término n-ésimo $u_n = \frac{|z|^n}{n!}$. Aplicando el criterio de D'Alembert obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

para cualquier complejo z. De esta forma la serie (36.4) converge absolutamente y, entonces, sencillamente converge para cualquier complejo z o, como se dice comúnmente, sobre todo el plano complejo.

2. Estudiemos la convergencia de la serie

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots, \tag{36.5}$$

x es número real. Esta serie converge para todos los x. En efecto, si $x \neq 0$, entonces tenemos la suma de una progresión geométrica con denominador

$$q = \frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < q < 1.$$

Y en este caso la suma $s(x)$ de la serie (36.5) se calcula fácilmente:

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Si $x = 0$, entonces todos los términos de la serie (36.5) son iguales a cero, por esto evidentemente la serie converge y $s(0) = 0$.

De esta forma

$$(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x = 0. \\ 1 + x^2 & \text{para} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

La gráfica de la función $s(x)$ está representada en la fig. 148.

Como se ve, a pesar de que todos los términos de la serie (36.5) son funciones continuas y la serie converge en todos los puntos del eje real, su suma es una función discontinua. Por consiguiente en el caso de las series convergentes (36.2) cuyos términos son funciones reales continuas $u_n(x)$ su suma $s(x)$, en general, no es continua, es decir

$$\lim_{x\to x_0} s(x) \neq s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

De esta forma, el límite de la suma de un número infinito de sumandos no es igual obligatoriamente a la suma de sus límites.

La serie analizada (36.5) muestra, cómo en procesos límites (la progresión geométrica) de funciones continuas sencillas surgen funciones discontinuas que son de naturaleza mucho más compleja.

En el futuro aclararemos las condiciones, para las cuales se puede garantizar la continuidad de la suma de una serie convergente de funciones continuas.

Ejercicios.. Investíguense la convergencia y la convergencia absoluta de las series:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$. 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \operatorname{sen} nx}{1+n^2}$.

36.2. CONVERGENCIA UNIFORME DE LAS SUCESIONES FUNCIONALES

Definición 5. *Sean dadas la sucesión de funciones* (36.1) *y la función f, definidas sobre el conjunto X. Diremos que la sucesión señalada converge a la función f uniformemente sobre el conjunto X si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que si $n \geqslant n_\varepsilon$ entonces para todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{36.6}$$

La sucesión (36.1) *se llama convergente uniformemente sobre el conjunto X, si existe una función f a la cual ella uniformemente converge sobre X.*

Es evidente que si la sucesión (36.1) converge uniformemente a la función f sobre el conjunto X, entonces también converge sencillamente a esta función sobre X.

Si la sucesión $\{f_n\}$ converge sobre el conjunto X a la función f, entonces escribiremos esto simbólicamente de la siguiente forma

$$f_n \underset{X}{\rightarrow} f.$$

Si esta sucesión converge uniformemente sobre X a la función f, entonces escribiremos

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

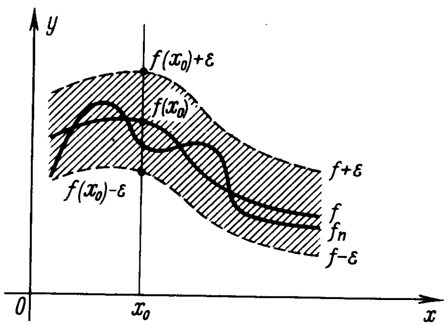


FIG. 149

Observemos que si la sucesión (36.1) converge sencillamente a la función f sobre el conjunto X, entonces esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $x \in X$ existe el número $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ dependiente tanto de ε, como de x, tal que para todos los números $n \geqslant n_0$ tiene lugar la desigualdad (36.6).

La esencia de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones consiste en que para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede elegir un número n_ε dependiente sólo del ε dado y no dependiente de la elección del punto $x \in X$, tal que para $n \geqslant n_\varepsilon$ la desigualdad (36.6) se cumplirá en todos los puntos sobre el conjunto X, es decir, "las gráficas" de las funciones f_n estarán situadas en la "ε-franja" que rodea a la gráfica de la función f (fig. 149).

De esta forma, en el caso de la convergencia uniforme para cualquier $\varepsilon > 0$, para todos los n suficientemente grandes (precisamente para $n \geqslant n_\varepsilon$), los valores de las funciones f_n aproximan a la función f con un error menor que ε, en todos los puntos del conjunto X.

Escribamos, para mayor claridad, las definiciones de sucesiones convergentes y convergentes uniformemente sobre el conjunto X con ayuda de los símbolos de existencia y universalidad:

$$f_n \underset{X}{\to} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists n_\varepsilon)(\forall n \geqslant n_\varepsilon)\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon)(\forall x \in X)(\forall n \geqslant n_\varepsilon):\, |f_n/(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

En esta escritura una definición se diferencia de la otra por la permutación de los símbolos $(\forall x \in X)$ y $(\exists n_\varepsilon)$.

Ejemplos. 1. La sucesión

$$1, x, x^2, \ldots, x^n \ldots \tag{36.7}$$

sobre el segmento $[0, q]$, $0 < q < 1$, converge uniformemente a la función idénticamente igual a cero. En efecto, si $0 \leqslant x \leqslant q$, entonces

$$0 \leqslant x^n \leqslant q^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{36.8}$$

Por cuanto $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo existe un n_ε tal que

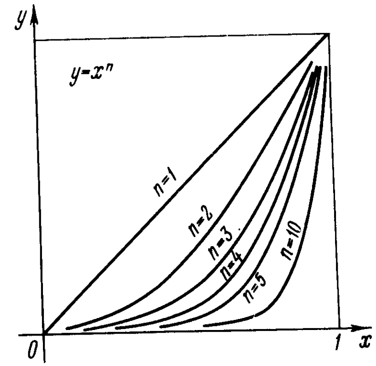


FIG. 150

$q^n < \varepsilon$ para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$. En virtud de la desigualdad (36.8) $0 \leqslant x^n < \varepsilon$ para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in [0, q]$.

2. La misma sucesión (36.7) sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$ también, evidentemente converge a la función idénticamente igual a cero: $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$, $0 \leqslant x < 1$. No obstante en este caso la convergencia ya no es uniforme (fig. 150). En efecto, si la sucesión x^n, $n = 1, 2, \ldots$, convergiera uniformemente sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$ a cierta función, entonces también convergería sencillamente a esta función. Por esto la sucesión (36.7) puede, sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$, uniformemente converger, sólo a la función igual a cero en todos los puntos de este intervalo semiabierto.

Observemos que para cualquier n natural fijo $\lim\limits_{x \to 1} x^n = 1$. Por consiguiente cualquiera que sea ε, $0 < \varepsilon < 1$, para un n fijo se halla un x_ε, $0 < x_\varepsilon < 1$, tal que $x_\varepsilon^n \geqslant \varepsilon$ (por ejemplo, para $x_\varepsilon = \sqrt[n]{\varepsilon}$ tendremos $x_\varepsilon^n = \varepsilon$). Por esto para un ε fijo, $0 < \varepsilon < 1$, no existe un número N tal que para todos los $n \geqslant N$ y todos los $x \in [0, 1)$ se cumplirá la desigualdad (36.6) cuando $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$, $0 \leqslant x < 1$. Más aún, cualquiera que sea N que tomemos, para cada $n \geqslant N$ se encuentra un $x \in [0, 1)$ tal que para él se cumplirá la desigualdad contraria a la desigualdad (36.6), es decir,

$$|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$$

(en calidad de x concreto aquí podemos tomar por ejemplo, x_ε).

Así la convergencia no uniforme de la sucesión (36.7) sobre el intervalo semiabierto $[0, 1)$ está demostrada. Observemos que de los razonamientos realizados se deduce que la sucesión (36.7) tampoco converge uniformemente sobre cualquier intervalo del tipo $(r, 1)$ donde $0 \leqslant r < 1$, en particular, sobre el intervalo $(0, 1)$.

Se debe prestar atención a que si la sucesión de las funciones $f_n(x)$ definidas sobre el conjunto X no converge uniformemente sobre cierto subconjunto $X_0 \subset X$, entonces a ciencia cierta no converge uniformemente tampoco sobre el propio conjunto X; si las condiciones de la definición 1 no se cumplen para todos los puntos $x \in X_0$ entonces éstas, a ciencia cierta no se cumplen para todos los puntos del conjunto X. Al mismo tiempo, si la sucesión de funciones converge uniformemente sobre determinado conjunto, entonces tanto mucho converge uniformemente sobre cada uno de sus subconjuntos.

De aquí se deduce, por ejemplo, que la sucesión (36.7) convergente sobre el segmento [0, 1] a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{cuando} \quad x = 1, \end{cases}$$

no converge sobre este uniformemente ya que no converge uniformemente sobre el intervalo semiabierto [0, 1).

Pasemos a la descripción de los criterios de convergencia uniforme. Para la función f y la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dadas sobre cierto conjunto X analizaremos la sucessión de números (finitos o infinitos)

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.9}$$

pertenecientes, en general, al conjunto ampliado de los números reales $\overline{R}$ (véase el p. 2.5) y su límite (véase el p. 3.2).

Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre el conjunto X, hacia la función f, entonces existe un número n_0, tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ las cotas superiores (36.9) son finitas. En efecto, si $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, entonces por la definición de convergencia uniforme, para cualquier $\varepsilon > 0$, por ejemplo, para $\varepsilon = 1$, existe un número n_0, tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

y por lo tanto, también la desigualdad

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

Por esto, para $n \geqslant n_0$, todas las cotas superiores (36.9) son finitas.

Teorema 1. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$, definidas sobre el conjunto X, converge uniformemente sobre este conjunto, hacia la función f, si y sólo si*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{36.10}$$

Corolario. *Para que la sucesión $\{f_n\}$ converja uniformemente hacia la función f sobre el conjunto X, es necesario y suficiente, que se encuentre una sucesión numérica $\{a_n\}$ tal que*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad a_n \geqslant 0, \tag{36.11}$$

y exista un número n_0 tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$, se cumpla la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n. \tag{36.12}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Si se cumplen las condiciones de la definición 5, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$, se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando el n_ε *señalado, para todos los* $n \geqslant n_\varepsilon$, tendremos

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y esto, por la definición de límite de una sucesión numérica, significa que se cumple la condición (36.10).

Por el contrario, si la condición (36.10) se cumple, entonces por la definición de límite finito para una sucesión de elementos de $\overline{R}$, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número n_ε tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

De aquí se deduce que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y para todos los $x \in X$, es válida la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

es decir, se cumplen las condiciones de la definición 5. □

Debido a que casi todos los términos de la sucesión de cotas superiores (36.9) para las sucesiones de funciones uniformemente convergentes son finitos, el criterio (36.10) en esencia, reduce el concepto de convergencia uniforme de una sucesión funcional, al concepto de convergencia de una sucesión numérica.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Si $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, entonces por lo dicho anteriormente, existe un número n_0 tal que para todos los $n \geqslant n_0$ todas las cotas superiores (36.9) son finitas. Por esto, en calidad de sucesión $\{a_n\}$ podemos tomar,

$$a_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots,$$

(evidentemente $a_n \geqslant 0$), eligiendo los primeros términos, $a_1, \ldots, a_{n_0 - 1}$, de una forma arbitraria. Entonces para $n \geqslant n_0$, la condición (36.12) se cumple de una forma evidente, y según (36.10), tendremos $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Si existe la sucesión numérica $\{a_n\}$, que satisface las condiciones (36.11) y (36.12), entonces por (36.12) para cualquier $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n.$$

Pasando en ella al límite cuando $n \to \infty$, obtendremos por (36.11), que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

El cumplimiento de esta condición significa (véase el teorema 1) la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ a la función f sobre el conjunto X. □

Ejemplos. 3. Demostremos otra vez más con ayuda de la condición (36.10), que la sucesión x^n, $n = 1, 2, \ldots$, no converge uniformemente sobre el intervalo semiabierto [0, 1). Ya que el límite de la sucesión señalada sobre el intervalo se-

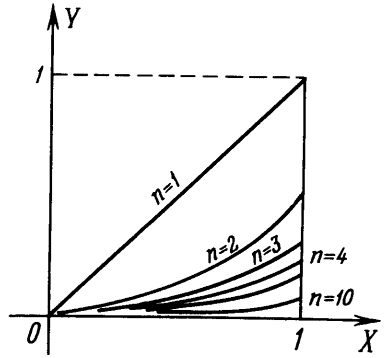


FIG. 151

miabierto analizado es igual a cero, entonces la afirmación hecha se deduce inmediatamente de la igualdad evidente (para cualquier $n = 1, 2, \ldots$, dado), $\sup\limits_{x \in [0, 1)} |x^n - 0| = 1$, de la cual se ve claramente que la condición (36.10) de convergencia uniforme, en el caso dado, no se cumple.

4. La sucesión $f_n(x) = \frac{1}{n} x^n$, $n = 1, 2, \ldots, 0 \leqslant x \leqslant 1$, converge uniformemente sobre el segmento [0, 1] (fig. 151).

En efecto, ya que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ y $0 < \frac{1}{n} x^n \leqslant \frac{1}{n}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces la afirmación expresada se deduce del corolario del teorema 1.

Enunciemos y demostremos el criterio de convergencia uniforme de una sucesión, habitualmente llamado criterio de Cauchy.

Teorema 2 (criterio de Cauchy de convergencia uniforme de sucesiones). *Para que la sucesión de funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$, definidas sobre un conjunto X, converja uniformemente sobre este conjunto, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número n_ε tal que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los puntos $x \in X$ se cumple la desigualdad*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{36.13}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre el conjunto X. Entonces, por la definición de convergencia uniforme, existe una función f tal que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número n_ε tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por esto, si $n \geqslant n_\varepsilon$ y $p \geqslant 0$, entonces para todas las $x \in X$ obtendremos

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Si se cumple la condición (36.13), entonces para cualquier $x \in X$ dado, la sucesión

$$f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.14}$$

es una sucesión numérica que satisface el criterio de Cauchy (véanse el p. 3.7 y el p. 23.3), y por esto converge.

Denotemos el límite de la sucesión (36.14) sobre el conjunto X por $f(x)$. Mostremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función f sobre el conjunto X. En efecto, por la condición (36.13) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un n_ε tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todas las $x \in X$, es válida la desigualdad

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36.15}$$

Observando que $\lim\limits_{p \to \infty} f_{n+p}(x) = f(x)$, pasemos el límite en la desigualdad (36.15) cuando $p \to \infty$, entonces para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ obtendremos

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

y esto significa que $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. □

Para concluir, señalemos dos propiedades de las sucesiones uniformemente convergentes.

1°. *Si las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente a las funciones f y g, respectivamente, sobre el conjunto X, entonces cualquier combinación lineal $\{\lambda f_n + \mu g_n\}$, $\lambda \in C$, $\mu \in C$, de las sucesiones dadas también converge uniformemente sobre este conjunto a la misma combinación lineal de las funciones límites, es decir, a $\lambda f + \mu g$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\lambda = \mu = 0$, entonces la afirmación es evidente. Sea al menos uno de los números λ ó μ diferente de cero, es decir, $|\lambda| + |\mu| > 0$. Fijemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. En virtud de las condiciones $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$ y $g_n \underset{X}{\rightrightarrows} g$, existe un número n_0, tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$, se cumplen las desigualdades

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}, \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}$$

y por esto, también la desigualdad

$$|[\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)] - [\lambda f(x) + \mu g(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda|\,|f_n(x) - f(x)| + |\mu|\,|g_n(x) - g(x)| <$$
$$< |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} + |\mu| \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} = \varepsilon.$$

Según la definición de convergencia uniforme, esto significa que $\lambda f_n + \mu g_n \underset{X}{\rightrightarrows} \lambda f + \mu g$. □

2°. *Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre el conjunto X a la función f, y la función g es acotada sobre este conjunto, entonces la sucesión $\{gf_n\}$ también converge uniformemente sobre X a la función gf.*

DEMOSTRACIÓN. La acotación de la función g sobre el conjunto X significa que existe un $M > 0$ tal que, para todas las $x \in X$ se cumple la desigualdad $|g(x)| \leqslant M$. En virtud de la convergencia uniforme sobre el conjunto X de la sucesión $\{f_n\}$ a la función f, existen un número n_0 tal que, para todos los $n \geqslant n_0$ y todos los $x \in X$, se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

y por esto también la desigualdad

$$|g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| = |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Esto significa que $gf_n \underset{X}{\rightrightarrows} gf$. □

36.3. SERIES DE FUNCIONES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES

Para las series, naturalmente, también se puede introducir el concepto de convergencia uniforme.

Definición 6. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.16}$$

cuyos términos son funciones, definidas sobre el conjunto X, se llama uniformemente convergente sobre este conjunto, si la sucesión de sus sumas parciales converge uniformemente sobre X.

De esta forma, la convergencia uniforme de la serie (36.16) significa la existencia de una función $s(x)$ tal que

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x) \tag{36.17}$$

(aquí, como siempre $s_n(x)$ es la suma parcial de orden n de la serie (36.16), $n = 1, 2, \ldots$).

Ya que de (36.17) se deduce que $s_n(x) \to s(x)$ sobre X, entonces $s(x)$ es la suma de la serie (36.16).

Hagamos

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Entonces $s(x) - s_n(x) = r_n(x)$ y la condición (36.17) para la serie convergente sobre X se puede transcribir en la forma equivalente:

$$r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{36.18}$$

de donde en virtud de la equivalencia de la definición 5 de convergencia uniforme de una sucesión de funciones y la condición (36.10) se deduce que *para que la serie (36.16) convergente sobre X converja uniformemente sobre el conjunto X, es necesario y suficiente que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |r_n(x)| = 0. \tag{36.19}$$

De esta forma, de la convergencia uniforme de la serie, en particular, se deriva que a partir de un cierto número las cotas superiores

$$\sup_{x\in X} |r_n(x)|$$

son finitas, y la condición (36.19) reduce el concepto de convergencia uniforme de la serie al concepto de tendencia a cero de la sucesión numérica de estas cotas superiores.

Señalemos una propiedad esencial de las series uniformemente convergentes.

Teorema 3 (condición necesaria de la convergencia uniforme de una serie). *Si la serie (36.16) converge uniformemente sobre el conjunto X, entonces la sucesión de sus términos $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, tiende hacia cero uniformemente sobre X, es decir,*

$$u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0.$$

De forma breve esta propiedad se expresa de la forma siguiente: *el término general de una serie uniformemente convergente tiende uniformemente a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie (36.16) converge uniformemente sobre el conjunto X. Denotemos sus sumas parciales, como es usual, por $s_n(x)$, y su suma por $s(x)$, $x \in X$. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por esto para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$ es válida también la desigualdad

$$|u_{n+1}(x)| = |s_{n+1}(x) - s_n(x)| = |[s_{n+1}(x) - s(x)] + [s(x) - s_n(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |s_{n+1}(x) - s(x)| + |s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto significa la convergencia uniforme (sobre el conjunto X) a cero da la sucesión de términos de la serie uniformemente convergente sobre este conjunto. □

Señalemos que en virtud de la condición (36.10), el hecho de que el término general de la serie (36.16) tienda uniformemente a cero, significa que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |u_n(x)| = 0.$$

Con ayuda del teorema 3, a veces se logra establecer que la serie analizada no converge uniformemente. Así, la serie cuyos términos forman una progresión geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ no converge uniformemente sobre el intervalo $(0, 1)$, ya que como esto fue mostrado en el p. 36.2 (véase el ejemplo 2), la sucesión x^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, de los términos de esta serie no converge uniformemente a cero sobre este intervalo. De aquí, a propósito, se deduce que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, donde z es un número complejo, tampoco converge uniformemente en el círculo unitario $|z| < 1$, puesto que no converge uniformemente ya sobre el subconjunto $(0, 1)$ de este círculo.

A menudo resulta útil el siguiente criterio suficiente de la convergencia uniforme.

Teorema 4 (criterio Weierstrass). *Sean dadas dos series: una de funciones* (36.16), *cuyos términos son las funciones* $u_n(x)$, *definidas sobre el conjunto* X, *y otra numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{36.20}$$

Si la serie (36.20) *converge y para cualquier* $x \in X$ *se cumple la desigualdad*

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.21}$$

entonces la serie (36.16) *converge absoluta y uniformemente sobre el conjunto* X.

La convergencia absoluta de la serie (36.16) sobre X, en el caso de convergencia de la serie (36.20) se deduce inmediatamente, por el criterio de comparación, de la desigualdad (36.21). La convergencia uniforme de esta serie se deduce fácilmente del teorema 1 de este punto. Sin embargo, daremos su demostración directa.

Sea $s(x)$ la suma de la serie (36.21) y $s_n(x)$, su suma parcial. En virtud de la convergencia de la serie (36.20) para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $n_\varepsilon > 0$ tal que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad (véase (35.10)), $\sum_{m=n}^{\infty} a_m < \varepsilon$. Pero entonces, cuando todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y todos los $x \in X$, para los restos $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ de la serie (36.16) (según lo demostrado anteriormente es absolutamente convergente, por lo tanto, simplemente convergente, por esto, la igualdad $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$, tiene sentido), tendremos

$$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| = \left|\sum_{m=n}^{\infty} u_m(x)\right| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} |u_m(x)| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} a_m \leqslant \varepsilon.$$

Esto significa, por la definición 5, la convergencia absoluta de la serie (36.16) sobre el conjunto X. □

Señalemos que la serie (36.20) se llama serie que mayorea la serie (36.16).

En calidad de ejemplo tomemos otra vez la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, cuyos términos forman una progresión geométrica. Analicémosla en el círculo de radio r: $|z| \leqslant r$, donde $0 < r < 1$. Por cuanto la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ con términos no negativos que forman una sucesión geométrica infinitamente decreciente, converge y para los términos de la serie funcional dada es válida la estimación $|z^n| \leqslant r^n$, ya que $|z| \leqslant r$, entonces según el criterio de Weierstrass converge uniformemente en cualquier círculo $|z| \leqslant r < 1$. Al mismo tiempo, como fue demostrado anteriormente, esta serie no converge uniformemente en el círculo $|z| < 1$.

El criterio de Weierstrass da sólo las condiciones suficientes para la convergencia uniforme de una serie, las que de ningún modo son necesarias. Es muy fácil convencerse de esto para las series, en las cuales a medida que crecen los números de términos se alternan sus signos. En efecto, la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (como toda serie numérica convergente), puede ser analizada como una serie uniformemente convergente, por ejemplo, sobre todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$: sus términos $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ son funciones constantes sobre $\boldsymbol{R}$. Al mismo tiempo toda serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que satisface la condición $|u_n| \leqslant a_n$, es decir, en el caso dado la condición $\frac{1}{n} \leqslant a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, diverge según el criterio de comparación. De esta forma, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge uniformemente, y la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que satisface las condiciones del criterio de Weierstrass, no existe.

Se puede mostrar que más aún, las condiciones del criterio de Weierstrass no son necesarias para la convergencia uniforme, incluso de las series cuyos términos son todos no negativos. Para convencerse de esto, citemos un ejemplo de una serie uniformemente convergente sobre el segmento $[0, 1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ con términos no negativos, para la cual tampoco existe la serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que satisfaga la condición (36.21).

Definamos el término de la serie $u_n(x)$ de la forma siguiente: $u_n(x) = 0$ sobre los segmentos $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ y $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $u_n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}$ y la función $u_n(x)$ es lineal y continua sobre cada uno de los segmentos $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right]$ y $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right), \frac{1}{n}\right]$. Su gráfica está representada en la fig. 152.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$. En efecto, si $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ es el resto de esta serie, $n = 1, 2, \ldots$, entonces para cualquier $x \in [0, 1]$, entre sus términos existe no más de uno, para el cual $u_k(x) \neq 0$, $k \geqslant n + 1$. En este caso, evidentemente, $0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}$, por esto $0 \leqslant r_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}$ y, por lo tanto, $r_n(x) \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$, cuando $n \to \infty$, es decir, la serie analizada converge uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$.

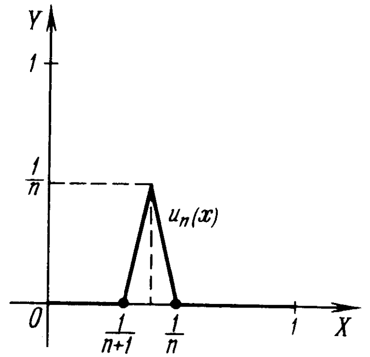


FIG. 152

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie numérica tal que, para todos los $x \in [0, 1]$, se cumple la desigualdad $0 \leqslant u_n(x) \leqslant a_n$, entonces

$$\frac{1}{n} = \max_{[0,\,1]} u_n(x) \leqslant a_n.$$

Por cuanto la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, entonces también diverge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. De esta forma, en el caso analizado, una serie numérica que satisfaga, con respecto a la serie funcional $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, las condiciones del criterio de Weierstrass, a ciencia cierta no existe.

Pasemos ahora a las condiciones de convergencia uniforme de una serie, que son simultáneamente necesarias y suficientes.

Observando que

$$s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x), \tag{36.22}$$

del teorema 2 obtenemos el siguiente criterio de convergencia uniforme.

Teorema 5 (criterio de Cauchy de convergencia uniforme de las series). *Para que la serie* (36.16) *converja uniformemente sobre el conjunto X, es necesario y suficiente, que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un número n_ε tal que, para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los $x \in X$, se cumpla la desigualdad*

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{36.23}$$

Es evidente, que del criterio de Cauchy de convergencia uniforme de una serie, se obtiene otra vez (si en (36.23) hacemos $p = 0$), el teorema 3, es decir, la condición necesaria para la convergencia de la serie (36.16).

Ejercicio 3. Aclárese, si la serie del tipo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (a_n y z son números complejos), que tiene un número infinito de coeficientes diferentes de cero, puede converger uniformemente sobre todo el plano complejo.

Ejemplos. 1. Analicemos de nuevo la serie (véase el p. 36.1)

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{36.4}$$

y mostremos que, cualquiera que sea el número $r > 0$, la serie (36.4) converge uniformemente en el círculo $|z| \leqslant r$.

Como ya hemos visto, la serie (36.4) converge para cualquier complejo z, en particular, para $z = r$, es decir, la serie numérica

$$1 + r + \frac{r^2}{2!} + \ldots + \frac{r^n}{n!} + \ldots$$

converge. Tomándola en calidad de serie de comparación (36.20) para la serie (36.4), cuando $|z| \leqslant r$, tenemos $\left|\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{r^n}{n!}$. Por esto nuestra afirmación sobre la convergencia uniforme de la serie (36.4) se deduce directamente del teorema 4.

Mostremos que la serie (36.4) no converge uniformemente sobre todo el plano complejo. Esto se deduce del hecho de que en el caso dado, no se cumple la condición necesaria de la convergencia uniforme de una serie (véase el teorema 3). En efecto, para cualquier n_0 fijo

$$\lim_{|z| \to \infty} |z^{n_0}/n_0!| = +\infty. \tag{36.24}$$

Por esto, si $\varepsilon > 0$ es dado, entonces cualquiera que sea $n_0 > 0$ según (36.24), se puede elegir z_0 de tal forma que

$$|z_0^{n_0}/n_0!| > \varepsilon,$$

es decir, $z^n/n!$, no tiende uniformemente a cero sobre todo el plano complejo.

2. Investiguemos la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} nx}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{36.25}$$

Ante todo observemos que

$$\left| \frac{x \operatorname{sen} nx}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}} \right| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{1 + n^2(1 + nx^2)}}. \tag{36.26}$$

Más adelante, $1 + nx^2 \geqslant 2|x|\sqrt{n}$ *), por esto

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+n^2(1+nx^2)}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}(1+n^2)} \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}}. \tag{36.27}$$

Ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ converge, entonces por el criterio de Weierstrass debido a las desigualdades (36.26) y (36.27), la serie inicial (36.25) converge uniformemente sobre todo el eje real.

3. Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2}\operatorname{sen} nx. \tag{36.28}$$

Evidentemente, $|e^{-n^5x^2}\operatorname{sen} nx| \leqslant n|x|e^{-n^5x^2}$. Hallemos el máximo de la función

$$v_n(x) = n|x|e^{-n^5x^2}$$

para un n dado. La función $v_n(x)$ es par, por esto es suficiente analizar solamente el caso $x \geqslant 0$ (¿por qué?). La derivada $v_n'(x) = n(1 - 2n^5x^2)e^{-n^5x^2}$ se anula en el punto $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}n^{5/2}}$. Por cuanto $v_n(x) \geqslant 0$ para todas los x, $v_n(0) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n(x) = 0$, entonces en el punto x_0 la función $v_n(x)$ tiene un máximo (¿por qué?).

Por esto

$$v_n(x) \leqslant v_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}n^{5/2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}n^{3/2}}e^{-1/2} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

y ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, entonces por el criterio de Weierstrass, la serie (36.28) converge uniformemente sobre todo el eje real.

El método, utilizado para establecer la convergencia uniforme de la serie (36.28) (la investigación con respecto al extremo del módulo del término general o de su mayorante, con los métodos del cálculo diferencial), es suficientemente general y con frecuencia se utiliza en la práctica. Con este método se hubiera podido investigar la convergencia uniforme de la serie (36.25), sin embargo, el método utilizado más arriba en la investigación de esta serie conduce más rápidamente al objetivo.

4. Analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}. \tag{36.29}$$

*) Hemos utilizado aquí desigualdad $2ab \leqslant a^2 + b^2$, la que se obtiene inmediatamente de la desigualdad evidente $(a-b)^2 \geqslant 0$.

Por el criterio de Leibniz (véase el p. 35.5), converge para cualquier x real, y como fue señalado allí mismo, el resto de la serie se estima por su primer término:

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

De esto se deduce que

$$r_n(x) \rightrightarrows 0 \text{ cuando } -\infty < x < +\infty,$$

es decir, la serie (36.29) converge uniformemente sobre todo el eje real.

Mostremos que esta serie no converge absolutamente en todos los puntos. En efecto, escojamos para un número x dado, cualquier natural n_x tal que $x^2 \leqslant n_x$. Entonces para todos los $n \geqslant n_x$ se cumplirá la desigualdad $x^2 \leqslant n$, y, por lo tanto, también la desigualdad

$$\frac{1}{x^2+n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Y ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces por el criterio de comparación, la serie (36.29) no converge absolutamente.

Ejercicio 4. Cítese un ejemplo de serie, que converja absolutamente en todos los puntos de un cierto conjunto, pero que no converja uniformemente sobre este conjunto.

Indicación. Es útil recordar el ejemplo 2 del p. 36.1.

Demostremos ahora un criterio suficiente de convergencia uniforme, aplicable, a diferencia del criterio de Weierstrass, a las series que no convergen absolutamente. Este criterio, por su enunciado, recuerda el criterio de Dirichlet para la convergencia de las series numéricas (véase el p. 35.13) y por primera vez aparece en los trabajos de Hardy *).

Teorema 6. *Sea dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \tag{36.30}$$

en la cual las funciones $a_n(x)$ y $b_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, están definidas sobre el conjunto X y tales que

1) *La sucesión $\{a_n(x)\}$ es monótona para cada $x \in X$ y tiende uniformemente a cero sobre X;*

2) *la sucesión de las sumas parciales $B_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

está acotada sobre el conjunto X.

Entonces la serie (36.30) converge uniformemente sobre el conjunto X.

*) G. Hardy (1877 — 1947), matemático inglés.

DEMOSTRACIÓN. Por la condición 2 del teorema existe un $B > 0$ tal que $|B_n(x)| \leqslant B$, para todos los $x \in X$ y todos los $n = 1, 2, \ldots$, y por esto

$$\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \leqslant 2B$$

para todos los $x \in X$, todos los $n = 2, 3, \ldots$, y todos los enteros $p \geqslant 0$. De la condición 1 del teorema se deduce, que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo, existe un número n_ε tal que, para todos los $x \in X$ y todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, se cumple la desigualdad

$$0 \leqslant |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Abel (véase el p. 35.13), obtendremos que

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2B[|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|] < \varepsilon$$

para todos los $x \in X$, todos los $x \geqslant n_\varepsilon$ y todos los enteros $p \geqslant 0$. Esto demuestra la convergencia uniforme de la serie (36.30). □

En calidad de ejemplo para la utilización del teorema 6, analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Por el teorema 6, esta serie converge uniformemente sobre cualquier segmento $[a, b]$, que no contenga puntos del tipo $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En efecto, la sucesión $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, en el caso dado es una sucesión numérica, esta sucesión decrece monótonamente y tiende a cero (y por lo tanto, también tiende a cero uniformemente), y las sumas $\sum\limits_{k+1}^{\infty} \operatorname{sen} kx$ satisfacen la desigualdad

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|} \leqslant \max_{[a,b]} \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} < +\infty$$

(véase el p. 35.13), es decir, están acotadas sobre cualquiera de los segmentos señalados.

Sobre cualquier segmento, que contenga puntos del tipo $x = 2k\pi$, la serie analizada no converge uniformemente. Por las propiedades del seno es suficiente demostrar esto para el segmento $[0, \pi]$. Hagamos $x_n = \frac{1}{2n}$; entonces para todos los $k = n + 1, n + 2, \ldots, 2n$ tendremos $0 < kx_n \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, en virtud de la desigualdad $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{2}{\pi}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (véase (14.1)), obtendremos

$$\frac{\operatorname{sen} kx_n}{k} = \frac{\operatorname{sen} kx_n}{kx_n}\frac{1}{2n} \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n} = \frac{1}{\pi n}, \quad k = n + 1, \ldots, 2n.$$

De aquí

$$\frac{\operatorname{sen}(n+1)x_n}{n+1} + \frac{\operatorname{sen}(n+2)x_n}{n+2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} 2nx_n}{2n} > \underbrace{\frac{1}{\pi n} + \ldots + \frac{1}{\pi n}}_{n \text{ veces}} = \frac{1}{\pi}.$$

Por esto, para ningún $\varepsilon < \frac{1}{\pi}$ sobre el segmento $[0, \pi]$ se cumple el criterio de Cauchy de convergencia uniforme.

Observemos que con ayuda del criterio de Weierstrass, no se puede demostrar la convergencia uniforme de la serie analizada sobre un segmento que no contenga puntos del tipo $x = 2k\pi$. Por ejemplo, para el segmento $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tenemos

$$\max_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]} \left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Por esto no existe una serie numérica convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right| \leqslant a_n$ sobre $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ya que entonces $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

De forma semejante al caso de las series numéricas, utilizando la desigualdad de Abel, se puede obtener un criterio más de convergencia uniforme de las series funcionales, análogo al criterio de Abel para las series numéricas. Este criterio también aparece por primera vez en los trabajos de Hardy.

Teorema 7. *Si*

1) *la sucesión* $\{a_n(x)\}$ *está acotada sobre el conjunto* X:

$$|a_n(x)| \leqslant M, \quad x \in X, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y decrece o crece para cada $x \in X$;

2) *la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *converge uniformemente sobre el conjunto* X,

entonces la serie (36.30) *también converge uniformemente sobre* X.

DEMOSTRACIÓN. Sea dado $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, existe un número n_ε tal que, para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los puntos $x \in X$, se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

De aquí, por la desigualdad de Abel (véase el p. 35.77) para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$, todos los enteros $p \geqslant 0$ y todos los puntos $x \in X$, será válida la desigualdad

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x)b_{n+k}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \leqslant \varepsilon.$$

Por el criterio de Cauchy, esto significa, que la serie (36.30) converge uniformemente. □

Ejemplo. Analicemos la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} nx \cos \frac{x}{n}}{\ln \ln n}$.

Sobre cualquier segmento, que no contenga puntos del tipo $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{\ln \ln n}$, por el teorema 6, converge uniformemente, y la sucesión $\cos \frac{x}{n}$ $n = 2, 3, \ldots$, está acotada y crece monótonamente a partir de cierto número, además se puede elegir un número tal que a partir de este número esta sucesión crecerá en todos los puntos del segmento señalado. Por esto, sobre un segmento, que no contenga puntos del tipo $2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, la serie analizada converge uniformemente.

Para concluir observemos que de las dos propiedades de las sucesiones uniformemente convergentes, demostradas al final del p. 36.2, se deduce directamente la validez de las propiedades correspondientes para las series uniformemente convergentes:

1°. *Si las series* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ convergen uniformemente sobre el conjunto X, *entonces para números cualesquiera* $\lambda \in C$ *y* $\mu \in C$, *la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda u_n(x) + \mu v_n(x)$ *también converge uniformemente sobre el conjunto* X.

2°. *Si la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *converge uniformemente sobre el conjunto* X *y la función* $g(x)$ *está acotada sobre este conjunto, entonces la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x)u_n(x)$ *también converge uniformemente sobre* X.

Ejercicios.. Investíguense con respecto a la convergencia, la convergencia absoluta y la convergencia uniforme de las series:

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n^\alpha}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + x^n)$.

(En todos los casos x es número real).

36.4. PROPIEDADES DE LAS SERIES Y SUCESIONES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES

Hemos visto que la suma de una serie convergente, todos los términos de la cual son funciones continuas, puede no ser una función continua. El siguiente teorema contiene las condiciones suficientes para la continuidad de la suma de una serie.

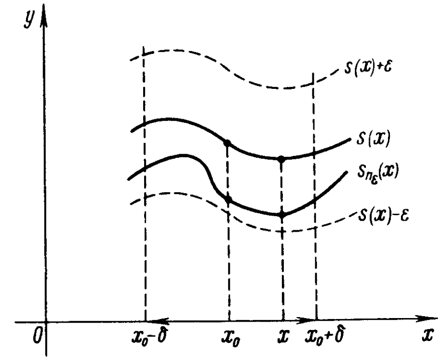


FIG. 153

Se debe prestar atención al hecho de que el análisis de funciones continuas sobre cierto conjunto impone una restricción adicional al conjunto: éste no puede ser un conjunto de naturaleza arbitraria (como ha sido hasta ahora el conjunto X, sobre el que han sido dados los términos de las series analizadas, los elementos de las sucesiones, etc.), sino que debe ser tal que, para las funciones dadas sobre él, esté definido el concepto de continuidad. Cuando hablemos de derivadas e integrales, tendremos que restringir aún más la clase de los conjuntos X admisibles.

Teorema 8. *Si las funciones* $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *son continuas en el punto* x_0 *del conjunto* $X \subset R^m$*), *y la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *converge uniformemente sobre* X, *entonces su suma* $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *también es continua en el punto* x_0.

DEMOSTRACIÓN.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Sea

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in X.$$

Por la condición del teorema,

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x),$$

por esto, existe un número n_ε tal que

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{36.31}$$

para todos los $x \in X$, todos los $n \geqslant n_\varepsilon$, y, en particular, para $n = n_\varepsilon$. La función $s_{n_\varepsilon}(x)$ como suma de un número finito de funciones $u_k(x)$, continuas sobre X,

*) Aquí, como en todos los casos cuando no se haya acordado lo contrario, se analizan funciones $u_n(x)$ de valores complejos; véase el concepto de continuidad para estas funciones en el p. 23.3; R^m como es usual, denota el espacio euclídeo m-dimensional

$k = 1, 2, \ldots, n_\varepsilon$, es continua en el punto $x_0 \in X$. Por esto, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$, que satisfacen la condición $\rho(x, x_0) < \delta$, tenemos

$$|s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{36.32}$$

Ahora, observando que

$$s(x) - s(x_0) = [s(x) - s_{n_\varepsilon}(x)] + [s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)] + [s_{n_\varepsilon}(x_0) - s(x_0)]$$

(fig. 153), de la desigualdad (36.31), tomada en los puntos x_0 y x, y de la desigualdad (36.32) obtendremos cuando $\rho(x, x_0) < \delta$ y $x \in X$

$$|s(x) - s(x_0)| < |s(x) - s_{n_\varepsilon}(x)| + |s_{n_\varepsilon}(x) - s_{n_\varepsilon}(x_0)| + $$
$$+ |s_{n_\varepsilon}(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

lo que demuestra la continuidad de la función $s(x)$ en el punto x_0. □

En el caso, cuando x_0 es un punto de acumulación del conjunto X, a la afirmación del teorema se le puede dar la forma

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} s(x) = s(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

y ya que cada función $u(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, es continua en el punto $x \in X$, entonces $u_n(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} u_n(x)$, por esto

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} u_n(x).$$

De esta forma, en las condiciones del teorema 8, el límite de la suma de la serie es igual a la suma de los límites de sus términos, es decir, en la serie analizada es permitido el paso al límite término a término.

Se ha señalado anteriormente, que a cada sucesión de funciones le corresponde una serie de funciones, para la cual ella es la sucesión de sus sumas parciales. En este caso, si la sucesión dada converge uniformemente sobre cierto conjunto, entonces también la serie señalada, evidentemente, converge uniformemente sobre este conjunto. Esta circunstancia permite parafrasear los teoremas sobre las series uniformemente convergentes, en los correspondientes teoremas sobre sucesiones uniformemente convergentes. Por ejemplo, el teorema 8 puede ser parafraseado de la siguiente forma.

Teorema 8′. *Si las funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$, son continuas en el punto $x_0 \in X \subset R^m$ y $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$, entonces f es continua en x_0.*

Esto significa, que para el punto $x_0 \in X$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f_n(x),$$

es decir, los pasos al límite por n y por x pueden ser conmutados.

En efecto, el límite f de la sucesión f_n, $n = 1, 2, \ldots$, por el teorema 8′, es una función continua en el punto $x_0 \in X$, y por esto el primer miembro de la igualdad es igual a $f(x_0)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0),$$

pero el segundo miembro de la igualdad analizada, según la continuidad de la función f_n, también es igual a $f(x_0)$:

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0). \ \square$$

Problema 25 (teorema de Dini*)). Supongamos que las funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$, son continuas y, creciendo o decreciendo monótonamente, tienden a la función f sobre el compacto $X \subset R^m$. Demuéstrese que para que la función f sea continua, es necesario y suficiente que la sucesión $\{f_n\}$ converja uniformemente sobre el conjunto X. Parafraséese este resultado para las series.

Ahora pasemos a la cuestión de la integración y diferenciación término a término de las series. Ya que la derivada y la integral están definidas sólo en el dominio real, entonces a partir de aquí y hasta el final del párrafo, consideraremos que todas las funciones analizadas están definidas sobre intervalos del eje real y toman valores reales.

Analicemos inicialmente un ejemplo que nos convencerá de que sólo la convergencia de la serie de funciones no es suficiente para que la integral de la función, igual a su suma, pueda ser hallada integrando término a término. En otras palabras, mostremos que incluso si las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$ convergen, entonces la igualdad

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

puede no ser cierta, incluso en el caso cuando todas las integrales escritas existen.

Parafraseemos inicialmente esta afirmación en términos de sucesiones. Si hacemos $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ entonces tendremos

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \int_a^b s(x)dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} s_n(x)dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right] dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b s_n(x)dx.$$

---

*) U. Dini (1845 — 1918), matemático italiano.

Mostremos que la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx$$

no es válida siempre, cuando sobre el segmento $[a, b]$ existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ y todas las funciones analizadas son integrables, es decir, que en este caso no siempre se puede pasar al límite bajo el signo de la integral.

Sea $s_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Entonces $s_n(0) = 0$ y para cualquier $x \neq 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = 0$. De esta forma $s_n \underset{[0,1]}{\to} 0$ y, por lo tanto, la integral de la función límite, es decir, de cero, también es igual a cero. Sin embargo

$$\int_0^1 s_n(x)dx = n\int_0^1 xe^{-nx^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^n e^{-t}dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}).$$

Por esto, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx = \dfrac{1}{2}$, es decir, en efecto, para la sucesión $\{s_n(x)\}$ analizada, tiene lugar la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx = 0.$$

Si se construye la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, para la cual la sucesión $\{s_n(x)\}$ es la sucesión de sus sumas parciales, es decir, haciendo

$$u_1(x) = s_1(x),\ u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

entonces para esta serie tendremos

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx \neq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx.$$

Teorema 9. *Sean las funciones $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, continuas sobre el segmento $[a, b]$ y la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.33}$$

converge uniformemente sobre $[a, b]$. Entonces cualquiera que sea el punto $c \in [a, b]$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)dt \tag{36.34}$$

también converge uniformemente sobre $[a, b]$, y si

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{36.35}$$

entonces

$$\int_c^x s(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.36}$$

Si esta fórmula se transcribe en la forma

$$\int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)dt,$$

entonces, se ve que esto significa la legitimidad, para las condiciones enunciadas en el teorema 9, *de la integración término a término de la serie.*

DEMOSTRACIÓN. Por la convergencia uniforme de la serie (36.33), según el teorema 8, la función $s(x)$ (véase (36.35)), es continua sobre el segmento $[a, b]$ y por esto es integrable sobre cualquier segmento con extremos en los puntos $c \in [a, b]$ y $x \in [a, b]$.

Mostremos, que la serie (36.34) sobre el segmento $[a, b]$ converge uniformemente a la función

$$\sigma(x) = \int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right] dt = \int_c^x s(t)dt. \tag{36.37}$$

Sea

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad \text{y} \quad r_n(x) = s(x) - s_n(x).$$

Entonces para cualquier $x \in [a, b]$ tenemos

$$\left|\sigma(x) - \sum_{k=1}^{n}\int_c^x u_k(t)dt\right| = \left|\int_c^x s(t)dt - \int_c^x\left[\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right]dt\right| =$$

$$= \left|\int_c^x s(t)dt - \int_c^x s_n(t)dt\right| \leqslant \left|\int_c^x |s(t) - s_n(t)|dt\right| =$$

$$= \left|\int_c^x |r_n(t)|dt\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |r_n(t)| \left|\int_c^x dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x - c| \sup_{[a,b]} |r_n(t)| \leqslant (b - a) \sup_{[a,b]} |r_n(x)|. \tag{36.38}$$

La sucesión $\sup\limits_{[a,b]} |r_n(x)|$, $n = 1, 2, \ldots$, es una sucesión numérica. Por la convergencia uniforme de la serie (36.33) tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{[a,b]} |r_n(x)| = 0$$

(véase el p. 36.3); por esto de la desigualdad (36.38), según el criterio de Weierstrass de convergencia uniforme de una sucesión, se deduce que la sucesión de sumas parciales de la serie (36.34) converge uniformemente hacia la función (36.37), y esto implica la convergencia uniforme de la serie (36.34) a la función (36.37). El teorema y, en particular, la fórmula (36.36) están demostrados. □

Parafraseemos el resultado obtenido para las sucesiones de funciones.

Teorema 9′. *Si una sucesión de funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$, continuas sobre el segmento $[a, b]$, converge uniformemente a la función f sobre este segmento, entonces cualquiera que sea el punto $c \in [a, b]$,*

$$\int_c^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)dt \text{ sobre } [a, b],$$

en particular,

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x [\lim_{n\to\infty} f_n(t)]dt.$$

Ejercicio 9. Demuéstrese, que si

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{cuando } x = \dfrac{1}{2n}, \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \text{ y } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

y $f_n(x)$ es lineal sobre los segmentos $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ y $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ entonces para todos los $x \in [0, 1]$ tiene lugar la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

Pasemos ahora a la cuestión sobre la diferenciación de las series.

Teorema 10. *Sean las funciones $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, continuamente diferenciables sobre el segmento $[a, b]$ y la serie, formada por sus derivadas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{36.39}$$

converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge al menos en un punto $c \in [a, b]$, entonces ella converge uniformemente sobre todo el segmento $[a, b]$, su suma

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{36.40}$$

es continuamente diferenciable y

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.41}$$

Si esta fórmula se transcribe en la forma

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

entonces se ve que ella significa la legitimidad, para las suposiciones hechas, de la diferenciación *término a término* de la serie.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{36.42}$$

En virtud de la convergencia uniforme de esta serie, su suma es una función continua y puede ser integrada término a término

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.43}$$

Por el teorema 9, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)], \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{36.44}$$

es convergente. Converge, por condición del teorema, también la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c) \tag{36.45}$$

y por esto converge también la suma de las series (36.44) y (36.45), es decir, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{36.46}$$

De aquí se deduce que la igualdad (36.43) puede transcribirse en la forma

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$$

o, lo que es lo mismo (véase (36.40)), en la forma

$$\int_c^x \sigma(t)dt = s(x) - s(c). \tag{36.47}$$

La función que se encuentra en el primer miembro tiene derivada respecto a x, por lo tanto también la función $s(x)$ tiene derivada. Diferenciando la igualdad (36.47), obtendremos (véase el p. 29.2)

$$s'(x) = \sigma(x), \tag{36.48}$$

donde la función $\sigma(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ ya que representa la suma de la serie uniformemente convergente (36.39), cuyos términos son funciones continuas. Sustituyendo (36.42) en (36.48), obtendremos la fórmula buscada (36.41).

Resta sólo señalar que de la igualdad (36.43) por la convergencia demostrada de las series (36.44) y (36.45) se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c).$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)dt$ converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$ (véase el teorema 9), y $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ es una serie numérica, por esto también su suma, es decir, la serie (36.40), converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$. □

Así, si una serie convergente de funciones continuamente diferenciables es tal que la serie formada por sus derivadas converge uniformemente, entonces la suma de la serie es una función diferenciable y su derivada se obtiene diferenciando la serie término a término.

Por cuanto de las premisas de este teorema se deduce la convergencia uniforme de la serie, entonces, sin perder generalidad, se puede parafrasearlo de la siguiente forma.

Si una serie de funciones continuamente diferenciables y la serie formada por sus derivadas convergen uniformemente, entonces la suma de la serie inicial es continuamente diferenciable y su derivada es igual a la suma de las derivadas de los términos de la serie dada (es decir, la serie puede ser diferenciada término a término).

Parafraseemos ahora el teorema 10 para las sucesiones.

Teorema 10′. *Supongamos que la sucesión de funciones*

$$f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{36.49}$$

continuamente diferenciables sobre el segmento $[a, b]$, converge al menos en un punto $c \in [a, b]$, y la sucesión de sus derivadas f'_n, $n = 1, 2, \ldots$, converge uniformemente sobre $[a, b]$. Entonces la sucesión (36.49) converge uniformemente sobre $[a, b]$, su límite es una función continuamente diferenciable sobre este segmento y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Ejemplos de la aplicación de estas teoremas serán dados en el párrafo siguiente.

Ejercicios. 10. ¿Será válida la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} x^n) dx?$$

¿Puede ser establecida la validez con ayuda del teorema 9?

11. Constrúyase un ejemplo de una sucesión de funciones continuamente diferenciables, convergente sobre un segmento, cuyo límite también sea una función continuamente diferenciable, no obstante, las derivadas de los términos de la sucesión no convergen a la derivada de la función límite.

§ 37. SERIES DE POTENCIAS

37.1. RADIO DE CONVERGENCIA Y CÍRCULO DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Definición 1. *Las series funcionales del tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{37.1}$$

donde a_n y z_0 son números complejos dados, y z es una variable compleja, se llaman series de potencias. Los números

$$a_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

se llaman coeficientes de las series de potencias (37.1).

Suponiendo que los coeficientes de la serie y el número z_0 están dados, investigaremos el comportamiento de la serie (37.1) para los diferentes z.

Si en la serie (37.1) efectuamos un cambio de variable, haciendo $\zeta = z - z_0$, entonces obtendremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n. \tag{37.2}$$

Evidentemente, la investigación de la convergencia de la serie (37.1), es equivalente a la investigación de la convergencia de la serie (37.2), por esto en el futuro analizaremos las series del tipo (37.2), utilizando, es cierto, como regla, para designar la variable la letra z y no la letra ζ.

Teorema 1 (de Abel). *Si la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{37.3}$$

converge para $z = z_0 \neq 0$, entonces converge, y además absolutamente, para cualquier z, para el cual $|z| < |z_0|$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{37.4}$$

converge. Entonces su término n-ésimo $a_n z_0^n$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ (véase el p. 35.1), y por esto la sucesión $\{a_n z_0^n\}$ está acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|a_n z_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Por esto, para el término n-ésimo de la serie (37.2), se obtiene la estimación

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Si $|z| < |z_0|$ (fig. 154), entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, al ser la suma de una progresión geométrica con denominador $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, converge. Por esto, por el criterio de comparación (véase el p. 35.5) también converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ y esto significa la convergencia absoluta de la serie (37.3) cuando $|z| < |z_0|$. □

Corolario 1. *Si la serie de potencias* (37.3) *diverge para $z = z_0$, entonces diverge para cualquier z*, para el cual $|z| > |z_0|$.

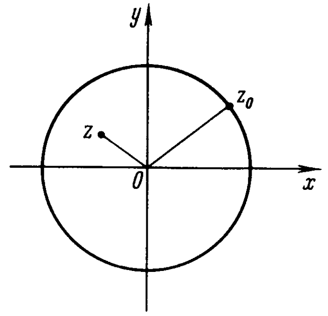


FIG. 154

En efecto, si $|z| > |z_0|$ y la serie (37.4) diverge, entonces también diverge la serie (37.3), ya que si convergiera, entonces por lo demostrado, convergería también la serie (37.4).

Definición 2. *Sea dada la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Si R es un número no negativo o* $+\infty$ *y tiene la propiedad de que para todos los z, para los cuales* $|z| < R$, *la serie* (37.3) *converge, y para todos los z, para los cuales* $|z| > R$, *la serie* (37.3) *diverge, entonces este número se llama radio de convergencia de la serie de potencias* (37.3).

El conjunto de los puntos z, para los cuales $|z| < R$, *se llama círculo de convergencia de la serie* (37.3).

Teorema 2. *Para cualquier serie de potencias* (37.3), *existe un radio de convergencia R. En el círculo de convergencia, es decir, para cualquier z, para el cual* $|z| < R$, *la serie* (37.3) *converge absolutamente. Sobre cualquier círculo* $|z| \leqslant r$, *donde r es fijo y* $r < R$, *la serie* (37.3) *converge uniformemente.*

DEMOSTRACIÓN. Designemos por A el conjunto de todos los números no negativos en los cuales la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{37.5}$$

converge. Ya que para $x = 0$, esta serie converge a ciencia cierta, entonces el conjunto A es no vacío, y por esto tiene cota superior finita o infinita. Mostremos que $\sup A = R$. En efecto, sea $z \in C$ y $|z| < R$. Por la definición de cota superior existe $x \in A$ tal que $|z| < x < R$ (véase la definición 6′ en el p. 3.4). Por la definición del conjunto A, para el x señalado la serie (37.5) converge, por lo tanto, según el teorema de Abel en el punto z escogido converge también la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Si $|z| > R$, entonces escogemos un número real x tal que $R < x < |z|$; entonces, otra vez por la definición del conjunto A, la serie (37.5) diverge en este punto x, pues está sobre el eje real más a la derecha que todos los puntos en los cuales la serie (37.5) converge. Por esto, según el corolario del teorema de Abel para el z escogido diverge también la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

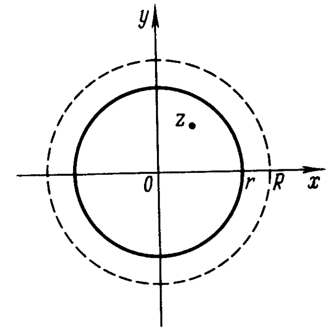


FIG. 155

Así, en efecto, R es el radio de convergencia de la serie (37.3).

Si ahora $0 < r < R$, entonces, por lo demostrado, la serie (37.3) para $z = r$ converge absolutamente, es decir, converge la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Y ya que para cualquier punto z del círculo $|z| \leqslant r$ (fig. 155)

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

entonces, por el criterio de Weierstrass (véase el p. 36.3), sobre este círculo, la serie (37.3) converge uniformemente. □

De esta forma, la región de convergencia de cualquier serie de potencias es siempre un "círculo"*), excluyendo, puede ser, cierto conjunto de sus puntos de frontera. En los puntos de frontera del círculo de convergencia, la serie puede tanto converger como diverger (véanse los ejemplos a continuación).

Subrayemos, que el radio de convergencia de la serie de potencias (37.3) tiene la siguiente propiedad: para cada número z tal que $|z| < R$, la serie señalada *absolutamente*, y para cada z tal que $|z| > R$, sencillamente, y por lo tanto, aún más, diverge *absolutamente* (diverge la serie formada por las magnitudes absolutas de los términos de la serie dada). Esto se deduce evidentemente de la definición del radio de convergencia y del teorema 2.

Los términos de la serie de potencias son funciones continuas y, como fue mostrado, sobre cualquier círculo que se encuentre junto con su frontera dentro del círculo de convergencia, la serie de potencias converge uniformemente, y por esto su suma es continua sobre cualquier círculo señalado. Es evidente, que para cualquier punto z del círculo de convergencia, $|z| < R$, se puede escoger un círculo que contenga este punto y que esté junto con su frontera en el círculo de convergencia (es suficiente tomar su radio r tal que $|z| < r < R$), por esto, *la serie de potencias es*

*) La palabra "círculo" está escrita entre comillas ya que en el caso de $R = +\infty$ el "círculo" significa todo el plano.

continua en cada punto de su círculo de convergencia $|z| < R$ (subrayemos que aquí se habla de un círculo abierto).

Analicemos ahora el caso cuando la serie de potencias converge en el punto $z = R$, que está sobre la frontera de su círculo de convergencia. Señalemos que el caso de $z = -R$ puede ser reducido al caso de $z = R$ con el sencillo cambio de variable $\zeta = -z$.

Teorema 3 (de Abel). *Si R es el radio de convergencia de la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *y esta serie converge para* $z = R$, *entonces converge uniformemente sobre el segmento* $[0, R]$.

Corolario. *Si la serie de potencias* (37.3) *converge para* $z = R$, *entonces su suma es continua sobre el segmento* $[0, R]$.

Esta afirmación con frecuencia se llama *segundo teorema de Abel* sobre las series de potencias.

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \leqslant x \leqslant R$. Representemos la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en la forma de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\dfrac{x}{R}\right)^n$. Ya que los términos de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ no dependen de x, entonces su convergencia implica también su convergencia uniforme. La sucesión $\{(x/R)^n\}$ es acotada sobre el segmento $[0, R]$, sus términos son no negativos: $0 \leqslant \left(\dfrac{x}{R}\right)^n \leqslant 1$ y ella decrece monótonamente en cada punto (para $x = R$ ella decrece no estrictamente, más exactamente, es estacionaria). Por esto, según el criterio de Abel de convergencia uniforme de las series (véase el teorema 7 en el p. 36.3), la serie (37.3) converge uniformemente sobre el segmento $[0, R]$. □

El corolario se deriva de que la suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas, también es una función continua.

Todo lo dicho se traslada a las series de potencias generales del tipo (37.1), con ayuda de la transformación del tipo $z = \zeta - \zeta_0$ (ζ es una nueva variable, ζ_0 está fijo). En particular, la región de convergencia de esta serie consta de un círculo del tipo $|z - z_0| < R$ y cierto conjunto de los puntos sobre su frontera (este conjunto puede ser vacío).

Este círculo se llama círculo de convergencia de la serie (37.1), y R, su radio se convergencia.

Ejemplos. 1. El radio de convergencia R de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ es igual a cero, es decir, esta serie converge sólo para $z = 0$*).

En efecto, investigando la convergencia absoluta de esta serie, por el criterio de D'Alembert, para cualquier $z \neq 0$, obtendremos

*) Para $z = 0$, evidentemente, converge cualquier serie del tipo (37.3).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!z^{n+1}|}{|n!z^n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|z| = +\infty.$$

De esta forma, la serie analizada no converge absolutamente para todo $z \neq 0$; de aquí, por el corolario del teorema de Abel, diverge para cualquier $z \neq 0$.

2. El radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ es igual a $+\infty$, ya que, como hemos visto (véase el p. 36.1), esta serie converge para cualquier z.

3. La suma de la progresión geométrica infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{37.6}$$

converge para $|z| < 1$ y diverge para $|z| \geqslant 1$. Por esto, su radio de convergencia es $R = 1$. Señalemos, que en todos los puntos de la frontera del círculo de convergencia, es decir, en todos los puntos de la circunferencia $|z| = 1$, la serie (37.6) diverge, ya que para el término general de la serie tenemos $|z^n| = 1$, y, por lo tanto, no tiende a cero cuando $n \to \infty$.

4. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{37.7}$$

converge para $|z| \leqslant 1$, ya que cuando se cumple esta condición $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| < \dfrac{1}{n^2}$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Para $|z| > 1$, la serie (37.7) diverge, ya que en este caso $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n^2} = +\infty$*), es decir, no se cumple la condición necesaria para la convergencia de una serie. El radio de convergencia de la serie (37.7), como el de la serie (37.6), es igual a la unidad, sin embargo, en cada punto de la frontera del círculo de convergencia la serie (37.7), a diferencia de la serie (37.6), converge.

5. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

tiene radio de convergencia $R = 1$.

En efecto, aplicando el criterio de D'Alembert para la definición de z, para los cuales la serie converge absolutamente (respectivamente, diverge), obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}/(n+1)|}{|z^n/n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |z|$$

*) En efecto, es fácil, por ejemplo, con ayuda de la regla de L'Hospital convencerse de que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|z|^x}{x^2} = +\infty$ (véase el ejemplo 2 en el p. 12.2).

y, por consiguiente, para $|z| < 1$, la serie dada converge, además absolutamente, y para $|z| > 1$, diverge. Para $z = 1$, se obtiene la serie armónica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, y para $z = -1$, la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (véanse el p. 35.3 y el p. 35.9). De esta forma, en este ejemplo sobre la frontera del círculo de convergencia hay puntos en los cuales la serie converge y hay puntos en los cuales diverge.

De los ejemplos analizados (véase también el p. 36.1) se ve que a veces el radio de convergencia R de la serie de potencias se halla con ayuda del criterio de D'Alembert de convergencia de las series con términos positivos (véase el teorema 8 en el p. 35.6). Efectivamente, es válida la siguiente afirmación: *si existe el límite (finito o infinito)* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, *entonces*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{37.8}$$

En efecto, si el número R está definido por esta fórmula y $|z| < R$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{a_n z^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{R} < 1,$$

y por esto la serie (37.3) para este z converge (y además absolutamente).

Si $|z| > R$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{R} > 1$ y, por consiguiente, la serie (37.3) diverge absolutamente. De esta forma, R, en efecto, es el radio de convergencia de la serie (37.3).

De forma análoga se puede hallar la magnitud del radio de convergencia R con ayuda del criterio de Cauchy (véase el teorema 9 en el p. 35.6), si sólo existe el límite (finito o infinito) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. En este caso

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{37.8'}$$

En efecto, si el número R está dado por esta fórmula y si $|z| < R$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R} < 1,$$

y por esto la serie (37.3) converge. Si $|z| > R$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{R} > 1$$

y, por lo tanto, la serie (37.3), no converge absolutamente.

De esta forma, R es el radio de convergencia de la serie (37.3).

Al aplicar este método de determinación del radio de convergencia de una serie de potencias pueden surgir dificultades, por ejemplo, en el caso cuando en la serie analizada se tienen coeficientes, con números tan grandes como se quiera, iguales a

cero. En este caso se puede probar utilizar el método señalado, renumerando previa y consecutivamente todos los términos de la serie con coeficientes distintos de cero (por lo que su convergencia y suma, en caso de que converja, no varían).

Aclaremos lo dicho en un ejemplo. Supongamos que se exige determinar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{donde} \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0 & \text{si} \quad n = 0, 2, 4, \dots. \end{cases}$$

El criterio D'Alembert no es aplicable para determinar la convergencia de esta serie, ya que la relación $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ no tiene sentido para los números pares n. Tampoco nos da respuesta en este caso el criterio de Cauchy, ya que no es difícil comprobar que aquí el límite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ no existe. Sin embargo, si hacemos $b_k = \frac{1}{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, y escribimos la serie dada en la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

entonces, investigando la convergencia absoluta de esta serie con ayuda del criterio de D'Alembert, obtendremos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b_{k+1}z^{2k+3}|}{|b_k z^{2k+1}|} = |z|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+3} = |z|^2.$$

De aquí se deduce que la serie analizada converge absolutamente, cuando $|z^2| < 1$, es decir, cuando $|z| < 1$, y diverge absolutamente cuando $|z| > 1$. De esta forma, el radio de convergencia de esta serie de potencias es igual a 1.

Subrayemos, que con ayuda del criterio de D'Alembert y del criterio de Cauchy se puede hallar el radio de convergencia no para una serie de potencias arbitrarias, sino sólo para aquella para la cual existen los límites señalados anteriormente (es posible, después de una nueva numeración de sus términos).

Ejercicios. Determínense los radios de convergencia de las series:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{2n}$.

37.2*. FÓRMULA DE CAUCHY — HADAMARD PARA EL RADIO DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Hallemos ahora la fórmula para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias arbitraria, a través de sus coeficientes en el caso general.

Teorema 4. *Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{37.3}$$

entonces

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}\ ^{*)}. \tag{37.9}$$

La fórmula (37.9) se llama *fórmula de Cauchy-Hadamard***).

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Analicemos inicialmente el caso de $\rho = 0$. Mostremos que en este caso la serie (37.3) converge para cualquier z. Tomemos cualquier $z \neq 0$ y ε tal que $0 < \varepsilon < 1$. Entonces (véase el teorema 10 en el p. 4.12*) existe N tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\varepsilon}{|z|} \text{ para todos los } n \geqslant N_1, \text{ es decir,}$$

$$|a_n|\,|z|^n < \varepsilon^n \text{ para todos los } n \geqslant N_1.$$

De aquí, por el criterio de comparación se deduce que la serie (37.3) converge absolutamente, y por lo tanto, sencillamente converge para el z dado, y ya que z era arbitrario, entonces esto significa que $R = +\infty$.

Tomemos otro caso extremo: sea $\rho = +\infty$. Mostremos que en este caso la serie (37.3) diverge para cualquier $z \neq 0$. En efecto, si $\rho = +\infty$, entonces existe la sucesión n_k, $k = 1, 2, \ldots$, de la serie natural, tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$. Por esto, cualquiera que sea $z \neq 0$, existe un número k tal que para $k > k_z$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant \frac{1}{|z|}, \text{ es decir, } |a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant 1.$$

De esta forma, no se cumple la condición necesaria de convergencia de una serie, o sea, la tendencia a cero de su término n-ésimo, por esto para un $z \neq 0$ dado, la serie diverge y ya que $z \neq 0$ era arbitrario, entonces esto significa que $R = 0$.

Sea ahora $0 < \rho < +\infty$. Mostremos que para cualquier z tal que $|z| < \frac{1}{\rho}$ la serie (37.3) converge. Elijamos $\varepsilon > 0$ de tal modo que $|z| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}$***), entonces el número q, definido por la igualdad $q = (\rho + \varepsilon)\,|z|$, va a satisfacer la desigualdad $q < 1$. Por la propiedad del límite superior existe un número N_1 tal que para $n \geqslant N_1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon,$$

) Sobre el límite superior véase en el p. 4.12.

**) J. Hadamard (1865 — 1963), matemático francés.

***) Para esto es suficiente tomar $\varepsilon < \frac{1}{|z|} - \rho$.

por esto para $n \geqslant N_1$

$$|z|\sqrt[n]{|a_n|} < |z|(\rho + \varepsilon) = q, \quad \text{es decir,} \quad |a_n z^n| < q^n, \quad 0 < q < 1,$$

y por el criterio de comparación la serie (37.3), para el z analizado, converge absolutamente, y por lo tanto, sencillamente converge.

Mostremos ahora, que la serie (37.3), para cualquier z tal que $|z| > \frac{1}{\rho}$, diverge.

Escojamos $\varepsilon > 0$ de tal modo que

$$|z| > \frac{1}{\rho - \varepsilon} > 0, \tag{37.10}$$

entonces $|z|(\rho - \varepsilon) > 1$. Según la propiedad del límite superior (véase el teorema 10 del p. 4.12*), existe la subsucesión n_k, $k = 1, 2, \ldots$, de números naturales tal que

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

De esto, en virtud de (37.10) se deduce que

$$|z|\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > |z|(\rho - \varepsilon) > 1$$

y, por lo tanto,

$$|a_{n_k} z^{n_k}| > 1,$$

es decir, en este caso no se cumple la condición necesaria de la convergencia de una serie, o sea, la tendencia a cero de su término n-ésimo, y por esto para el z analizado la serie (37.3), diverge.

De esta forma, la serie (37.3) converge si $|z| < \frac{1}{\rho}$ y diverge, si $|z| > \frac{1}{\rho}$, y esto significa que $R = \frac{1}{\rho}$. □

37.3. FUNCIONES ANALÍTICAS

Definición 3. *La función $f(z)$ se llama analítica en el punto z_0 si existe $R > 0$ tal que en el círculo $|z - z_0| < R$ ella es representable por una serie de potencias del tipo* (37.1), *es decir, existen los números complejos a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, tales que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R. \tag{37.11}$$

La suma, la deferencia y el producto de funciones analíticas en un punto es otra vez una función analítica en este punto (¿por qué?).

Lema 1. *Si R es el radio de convergencia de la serie* (37.11), $R > 0$ *y*

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

es el resto de la serie (37.11), *entonces*

$$r_n(z) = O((z - z_0)^{n+1}) \text{ cuando } z \to z_0, \tag{37.12}$$

y, por lo tanto,

$$r_n(z) = o((z - z_0)^n) \text{ cuando } z \to z_0. \tag{37.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $|z - z_0| < R$, entonces

$$r_n(z) = (z - z_0)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n+1}$$

y la serie, que se obtiene después de sacar el factor $(z - z_0)^{n+1}$, converge. Por esto la función $\varphi(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n-1}$ como la suma de una serie de potencias, es continua en el círculo $|z - z_0| < R$.

Si ahora $0 < r < R$, entonces la función $\varphi(z)$, siendo continua sobre el círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r$, será, además, acotada sobre él, es decir, se encuentra una constante $M > 0$ tal que (véase el p. 23.3) para $|z - z_0| \leqslant r$ se cumple la desigualdad $|\varphi(z)| \leqslant M$. Por cuanto $r_n(z) = (z - z_0)^{n+1}\varphi(z)$, entonces para $|z - z_0| \leqslant r$ obtendremos:

$$|r_n(z)| = |z - z_0|^{n+1}|\varphi(z)| \leqslant M|z - z_0|^{n+1},$$

y esto significa (37.12). La condición (37.13) se deduce directamente de (37.12). □

Teorema 5. *La representación de la función $f(z)$, analítica en el punto z_0, en la forma de serie de potencias* (37.11) *es única, es decir, si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R, \quad R > 0, \tag{37.14}$$

entonces

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

DEMOSTRACIÓN. De la igualdad (37.14) para $n = 0$, según la fórmula (37.12) se deduce que cuando $z \to z_0$

$$a_0 + O(z - z_0) = b_0 + O(z - z_0).$$

Pasando en esta igualdad al límite para $z \to z_0$, obtendremos $a_0 = b_0$.

Supongamos que ya está demostrado que

$$a_j = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

entonces por (37.12) y (37.14)

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + O((z - z_0)^{n+1}) =$$
$$= b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n + O((z - z_0)^{n+1}).$$

Eliminando los términos iguales en ambos miembros de esta igualdad y dividiendo ambos miembros por $(z - z_0)^n$ tendremos

$$a_n + O(z - z_0) = b_n + O(z - z_0), \quad z \to z_0.$$

De aquí, en el límite cuando $z \to z_0$ obtendremos que $a_n = b_n$ (compárese con el teorema 2 en el p. 13.2). □

Puede suceder que sólo analizando la serie en el dominio de los números complejos se puede explicar la magnitud de su radio de convergencia. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

que es la suma de la progresión geométrica con denominador $-x^2$, converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| \geqslant 1$. Su suma sobre el intervalo $(-1; 1)$ es igual a $\frac{1}{1 + x^2}$. La función $\frac{1}{1 + x^2}$ está definida y es infinitamente diferenciable sobre todo el eje real, por esto no se entiende por qué al descomponerla en la serie

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

obtenemos una serie que sólo converge para $|x| < 1$. Esto se hace completamente natural, si analizamos esta función en el dominio de los números complejos, ya que la función $\frac{1}{1 + z^2}$ tiene un "punto singular" para $z = i$ (en este punto la función no está definida y cuando se acerca a él, tiende al infinito), es decir, precisamente en la frontera del círculo $|z| \leqslant 1$.

37.4. FUNCIONES ANALÍTICAS REALES

En el presente punto en lo fundamental se estudiarán las series de potencias con términos reales. Sin embargo, previamente demostraremos un lema, válido para las series de potencias en el dominio complejo.

Lema 2. *Los radios de convergencia de las series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{37.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n + 1}, \tag{37.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{37.17}$$

son iguales.

DEMOSTRACIÓN. Sea R el radio de convergencia de la serie (37.15); R_1, el radio de convergencia de la serie (37.16) y R_2, el radio de convergencia de la serie (37.17). De las desigualdades

$$\left|\frac{a_n z^{n+1}}{n + 1}\right| \leqslant |z|\,|a_n z^n| \leqslant |z^2|\,|n a_n z^{n-1}|, \; n = 1, 2, \ldots,$$

y del teorema de comparación (véase el teorema 6 en el p. 35.5) se deduce que si en cierto punto z converge la serie (37.17), entonces en este punto converge también la serie (37.16) y si en cierto punto z converge la serie (37.16), entonces en este mismo punto converge también la serie (37.15). De aguí se deduce que

$$R_2 \leqslant R \leqslant R_1. \tag{37.18}$$

Mostremos ahora que

$$R_1 \leqslant R_2. \tag{37.19}$$

Supongamos que la serie (37.16) converge en el punto z_0 y $0 < |z_0| < R_1$. Escojamos el número real r tal que $|z_0| < r < R_1$. Entonces para $n = 1, 2, \ldots$, obtendremos

$$|na_n z_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z_0|^2}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|\left|\frac{z_0}{r}\right|^{n+1}. \tag{37.20}$$

En virtud de la convergencia de la serie (37.16) para $z = r$, el término general de esta serie para $z = r$ tiende a cero, cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| = 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right|$, $n = 1, 2, \ldots$, es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que para todos los $n = 1, 2, \ldots$, se cumple la desigualdad

$$\left|\frac{a_n r^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant M.$$

Haciendo $q = \left|\frac{z_0}{r}\right|$ de (37.20) obtendremos la desigualdad

$$|na_n z_0^{n-1}| \leqslant \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} Mq^{n+1}, \quad 0 < q < 1.$$

Ya que la serie con término general $\frac{n(n+1)}{|z_0|^2} Mq^{n+1}$ converge (es fácil convencerse de esto, por ejemplo, según el criterio de D'Alembert), entonces para $z = z_0$ converge también la serie (37.17). La desigualdad (37.19) está demostrada. De las desigualdades (37.18) y (37.19) se deduce que

$$R = R_1 = R_2. \ \square$$

OBSERVACIÓN. La afirmación del lema puede ser demostrada de una forma más sencilla si se utiliza la fórmula de Cauchy — Hadamard para el radio de convergencia de una serie de potencias (véase el p. 37.2*). No hemos hecho esto, ya que la demostración dada tampoco es complicada y por cuanto no utiliza la fórmula de Cauchy — Hadamard, entonces el punto 37.2* puede ser omitido en la primera lectura (lo que señala el asterisco adjunto a su número).

En lo adelante de este párrafo en todos los casos cuando no se diga lo contrario, supondremos que los coeficientes de todas las series analizadas son reales y que las variables z y z_0 también son reales (en este caso las denotaremos por x y x_0). Cierto es, que todas las propiedades de las series de potencias analizadas a continuación se trasladan también, en cierto sentido, sobre las series de potencias en el dominio

complejo; sin embargo para esto tendríamos que generalizar el concepto de derivada e integral para las funciones de argumento complejo, y esto no se incluye en el objetivo del presente curso.

Así, analizaremos las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{37.21}$$

donde $a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, x y x_0 son reales. Si R es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)$ donde z es un número complejo, es decir, la serie con los mismos coeficientes que la serie (37.21), pero analizada en el dominio complejo, entonces, evidentemente, la serie (37.21) converge si $|x - x_0| < R$ y diverge si $|x - x_0| > R$.

En este caso R, como hasta ahora, se llama *radio de convergencia de la serie* (37.21), y el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ *es su intervalo de convergencia.*

Teorema 6. *Si R es el radio de convergencia de la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{37.22}$$

$R > 0$, entonces

1) *la función f tiene en el intervalo $(x_0 - R, x_0 + R)$ derivadas de todos los órdenes, las cuales se hallan a partir de la serie* (37.22) *diferenciando término a término;*

2) *para cualquier $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1},$$

es decir, en el interior del intervalo de convergencia la serie de potencias puede ser integrada término a término;

3) *las series de potencias que se obtienen de la serie* (37.22) *como resultado de la diferenciación o de la integración término a término, tienen el mismo radio de convergencia que la propia serie* (37.22).

DEMOSTRACIÓN. Por el lema, demostrado al inicio de este párrafo, los radios de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1},$$

obtenida de la serie (37.22) diferenciando término a término, y de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x - x_0)^{n+1}}{n+1},$$

obtenida de la misma serie integrando término a término, son iguales al radio de convergencia de la serie (37.22) (para convencerse de esto, es suficiente hacer el cambio de variable $x - x_0 = z$).

Por cuanto cualquier serie de potencias de la forma (37.22) con radio de convergencia R, converge uniformemente sobre el segmento $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$ (véase el teorema 2 en el p. 37.1), entonces la afirmación del teorema sobre la posibilidad de la diferenciación y de la integración término a término de las series de potencias reales, se deduce directamente de los teoremas correspondientes sobre la diferenciabilidad e integrabilidad de las series funcionales, demostrados en el punto 36.4. □

Observemos que, por ejemplo, la posibilidad de integración término a término de la serie de potencias (37.22) dentro del intervalo de convergencia $(x_0 - R, x_0 + R)$ se deriva inmediatamente (véase el teorema 9 en el p. 36.4) de que la serie de potencias converge uniformemente sobre cualquier segmento $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$. De aquí se deduce que durante la integración término a término el radio de convergencia de una serie de potencias no disminuye. El teorema demostrado contiene una afirmación más completa, que el radio de convergencia señalado, además, no aumenta, es decir, permanece igual.

Teorema 7. *Si la función f es analítica en el punto x_0, es decir, es representable en un entorno de este punto, por la serie* (37.22) *con radio de convergencia $R > 0$, entonces*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{37.23}$$

es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

DEMOSTRACIÓN. Diferenciando n veces ambos miembros de la igualdad (37.22), obtendremos (véase el teorema 6):

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 2\cdot 1\cdot a_n + (n+1)n\dots 2n_{n+1}(x - x_0) + \\ + (n+2)(n+1)\dots 3a_{n+2}(x - x_0)^2 + \dots .$$

De aquí, para $x = x_0$ se obtiene la fórmula (37.23). □

Observemos que del teorema demostrado se deduce otra vez la propiedad de la unicidad del desarrollo de una función en serie de potencias (cierto está, esta vez a base de las restricciones hechas sólo en el dominio real, compárese con el p. 37.3).

37.5. DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS. DIFERENTES FORMAS DE ESCRITURA DEL TÉRMINO RESIDUAL DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

Definición 4. *Sea la función f definida en cierto entorno del punto x_0 y tiene en este punto derivadas de todos los órdenes. Entonces la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{37.24}$$

se llama serie de Taylor de la función f en el punto x_0.

Para $x_0 = 0$ la serie (37.24) se llama también serie de Maclaurin de la función $f(x)$.

Como sabemos, cualquier función analítica en el punto x_0 es infinitamente diferenciable en cierto entorno de este punto y es igual en este entorno a la suma de su serie de Taylor. Resulta que lo contrario, en general, no es cierto: existen funciones infinitamente diferenciables, pero que no son analíticas, y por consiguiente, no representables por su serie de Taylor.

Un ejemplo de esta función es la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{para} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases} \tag{37.25}$$

Para $x \neq 0$ esta función tiene derivadas de todos los órdenes, las que se calculan fácilmente:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = -\frac{6}{x^4}e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6}e^{-1/x^2},$$

y en general

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

donde $P_n(1/x)$ es un polinomio de cierto grado respecto a $1/x$ (n es el número de orden y no el grado del polinomio), es decir, $f^n(x)$ es una combinación lineal de los sumandos del tipo

$$\frac{1}{x^m}e^{-1/x^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{37.26}$$

Esto se comprueba fácilmente por inducción. Haciendo el cambio de variable $t = \frac{1}{x^2}$ hallamos, aplicando la regla de L'Hospital, el límite del módulo de la expresión (37.26) cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x^m}e^{-1/x^2}\right| = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{m/2}}{e^t} = 0.$$

De aquí se deduce que el límite de la expresión (37.26) cuando $x \to 0$ también es igual a cero y que para cualquier $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{x\to 0} f^n(x) = \lim_{x\to 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} = 0. \tag{37.27}$$

De la fórmula (37.27) para $n = 0$ y $n = 1$ se deduce que la función f es continua en el punto $x = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, por esto (véase el corolario 3 del teorema 3 del p. 11.2) $f'(0)$ existe y $f'(0) = 0$. Por inducción es fácil convencerse en forma semejante de que $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

De esta forma, todos los términos de la serie de Taylor de la función (37.25) en el punto $x_0 = 0$ son iguales a cero, por esto su suma para todos los x, también es igual a cero y, por lo tanto, no coincide con la propia función f. Observemos también que por el teorema 5 del p. 37.3, la función (37.25) no puede ser descompuesta en ninguna serie de potencias (ya que si esto fuera posible ésta sería una serie de Taylor), y esto significa que la función no es analítica.

Ejercicios. 6. ¿Se puede desarrollar la función $f(x) = e^{-1/x}$, $x > 0$, sobre el segmento $[0, 1]$ en una serie de Maclaurin?

7. Sea

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad x \geqslant 0, \\ -1 & \text{cuando} \quad x < 0. \end{cases}$$

Demuéstrese que la función $\theta(x)e^{-1/x^2}$ puede definirse complementariamente para $x = 0$ de tal forma que como resultado se obtenga una función infinitamente diferenciable sobre todo el eje numérico.

Observemos que si una función se descompone, en cierto entorno de un punto dado, en una serie de potencias, entonces esta serie es única (véase el teorema 5 ó el teorema 7) y es su serie de Taylor. Sin embargo, una misma serie de potencias puede ser serie de Taylor para distintas funciones. Así, la serie de potencias con coeficientes nulos $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$ es tanto serie de Taylor de la función idénticamente nula sobre todo el eje numérico: $f(x) = 0$, $x \in R$, como serie de Taylor para la función (37.25) en el punto $x = 0$.

Surge la pregunta: ¿cuándo la *serie de Taylor* (37.24) de la función $f(x)$ sobre cierto intervalo converge a $f(x)$? Para investigar esta cuestión, escribamos la *fórmula de Taylor* para la función f (véase el p. 13.1):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x) \tag{37.28}$$

la que es válida para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$. En esta fórmula $r_n(x)$ denota el término residual de la fórmula de Taylor, y no el resto de la serie de Taylor, ya que con el resto de la serie no se puede operar hasta que se establezca que la serie converge, sólo en este caso se puede afirmar que el término residual de la fórmula de Taylor coincide con el resto de la serie de Taylor. Suponiendo

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

escribamos la fórmula (37.28) en la forma

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x) \tag{37.29}$$

donde $s_n(x)$ es la suma parcial n-ésima de la serie de Taylor. De aquí se ve que para que la función f sea igual, sobre el segmento analizado, a la suma de su serie de Taylor, es decir, para que $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, es necesario y suficiente que *para todos los x de este intervalo su término residual en la fórmula de Taylor tienda a cero,*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{37.30}$$

Si esto tiene lugar, entonces de la fórmula (37.29) se deduce que el término residual de la fórmula de Taylor $r_n(x)$ es también la suma del resto n-ésimo de la serie de Taylor (37.24).

Teorema 8. *Sea la función f definida y continua junto con todas sus derivadas hasta el orden $n + 1$ inclusive, sobre el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$. Entonces el término residual $r_n(x)$ de su fórmula de Taylor (37.29) para todos los $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ puede ser escrito en las tres formas siguientes:*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{37.31}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{37.32}$$

donde ξ pertenece al intervalo con extremos en los puntos x_0 y x, y

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1} \tag{37.33}$$

donde $0 < \theta < 1$.

La fórmula (37.31) *se llama término residual de la fórmula de Taylor en forma integral, la fórmula* (37.32), *en la forma de Lagrange, y la* (37.33), *en la forma de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. Del teorema fundamental del cálculo diferencial e integral (véase en el p. 29.3 el teorema 4), tenemos

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x - t).$$

Integrando por partes la integral en la parte derecha, obtendremos

$$f(x) = f(x_0) + [-f'(t)(x - t)]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\,dt =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\,dt.$$

Supongamos que está demostrado para cierto $m \leqslant n$, que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x - t)^{m-1}\,dt. \tag{37.34}$$

Integremos por partes el último término otra vez:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x - t)^{m-1}\,dt = -\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)\,d(x - t)^m =$$
$$= -\left.\frac{f^{(m)}(t)(x - t)^m}{m!}\right|_{x_0}^{x} + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m\,dt =$$
$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m\,dt$$

y sustituyamos esta expresión en (37.34):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x - t)^m dt.$$

Como resultado se ha obtenido la fórmula (37.34), en la cual m ha sido sustituida por $m + 1$.

De esta forma, la fórmula (37.34) está demostrada por el método de inducción para todos los $m \leqslant n$. Para $m = n$ su término residual tiene la forma (37.31).

Apliquemos ahora el primer teorema integral sobre el valor medio a la integral (37.31), sacando fuera del signo de la integral "el valor medio" de la derivada $f^{(n+1)}$ (véase el corolario del teorema 1 en el p. 28.2):

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x - t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

donde ξ está sobre el intervalo con extremos en los puntos x_0 y x.

La fórmula (37.32) está demostrada.

Si aplicamos el teorema integral sobre el valor medio a la integral (37.31), sacando fuera del signo de la integral "el valor medio" de toda la función subintegral (véase el p. 28.2), entonces obtendremos

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0), \qquad (37.35)$$

donde ξ, como antes, está sobre el intervalo con extremos en los puntos x_0 y x, es decir,

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

De aquí $x - \xi = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (x - x_0)(1 - \theta)$. Substituyendo esta expresión en (37.35), obtenemos la fórmula (37.33). □

Señalemos ahora una condición suficiente del desarrollo de una función en serie de potencias.

Teorema 9. *Sean la función f y todas sus derivadas acotadas en conjunto sobre el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que para todos los $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ y todos los $n = 0, 1, 2, \ldots$, se cumple la desigualdad*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M. \qquad (37.36)$$

Entonces sobre el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ la función f se desarrolla en la serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < h. \qquad (37.37)$$

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, observemos que cualquiera que sea el número a,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad (37.38)$$

(véase el ejemplo 4 en el p. 4.9, además, esta igualdad se deduce directamente de que la expresión $a^n/n!$ es el término general de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ (véase el (36.4)).

Para demostrar la fórmula (37.37) es suficiente convencerse (véase (37.30)) de que

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \qquad (37.39)$$

donde $r_n(x)$ es el término residual en la fórmula de Taylor de la función f. Tomemos $r_n(x)$ en la forma de Lagrange (véase (37.32)). De la desigualdad (37.36) se deduce que

$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leqslant M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde $|\xi - x_0| < |x - x_0| < h$. Por cuanto según (37.38)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

entonces para $|x - x_0| < h$ se cumple la condición (37.39). □

Ejercicio 8. Sustituyamos en el teorema 8 la condición de acotación de las derivadas $f^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, sobre el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ por la condición de su acotación sólo en el punto x_0, es decir, supongamos que existe $M > 0$ tal que para todos los n se cumple la desigualdad $|f^{n}(x_0)| \leqslant M$. Entonces, evidentemente, la serie (37.37) converge y además absolutamente sobre todo el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ ya que $\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n\right| \leqslant \frac{M(x - x_0)^n}{n!}$ *y la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x - x_0)^n}{n!}$ converge para todos los x (véase la serie (36.4)). ¿Si se deduce de aquí la afirmación del teorema 9?

37.6. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES EN SERIES DE TAYLOR

Ante todo hallemos el desarrollo en serie de algunas de las principales funciones elementales.

1. *Desarrollo en serie de la función $f(x) = e^x$.* Ya que $f^{(n)}(x) = e^x$, entonces para cualquier $h > 0$ dado, para todos los $x \in (-h, h)$ y todos los $n = 0, 1, \ldots$

$$0 < f^{n}(x) < e^h.$$

De esta forma, las condiciones del teorema 9 se cumplen ($x_0 = 0$), por esto la función e^x se desarrolla en la serie de Taylor (37.34) sobre cualquier intervalo finito y, por consiguiente, sobre todo el eje real. Por cuanto en el caso dado $f^{(n)}(0) = 1$, entonces esta descomposición tiene la forma

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{37.40}$$

Recordemos que en el p. 36.1 se estableció que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge absolutamente sobre todo el plano complejo*). Vemos ahora, que para los $z = x$ reales su suma es igual a e^x. En el caso de z esencialmente complejos, su suma por analogía se denota por e^z; de esta forma, la fórmula

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{37.41}$$

para los complejos z es la definición de la función e^z.

La definición dada es natural, en primer lugar porque en el caso de $z = x$ real esta función coincide con la función exponencial e^x, y en segundo lugar porque la función e^z conserva una serie de propiedades características de la función e^x. Mostremos, por ejemplo, que

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{37.42}$$

para z_1 y z_2 complejos cualesquiera.

Sabemos que la serie (37.41) converge absolutamente, por esto las series

$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}, \quad e^{z_2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$$

pueden multiplicarse término a término (véase el p. 35.10), además, ya que la serie que se obtiene en este caso también absolutamente converge, sus términos se pueden colocar en orden arbitrario. Juntemos todos los términos que contengan el producto $z_1^n z_2^m$ con igual suma $n + m$, y coloquemos estos grupos de términos según el crecimiento de $n + m$:

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{n+m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{z_1^{(n+m-k)}}{(n+m-k)!} \cdot \frac{z_2^k}{k!} =$$

$$= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{(n+m-k)!k!} z_1^{n+m-k} z_2^k =$$

$$= \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^{n+m}}{(n+m)!} = e^{z_1+z_2}.$$

*) Esto se deduce, por el teorema de Abel, también de la convergencia de la serie (37.40), demostrada por nosotros, sobre todo el eje real.

2. *Desarrollo en serie de* sh$x$ *y* ch$x$. Sustituyendo en la fórmula (37.40) x por $-x$ (esto significa sencillamente un cambio de notación), obtenemos

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \tag{37.43}$$

Sumando y restando las igualdades (37.40) y (37.43), y después dividiéndolas por dos, obtenemos

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{37.44}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}. \tag{37.45}$$

En las partes derechas de estas fórmulas, por la unicidad del desarrollo de funciones en series de potencias están las series de Taylor de las funciones ch$x$ y sh$x$.

Ya que la función e^z está definida ahora para todos los z complejos, entonces sobre los valores esencialmente complejos del argumento se pueden extender también las funciones hiperbólicas sh$x$ y ch$x$, haciendo

$$\operatorname{ch} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Las funciones ch$z$ y sh$z$, definidas de esta forma, para los z complejos se desarrollan en las series de potencias (37.44) y (37.45), que convergen sobre todo el plano complejo (en ellas por x en este caso se entiende un número complejo).

3. *Desarrollo en serie del* sen$x$ *y del* cos$x$. *Fórmulas de Euler.* Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (véase el ejemplo 3 en el p. 10.1), por esto $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ para todos los reales x. Por el teorema 9, de aquí se deduce que la función sen$x$ se desarrolla en una serie de potencias sobre todo el eje real. Recordando la fórmula de Taylor para el seno (véase el p. 13.3), obtenemos la serie de Taylor para el sen$x$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{37.46}$$

Razonando de forma análoga y recordando la fórmula de Taylor para el coseno (véase el p. 13.3), obtenemos para ella la fórmula de Taylor

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{37.47}$$

que también converge sobre todo el eje real.

Por el teorema de Abel (véase el p. 37.1), las series que se encuentran en los segundos miembros de las fórmulas (37.46) y (37.47), convergen también para cualquier complejo x; esto permite extender el seno y el coseno sobre los valores complejos del argumento, haciendo para cualquier complejo z

$$\operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{37.48}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}. \tag{37.49}$$

En el dominio complejo es fácil establecer la relación entre la función exponencial y las trigonométricas. Sustituyendo en la serie (37.41) z inicialmente por iz y después por $-iz$, tenemos

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}; \quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}. \tag{37.50}$$

Observando ahora que

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad n = 4k, \\ i & \text{cuando} \quad n = 4k+1, \\ -1 & \text{cuando} \quad n = 4k+2, \\ -i & \text{cuando} \quad n = 4k+3, \end{cases}$$

y, por consiguiente, $i^{2k} = (-1)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, de (37.50) tendremos

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Comparando estas fórmulas con (37.48) y (37.49), obtendremos

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{37.51}$$

De ellas se deduce directamente también la fórmula

$$\cos z + i \operatorname{sen} z = e^{iz}. \tag{37.52}$$

Estas fórmulas, naturalmente, son válidas, en particular, para los z reales.

Las fórmulas (37.51) y (37.52) se llaman *fórmulas de Euler*. Señalemos dos aplicaciones sencillas de ellas.

Si en la fórmula (37.52) $z = \varphi$ es un número real, entonces

$$\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi = e^{i\varphi}.$$

Por esto el número complejo con módulo r y argumento φ

$$r = z(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

se puede escribir en la forma

$$z = re^{i\varphi}.$$

Haciendo aquí $z = -1$, y, por consiguiente, $\varphi = \pi$, obtendremos

$$e^{i\pi} = -1$$

que es una relación entre los números e, π e i.

Recordemos que los números π, e e i surgieron en matemática por motivos completamente distintos y alejados unos de otros: el número π, como la relación de la longitud de la circunferencia con respecto al diámetro; e, como la base de la función exponencial para la cual la derivada de la función coincide con la propia función y la unidad imaginaria i fue introducida para que cada ecuación cuadrática tuviera solución.

Con auyda de la fórmula de Euler es fácil hallar el módulo y el argumento del número e^z, donde $z = x + iy$. En efecto (véase (37.42)),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

es decir, $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$.

El seno y el coseno en el dominio complejo tienen muchas propiedades que las poseen también en el dominio real, sin embargo no todas; surgen también nuevas propiedades.

Ejercicios. Demuéstrese que para cualquier complejo z:

9. $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$, $\cos(-z) = \cos z$.
10. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
11. $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$.
12. Demuéstrese que para todos los $z \in C$ es válida la desigualdad $e^z \neq 0$.
13. Sea $\operatorname{tg} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$. Demuéstrese que para todos los $z \in C$ se cumple la desigualdad $\operatorname{tg} z \neq \pm i$. *Indicación.* Exprésese $\operatorname{tg} z$ a través de la función exponencial e^z.
14. ¿Se pueden desarrollar las funciones $\sqrt{z}$, $\operatorname{sen}\sqrt{z}$, $\cos\sqrt{x}$ en la serie de potencias (37.3)?

Mostremos que los valores absolutos del seno y el coseno en el dominio complejo pueden ser mayores que la unidad y, más aún, tener no acotados sus valores absolutos.

Sustituyamos en las series (37.48) y (37.49) z por iz:

$$\operatorname{sen} iz = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos iz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Comparando las series obtenidas con las series (37.44) y (37.45) (para $x = z$), obtendremos

$$i \operatorname{sh} z = \operatorname{sen} iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

En particular para $z = y$ real

$$|\operatorname{sen} iy| = |\operatorname{sh} y| \quad \text{y} \quad |\cos iy| = \operatorname{ch} y$$

de donde se ve que sobre el eje imaginario las funciones sen z y cos z no son acotadas en valor absoluto.

En calidad de propiedad de nuevo tipo, que aparece para la función exponencial e^z en el domino complejo, señalemos ahora su periodicidad*). Precisamente, demostremos que la función e^z tiene período $2\pi i$:

$$e^{z + 2\pi i} = e^{x + i(y + 2\pi)} = e^x[\cos(y + 2\pi) + i\,\mathrm{sen}(y + 2\pi)] =$$
$$= e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) = e^{x + iy} = e^z, z = x + iy.$$

4. *Desarrollo en serie de la función* $\ln(1 + x)$. La fórmula de Taylor para $\ln(1 + x)$ tiene la forma (véase el p. 13.3)

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Escribamos el término residual $r_n(x)$ en la fórmula de Lagrange. Notando que

$$[\ln(1 + x)]^{n+1} = (-1)^n \frac{n!}{(1 + x)^{n+1}}$$

obtendremos

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n + 1)(1 + \theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, entonces $0 < \dfrac{1}{1 + \theta x} \leqslant 1$ y por esto $|r_n(x)| < \dfrac{1}{n + 1}$ de donde

$$\lim_{x \to \infty} r_n(x) = 0. \tag{37.53}$$

Si $-1 < x < 0$, entonces es conveniente escribir el término residual $r_n(x)$ en la forma de Cauchy:

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1 - \theta)^n}{(1 + \theta x)^{n+1}} x^{n+1}.$$

En este caso

$$0 < \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} = \frac{1 - \theta}{1 - \theta|x|} < 1,$$

ya que en el numerador de la fraccion $\dfrac{1 - \theta}{1 - \theta|x|}$ de la unidad se resta un número mayor que en el denominador, además de esto

$$\frac{1}{1 + \theta x} = \frac{1}{1 - \theta|x|} < \frac{1}{1 - |x|},$$

*) Si la función f está definida sobre cierto conjunto de números (en general complejos) X, entonces el número $T \in C$ se llama su *período* si para cada $x \in X$ tenemos $x \pm T \in X$ y $f(x + T) = f(x)$. La función que tiene período se llama *periódica*.

por esto

$$|r_n(x)| \leqslant \left|\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right|^n \cdot \frac{1}{|1 + \theta x|}|x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|},$$

de donde para $-1 < x < 0$ también obtenemos (37.53).

De esta forma,

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \tag{37.54}$$

para todos los $x \in (-1; 1]$.

Para $x = -1$ la serie, que aparece en el segundo miembro de la igualdad (37.54), se diferencia de la serie armónica sólo en el factor -1 y por esto diverge. Diverge también para todos los valores de x tales que $|x| > 1$, ya que en este caso el término n-ésimo de la serie (37.54) no tiende a cero, más aún (véase el p. 12.2),

$$\lim_{n \to \infty}\left|\frac{x^n}{n}\right| = +\infty.$$

5. *Desarrollo en serie del binomio* $(1 + x)^\alpha$. La fórmula de Taylor para la función binominal tiene la forma (véase el p. 13.3)

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + r_n(x). \tag{37.55}$$

Analicemos la serie correspondiente (llamada serie binominal con exponente α):

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n. \tag{37.56}$$

Si α es un entero no negativo, entonces la serie (37.56) contiene solamente un número finito de términos, distintos de cero, y, por lo tanto, converge para todos los x.

Analicemos ahora el caso cuando α no es un entero no negativo. En este caso en la serie (37.56) todos los términos son distintos de cero para $x \neq 0$.

Para la investigación de la convergencia absoluta de la serie (37.56) utilicemos el criterio de D'Alembert. Dicho de otra forma, apliquemos el criterio de D'Alembert a la serie con término n-ésimo:

$$u_n = \left|\frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n\right|.$$

Observando que $\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n \to \infty}\left|\dfrac{\alpha - n}{n + 1}x\right| = |x|$ obtendremos que la serie (37.56) converge absolutamente, y por consiguiente, sencillamente converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$.

Sin embargo, del solo hecho de la convergencia de la serie binominal (37.56) para $|x| < 1$, no se puede aún hacer la conclusión de que su suma es igual a $(1 + x)^\alpha$.

Para esto es necesario demostrar que en la fórmula (37.55) $r_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Observando que

$$[(1 + x)^\alpha]^{(n+1)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n)(1 + x)^{\alpha - n - 1},$$

escribamos el término residual $r_n(x)$ de la fórmula (37.55) en la forma de Cauchy:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n)(1 + \theta x)^{\alpha - n - 1}}{n!}(1 - \theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

(θ depende de x y de n). Hagamos

$$A_n(x) = \frac{(\alpha - 1) \dots [(\alpha - 1) - (n - 1)]}{n!} x^n,$$

$$B_n(x) = \alpha x(1 + \theta x)^{\alpha - 1}, \quad C_n(x) = \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x}\right)^n;$$

entonces

$$r_n(x) = A_n(x) B_n(x) C_n(x).$$

Es evidente que $A_n(x)$ es el término general de la serie binominal con exponente $\alpha - 1$, y por consiguiente, por la convergencia de la serie binominal para $|x| < 1$, demostrada anteriormente,

$$\lim_{n \to \infty} A_n(x) = 0, \quad |x| < 1.$$

Más adelante, de que $1 - |x| < 1 + \theta x < 1 + |x|$ se deduce que los valores de $|B_n(x)|$ están incluidos entre las magnitudes

$$|\alpha x|(1 - |x|)^{\alpha - 1} \quad \text{y} \quad |\alpha x|(1 + |x|)^{\alpha - 1}$$

que no depende de θ, es decir, la sucesión $\{B_n(x)\}$ para un $x \in (-1, 1)$ dado, es acotada. Por último,

$$|C_n(x)| = \left|\frac{1 - \theta}{1 - \theta x}\right|^n \leqslant \left|\frac{1 - \theta}{1 - \theta |x|}\right|^n < 1.$$

De las propiedades establecidas de $A_n(x)$, $B_n(x)$ y $C_n(x)$ se deduce, que

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \quad |x| < 1.$$

De esta forma, para cualquier $x \in (-1, 1)$ es válida la igualdad

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n.$$

Problema 26. Demuéstrese que 1) en el punto $x = 1$ para $\alpha > -1$ la serie binominal converge, y para $\alpha \leqslant -1$ diverge;

2) en el punto $x = -1$ para $\alpha \geqslant 0$ la serie binominal converge absolutamente, y para $\alpha < 0$ diverge.

Además, cada vez, cuando la serie binominal (37.56) converge, su suma es igual a $(1 + x)^\alpha$.

37.7. MÉTODOS DE DESARROLLO DE LAS FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIA

Diferenciando o integrando los desarrollos conocidos, en series de Taylor, se puede obtener el desarrollo de nuevas funciones en series de potencias. Así, por ejemplo, integrando la fórmula de la progresión geométrica

$$\frac{1}{1 + t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + \dots \tag{37.57}$$

en los límites desde 0 hasta x, $|x| < 1$ (esto es válido, ya que la serie (37.57) converge uniformemente sobre el segmento con extremos en los puntos 0 y x para $|x| < 1$), obtenemos la conocida fórmula (37.54):

$$\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n + 1} + \dots.$$

Antes esta fórmula fue demostrada sobre el intervalo semiabierto $(-1; 1]$ y ahora sólo para el intervalo $(-1; 1)$. No obstante, por el segundo teorema de Abel sobre las series de potencias (p. 37.1), de la validez de la fórmula (37.54) sobre el intervalo $(-1; 1)$ se deduce inmediatamente su validez para $x = 1$. En efecto, la serie en la parte derecha de esta fórmula converge para $x = 1$ y, por lo tanto, su suma es continua en este punto (véase el teorema 3 en el p. 37.1), la función $\ln(1 + x)$ también es continua para $x = 1$, por esto en ambos miembros de la igualdad (37.54) (si es conocido que es válida sobre el intervalo $(-1; 1)$) se puede pasar al límite cuando $x \to 1 - 0$ y de esta forma demostrar su validez también para $x = 1$:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Como resultado de la diferenciación o de la integración de la serie de potencias dada, a veces se logra obtener una serie, cuya suma ya es conocida; esto permite calcular también la suma de la serie de potencias inicial.

Ejemplos. 1. Hallemos el desarrollo de la función $\arcsen x$ en serie. Observando que

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

desarrollemos $(\arcsen x)'$ en serie según la fórmula de desarrollo de una potencia del binomio (véase el p. 37.6):

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - 1)!!}{2^n n!} x^{2n}. \tag{37.58}$$

El radio de convergencia de la serie obtenida es igual a la unidad (véase allí mismo). Integrando la serie (37.58) desde 0 hasta x, $|x| < 1$, obtendremos:

$$\arcsen x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}.$$

2. Desarrollemos la función $\operatorname{arctg} x$ en serie de potencia y con ayuda de ella hallemos la serie numérica, cuya suma es igual a π.

Actuando para $|x| < 1$ de forma análoga al ejemplo 1, tenemos:

$$\operatorname{arctg} x = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (37.59)$$

Observemos que la serie obtenida para $x = \pm 1$, por el criterio de Leibniz (véase el p. 35.9, el teorema 11) converge, ya que converge la serie con términos de signo variable:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Ya que la función $\operatorname{arctg} x$ es continua para $x = \pm 1$, entonces por el segundo teorema de Abel para las series de potencias (véase en el p. 37.1, el teorema 3) la suma de la serie (37.59), siendo una función continua sobre el segmento $[-1, 1]$ y coincidiendo con $\operatorname{arctg} x$ sobre el intervalo $(-1, +1)$, coincide con él también en los puntos extremos $x = \pm 1$. Dicho de otra forma, el desarrollo (37.59) es válido para el segmento $[-1, +1]$. Tomando en este desarrollo, por ejemplo, $x = 1$ y observando que $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, obtendremos

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Esta serie se llama *serie de Leibniz.*

Señalemos que el arco tangente está definido sobre todo el eje numérico, en particular, también fuera del segmento $[-1, 1]$. Sin embargo, su desarrollo en la serie de potencias (37.59) es válido sólo sobre este segmento. Fuera de este segmento la serie (37.59) diverge, de lo que es fácil convencerse, hallando su radio de convergencia, por ejemplo, a base de la fórmula (37.8′). El análisis de este fenómeno se realiza en la teoría de las funciones de variable compleja.

3. Hallemos la suma de la serie

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n. \qquad (37.60)$$

El radio de convergencia de esta serie es igual a la unidad. Es fácil convencerse de esto, por ejemplo, a partir del criterio de D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx} \right| = |x|.$$

Por lo tanto, la serie (37.60) converge absolutamente para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$. De (37.60) se deduce que

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1.$$

Integremos esta serie término a término desde 0 hasta x, $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

y después diferenciamos la identidad obtenida:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Como resultado obtenemos

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

4. Hallemos la suma de la serie

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \qquad (37.61)$$

El radio de convergencia de esta serie es igual a la unidad; es fácil convencerse de ello, por ejemplo, de la misma forma que en el caso de la serie (37.60). Diferenciando la serie (37.61), término a término

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

y utilizando el desrrollo del logaritmo (véase el p. 37.6), obtendremos

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1 \quad \text{ó} \quad S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Observando que $S(0) = 0$, definitivamente obtendremos

$$S(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt.$$

De esta forma la respuesta aquí no se expresa en funciones elementales.

5. Durante el desarrollo de las funciones racionales en serie de Taylor es cómodo utilizar su desarrollo en fracciones elementales (véase el p. 23.6). Aclaremos este método con un ejemplo: hallemos el desarrollo de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

en serie de Taylor en los entornos de los puntos $z_0 = 0$, $z_0 = \frac{3}{2}$ y $z_0 = 4$. Desarrollando la función $f(z)$ en fracciones elementales, obtendremos

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z}.$$

Hallemos inicialmente la serie de Taylor para $f(z)$ en el entorno de $z_0 = 0$. Observemos que las fracciones

$$\frac{1}{1-z} \quad \text{y} \quad \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$$

representan las sumas de las progresiones geométricas infinitas

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

con denominadores z y $\dfrac{z}{2}$ a condición de que $|z| < 1$ y, respectivamente, que $\left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$. Ambas condiciones se cumplen cuando se cumple la primera. De esta forma

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

Este es el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de Taylor en un entorno del punto $z_0 = 0$, además, el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a 1. En efecto, por lo demostrado, éste no puede ser menor que 1 (la serie de potencias obtenida converge para $|z| < 1$), y por otra parte tampoco puede ser mayor que 1, ya que a la distancia unidad del punto $z_0 = 0$ se tiene el punto $z_1 = 1$, para el cual $\lim\limits_{z \to z_1} f(z) = \infty$ y por esto el desarrollo de la función $f(z)$ en serie de potencias no puede converger en el punto z_1.

Para obtener la serie de Taylor de la función $f(z)$ en el entorno del punto $z_0 = \dfrac{3}{2}$, utilicemos otra vez la suma de la progresión geométrica infinitamente decreciente, pero hagamos esto de otra forma, eliminando en los denominadores de las fracciones elementales, en las que se desarrolla la fracción $f(z)$, los términos $z - \dfrac{3}{2}$:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = -\frac{1}{\dfrac{1}{2} + \left(z - \dfrac{3}{2}\right)} - $$

$$- \frac{2}{\dfrac{1}{2} - \left(z - \dfrac{3}{2}\right)} = -\frac{2}{1 + 2\left(z - \dfrac{3}{2}\right)} - \frac{4}{1 - 2\left(z - \dfrac{3}{2}\right)} =$$

$$= -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n \left(z - \frac{3}{2}\right)^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z - \frac{3}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}[(-1)^{n+1} - 2] \left(z - \frac{3}{2}\right)^n.$$

Este cálculo es válido para la condición de que $2\left|z - \dfrac{3}{2}\right| < 1$ (la magnitud absoluta del denominador de las progresiones geométricas analizadas es menor que la unidad), es decir,si $\left|z - \dfrac{3}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$. Razonando igual que en el caso de $z_0 = 0$, obtenemos que el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a $\dfrac{1}{2}$

Por último, en el caso de $z_0 = 4$ tenemos

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = \frac{1}{-3-(z-4)} - \frac{2}{-2-(z-4)} =$$

$$= -\frac{1}{3\left(1 + \dfrac{z-4}{3}\right)} + \frac{1}{1 + \dfrac{z-4}{2}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-4)^n}{3^n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right] (z-4)^n.$$

Todo esto es válido cuando $\left|\dfrac{z-4}{2}\right| < 1$, es decir, para $|z - 4| < 2$. De aquí, como anteriormente, se deduce que el radio de convergencia de la serie obtenida es igual a 2.

Prestemos atención a que en todos los tres casos, el radio de convergencia de las series de potencias obtenidas es igual a distancia desde el punto z_0, en cuyo entorno se determinaba el desarrollo señalado, hasta el "punto singular" de la función, más cercano a él. En el caso dado hasta el punto tal que $\lim\limits_{z \to z_1} f(z) = \infty$. En el caso de $z_0 = 0$ este punto es 1 y $|z_0 - z_1| = 1$; en el caso de $z_0 = \dfrac{3}{2}$ es $z_1 = 1$ ó $z_1 = 2$ y aquí $|z_1 - z_0| = \dfrac{1}{2}$; por último para $z_0 = 4$ tenemos $z_1 = 2$ y $|z_1 - z_0| = 2$. Este no es un fenómeno casual, se estudia detalladamente en la teoría de funciones de variable compleja.

Aplicando el método analizado se puede desarrollar en los correspondientes dominios las funciones racionales también en las series no sólo según las potencias positivas de z, sino también según las negativas.

Por ejemplo, para $|z| > 2$, tenemos

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{2-z} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)\frac{1}{z^n}$$

y en el anillo $1 < |z| < 2$:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

En el primer caso el desarrollo obtenido contiene sólo potencias negativas de z, en el segundo, tanto positivas como negativas. La teoría general de semejantes desarrollos también se estudia en la teoría de las funciones de variable compleja.

Se reduce también al desarrollo de fracciones racionales en series de potencias, el desarrollo en tales series, de las funciones de la forma $\ln\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\operatorname{arctg}\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\operatorname{arcctg}\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son ciertos polinomios. Para obtener los desarrollos necesarios se puede diferenciar las funciones dadas, como resultado se obtienen fracciones racionales. Al desarrollar estas fracciones racionales en series de potencias y al integrarlas, tendremos los desarrollos buscados.

Ejercicios. 14. Descompóngase en serie de potencia la función $(\arcsen x)^2$.

15. Hállese la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

37.8. FÓRMULA DE STIRLING

Con ayuda del desarrollo de la función logarítmica en serie de potencias se puede hallar fácilmente la fórmula, que describe el comportamiento asintótico del factorial $n!$ cuando $n \to \infty$. Está fórmula se llama *fórmula de Stirling* [*] y puede ser escrita en la forma

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}, \quad n \to \infty; \tag{37.62}$$

[*] J. Stirling (1692 — 1770), matemático inglés.

según la definición de igualdad asintótica para las sucesiones (véase el p. 23.3) esto significa que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = 1.$$

Del desarrollo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

se deduce que

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right) = 2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Suponiendo aquí $x = \frac{1}{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, obtendremos

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} =$$

$$= \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right] > \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

de donde

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$$

o, potenciando y teniendo en cuenta que la función $\ln x$ es creciente,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e. \tag{37.63}$$

Hagamos

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}; \tag{37.64}$$

por cuanto según (37.63)

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > 1,$$

entonces $x_n > x_{n+1}$, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ decrece, y, además, está acotada inferiormente, $x_n \geqslant 0$. Por lo tanto, existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{def}}{=} a.$$

Por esto

$$x_n = a(1 - \varepsilon_n) \tag{37.65}$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Mostremos que $a \neq 0$. Ya que

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\dfrac{1}{(2n+1)^2}}{1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{12n(n+1)},$$

entonces

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

y, por consiguiente,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Por esto

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} < \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

es decir

$$x_n e^{-\frac{1}{12n}} < x_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

De esta forma, la sucesión $y_n = x_n e^{-\frac{1}{12n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, crece y ya que, evidentemente, $y_n < x_n$, entonces está acotada superiormente y, por lo tanto, tiene límite

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{12n}} = a.$$

Además, para cualquier n es válida la desigualdad $a > y_n > 0$, por esto $a > 0$.

Sustituyamos (37.65) en (37.64)

$$n! = a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1 + \varepsilon_n). \tag{37.66}$$

Para obtener la fórmula (37.62) resta sólo mostrar que $a = \sqrt{2\pi}$. Por la forma de Wallis (véase (30.8) en el p. 30.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \tag{37.67}$$

y según (37.66)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{(1+\varepsilon_n)^2}{1+\varepsilon_{2n}}.$$

Sustituyendo esta expresión en (37.67), obtendremos

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}a^2\frac{n}{2}\frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4},$$

de donde $a = \sqrt{2\pi}$. □

37.9* FÓRMULA Y SERIE DE TAYLOR PARA LAS FUNCIONES VECTORIALES

Analicemos la función vectorial $f: [a, b] \to R^n$, donde R^n es un espacio vectorial n-dimensional. Como ya se ha señalado, para las funciones vectoriales se generalizan los conceptos de límite, continuidad, derivada, diferencial e integral (véanse en el § 15 el p. 18.4 y el p. 30.4) sobre los cuales se extienden muchas propiedades de estos conceptos válidas para las funciones numéricas. No obstante, no para todas las propiedades esto tiene lugar. Así, en el p. 15.2 fue mostrado, que la afirmación, análoga a la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange, ya no es válida para las funciones vectoriales. Por esto, no es válida, naturalmente, tampoco su generalización en forma de fórmula de Taylor con término residual en forma de Lagrange. Mostremos que para las funciones vectoriales es válida la fórmula de Taylor con término residual en forma integral.

Teorema 10. *Supongamos que la función $f: (t_0 + h, t_0 - h) \to R^n$ es continua junto con todas sus derivadas, hasta la de orden $n+1$ inclusive, sobre el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$, $h > 0$. Entonces para cualquier $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$* es válida la fórmula

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^n \cdot f^{(n+1)}\tau\, d\tau. \tag{37.68}$$

Corolario.

$$\left|f(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}t_0(t - t_0)\right|^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}(t - t_0)^{n+1}\sup_{(t_0 - h,\, t_0 + h)}|f^{(n+1)}(\tau)|,$$

$t \in (t_0 - h, t_0 + h)$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Ante todo recordemos que si

$$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)), \tag{37.69}$$

entonces

$$f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_n'(t)), \quad t \in (t_0 - h, t_0 + h), \tag{37.70}$$

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(\tau)d\tau, \ldots, \int_{t_0}^{t} f_n(\tau)d\tau \right). \tag{37.71}$$

De las suposiciones del teorema se deduce que cada función de coordenadas f_i es continua sobre el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$ junto con todas sus derivadas, hasta la de orden $n + 1$ inclusive, y por esto para ella es válida la fórmula de Taylor con término residual en forma integral

$$f_i(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_i^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k +$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^n f_i^{(n+1)}(\tau)d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

De aquí, por (37.70) y (37.71) se deduce inmediatamente la validez de la fórmula (37.68). □

El corolario se deriva de la desigualdad

$$\left| \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^n f^{(n+1)}(\tau)d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant |t - t_0|^n \int_{t_0}^{t} \left| f^{(n+1)}(\tau)d\tau \right| \leqslant |t - t_0|^n \sup_{(t_0 - h, t_0 + h)} |f^{(n+1)}(\tau)| \left| \int_{t_0}^{t} d\tau \right| =$$

$$= |t - t_0|^{n+1} \sup_{(t_0 - h, t_0 + h)} |f^{(n+1)}(\tau)|. \ \square$$

Para las funciones vectoriales es válida también la fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano: si la función $f: (t_0 - h, t_0 + h) \to R^n$ tiene en el punto t_0 derivada de orden n, entonces

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + o((t - t_0)^n).$$

Esto también se deduce inmediatamente de que para cada función de coordenadas f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, en las suposiciones del teorema, tiene lugar la fórmula de Taylor con término residual en la forma de Peano, en el entorno del punto t_0 (véase el p. 13.1).

Si la función vectorial $f: (t_0 - h, t_0 + h) \to R^n$ tiene en el punto t_0 derivadas de todos los órdenes y para cualquier $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ se cumple la condición

$$\lim_{n \to \infty} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k \right] = 0,$$

entonces, sobre el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$ la función f se desarrolla en una serie de potencias con coeficientes vectoriales

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n$$

llamada su *serie de Taylor*.

37.10*. SERIES DE POTENCIAS ASINTÓTICAS

Es sabido (véase el p. 13.1), que si la función f está definida en un entorno del punto x_0 y es n veces diferenciable en él, entonces existe un polinomio $P_n(x)$ de grado, no mayor que n, precisamente el polinomio de Taylor tal que

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{37.72}$$

Además

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{37.73}$$

De (37.72) y (37.73) se deduce que la diferencia $f(x) - P_{n-1}(x)$ es representable en la forma

$$f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

y, de esta forma, tiene lugar la igualdad asintótica

$$f(x) - P_{n-1}(x) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \to x_0.$$

De esta forma, los términos del polinomio de Taylor $P_n(x)$ (serie de Taylor, si la función f es infinitamente diferenciable en el punto x_0) se pueden definir sucesivamente como los sumandos de la forma $a_n(x - x_0)^n$ iguales asintóticamente a la diferencia $f(x) - P_{n-1}(x)$ cuando $x \to x_0$.

De forma análoga se puede actuar durante el estudio de las funciones en el infinito. Sea ahora, para mayor definición, la función f definida para $x \geqslant a$, y existe el límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a_0 \tag{37.74}$$

y, por lo tanto $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - a_0] = 0$.

A veces surge la pregunta: ¿Cómo tiende precisamente la diferencia $f(x) - a_0$ a cero? ¿Cuál es el orden de decrecimiento de esta diferencia? Puede suceder que la diferencia señalada tiene al menos orden $\frac{1}{x}$, más aún que existe un número a_1 tal que

$$f(x) - a_0 \sim \frac{a_1}{x}, \quad x \to +\infty, \tag{37.75}$$

es decir, (véase el teorema 1 en el p. 8.3)

$$f(x) - a_0 = \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.76}$$

de donde

$$x[f(x) - a_0] = a_1 + xo(1/x), \quad x \to +\infty,$$

y ya que por la definición del símbolo o, $\lim\limits_{x \to +\infty} xo(1/x) = 0$, entonces

$$a_1 = \lim_{x \to +\infty} x[f(x) - a_0]. \tag{37.77}$$

Viceversa, de (37.77) se deduce que

$$x[f(x) - a_0] = a_1 + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

y, por lo tanto

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty,$$

es decir, se cumple la igualdad asintótica (37.76). Si el a_1 señalado está hallado, entonces con frecuencia es necesario hallar, como se dice, "el término siguiente del desarrollo asintótico" de la función f, es decir, hallar el comportamiento asintótico de la diferencia $f(x) - \left(a_0 + \dfrac{a_1}{x}\right)$ cuando $x \to +\infty$. Esta diferencia, por (37.76), no es otra cosa que $o(1/x)$, $x \to +\infty$. Puede suceder que el número a_2 sea ral, que la diferencia señalada tiene al menos orden $\dfrac{1}{x^2}$, más aún, que existe

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) \sim \frac{a_2}{x^2},$$

o lo que es lo mismo

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right) = \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty.$$

Esta condición es equivalente a la existencia del límite

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left[f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x}\right)\right] = a_2.$$

En general, si

$$S_{n-1}(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{37.78}$$

es un polinomio de grado no mayor que $n - 1$ respecto a la variable $1/x$ tal que

$$f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}\right) \sim \frac{c_{n-1}}{x^{n-1}}, \quad x \to +\infty, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

entonces puede ocurrir que existe la constante a_n, para la cual tiene lugar la igualdad asintótica

$$f(x) - S_{n-1}(x) \sim \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \tag{37.79}$$

Esta condición es equivalente a lo siguiente:

$$f(x) - S_{n-1}(x) = \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to \infty \tag{37.80}$$

lo que, suponiendo

$$S_n(x) = S_{n-1}(x) + \frac{a_n}{x^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \tag{37.81}$$

se puede escribir en la forma

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.82}$$

o, lo que es lo mismo, en la forma

$$\lim_{x \to +\infty} x^n[f(x) - S_n(x)] = 0. \tag{37.83}$$

Aquí, como antes, para $n = 1$, es fácil mostrar que la condición (37.80) es equivalente a la existencia del límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} x^n[f(x) - S_{n-1}(x)] = a_n. \tag{37.84}$$

Si los límites señalados a_n, existen para todos los $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces se puede formar la serie

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots. \tag{37.85}$$

Las series de este tipo también se pueden llamar *series de potencias*, más exactamente, series de potencias según las potencias enteras negativas de la variable x.

Definición 5. *Sea la función f definida para $x \geqslant a$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$. Si existe la serie de la forma* (37.85), *las sumas parciales* (37.78) *de la cual satisfacen o bien la condición* (37.79), *o bien, lo que es equivalente, una de las condiciones* (37.82) *ó* (37.83), *entonces esta serie se llama serie asintótica* (*o desarrollo asintótico*) *en el sentido de Poincaré*) de la función f cuando $x \to +\infty$.*

En este caso se escribe

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}. \tag{37.86}$$

Subrayemos que aquí el signo $\sim$ significa no la igualdad asintótica en el sentido, como por ejemplo, se entiende en la fórmula (37.79), es decir, en el sentido de la definición 3 del p. 8.2, sino la correspondencia: la serie (37.85) corresponde a la función f.

Como se ha señalado, la condición (37.80) es equivalente a la condición (37.84), por esto, si la función f tiene, cuando $x \to +\infty$, la serie asintótica (37.85), entonces sus coeficientes a_n, $n = 1, 2, \ldots$, pueden ser sucesivamente hallados por la fór-

*) A. Poincaré (1854 — 1912), matemático francés.

mula (37.84). Para $n = 0$ se debe utilizar la fórmula (37.74). De aquí se deduce que si la función tiene, para $x \to \infty$, serie asintótica, entonces ésta es única y sus coeficientes se expresan por las fórmulas (37.74) y (37.84).

Recordemos que durante el desarrollo de una función en serie de potencias, también fue demostrada la unicidad de la serie de potencias en la que se desarrolla la función, más precisamente, fue demostrada su coincidencia con la serie de Taylor. Sin embargo, allí fue señalado que una misma serie de potencias puede ser serie de Taylor para diferentes funciones. Una situación semejante tiene lugar también para las series asintóticas: una misma serie de la forma (37.85) puede ser serie asintótica de diferentes funciones cuando $x \to +\infty$. Por ejemplo, la serie nula, es decir, la serie todos los coeficientes de la cual son iguales a cero,

$$a_n = 0, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

es serie asintótica para $x \to +\infty$ tanto de la función, igual a cero en todos los puntos del eje numérico: $f_1(x) = 0, \quad -\infty < x < +\infty$, como de la función $f_2(x) = e^{-x}$, de lo que es fácil convencerse, calculando en estos casos sucesivamente los límites (37.84).

A diferencia del desarrollo de las funciones en series de potencias cuando la suma de la serie es la función dada, y, por lo tanto, la serie de potencias analizada converge, en la construcción de la serie asintótica de una función puede suceder que la serie obtenida no sólo no converge a la función dada, sino que en general diverge en todos los puntos. A pesar de esto, la serie asintótica (37.86) es un instrumento útil para su estudio, en particular para el cálculo de sus valores. Esto, evidentemente, está relacionado con que las sumas parciales de la serie asintótica (37.86) de la función, por la condición (37.82), dan una aproximación suficientemente buena de la propia función, además, mucho mejor mientras mayor sea x.

Aclaremos lo dicho en el ejemplo de la función

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\, dt, \quad x > 0. \tag{37.87}$$

Integrando n veces por parte, obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + \\ + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt. \tag{37.88}$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \tag{37.89}$$

es el desarrollo asintótico de la función (37.87). En efecto, si $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$, $n = 1, 2, \ldots$, es decir, $S_n(x)$ son las sumas par-

ciales de la serie (37.89), entonces integrando por partes, según (37.88), tendremos:

$$|f(x) - S_n(x)| = n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt = \\ = \frac{n!}{x^{n+1}} - (n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\, dt \leqslant \frac{n!}{x^{n+1}} = o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

es decir, se cumple la condición (37.82).

Al mismo tiempo, es fácil convencerse, según el criterio de D'Alembert, de que la serie (37.89) converge para todos los $x \in (-\infty, +\infty)$. Efectivamente, suponiendo

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

obtenemos

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{|x|} = +\infty.$$

Así, la serie asintótica (37.89) de la función (37.87) diverge en todos los puntos. Sin embargo, a pesar de esto los valores de la función (37.87), por la condición (37.82), pueden ser calculados, con un gran grado de exactitud, mediante las sumas parciales de esta serie.

Mostremos que si la serie (37.85) converge a cierta función f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \geqslant a > 0, \tag{37.90}$$

entonces es también la serie asintótica de esta función cuando $x \to +\infty$.

En efecto, sea

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k},$$

y, por consiguiente,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Mostremos que

$$R_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.91}$$

y por esto, más aún, que

$$R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty,$$

es decir, que

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty,$$

dicho de otra forma, que se cumple la condición (37.82). Para esto analicemos la función $F(t) \overset{\text{def}}{=} f(1/t)$, $0 < t \leqslant 1/a$. Por (37.90) obtenemos la igualdad

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

en la cual la serie, que se encuentra en el segundo miembro, converge cuando $0 < t < 1/a$, de donde, por el teorema de Abel, se deduce que converge para todos los t tales que $|t| < 1/a$. Si

$$r_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k t^k, \quad |t| < 1/a,$$

entonces (véase el lema 1 en el p. 37.3), $r_n(t) = O(t^{n+1})$, $t \to 0$. Efectuando aquí el cambio de variable $t = \dfrac{1}{x}$ obtenemos (37.91).

Para concluir señalemos que la condición (37.82) de desarrollo de una función en serie asintótica de potencias, se puede sustituir por otra condición que externamente es más fuerte, pero que en esencia es equivalente. Enunciémosla en forma de lema.

Lema 3. *Para que la serie* (37.85) *sea asintótica, cuando $x \to +\infty$, para la función f es necesario y suficiente que*

$$f(x) - S_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to +\infty, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{37.92}$$

La suficiencia de esta condición es evidente, ya que $O\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) = o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ (recordemos que igualdades semejantes se leen sólo de izquierda a derecha), y, por consiguiente, cuando se cumple la condición (37.92) se cumplirá (37.82).

Viceversa, si se cumple la condición (37.82):

$$f(x) - S_{n+1}(x) = o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \to +\infty,$$

entonces, ya que $S_{n+1}(x) = S_n(x) + \dfrac{a_{n+1}}{x^{n+1}}$ obtendremos

$$f(x) - S_n(x) = \frac{a_{n+1}}{x^{n+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \ \square$$

37.11*. PROPIEDADES DE LAS SERIES ASINTÓTICAS DE POTENCIAS

En este punto serán enunciadas y demostradas algunas de las propiedades fundamentales de los desarrollos de funciones en series asintóticas de potencias. En el futuro, en el p. 54.6., serán analizadas de forma más general las series asintóticas, no obligatoriamente las de potencias. Por cuanto en el presente punto se estudiarán

sólo los desarrollos asintóticos de las funciones, cuando $x \to +\infty$, en series de potencias de la forma (37.85), entonces las llamaremos sencillamente *desarrollos asintóticos*.

I. *Si*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.93}$$

entonces para cualesquiera números λ y μ

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda a_n + \mu b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

es decir, el desarrollo asintótico de la combinación lineal de funciones, que tienen desarrollo asintótico, es igual a la misma combinación lineal de los desarrollos asintóticos de estas funciones.

En efecto, si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty, \tag{37.94}$$

entonces para cualesquiera números λ y μ

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda a_k + \mu b_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty. \ \square$$

II. *Si tienen lugar los desarrollos asintóticos* (37.93), *entonces*

$$f(x) g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

donde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, *es decir, el desarrollo asintótico del producto de funciones que tienen desarrollos asintóticos, es igual al producto de estos desarrollos distribuidos según las potencias crecientes de* $1/x$.

En efecto, si tiene lugar (37.94), entonces

$$f(x)g(x) = \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right) = a_0 b_0 + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{x} + \ldots + \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), x \to +\infty. \ \square$$

III. *Si*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.95}$$

y $a_0 \neq 0$, *entonces la función* $1/f(x)$ *también tiene el desarrollo asintótico*

$$f(x) \sim \frac{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

y el coeficiente d_n *de este desarrollo se expresa por los coeficientes* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *del desarrollo* (37.95), $n = 0, 1, 2, \ldots$.

En efecto, de (37.95) se deduce (véase (37.74)), que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a_0$. Por esto existe el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}.$$

Más adelante, se puede mostrar sucesivamente la existencia de los límites (37.84) para la función $1/f(x)$, calculándolos directamente. Por ejemplo

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0}\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{a_0}\right) =$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} \frac{a_1 + xo(1/x)}{a_0\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = -\frac{a_1}{a_0^2},$$

es decir, $d_1 = -a_1/a_0^2$.

De forma análoga se calcula $d_2, d_3, \ldots$ □

IV. *Si la función* f *es continua para* $x \geqslant a > 0$ *y tiene el desarrollo asintótico, que comienza con el término de orden* $\frac{1}{x^2}$

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.96}$$

entonces

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}}, \quad x \to +\infty, \tag{37.97}$$

es decir, en el caso señalado las series asintóticas se pueden integrar término a término.

Demostremos esto. Sea

$$S_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \quad R_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - S_n(x) \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Por cuanto las funciones f y S_n son continuas para $x \geqslant a$, entonces también la función R_n es continua para $x \geqslant a$. Por (37.96)

$$R_n(x) = o(1/x^n), \quad x \to +\infty.$$

Por esto para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \geqslant a$ tal que para todos los $x \geqslant x_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n}.$$

De aquí se deduce, en primer lugar, que la integral $\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} R_n(t)dt$ y por esto, también la integral $\int_x^{+\infty} R_n(t)dt$, $x \geqslant x_\varepsilon$, existen y en segundo lugar, que para $x \geqslant x_\varepsilon$ tiene lugar la desigualdad

$$\left|x^{n-1}\int_x^{+\infty} R_n(t)dt\right| \leqslant x^{n-1}\int_x^{+\infty} |R_n(t)|dt \leqslant \varepsilon x^{n-1}\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^n} = \frac{\varepsilon}{n-1}$$

y, por lo tanto, en virtud de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario,

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n-1}\int_x^{+\infty} R_n(t)dt = 0. \tag{37.98}$$

Ahora, integrando la igualdad $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ obtendremos

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{(k-1)x^{k-1}} + \int_x^{+\infty} R_n(t)dt. \tag{37.99}$$

Por cuanto se cumple la condición (37.98), la igualdad (37.99) implica la validez del desarrollo asintótico (37.97) (véase 37.83)). □

V. *Si la función* f *se desarrolla en la serie asintótica*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad x \to +\infty, \tag{37.100}$$

y si ella tiene para $x \geqslant a$ *derivada continua, la cual también, para* $x \to +\infty$, *se desarrolla en serie asintótica, entonces esta serie se obtiene diferenciando formalmente término a término la serie* (37.100)

$$f'(x) \sim -\sum_{n=1} \frac{na_n}{x^{n+1}}, \quad x \to +\infty. \tag{37.101}$$

En efecto, sea

$$f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty. \tag{37.102}$$

Por la fórmula de Newton — Leibniz para $x \geqslant a$ e $y \geqslant a$ cualesquiera

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_x^y \left[b_0 + \frac{b_1}{x}\left(f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t}\right)\right] dt =$$

$$= b_0(y - x) + b_1 \ln\frac{y}{x} + \int_x^y \left[f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t}\right] dt. \quad (37.103)$$

Por (37.102) $f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $t \to +\infty$. Por lo tanto, la integral

$$\int_x^{+\infty} \left[f' t - b_0 - \frac{b_1}{t}\right] dt$$

converge. Por (37.100) existe el límite finito

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = a_0.$$

Por esto, pasando al límite cuando $y \to +\infty$ en (37.103), nos convencemos de que existe el límite finito

$$\lim_{y \to +\infty} [b_0(y - x) + b_1 \ln y/x].$$

Esto es posible sólo en el caso cuando $b_0 = b_1 = 0$. De esta forma, la igualdad (37.103) en el límite se convierte en la igualdad

$$a_0 - f(x) = \int_x^{+\infty} f'(t)dt;$$

además, por la condición $b_0 = b_1 = 0$ de (37.102) tenemos:

$$f'(x) \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{x^n}, \quad x \to +\infty;$$

de aquí, integrando término a término en los límites de x a $+\infty$, por la propiedad IV, obtendremos

$$a_0 - f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{nx^n}, \quad x \to +\infty.$$

Pero de (37.100) se deduce que

$$a_0 - f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}.$$

Recordando que el desarrollo de una función, cuando $x \to +\infty$, en una serie asintótica de potencias es única, de la comparación de las series obtenidas para la función $a_0 - f(x)$ hallaremos que

$$b_{n+1} = -na_n, \quad n = 1, 2, \dots . \ \square$$

OBSERVACIÓN. Si una función f, continuamente diferenciable para $x \geqslant a$, se desarrolla, cuando $x \to +\infty$, en una serie asintótica, entonces su derivada puede no tener desarrollo asintótico cuando $x \to +\infty$. Por eso, la existencia del desarrollo asintótico de la derivada en la proposición V es esencial. En calidad de ejemplo analicemos la función $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} e^x$, $-\infty < x < +\infty$. No es difícil, con ayuda de la fórmulas (37.84), convencerse de que la función f, cuando $x \to +\infty$, se desarrolla en la serie asintótica nula, es decir, la serie (37.85), para la cual $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Su derivada $f'(x) = -e^{-x} \operatorname{sen} e^x + \cos e^x$ a ciencia cierta no tiene desarrollo asintótico cuando $x \to +\infty$, ya que incluso no tiene límite cuando $x \to +\infty$.

Ejercicio 16. Demuéstrese que

a) $$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \dots, x \to +\infty;$$

b) $$\int_x^{+\infty} e^{x^2 - t^2} dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4x^7} + \dots, \quad x \to +\infty.$$

§ 38*. SERIES MÚLTIPLES

38.1. SERIES NUMÉRICAS MÚLTIPLES

En el presente párrafo se analizarán las así llamados series múltiples de la forma

$$\sum_{n_1, \dots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \dots n_k}, \quad (38.1)$$

donde $u_{n_1 \dots n_k}$ son números dados (en general, complejos), numerados por k índices n_i, $i = 1, 2, \dots, k$, cada uno de los cuales recorre independientemente la serie natural de los números: $n_i = 1, 2, \dots$. La serie (38.1) se llama serie de multiplicidad k, y los números $u_{n_1 \dots n_k}$ son sus términos.

Definamos con precisión este concepto. Comencemos con el concepto de sucesión múltiple.

Definición 1. *Sea X cierto conjunto; se llama sucesión de multiplicidad k de los elementos del conjunto X, la aplicación* $f: \underbrace{N \times N \times \dots \times N}_{k \text{ veces}} \to X$ (N, como siempre, denota el conjunto de los números naturales).

El elemento $x = f(n_1, \dots, n_k)$, $n_1 \in N_1, \dots, n_k \in N$, se denota por $x_{n_1 \dots n_k}$ y la propia sucesión por $\{x_{n_1 \dots n_k}\}$.

La sucesión de multiplicidad uno se llama sencillamente sucesión.

Así, los elementos de una sucesión de multiplicidad k están "numerados" por k índices naturales. Analizaremos sucesiones numéricas múltiples, es decir, sucesiones múltiples cuyos elementos son números complejos, en particular, reales. Para hacer sencilla la notación nos limitaremos al caso $k = 2$. La generalización al caso de un natural $k \in N$ arbitrario se hace sin gran trabajo.

Definición 2. *El número $a \in C$ se llama límite de la sucesión doble $\{x_{mn}\}$ y se escribe $a = \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $|x_{mn} - a| < \varepsilon$.*

Si una sucesión doble tiene límite, entonces se llama *convergente.*

Prestemos atención al hecho de que la definición de límite dada para una sucesión doble se diferencia de la definición de su límite, contenida en el p. 19.2, donde esta definición era un caso particular del límite de la función $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$. Aclaremos detalladamente esta diferencia. En la definición anterior $a = \lim_{(m,n)\to\infty} u_{mn}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $m \in N$ y $n \in N$ tales que $\sqrt{m^2 + n^2} > n_\varepsilon$, tiene lugar la desigualdad $|u_{mn} - a| < \varepsilon$. La condición $\sqrt{m^2 + n^2} > n_\varepsilon$ se puede cumplir a cuenta de la elección de un índice suficientemente grande entre los índices, el otro puede ser incluso igual a la unidad. En la definición 2 enunciada aquí, ambos índices m y n deben ser lo suficientemente grandes para asegurar que se cumpla la desigualdad $|u_{mn} - a| < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. En este párrafo utilizaremos sólo la definición 2.

Señalemos que no todas las propiedades de los límites las sucesiones ordinarias se extienden a las sucesiones dobles. Así, por ejemplo, la sucesión $u_{1n} = n$, $u_{mn} = 0, m \neq 1, n = 1, 2, \ldots, m = 2, 3, \ldots$, converge: $\lim_{m,n\to\infty} u_{mn} = 0$; no obstante esta sucesión, evidentemente, no está acotada.

Definición 3. *Una sucesión doble se llama sucesión que tiende a $+\infty$, y se escribe $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = +\infty$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in N$ tal que para todos los $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$, $m \in N$, $n \in N$, se cumple la desigualdad $x_{mn} > \varepsilon$.*

De forma análoga se define los límites infinitos $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = -\infty$ y $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = \infty$.

Como es usual, por límite (en el caso dado de una sucesión doble) se entiende límite finito si no se dice otra cosa.

Definamos ahora una serie doble.

Definición 4. *Sea dada la sucesión doble $\{u_{mn}\}$. Formemos la sucesión numérica doble*

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} u_{kl} \tag{38.2}$$

El par de sucesiones $\{u_{mn}\}$, $\{S_{mn}\}$ se llama serie doble y se denota por

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.3}$$

Los elementos de la sucesión doble $\{u_{mn}\}$ se llaman *términos de la serie* (38.3), y los elementos de la sucesión doble $\{S_{mn}\}$, *sumas parciales* de esta serie.

Definición 5. *La serie doble* (38.3) *se llama convergente si la sucesión de sus sumas parciales converge. Su límite se llama suma de la serie; además, si*

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = S, \tag{38.4}$$

entonces se escribe

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = S.$$

Si el límite finito (38.4) *no existe, entonces la serie* (38.3) *se llama divergente. Si existe uno de los límites infinitos*

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = +\infty, \quad \lim_{m,n\to\infty} S_{mn} = -\infty, \tag{38.5}$$

entonces respectivamente se escribe

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = +\infty, \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = -\infty.$$

OBSERVACIÓN. El contenido de la definición de serie como par de sucesiones se ve claramente en el ejemplo de las series múltiples. Por ejemplo, si está dada la sucesión $\{u_{mn}\}$, entonces la sucesión de "sumas parciales" que le corresponde puede ser dada no sólo de la forma señalada anteriormente (38.2), sino también de otra forma. Junto con las sumas (38.2), definidas anteriormente y llamadas *rectangulares* (en ellas se suman los elementos u_{kl}, a los cuales corresponden los puntos (k, l) del plano xy, contenidos en el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant m$, $0 \leqslant y \leqslant n$), se analizan las sumas *triangulares* $T_r = \sum_{k+l<r} u_{kl}$, $r = 1, 2, \ldots$, (el punto (k, l) se encuentra el el triángulo $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant r$), *las esféricas* $S_r = \sum_{k^2+l^2\leqslant r^2} u_{k,l}$, $r = 1, 2, \ldots$, (el punto (k, l) se encuentra en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant r^2$) y otras. De esta forma para una misma sucesión $\{u_{mn}\}$ se tienen distintas sucesiones de sumas parciales, además en el caso de que converja una de ellas no obligatoriamente converja la otra. Por esto es natural analizar cada par, formado por la sucesión $\{u_{mn}\}$ de términos de la serie y algunas de sus "sumas parciales", como una serie independiente.

Señalemos que la sucesiones de sumas parciales de las series múltiples (por ejemplo, las sumas parciales T_r ó S_r) a diferencia de las sucesiones de las sucesiones de las sumas parciales de las series de multiplicidad uno, no siempre definen unívocamente la sucesión de los términos generales de la serie.

Al mismo tiempo, en el ejemplo de las series múltiples se ve la conveniencia de ampliar el concepto de serie, precisamente, su definición, como par formado por una sucesión (múltiple), llamada sucesión de sus términos, y cierto conjunto $\{S_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, de sumas S_α de sus términos. Aquí $\mathfrak{A}$ es cierto conjunto, cuyos elementos α son juegos de índices múltiples $(n_1, \ldots, n_k)$ (en particular los índices ordinarios) y

$$S_\alpha = \sum_{(n_1, \ldots, n_k)\in\alpha} u_{n_1 \ldots n_k}.$$

Por ejemplo, para las series dobles se pueden analizar las sumas triangulares

$$S_r = \sum_{k+l\leqslant r} u_{kl}$$

para cualquier real no negativo r y llamar serie doble correspondiente al par $\{u_{kl}\}$, $\{S_r\}$, $r \in \boldsymbol{R}$, $r \geqslant 0$.

En el futuro vamos a analizar sólo las sumas parciales rectangulares S_{mn}.

Ejemplo. Sean $|p| < 1$, $|q| < 1$, $p \in \boldsymbol{C}$, $q \in \boldsymbol{C}$, entonces la serie $\sum_{mn=0}^{\infty} p^m q^n$ converge. Efectivamente, en este caso

$$S_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} p^{\mu} q^{\nu} = \sum_{\mu=0}^{m} p^{\mu} \sum_{\nu=0}^{n} p^{\nu} = \frac{1 - p^{m+1}}{1 - p} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Por esto existe el límite $\lim\limits_{m,n \to \infty} S_{mn} = \dfrac{1}{(1 - p)(1 - q)}$. De esta forma

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} p^m q^n = \frac{1}{(1 - p)(1 - q)}, \quad |p| < 1, \quad |q| < 1.$$

A las series múltiples se extiende una serie de propiedades de las series ordinarias (de multiplicidad uno), por ejemplo:

1°. *Si la serie* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ *converge y* S *es su suma, entonces* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \lambda u_{mn} = \lambda S$ *para cualquier número* λ.

2°. *Si las series* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u'_{mn} = S'$ *y* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u''_{mn} = S''$ *convergen, entonces*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (u'_{mn} + u''_{mn}) = S' + S''.$$

Estas afirmaciones se demuestran fácilmente, de forma análoga al caso de las series de multiplicidad uno (esto se propone que lo haga el lector).

Demostremos ahora algunos teoremas sobre las series múltiples.

Teorema 1. *Si la serie* (38.3) *converge, entonces*

$$\lim_{m,n \to \infty} u_{mn} = 0.$$

Esto se deduce inmediatamente de la igualdad

$$u_{mn} = S_{mn} - S_{m-1n} - S_{mn-1} + S_{m-1\ n-1}$$

y de la condición (38.4). $\square$

Teorema 2. *Si todos los términos de la serie* (38.3) *son no negativos*

$$u_{mn} \geqslant 0, \quad m, n = 1, 2, \ldots, \tag{38.6}$$

entonces siempre existe el límite, finito o infinito, de sus sumas parciales S_{mn}, *además*

$$\lim_{m,n \to \infty} S_{mn} = \sup_{m,n=1,2,\ldots} S_{mn}. \tag{38.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Si se cumple la condición (38.6) y $m' \geqslant m$, $n' \geqslant n$, entonces $S_{m'n'} \geqslant S_{mn}$.

Más adelante, si $S = \sup\limits_{m,n=1,2,\ldots} S_{mn}$ y $S' < S$, entonces por la definición de cota superior existen los números m_0 y n_0 tales que $S_{m_0 n_0} > S'$.

Hagamos $N = \text{máx}\{m_0, n_0\}$, entonces para $m \geqslant N$ y $n \geqslant N$

$$S_{mn} \geqslant S_{NN} \geqslant S_{m_0 n_0} > S'$$

y ya que $S_{mn} \leqslant S$, entonces $\lim\limits_{m,n \to \infty} S_{mn} = S$, es decir, se cumple la condición (38.7). $\square$

Corolario. *En las suposiciones del teorema, la serie* (38.3) *converge si y sólo si sus sumas parciales están acotadas.*

La demostración del corolario es evidente.

Para las series dobles con términos no negativos es válido el criterio de comparación.

Teorema 3. *Si la serie* $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ *converge y existe* $c > 0$ *tal que para todos los* $m, n = 1, 2, \ldots$, *se cumple la desigualdad*

$$0 \leqslant u_{mn} \leqslant c a_{mn},$$

entonces la serie $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ *también converge.*

Esto se deduce inmediatamente del corolario del teorema 2, ya que para cualesquiera naturales m y n se cumplen las desigualdades

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} u_{\mu\nu} \leqslant \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}.$$

De la serie doble (38.3) se pueden formar formalmente dos series, las así llamadas series reiteradas. Para esto inicialmente se debe efectuar la sumación respecto a un índice, fijando el otro, y después realizar la sumación respecto al índice restante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.8}$$

De forma análoga al teorema demostrado anteriormente sobre los límites reiterados (véase el teorema 1 en el p. 19.2), se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4. Si converge la serie doble (38.3) y para todos los $n = 1, 2, \ldots$, converge la serie $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$, entonces la serie reiterada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ también converge y su suma es igual a la suma de la serie dada (38.3).

Definición 6. *La serie* (38.3) *se llama absolutamente convergente si converge la serie formada por los valores absolutos de sus términos, es decir, la serie*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}|. \tag{38.9}$$

Señalemos que si la serie (38.3) converge absolutamente, entonces su término general tiende a cero cuando crece ilimitadamente al menos uno de los índices:

$$\lim_{\text{máx}\{m,\, n\} \to +\infty} u_{mn} = 0.$$

En efecto, sea $\tilde{S} = \sum\limits_{m,\, n = 1}^{\infty} |u_{mn}|$, entonces para un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe el natural N tal que para $m > N$ y $n > N$ se cumple la desigualdad

$$0 < \tilde{S} - \sum_{k,\, l = 1}^{m,\, n} |u_{kl}| < \varepsilon.$$

Por esto para máx $\{m, n\} > N + 1$ tendremos

$$|u_{mn}| \leqslant \sum_{\{\mu > m\} \cup \{\nu \geqslant n\}} |u_{\mu\nu}| \leqslant \tilde{S} - \sum_{k,\, l = 1}^{N + 1} |u_{kl}| < \varepsilon.$$

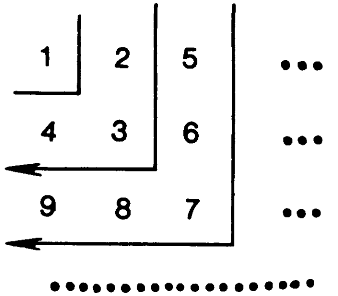
De la tendencia a cero ya señalada del término general de una serie absolutamente convergente, evidentemente se deduce que los términos de esta serie están acotados. Señalemos que para una serie convergente, que no sea absolutamente convergente, esto puede no tener lugar. Un ejemplo de tales series es, por ejemplo, la serie analizada a continuación (38.17) en el punto (1, 1).

Teorema 5. *Si la serie* (38.3) *converge absolutamente, entonces converge también cualquier serie* (*de multiplicidad uno, doble o reiterada*), *obtenida cambiando de lugar los términos de la serie dada* (*en particular converge también la propia serie dada*). *En este caso la suma de cualquiera de estas series coincide con la suma de la serie inicial* (38.3).

DEMOSTRACIÓN. Coloquemos los términos de la serie (38.3) en una matriz rectangular infinita, poniendo en su fila m los términos de la serie cuyos primeros números fijos son m, colocados según el orden creciente del segundo índice n:

$$\begin{array}{l} u_{11}u_{12}u_{13} \dots u_{1n} \dots \\ u_{21}u_{22}u_{23} \dots u_{2n} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{m1}u_{m2}u_{m3} \dots u_{mn} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Numeremos ahora a los elementos de esta tabla según el esquema siguiente



El término de la serie (38.3), que tiene según esta numeración el número k, será designado por v_k. Analicemos la serie

$$\sum_{k = 1}^{\infty} v_k \tag{38.10}$$

y mostremos que ella converge absolutamente, es decir, que converge la serie

$$\sum_{k = 1}^{\infty} |v_k|. \tag{38.11}$$

Denotemos las sumas parciales de la serie (38.9) por S^*_{mn}, su suma por S^* y las sumas parciales de la serie (38.11) por S^*_k. Ante todo observemos que para cualquier suma S^*_k se encuentran los números m y n tales que todos los términos de la serie (38.11), que se incluyen en la suma S^*_k, aparecen también en la suma S^*_{mn}, entonces

$$S^*_k \leqslant S^*_{mn} \leqslant S^*.$$

De aquí se deduce (véase el p. 35.4) la convergencia de la serie (38.11).

De la convergencia absoluta de la serie (38.10) se deduce que para otra serie cualquiera de multiplicidad uno, formada por los términos de la serie (38.2), también converge y su suma es igual a la suma de la serie (38.10) (véase el p. 35.10). Sea

$$\sum_{k = 1}^{\infty} v_k = S.$$

Mostremos ahora que cualquier serie doble

$$\sum_{m,\, n = 1}^{\infty} u'_{mn} \tag{38.12}$$

obtenida por cierta renumeración de los índices dobles de los términos de la serie dada (38.3), converge absolutamente y que su suma también es igual a S.

La convergencia absoluta de la serie (38.12) fácilmente se deduce de la convergencia absoluta de la serie (38.3), es decir, de la convergencia de la serie (38.9), y se demuestra de la misma forma como fue demostrada la convergencia absoluta de la serie (38.10). Demostremos ahora que la suma de la serie (38.12) es igual a S. Denotemos sus sumas parciales por S'_{mn}, y las sumas parciales de la serie (38.10) por S_k. Sea dado el número $\varepsilon > 0$. Por la convergencia de la serie (38.11) existe el número k_ε tal que

$$\sum_{k = k_\varepsilon + 1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{38.13}$$

entonces, como antes

$$|S - S_{k_\varepsilon}| = \left| \sum_{n = k_\varepsilon + 1}^{\infty} v_k \right| < \sum_{k = k_\varepsilon + 1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38.14}$$

Seleccionemos el número N_ε tal que la suma parcial $S'_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ de la serie (38.12) contenga en calidad de sumandos todos los términos de la serie (38.10), que forman parte de la suma S_{k_ε}. Sea $m \geqslant N_\varepsilon$ y $n \geqslant N_\varepsilon$. Hagamos

$$S''_{mn} = S'_{mn} - S_{k_\varepsilon};$$

entonces, utilizando (38.13) y (38.14), obtendremos

$$|S - S'_{mn}| = |S - S_{k_\varepsilon}| + |S''_{mn}| < \varepsilon.$$

Así, S es la suma de cualquier serie (38.12), en particular, la suma de la propia serie (38.3).

Mostremos por último, que S es también la suma de las series reiteradas (38.8). En efecto, para cualquier n dado

$$\sum_{m=1}^{m_0} |u_{mn}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = S^*.$$

Por lo tanto, todas las series

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

convergen, y además, absolutamente.

Hagamos

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}. \tag{38.15}$$

Fijemos de nuevo un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Seleccionemos el número k_ε de tal forma que se cumpla la condición (38.13), y por lo tanto, también la condición (38.14). Más adelante, de forma semejante a como fue hecho anteriormente, seleccionemos el número N_ε, tal que la suma parcial $S_{N_\varepsilon N_\varepsilon}$ de la serie (38.3) contenga en calidad de sumandos todos los términos de la serie (38.10), que forman parte de la suma S_k. Entonces para todos los $m \geqslant N_\varepsilon$ y $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_{ji} - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pasando en esta desigualdad al límite cuando $m \to \infty$, obtendremos (véase (38.15)):

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí, por (38.14) se deduce que para $n \geqslant N_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} u_i - S_{k_\varepsilon} \right| + |S_{k_\varepsilon} - S| < \varepsilon.$$

Esto implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \ \square$$

Ejercicio 1. Generalícese el criterio de Cauchy sobre la convergencia de las sumas de multiplicidad uno al caso de las series múltiples.

38.2. SERIES DE FUNCIONES MÚLTIPLES

Definición 7. *La serie de la forma*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1} u_{n_1, \ldots, n_k}(x) \tag{38.16}$$

donde las funciones $u_{n_1, \ldots, n_k}(x)$ *están definidas sobre cierto conjunto* X, *se llama serie de funciones de multiplicidad* k, *y las sumas de la forma*

$$S_{m_1, \ldots m_k}(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{m_1, \ldots, m_k} u_{n_1, \ldots n_k}(x),$$

sus sumas parciales.

Definición 8. *La serie* (38.16) *se llama convergente sobre cierto conjunto* X, *si para cada* $x_0 \in X$ *dado, converge la serie numérica múltiple*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 1} u_{n_1, \ldots, n_k}(x_0).$$

Si la serie (38.16) *converge sobre* X, *entonces la función*

$$S(x) = \sum_{n_1, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1 \ldots n_k}(x), \quad x \in X$$

se llama su suma.

A las series de funciones múltiples fácilmente se extienden los conceptos de convergencia uniforme de la serie, el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de una serie, el criterio de Weierstrass sobre convergencia uniforme, etc. No nos detendremos en esto.

Ejercicio 2. Definiendo el concepto de convergencia uniforme de una serie doble, demuéstrese que si la serie (38.16) converge uniformemente y sus términos son funciones continuas sobre el conjunto $X \subset R^n$, entonces también la suma de la serie (38.16) es una función continua sobre el conjunto X.

Definición 9. *Las series de la forma*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = 0}^{\infty} c_{n_1 \ldots n_k}(x_1 - x_1^{(0)})^{n_1} \ldots (x_n - x_n^{(0)})^{n_k},$$

donde $c_{n_1 \ldots n_k}$ *son números complejos, se llaman series de potencias múltiples.*

Aunque, como se ve de lo anterior, muchas afirmaciones que son válidas para las series de multiplicidad uno, se generalizan también para las series múltiples, las últimas tienen muchas particularidades específicas, que las diferencian esencialmente de las series de multiplicidad uno.

En calidad de ejemplo daremos uno serie de potencias doble con coeficientes reales, la que siendo analizada en el dominio real converge sólo en dos puntos del plano, precisamente en los puntos (0; 0) y (1; 1). De esta forma, el análogo del teorema de Abel para las series de potencias (véase el p. 37.1), en todo caso en el sentido directo, para las series dobles no existe. Este ejemplo muestra el peligro de utilizar las analogías que no estén reforzadas por demostraciones matemáticas.

Analicemos la serie

$$\sum_{m, n = 0}^{\infty} c_{mn} x^m y^n, \tag{38.17}$$

donde $c_{00} = 0$, $c_{0n} = c_{n0} = n!$, $n = 1, 2, \ldots$; $c_{1m} = c_{m1} = -m!$; $m = 1, 2, \ldots$; $c_{mn} = 0$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$.

Sus sumas parciales tienen la forma

$$S_{mn}(x, y) = (1 - y) \sum_{k=1}^{m} k!x^k + y + (1 - x) \sum_{l=2}^{n} l!y^l. \tag{38.18}$$

Es evidente que $S_{mn}(0, 0) = 0$ y $S_{mn}(1; 1) = 1$, $m, n = 1, 2, \ldots$, y por esto la serie (38.17) converge en los puntos (0, 0) y (1, 1).

Observemos ahora que el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n$$

es igual a cero (véase el ejemplo 1 en el p. 37.1), además sus sumas parciales

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} k!z^k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

para $z > 0$ reales, evidentemente tiende a $+\infty$.

Mostremos que para $z < 0$ sus sumas parciales pares $S_{2n}(z)$ también tienden a $+\infty$. En efecto, uniendo para $z < 0$ para a par los términos contiguos, obtendremos

$$S_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)!\,|z|^{2k-1}(2k|z| - 1).$$

Más adelante, observemos que para cualquier $z \neq 0$ dado, para los números $k > \dfrac{1}{|z|}$ se cumple la desigualdad

$$(2k - 1)!\,|z|^{2k-1}(2k|z| - 1) > (2k - 1)!\,|z|^{2k-1}$$

y que para $z \neq 0$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k - 1)!\,z^{2k-1}$$

diverge (esto, por ejemplo, se demuestra fácilmente de la misma forma como se demostró para $z \neq 0$ la divergencia de la serie en el ejemplo 1 del p. 37.1) y, por lo tanto, para $z > 0$ su suma es igual a $+\infty$, por esto también

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}(z) = +\infty, \quad z \neq 0.$$

De lo dicho y de la igualdad (38.18) se deduce que si $(x, y) \neq (0, 0)$ ó $(x, y) \neq (1, 1)$ entonces cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$, siempre se pueden escoger los números m y n tales que

$$|S_{mn}(x, y)| > \varepsilon.$$

Y esto implica que la serie (38.17) para los (x, y) señalados diverge.

Observemos que aunque en el punto (1, 1) la serie analizada converge, sus términos (es decir, en el caso dado coeficientes) no están acotados. Si los términos de la serie de potencias (38.17) en cierto punto (x_0, y_0) forman un conjunto acotado (esto tiene lugar, por ejemplo, si la serie converge absolutamente, véase el p. 38.1), entonces para esta serie es válido el análogo bidimensional del teorema de Abel (véase el p. 37.1).

Teorema 6. *Si en el punto (x_0, y_0) los términos de la serie* (38.17) *están acotados, entonces en cualquier punto (x, y) tal que $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ la serie* (38.17) *converge absolutamente.*

DEMOSTRACIÓN. Si existe $M > 0$ tal que para todos los naturales m y n se cumple la desigualdad

$$|c_{mn}x_0^m y_0^m| \leqslant M,$$

entonces para $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ obtendremos

$$|c_{mn}x^m y^n| = |c_{mn}x_0^m y_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n.$$

De aquí, por el criterio de comparación (véase el teorema 3) y la convergencia de la serie de la forma $\sum_{m,n=1}^{\infty} p^m q^n$, $|p| < 1$, $|q| < 1$ (véase el ejemplo en el p. 38.1), se deduce la afirmación del teorema. □

Ejercicios. 3. El número S será llamado suma de la serie $\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para todos los números m y n que satisfacen la condición $m + n > N$, se cumple la desigualdad $|S_{mn} - S| < \varepsilon$. Aclárese si esta definición es equivalente o no a la defininción 5 del p. 38.1.

4. El número S será llamado suma de la serie $\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $\mathfrak{N}_\varepsilon = \{(m, n)\}$ de pares de índices m, n de los términos de la serie dada, tal que cualquiera que sea otro conjunto finito $\mathfrak{N}$ de pares de índices de los términos de esta serie, que contenga el conjunto $\mathfrak{N}_\varepsilon$: $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_\varepsilon$, se cumple la desigualdad

$$\left|\sum_{(m,n)\in\mathfrak{N}} u_{mn} - S\right| < \varepsilon.$$

Aclárese si esta definición es equivalente o no a la definición 5 del p. 38.1 y a la definición enunciada en el ejercicio anterior.

Indice alfabético de materias

Aditividad de la integral, 399
Algoritmo de Euclides, 422
Aplicación, 18
- biunívoca, 19
- biyectiva, 19
- continuamente diferenciable, 279
- continua sobre un segmento, 276
- de una hoja, 19
- sobreyectiva, 19
Aproximación decimal inferior de un miembro, 83
- - superior de un miembro, 83
Arco de una curva, 284
Area de una superficie formada por la rotación de una curva, 527
- (medida) de un conjunto abierto, 500
Argumento de una función, 18
Asíntota de la gráfica de una función, 258
Astroide, 307, 523
Axiomas de los números reales, 26

Binomio de Newton, 68, 79
- diferencial, 443
Biyección, 19
Bola n-dimensional (abierta o cerrada), 324
- - unitaria (abierta o cerrada), 324

Campo, 33
- de Arquímedes, 55
- - definición de una función, 97
- - los números complejos, 413
- ordenado continuo, 36
Campos ordenados isomorfos, 36
Cardioide, 308, 518
Círculo de convergencia de una serie de potencia, 644
Circunferencia osculadora, 308
Clase inferior de una cortadura, 37
- superior de una cortadura, 37
Clausura de un conunto, 322
Cociente de la división de dos números, 28
Coeficientes de la serie de potencia, 643
Complemento de un conjunto, 16
Componentes radial y transversal de una función vectorial, 298
Composición, 20
Condición de Cauchy, 71
Conjunto, 15
- abierto, 319
- acotado, 49, 317
- - inferiormente, 46
- - superiormente, 46
- cerrado, 278
- compacto, 329
- de definición (dominio), 18
- - dos elementos, 17
- - los número reales R, 26
- - nivel de una función, 340
- extendido de los números reales, 42
Conjunto innumerable, 90
- no acotado, 47
- - - inferiormente, 46
- - - superiormente, 45
- - trivial, 26
- numerable, 88
- vacio, 15
Conjuntos equipotentes, 88
- iguales, 15
Constante, 20
- de Euler, 601
Continuidad del conjunto de los números reales en el sentido de Cantor, 52
- de una función vectorial, 272
Contorno cerrado, 278
Convergencia absoluta de series múltiples, 694
- - - una integral, 560
- de series múltiples, 693
Cota inferior, 47
- - de una función, 85
- superior, 47
- - de una función, 85
- superior, 47
- - de una función, 85
Criterio de Abel, 607
- - Cauchy, 135, 592, 600, 649
- - - de convergencia uniforme de las series, 628
- - - - - - - sucesiones, 622
- - D'Alembert, 582, 600, 649
- - Dedekind de convergencia de una serie, 614
- - Dirichlet, 605
- - - de convergencia de integrales, 557
Criterio de Du Bois Reymond, 613
- - Weierstrass, 626, 645
Cuadrados de rango m, 505
- - - nulo, 505
Cuadrilaje del plano de rango 0, 505
Cubo n-dimensional, 313
Curva (continua), 277
- abierta, 284
- cerrada, 278
- orientada, 283
- plana, 278, 293
- rectificable, 288
- suave, 287
Curvas homogéneas, 530
- suaves a trozos, 287

Densidad lineal de una curva, 530
Derivación, 187
Derivada de una función, 177
- - funciones dadas implícitamente, 20
- - una función compuesta, 196
- - - - inversa, 193, 208
- - - - en un punto respecto a una dirección, 381
- - - - vectorial, 272, 273
- finita, 177
- finita o infinita a la derecha (izquierda) de una función en un punto, 177
- infinita, 177
- logarítmica, 201
- parcial de orden m, 388
Derivada parcial pura, 388
- total de una función compuesta, 369
- unilateral, 177
Derivadas de orden superior de funciones dadas en forma paramétrica, 209
- parciales, 360
- - de primer orden, 387
- - - segundo orden, 387
- - - una función compuesta, 370
Desarrollo en serie de la función $f(x) = e^x$, 661
- - - - - - $n(1 + x)$, 666
- - - del binomio $(1 + x)^n$, 667
- - - - sen x y del cos x, 663
- - - - sh x y del ch x, 663
Desarrollos asintóticos de funciones, 685
Desigualdad de Abel, 604
- - Bernoulli, 79
- - Cauchy, 487
- - Cauchy-Schwarz, 338

- - Hölder, 485, 588
- - Minkowski, 485, 588
- triangular, 336
Desigualdades, 34
- estrictas, 34
Diferencia de conjuntos, 17
- - dos números, 27
- - números complejos, 409
Diferenciación término a término de una serie, 640
Diferencial de una función, 179
- - - - vectorial, 273
Diferencial total de una función, 363
Diferenciales parciales, 360
Dimensión de un vector, 335
Distancia entre dos conjuntos, 325
División de fracciones, 31
- - polinomios, 417
Divisor de un polinomio, 419
Dominio, 18

Elemento de una sucesión, 22, 56
- inverso a una fracción, 31
Entorno de un punto, 43, 44, 321
- ε de un punto, 43, 44, 321
- rectangular de un punto, 313
Error absoluto de una sustitución, 171
- relativo de una sustitución, 171
Esfera $(n - 1)$-dimensional, 324
Espacio euclídeo n-dimensional, 310, 336
- puntual, 335
Espiral de Arquímedes, 533
- logarítmica, 524
Evoluta de una curva, 304
Extremo de una curva, 277, 327

Finura de una partición, 506
Folio de Descartes, 269
Forma bilineal, 390
- cuadrática, 390
- de Schlömilch-Roche, 234
Formas bilineales simétricas, 391
Forma trigonométrica del número complejo, 408
Fórmula de Cauchy-Hadamard, 650, 654
- - Euler, 664
- - integración por cambio de variable, 403
- - - - sustitución, 403, 405
- - - - partes, 498
- - Frenet, 302
- - Leibniz, 206
- - los incrementos finitos de Lagrange, 217
- - - - - - Cauchy, 220
- - MacLaurin, 233
- - Newton-Leibniz, 492, 496, 498, 504, 522, 688
- - - - para las integrales impropias, 540
- - Ostrogradski, 434
- - Stirling, 674
- - Taylor, 231
- - - para una función, 658
- - Wallis, 500
- del cambio de variable en la integral definida, 495
- para el cálculo del volumen de un cuerpo de revolución, 519
Fracción racional elemental, 427
- - propia de un polinomio, 423
Fracciones decimales, 83
- - admisibles, 84
- equivalentes, 165
- numéricas, 95
Función, 18
- absolutamente integrable, 556
- analitica en un punto, 651
- acotada, 95
Función acotada en comparación con otra, 163

- compuesta, 20, 99
- con derivada integrable sobre un segmento, 495
- continua, 111
- - en un punto, 109
- - por la derecha, 119
- - - - izquierda, 119
- - sobre un conjunto, 139, 351
- convexa, 251
- creciente, 130
- de comparación, 548
- - Dirichlet, 97, 105, 460
- decreciente, 130
- de varias variables, 339
- estrictamente convexa, 251
- - creciente, 143
- - decreciente, 143
- exponencial, 152
- implicíta, 99
- infinitamente grande (infinita), 125
- - pequeña (infinitesimal), 124, 168
- infinitesimal de orden superior, 169
- integral con límite superior variable, 487
- inversa, 21, 143
- logarítmica, 156
- monótona, 130
- multiforme, 20
- par, 23
- potencial, 156
- primitiva, 396
Función racional de funciones, 438
- subintegral (integrando), 397
- unívoca, 20, 144
Funciones asintóticamente iguales, 166
- coordenadas de una aplicación, 276
- elementales principales, 100
- trascendentes, 101
- irracionales, 100
- m veces continuamente diferenciables, 390
- parabólicas, 202
- racionales, 100
- trigonométricas, 157, 158
- - inversas, 158

Gradiente de una función, 380
Grado de un polinomio, 416
Gráfica de una función, 18, 97
- - - - de varias variables, 340

Hipersuperficie de nivel, 340
Hodógrafo de una función vectorial, 278

Imagen de un elemento, 18
- - - subconjunto, 19
Incremento del argumento, 127
Indeterminaciones, 221
Integración de desigualdades, 541
- término a término de la serie, 639
Integral definida (de Riemann), 457
Integral impropia, 533
- indefinida, 397
- inferior de Darboux, 463
- propia, 534
Integrales de Fresnel, 567
- - tabla, 401
- elípticas, 454
- - de primero y segundo género, 454
Intersección de conjuntos, 16
Intervalo, 43
- de convergencia de una serie, 655
- - convexidad, 251
- - integración, 457
- infinito, 43
- interior de un segmento, 43
- numérico, 43
- semiabierto, 43
Invariancia de la forma de la primera diferencial, 374
Inyección, 19

Lema de Cauchy-Schwarz, 310
- - Heine-Borel, 333
Ley asociativa de adición, 25
- - - la multiplicación, 25
- conmutativa de la adición, 24
- - - - multiplicación, 25
- distributiva de la multiplicación con relación a la suma, 25
Límite bilateral de una función, 117, 118
- de una función, 101, 112, 113, 116, 117
- - - - de varias variables, 340
Límite de una función por la derecha, 118
- - - - - - izquierda, 117
- - - - vectorial, 270
- - - sucesión, 57
- - - doble, 690
- inferior de una sucesión, 92
- infinito, 60
- parcial de la sucesión dada, 70, 82
- superior de una sucesión, 92
- unilateral de una función, 117
Límites inferior y superior de una integral definida,457
- reiterados, 344
Línea de nivel de una función, 340
Linealidad del producto escalar, 337
- de la integral impropia, 541
- - una función integrable, 454
Longitud del arco de una curva, 527
- de un intervalo, 43
- - - vector, 336

Máximo común divisor de un polinomio, 420
Método analítico de representación de las funciones, 96
- de mejoramiento de la convergencia, 555
- - Ostrogradski, 436
- - sumación de series, 612
Módulo de un número, 35
- - - - complejo, 407
Momentos estáticos, 530
Multiplicación de fracciones, 31
Multiplicidad de la raíz de un polinomio, 417

Nabla, 382
Normal principal a una curva, 302
Notación decimal, 85
Número complejo conjugado, 411
- de una sucesión, 56
- esencialmente complejo, 407
- inverso, 25
- máximo de un conjunto, 47
- mínimo de un conjunto, 47
- opuesto, 25
Números complejos, 407
- enteros, 29
- finitos, 42
- infinitos, 42
- irracionales, 29
- naturales, 29

Origen de una curva, 277
Oscilación de una función sobre un segmento, 463

Parábola semicúbica, 255
Paralelepípedo n-dimensional, 313
Parámetro de una curva, 277
Pares equivalentes, 282
Par ordenado de elementos, 17
Parte de una curva, 284
- principal de una función, 174
Partición, 287
- de un segmento, 455
Período de una función, 666
Plano complejo, 408

- osculador, 303
- tangente a la gráfica de una función, 378
Polinomio conjugado, 418
Potencia n-ésima de un número, 29
Preimagen de un conjunto, 19
- - - elemento, 18
Primitiva de una función, 489, 504
Principio de Arquímedes, 51, 54
- - continuidad de los números reales, según Dedekind, 39
Producto de conjuntos, 18
- - dos números, 25
- - - - complejos, 409
- escalar de dos vectores, 336
Propiedad de compacidad de una sucesión, 69
- - completitud de los números reales con respecto a su ordenamiento, a la adición y a la multiplicación, 36
- - continuidad de los números reales, 26
- - ordenamiento de los número reales, 25
- - transitividad de la relación de orden, 33
- fundamental de una fracción, 30
Propiedades de reflexibidad, simetría y transitividad de las aplicaciones continuas, 280
Punto aislado de un conjunto, 109
- de acumulación de un conjunto, 110, 322
- - adherencia de un conjunto, 102, 321
- - discontinuidad de primer género, 129
- - - - una función, 128
- - - evitable, 129
Punto de extremo (estricto), 244
- - inflexión de una función, 255
- - maximo (mínimo) estricto, 244
- - un espacio n-dimensional, 309
Puntos de decrecimiento y de crecimiento de una función, 246
- - retroceso, 256
- múltiples de una curva, 277

Quebrada inscripta en una curva, 288
- no degenerada, 288

Radio de convergencia de una serie de potencia, 646
- - curvatura de una curva en un punto dado, 299
Radio-vector, 270
Raíz de multiplicidad $\beta \geqslant 1$ de un polinomio, 424
- - n-ésimo grado de un número, 29
- - un polinomio, 417
Rayo, 327
Recta numérica extendida, 42
- tangente a una curva, 285
Recubrimiento finito de un conjunto, 330
Región, 328
Regla del cambio de variable para el cálculo de los límites de las funciones compuestas, 139
- de L'Hospital, 221, 229
Relación de orden, 33
Representación coordenada de una curva, 278
- de una función analítica en un punto, 652
Representación implícita de una curva, 284
-vectorial de una curva, 278
Resto de la serie, 571
Restricción de una función, 20

Segmento de la recta numérica extendida, 43
- - una partición, 516

- rectilineo, 327
Segunda derivada de una función, 392
- diferencial de una función 392
Sentido positivo de la tangente a una curva, 286
Serie convergente, 570
- - en un punto, 615
- divergente, 570
- infinita, 569
- natural de números, 24
- numérica, 569
- sumable por el método de medias aritméticas, 612
Series de términos de signo variable, 589
Símbolos de existencia ∃, 22
- - universalidad ∀, 22
Sistema de elementos encajados, 52
Sobreyección, 19
Subconjunto, 15
- impropio, 16
- propio, 16
Subgráfica de una función, 97
Sucesión acotada, 66
- - inferiormente, 65
- - superiormente, 65
Sucesión convergente, 57, 74, 316
- creciente, 66
- monótona, 66
- de cubos encajados, 330
- divergente, 57
- estacionaria, 22, 61
- infinitesimal de números complejos, 414
- monótona, 66
- numérica, 62
- uniformemente acotada, 614
Sucesiones equivalentes de números complejos, 415
- fundamentales, 71
- infinitas, 60
- infinitesimales, 73
Suma de dos números, 24
- - fracciones, 31
- - números complejos, 409
- - una serie, 615
- parcial n-ésima de una serie, 569
Sumas integrales de Darboux, 461, 514
- - - Riemann, 456, 514
Superficie de nivel, 340
Supergráfica de una función, 97

Tablas de comportamiento de las funciones, 262
Tangente a la gráfica de la función en un punto, 185
Teorema de Abel, 646
- - Bezout, 417
- - Bolzano-Cauchy, 141
Teorema de Bolzano-Weierstrass, 69, 284, 318
- - Bonnet, 502
- - Cantor, 90, 354
- - Cauchy, 220
- - Dini, 637
- - Goulden, 531
- - Fermat, 212
- - Jordan, 329
- - Lagrange, 216, 252
- - Leibniz, 590
- - Rolle, 213
- - Weierstrass, 66, 67, 140
- integral sobre el valor intermedio, 483
Términto de una serie doble, 690
- n-ésimo de una serie, 569
- residual en la forma de Cauchy, 659
- - - - - - Lagrange, 659
- - - - fórmula de Taylor en forma integral, 659
Términos de una serie, 569
Trabajo de una fuerza a lo largo de una curva, 529
Transformaciones admisibles del parámetro de una curva, 279
Transitividad de la relación de orden 33
Trapecio curvilíneo, 513

Unidad, 25
Unión de conjuntos, 16

Valor absoluto de un número, 35
- aritmético de la raíz de n-ésimo grado de un número, 29
- de una función, 96
- extremal de una función, 96
- máximo de una función, 96
- mínimo de una función, 96
Variable de integración, 467
- dependiente de una función, 18
- independiente de una función, 18
- real, 95
Velocidad de movimiento (vectorial), 296
Vector unitario, 338
Vectores coordenados, 336
- ortogonales, 338

Indice alfabético de autores

Abel N., 604, 607, 646
Arquímedes, 51, 54, 55, 56, 58, 533

Bernoulli J., 79
Bezout E., 417
Bolzano B., 69, 141, 318
Bonnet O., 502
Borel E., 333

Cantor G., 52, 55, 90, 354
Cauchy A. I., 71, 126, 135, 136, 141, 151, 220, 310, 339, 487, 552, 583, 592, 600, 622, 628, 645, 659
D'Alembert J., 582, 649, 670
Darboux G., 221, 514
Dedekind R., 39, 55, 56, 614
Descartes R., 269
Dini U., 637
Dirichlet L., 97, 105, 460, 557, 605
Du Bois Reymond P., 613

Euclides, 422
Euler L., 441, 609, 664

Fermat P., 212
Frenet J. F., 302
Fresnel A., 567

Goulden P.. 531

Hadamard J., 650, 654
Hamilton W., 382
Hardy G., 631
Heine H., 101, 126, 333
Hölder O., 485, 588

Jordan C., 329

Kudriavtzev L. D., 55

Lagrange J. L., 216, 242, 252, 275, 365, 389, 659
Leibniz G., 206, 492, 196, 498, 504, 522, 540, 551, 590, 670, 688
L'Hospital G., 221, 229, 243, 550
Legendre A., 454

Maclaurin C., 233, 236
Minkowski G., 485, 588

Newton I., 68, 79, 492, 496, 498, 504, 522, 540, 551, 688

Ostrogradski M. V., 434, 436

Peano G., 232, 678
Poincaré A., 681

Riemann B., 514, 456
Roche E., 234
Rolle M., 213, 215

Schlömilch O., 234

Schwarz H., 310, 339
Stirling J., 674

Taylor B., 231, 232, 236, 275, 656, 658

Wallis J., 560
Weierstrass C., 66, 69, 140, 318, 351, 626, 645

Indice

CAPÍTULO QUINTO

Cálculo diferencial de la función de varias variables (continuación)

§ 39. Fórmula de Taylor y serie de Taylor para las funciones de varias variables 11

39.1. Fórmula de Taylor para las funciones de varias variables 11
39.2. Fórmula de incrementos finitos para las funciones de varias variables 19
39.3. Sobre la estimación del término residual de la fórmula de Taylor en todo el dominio de definición de la función 20
39.4. Convergencia uniforme según el parámetro de una familia de funciones 23
39.5. Observaciones acerca de las series de Taylor para las funciones de varias variables 26

§ 40. Extremos de las funciones de varias variables 26
40.1. Condiciones necesarias de un extremo 26
40.2. Condiciones suficientes de un extremo estricto 29
40.3. Observaciones sobre los extremos en los conjuntos 35

§ 41. Funciones implícitas 35
41.1. Funciones implícitas definidas por una ecuación 35
41.2. Productos de los conjuntos 41
41.3. Funciones implícitas definidas por un sistema de ecuaciones 42
41.4. Aplicaciones 52
41.5. Aplicaciones vectoriales 60
41.6. Aplicaciones lineales 61
41.7. Aplicaciones derivables 67
41.8. Aplicaciones con un jacobiano distinto de cero. Principio de conservación de la región 74
41.9. Funciones implícitas definidas por una ecuación en la que se trastornan las condiciones de unicidad. Puntos singulares de las curvas planas 77
41.10. Cambio de variables 87

§ 42. Dependencia de las funciones 90

42.1. Concepto de dependencia de las funciones. Condición necesaria para la dependencia de las funciones 90
42.2. Condiciones suficientes para la dependencia de las funciones 92

§ 43. Extremo condicionado 97
43.1. Concepto de extremo condicionado 97
43.2. Método de los multiplicadores de Lagrange para buscar los puntos de extremo condicionado 101
43.3*. Interpretación geométrica del método de Lagrange 104
43.4*. Puntos estacionarios de la función de Lagrange 106
43.5. Condiciones suficientes para los puntos de extremo condicionado 111

CAPÍTULO SEXTO

Cálculo integral de las funciones de varias variables

§ 44. Integrales múltiples 116
44.1. Concepto de volumen en un espacio n-dimensional (medida de Jordan). Conjuntos medibles 116
44.2. Conjuntos de medida cero 130

44.3. Definición de la integral múltiple 134
44.4. Existencia de la integral 140
44.5*. Sobre la integrabilidad de las funciones discontinuas 145
44.6. Propiedades de la integral múltiple 148
44.7*. Criterios de integrabilidad de las funciones de Riemann y Darboux y los corolarios 152

§ 45. Reducción de la integral múltiple a una reiterada 160
45.1. Reducción de la integral doble a una reiterada 160
45.2. Generalización para el caso n-dimensional 167
45.3*. Desigualdad integral generalizada de Minkowski 171

§ 46. Cambio de variables en una integral múltiple 173

46.1. Sentido geométrico del módulo de jacobiano en el caso bidimensional 173
46.2. Cambio de variables en una integral doble 181
46.3. Coordenadas curvilíneas 187
46.4. Cambio de variables en una integral n-múltiple 190

§ 47. Integrales curvilíneas 192
47.1. Integrales curvilíneas de primera especie 192
47.2. Integrales curvilíneas de segunda especie 195
47.3. Ampliación de la clase de transformaciones admisibles del parámetro de una curva 199
47.4. Integrales curvilíneas a lo largo de las curvas suaves a trozos 201
47.5. Fórmula de Green 202
47.6. Cálculo de las áreas mediante integrales curvilíneas 207
47.7. Significado geométrico del signo del jacobiano de la aplicación de una región plana 208
47.8. Condiciones de independencia de una integral curvilínea del camino de integración 212

§ 48. Integrales múltiples impropias 223

48.1. Definiciones fundamentales 223
48.2. Integrales impropias de las funciones no negativas 225
48.3. Integrales impropias de las funciones que cambian de signo 230

§ 49. Algunas aplicaciones geométricas y físicas de las integrales múltiples 233

49.1. Cálculo de áreas y de volúmenes 233
49.2. Aplicaciones físicas de las integrales múltiples 235

§ 50. Elementos de la teoría de superficies 237

50.1. Concepto de superficie 237
50.2*. Aplicaciones equivalentes. Superficies dadas en forma paramétrica 239
50.3. Superficies dadas implícitamente 244
50.4. Plano tangente y normal a la superficie 245
50.5. Primera forma cuadrática de una superficie 251
50.6. Curvas en una superficie. Cálculo de sus longitudes y de ángulos entre ellas 253
50.7. Area de una superficie 254
50.8. Orientación de la superficie suave 257
50.9. Pegamiento de las superficies 259
50.10. Superficies orientables y no orientables 262
50.11. Segundo enfoque del concepto de orientación de una superficie 263

§ 51. Integrales de superficie 267
51.1. Definiciones y propiedades de las integrales de superficie 267

51.2. Integrales de superficie como límites de las sumas integrales 272
51.3. Integrales de superficie extendidas a las superficies suaves a trozos 273

§ 52. Campos escalares y vectoriales 276
52.1. Definiciones 276
52.2. Sobre la invariación de los conceptos de gradiente, divergencia y rotor 281
52.3. Fórmula de Ostrogradski — Gauss. Definición geométrica de la divergencia 285
52.4. Fórmula de Stokes. Definición geométrica del rotor 290
52.5. Campos vectoriales solenoidales 295
52.6. Campos vectoriales potenciales 297
§ 53. Integrales propias dependientes de un parámetro 301

53.1. Definición de las integrales dependientes de un parámetro; su continuidad e integrabilidad según el parámetro 301
53.2. Derivación de las integrales dependientes de un parámetro 304

§ 54. Integrales impropias dependientes de un parámetro 307

54.1. Definiciones fundamentales. Convergencia uniforme de las integrales dependientes de un parámetro 307
54.2*. Criterio de la convergencia uniforme de las integrales 312
54.3. Propiedades de las integrales impropias dependientes de un parámetro 314
54.4. Aplicación de la teoría de integrales dependientes de un parámetro al cálculo de las integrales definidas. 320
54.5. Integrales de Euler 325
54.6. Funciones de valores complejos de un argumento real 330
54.7*. Comportamiento asintótico de la función gamma 332
54.8*. Series asintóticas 338
54.9*. Desarrollo asintótico de la función gamma incompleta 341
54.10. Observaciones sobre las integrales múltiples dependientes de un parámetro 344

CAPÍTULO VII

Series de Fourier. Integral de Fourier

§ 55. Series trigonométricas de Fourier 346

55.1. Definición de la serie de Fourier. Planteamiento de los problemas fundamentales 346
55.2. Coeficientes de Fourier que tienden a cero 351
55.3. Integral de Dirichlet. Principio de localización 355
55.4. Convergencia de la serie de Fourier en un punto 360
55.5*. Convergencia de las series de Fourier para las funciones que satisfacen la condición de Hölder 368
55.6. Sumación de las series de Fourier por el método de medias aritméticas 371
55.7. Aproximación de las funciones continuas por medio de los polinomios 376
55.8. Completitud del sistema trigonométrico y del sistema de potencias enteras no negativas de x en un espacio de funciones continuas 378
55.9. Propiedad minimal de los coeficientes de Fourier. Desigualdad de Bessel e igualdad de Parseval 380
55.10. Carácter de convergencia de las series de Fourier. Derivación de las series de Fourier término a término 384
55.11. Integración de las series de Fourier término a término 389
55.12. Series de Fourier para el caso de un intervalo arbitrario. Notación compleja de las series de Fourier 391

§ 56. Integral de Fourier y transformación de Fourier 393

56.1. Representación de la función en forma de la integral de Fourier 393

56.2. Diferentes formas de notación de la fórmula de Fourier 398
56.3. Valor principal de una integral 399
56.4. Notación compleja de la integral de Fourier 400
56.5. Transformación de Fourier 400
56.6. Integrales de Laplace 403
56.7. Propiedades de las transformaciones de Fourier de las funciones absolutamente integrables 404
56.8. Transformación de Fourier de las derivadas 407
56.9. Convolución y transformación de Fourier 408
56.10. Derivada de la transformación de Fourier de una función 411

§ 57. Espacios funcionales 413

57.1. Espacios métricos 413
57.2. Espacios lineales 422
57.3. Espacios normalizados y seminormalizados 426
57.4. Ejemplos de espacios normalizados y seminormalizados 427
57.5. Propiedades de los espacios seminormalizados 436
57.6. Propiedades de los espacios normalizados 439
57.7. Espacios lineales provistos de producto escalar 445
57.8. Ejemplos de espacios lineales provistos de producto escalar 447
57.9. Propiedades de los espacios lineales provistos de producto escalar. Espacios de Hilbert 449
57.10. Espacio L_2 453

§ 58. Bases ortonormalizadas y desarrollos según ellas 468

58.1. Sistemas ortonormalizados 468
58.2. Ortogonalización 472
58.3. Sistemas completos. Completitud del sistema trigonométrico y del sistema de los polinomios de Legendre 474
58.4. Series de Fourier 477
58.5. Existencia de la base en los espacios separables de Hilbert. Isomorfismo de los espacios separables de Hilbert 486
58.6. Desarrollo de las funciones de cuadrado integrable en serie de Fourier 491
58.7*. Transformación de Fourier de las funciones integrables en cuadrado. Teorema de Plancherel 496

§ 59. Funciones generalizadas 505

59.1. Razonamientos generales 505
59.2. Espacios lineales con convergencia. Funcionales. Espacios conjugados 511
59.3. Definición de las funciones generalizadas. Espacios D y D' 514
59.4. Derivación de las funciones generalizadas 520
59.5. Espacio de las funciones principales S y espacio de las funciones generalizadas S' 524
59.6. Transformación de Fourier en el espacio S 526
59.7. Transformación de Fourier de las funciones generalizadas 529

Complemento

§ 60. Algunos problemas de los cálculos aproximados 537

60.1. Aplicación de la fórmula de Taylor para el cálculo aproximado de los valores de funciones e integrales 537
60.2. Resolución de las ecuaciones 541
60.3. Interpolación de las funciones 548
60.4. Fórmulas de cuadratura 550
60.5. Error de las fórmulas de cuadratura 553

60.6. Cálculo aproximado de las derivadas 559

§ 61. Partición del conjunto en clases de elementos equivalentes 561

§ 62. Límite según un filtro 562

62.1. Espacios topológicos 563
62.2. Filtros 564
62.3. Límite de un filtro 568
62.4. Límite de la aplicación según un filtro 569

Indice de nombres 571

Indice alfabético de materias 572

CAPÍTULO QUINTO

CÁLCULO DIFERENCIAL DE LA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES (CONTINUACIÓN)

§ 39. FÓRMULA DE TAYLOR Y SERIE DE TAYLOR PARA LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

39.1. FÓRMULA DE TAYLOR PARA LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Si una función de varias variables tiene un número suficiente de derivadas continuas en un entorno de cierto punto, dicha función puede ser representada dentro del entorno citado (al igual que se hizo en el caso de la función de una sola variable) en forma de una suma de cierto polinomio y un resto que es, en determinado sentido, "pequeño".

Teorema 1. *Supongamos que la función $z = f(x, y)$ está definida y es continua, lo mismo que todas sus derivadas parciales hasta el orden m inclusive ($m \geqslant 1$), en un δ-entorno*[*)] *del punto (x_0, y_0). Entonces, para cualesquiera Δx y Δy, que satisfacen la condición $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, existe tal $\theta = \theta(\Delta x, \Delta y)$, $0 < \theta < 1$, que resulta ser válida la fórmula*

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{[3]} f(x_0, y_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(m-1)!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{[m-1]} f(x_0, y_0) + r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$$

[*)] En algunas obras se emplea el término "δ-vecindad". (*N. del Tr.*)

o, en la forma más breve,

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{[k]} f(x_0, y_0) + r_{m-1}(\Delta x, \Delta y), \tag{39.1}$$

donde

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{m!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{[m]} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \tag{39.2}$$

La fórmula (39.1) se denomina *fórmula de Taylor* (de orden $m - 1$) para la función f y la función $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$, *su término residual*, mientras que la inscripción (39.2) de éste lleva el nombre de término residual de la fórmula de Taylor en la *forma de Lagrange.*

Cuando $m = 1$, en (39.1) requiere explicaciones el sentido del primer término del segundo miembro, puesto que en este caso el supraíndice de sumación es igual a cero. En el caso dado se supone, según la definición, que el término citado es igual a cero, es decir, la fórmula (39.1) adopta la forma

$$\Delta z = r_0(\Delta x, \Delta y).$$

En adelante, siempre cuando se encuentre una expresión escrita con ayuda del símbolo $\sum$, en la que el valor del supraíndice de sumación sea inferior al valor del subíndice, convendremos en considerar también que esta expresión es igual a cero.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que Δx y Δy están fijados de una manera tal que $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, entonces todos los puntos del tipo $(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, donde $0 \leqslant t \leqslant 1$, se disponen en un segmento que une los puntos (x_0, y_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, por lo cual todos ellos pertenecen al δ-entorno del punto (x_0, y_0). Por esta razón tiene sentido la composición de funciones

$$z = f(x, y)$$

y

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

es decir, la función compuesta

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{39.3}$$

Es evidente que

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0). \tag{39.4}$$

Como la función f tiene en el δ-entorno del punto (x_0, y_0) m derivadas parciales continuas, de acuerdo con el teorema sobre las derivadas de una función compuesta (véase el p. 20.3), la función F tendrá también en el segmento $[0, 1]$ m derivadas continuas, por lo cual para F será válida la fórmula de Taylor de orden $m - 1$ con el término residual en la forma de Lagrange:

$$F(t) - F(0) = F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1} + \frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m,$$

$$0 < \theta < 1, \tag{39.5}$$

y en el entorno considerado del punto (x_0, y_0) la función (39.3) puede derivarse m veces conforme a la regla para derivar funciones compuestas (véase la observación 2 en p. 20.4), con la particularidad de que los valores de las derivadas parciales mixtas que se obtienen *no dependen* del orden en que se lleva a cabo la derivación (véase el p. 21.1).

Al expresar las derivadas $F^{(k)}(t)$ en términos de las derivadas de la función $f(x, y)$ y al poner en la fórmula (39.5) $t = 1$ (véase (39.4)), obtendremos la función requerida de Taylor correspondiente a la función $f(x, y)$. En efecto, de (39.3) se deduce que

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dx}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

De aquí, al omitir para abreviar las designaciones de los argumentos, obtendremos para $F''(t)$

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2.$$

En general, por inducción es fácil establecer que

$$F^{(k)}(t) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{[k]} f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),$$

$$k = 1, 2, \ldots, m. \tag{39.6}$$

Al poner en las fórmulas (39.6) $t = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, m - 1$, tendremos:

$$F'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y;$$

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2,$$

y, en general,

$$F^{(k)}(0) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{[k]} f(x_0, y_0), \quad k = 1, 2, \ldots, m - 1. \tag{39.7}$$

Cuando $k = m$, al sustituir t por θt,

$$F^{(m)}(\theta t) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{[m]} f(x_0 + \theta t\Delta x, y_0 + \theta t\Delta y). \tag{39.8}$$

Sustituyamos ahora (39.7) y (39.8) en (39.5) y pongamos $t = 1$; en este caso, en virtud de la relación (39.4)

$$\Delta z = F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{m!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0 + \theta\Delta x), y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1. \qquad \square$$

Corolario. *En vista de las suposiciones del teorema* 1 *es lícita la fórmula*

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0) + r_m(\Delta x, \Delta y), \tag{39.9}$$

con la particularidad de que el término residual $r_m(\Delta x, \Delta y)$ *puede ser escrito en cualquiera de las siguientes formas:*

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x^k\,\Delta y^{m-k}, \tag{39.10}$$

donde

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

o bien

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho^m, \tag{39.11}$$

donde $\lim_{\rho\to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$, *es decir,*

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m). \tag{39.12}$$

La representación del término residual de la fórmula de Taylor tal como se indica en (39.12) se denomina su inscripción en la *forma de Peano*.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos

$$\varepsilon'_k(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} - \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}}. \tag{39.13}$$

Debido a la continuidad de todas las derivadas parciales de orden m

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon'_k(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Al hacer uso de la expresión (39.13), transformemos el resto $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ (véase (39.2)), de la manera siguiente:

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k\,\Delta y^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k\,\Delta y^{m-k} +$$

$$+ \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k\,\varepsilon'_k(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \frac{1}{m!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0, y_0) + \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x^k \Delta y^{m-k}, \tag{39.14}$$

donde $\varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{C_m^k}{m!}\varepsilon'_k(\Delta x, \Delta y)$, y por esta razón

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0. \tag{39.15}$$

Sustituyendo (39.14) en (39.1), obtenemos la fórmula de Taylor (39.9) con el término residual en la forma (39.10).

Mostremos que el término residual (39.10) puede ser escrito en la forma (39.11). Con este fin pongamos

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k}. \tag{39.16}$$

En este caso

$$r_m(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\Delta x^k \Delta y^{m-k} =$$

$$= \rho^m \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\left(\frac{\Delta x}{\rho}\right)^k \left(\frac{\Delta y}{\rho}\right)^{m-k} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho^m,$$

y, como $\left|\dfrac{\Delta x}{\rho}\right| \leqslant 1$ y $\left|\dfrac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant 1$, de (39.15) se desprende que

$$\lim_{\rho\to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0. \qquad \square$$

Aprovechando la noción de diferenciales de órdenes superiores, podemos atribuir a la fórmula de Taylor una forma más compacta que es idéntica en apariencia a la fórmula de Taylor para las funciones de una sola variable, escrita asimismo con el empleo de diferenciales. Efectivamente, puesto que (véase el p. 21.2)

$$d^k f(x, y) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x, y), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

entonces, suponiendo, para abreviar, $M_0 = (x_0, y_0)$ y $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, podemos escribir la fórmula (39.9) en la forma

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(M_0) + r_m(M). \tag{39.17}$$

La forma indicada de la fórmula de Taylor es más simple a consecuencia de lo cual resulta cómoda para recordarla.

He aquí algunas observaciones referentes a las demostraciones del teorema 1 y de su corolario. Ante todo, en las condiciones del teorema se ha exigido que la función f tenga derivadas continuas de orden hasta m inclusive en cierto δ-entorno del punto (x_0, y_0). Se podría exigir que en el entorno citado sean continuas *sólo* las derivadas de orden m, puesto que de la continuidad de éstas se infiere que son continuas también en el entorno dado todas las derivadas inferiores de la función en consideración, es decir, las derivadas de órdenes $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ (véase el p. 20.2).

Subrayemos que la continuidad de las derivadas parciales en el δ-entorno del punto (x_0, y_0) se ha usado, en primer lugar, para que las derivadas parciales con las que nos encontramos no dependan del orden en que se realiza la derivación (esto se ha usado tanto en la demostración de la fórmula de Taylor (39.1), como en la propia forma de notación de dicha fórmula) y, en segundo lugar, para que la función (39.3) pueda ser derivada m veces según la regla de derivación de la función compuesta. Fijemos la atención en que para $m = 1$ las derivadas mixtas están ausentes; entre tanto, para que haya posibilidad de derivar la función (39.3) una sola vez, según la regla de la función compuesta y, por consiguiente, para que sea válido el teorema 1, resulta suficiente una suposición más débil sobre la función en consideración f. A saber, en lugar de la suposición sobre la derivabilidad continua de la función f en el δ-entorno arriba mencionado del punto (x_0, y_0), es suficiente su derivabilidad en este entorno (véanse las definiciones 2 y 4 en el p. 20.2).

La continuidad de las derivadas parciales de orden m (en el *punto* (x_0, y_0)) se ha empleado también en la demostración del corolario del teorema 1: es necesaria para que las funciones $\varepsilon_k'(\Delta x, \Delta y)$, definidas mediante las fórmulas (39.13), tiendan a cero cuando $\rho \to 0$.

Recalquemos, además, que con las suposiciones admitidas en la fórmula (39.9) se ha demostrado que $r_m(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^m)$ para $\rho \to 0$ no en el sentido del límite según cualquier dirección fijada, como podría parecer, a primera vista, proveniente de la demostración aducida, sino en el sentido más fuerte, esto es, en el sentido del límite en el punto (x_0, y_0) (¿por qué?).

La fórmula (39.1) puede ser un tanto generalizada, si no se tienen aspiraciones de que sea válida para todos los puntos $(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y)$ del δ-entorno del punto (x_0, y_0), sino que se considera la fórmula citada sólo para Δx y Δy fijados. A saber, si la función f está definida y tiene derivadas parciales continuas de orden m en un conjunto abierto que contiene un segmento con los extremos (x_0, y_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, entonces la fórmula (39.1) queda también justa, igual que su demostración. De esto se deduce que si la función f está definida en la región convexa G (véase el p. 18.2) y tiene en G derivadas parciales continuas de orden m, para cualesquiera dos puntos $(x_0, y_0) \in G$ y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in G$ es válida la fórmula de Taylor (39.1).

Ejercicio 1. Sea la función $f(x, y)$ continua, lo mismo que sus derivadas parciales hasta el orden m inclusive, en cierto entorno del punto (x_0, y_0). Demuéstrese que su polinomio de Taylor de orden m, es decir,

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{\{k\}} f(x_0, y_0)$$

es un polinomio de mejor aproximación de la función $f(x, y)$ en un "entorno infinitamente pequeño del punto (x_0, y_0)". Esto significa lo siguiente: cualquiera que sea el polinomio $Q(x, y)$ de grado no superior a m (es decir, en cada término suyo la suma de exponentes de las potencias de las variables x e y no debe ser mayor que el número m) tal que

$$f(x, y) = Q(x, y) + o(\rho^n), \quad n \geqslant m, \quad \text{cuando} \quad \rho \to 0,$$

donde

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

coincide con el polinomio citado de Taylor $P(x, y)$ de la función $f(x, y)$.

Todo lo dicho se extiende también al caso de una función de cualquier número de variables.

Teorema 1'. *Si una función de n variables $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ está definida y es continua junto con todas sus derivadas parciales hasta el orden m, $m \geqslant 1$, inclusive en cierto δ-entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, entonces es válida la fórmula*

$$\Delta y = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)}) + r_{m-1}(\Delta x), \tag{39.18}$$

donde

$$r_{m-1}(\Delta x) =$$

$$= \frac{1}{m!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{m\}} f(x_1^{(0)} + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \theta\Delta x_n),$$

$$0 < \theta < 1, \quad \Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \tag{39.19}$$

y también la fórmula

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{k\}} f(x^{(0)}) + r_m(\Delta x), \tag{39.20}$$

donde $r_m(\Delta x)$ puede escribirse en cada una de las siguientes formas: o bien

$$r_m(\Delta x) = \sum_{m_1 + \ldots + m_n = m} \varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(\Delta x)\, \Delta x_1^{m_1} \ldots \Delta x_n^{m_n}, \tag{39.21}$$

donde $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_{m_1, \ldots, m_n}(\Delta x) = 0$, $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}$, *o bien*

$$r_m(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\rho^m, \quad \lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0, \tag{39.22}$$

es decir,

$$r_m(\Delta x) = o(\rho^m), \quad \rho \to 0.$$

Por fin, en términos de las diferenciales la fórmula (39.20) *puede escribirse en la forma*

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x^{(0)}) + r_m(\Delta x). \tag{39.23}$$

Ahora abrimos los paréntesis en las fórmulas (39.18) y (39.19), haciendo uso de la fórmula algebraica

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k!} \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}.$$

Para anotar el resultado en la forma más breve introduzcamos unas designaciones nuevas. Pongamos $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $k! = k_1! \ldots k_n!$,

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \quad (x - x^{(0)})^k = (x_1 - x_1^{(0)})^{k_1} \ldots (x_n - x_n^{(0)})^{k_n};$$

$k = (k_1, \ldots, k_n)$ se llama *multiíndice.*

Introducidas las designaciones indicadas, la fórmula de Taylor (39.18) con el término residual en la forma (39.19) se escribirá así:

$$f(x) = \sum_{|k|<m} \frac{f^{(k)}(x^{(0)})}{k!}(x - x^{(0)})^k + \sum_{|k|=m} \frac{f^{(k)}(x^{(0)} + \theta(x - x^{(0)}))}{k!}(x - x^{(0)})^k.$$

Aquí, como siempre, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ y

$$x^{(0)} + \theta(x - x^{(0)}) = (x_1^{(0)} + \theta(x_1 - x_1^{(0)}), \ldots, x_n^{(0)} + \theta(x_n - x_n^{(0)})).$$

La fórmula de Taylor que acabamos de exponer para las funciones de cualquier número de variables tiene la misma forma que para las funciones de una sola variable.

A veces, particularmente en el caso de las funciones de varias variables, para las derivadas se utiliza la designación

$$D^k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

donde $k = (k_1, \ldots, k_n)$ es un multiíndice. Si se usa dicha notación, la fórmula de Taylor adoptará la forma

$$f(x) = \sum_{|k|<m} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)})(x - x^{(0)})^k + \sum_{|k|=m} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)} + \theta(x - x^{(0)}))(x - x^{(0)})^k, \quad 0 < \theta < 1.$$

39.2. FÓRMULA DE INCREMENTOS FINITOS PARA LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El caso particular de la fórmula de Taylor (39.18), cuando $m = 1$, se donomina corrientemente fórmula de incrementos finitos de Lagrange para las funciones de varias variables. Debido a las observaciones que en el punto anterior siguen el teorema 1 sobre las suposiciones bajo las cuales resultan válidas las fórmulas (39.1) y (39.18), del teorema 1′ obtenemos la siguiente afirmación.

Teorema 2. *Si la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ es derivable en todo punto de cierta región convexa $G \subset R^n$, para cualquier par de puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)$ de G existe tal θ, $0 < \theta < 1$, que*

$$f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n + \theta\Delta x_n)}{\partial x_i} \Delta x_i$$

o, en la forma más breve,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x + \theta\Delta x)}{\partial x_i} \Delta x_i, \tag{39.24}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x + \Delta x = (x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)$ y

$$x + \theta\Delta x = (x_1 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n + \theta\Delta x_n).$$

Como ya se ha indicado, la fórmula (39.24) expresa precisamente la *fórmula de incrementos finitos de Lagrange.*

Dicha fórmula, al igual que la fórmula de Taylor en general, tiene muchas y varias aplicaciones en diferentes problemas del análisis matemático.

Prestemos nuestra atención a que el teorema 2 no es el caso particular del teorema 1, pues no es la derivabilidad continua de la función en consideración en todo punto del conjunto G lo que se exige de él, sino sólo su derivabilidad. No obstante, la demostración del teorema 2 se contiene de hecho en la demostración del teorema 1. En efecto, como ya se ha indicado en las observaciones referentes a la demostración del teorema 1 y al corolario de éste (véase el p. 39.1), para $m = 1$ la demostración del teorema 1, aducida arriba, conserva rigor también bajo las suposiciones del teorema 2, es decir, cuando sólo se supone la derivabilidad (y no derivabilidad continua) de la función f.

Demostremos la siguiente afirmación como ejemplo de la aplicación de la fórmula (39.24).

Teorema 3. *Si una función es derivable en todo punto de la región convexa G y tiene en G derivadas parciales acotadas, será uniformemente continua en la región mencionada.*

DEMOSTRACIÓN. Si

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| \leqslant c, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in G$$

(c es una constante), entonces para cualesquiera dos puntos $x' = (x_1', \ldots, x_n')$ y $x'' = (x_1'', \ldots, x_n'')$ de (39.24) se infiere que

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}\right| |x_i'' - x_i'| \leqslant cn\rho(x', x'')$$

(aquí ξ es algún punto del segmento que tiene por extremos los puntos x' y x''). Por eso, si está prefijado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{cn}$ para que se cumpla la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon, \tag{39.25}$$

cualesquiera que sean los puntos $x' \in G$ y $x'' \in G$ tales que $\rho(x', x'') < \delta$, lo que atestigua la continuidad uniforme de la función f en la región G. □

39.3. SOBRE LA ESTIMACIÓN DEL TÉRMINO RESIDUAL DE LA FÓRMULA DE TAYLOR EN TODO EL DOMINIO DE DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN

El término residual en la fórmula de Taylor depende, evidentemente, no sólo de los incrementos de los argumentos, sino también del mismo punto en cuyo entorno se examina el desarrollo de la función y que en el p. 39.1 se consideraba fijado. Ahora serán de interés para nosotros el comportamiento y la estimación del término residual en dependencia del cambio del punto mencionado. Con el fin de subrayar dicha dependencia, el término residual de orden m se designará en este párrafo por $r_m(x, \Delta x)$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto en cuyo entorno se desarrolla la función dada según la fórmula de Taylor. Como hasta ahora, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.

En las fórmulas (39.21) y (39.22), en lugar de $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(\Delta x)$ y $\varepsilon(\Delta x)$ se escribirán $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ y $\varepsilon(x, \Delta x)$, respectivamente. En lo sucesivo nos hará falta la estimación del término residual de la fórmula de Taylor en la forma de Peano para todo el dominio en el que existe el desarrollo según la fórmula indicada.

Introduzcamos primero el concepto de continuidad de las derivadas parciales en la clausura de un conjunto abierto. Esto requiere una definición especial, puesto que en un punto límite del conjunto abierto G el concepto de derivada parcial no está definido, en el caso general, aún cuando la función quede definida en la clausura $\overline{G}$ del conjunto G (véase, por ejemplo, el punto M de la frontera de la región G en la fig. 156).

Definición 1. *Una función f, definida en el conjunto abierto $G \subset R^n$, se llama continuamente prolongable a la clausura $\overline{G}$ de éste, si existe tal función F, continua en $\overline{G}$, que $F = f$ en G.*

La función F se denomina prolongación continua de la función f (a $\overline{G}$) y se designará, para simplificar, también con el símbolo f.

En virtud de la unicidad del límite de una función es evidente que si una función definida en G tiene prolongación continua a $\overline{G}$, ésta es única.

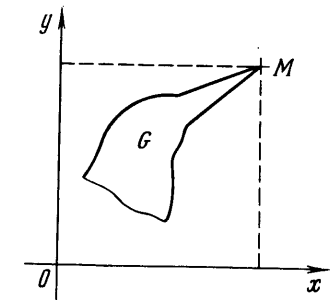


Fig. 156

Definición 2. *Una función f se denomina continuamente derivable (m veces continuamente derivable) en $\overline{G}$, si f está definida en G y todas sus derivadas parciales de primer orden (derivadas parciales hasta el orden m inclusive) son continuamente prolongables de G a $\overline{G}$.*

Ejerciocios. 2. Demuéstrese que si la función f está definida en el conjunto abierto $G \subset R^n$ y tiene en éste una derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, continuamente prolongable a la clausura $\overline{G}$ del conjunto, y si, además, en cierto punto de la frontera del conjunto G existe la derivada parcial (unilateral) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, entonces la función coincide con la prolongación continua de la derivada parcial a dicho punto.

3. Demuéstrese que para que una función continua, definida en el conjunto abierto acotado $G \subset R^n$, sea continuamente prolongable a la clausura de éste, es necesario y suficiente que sea uniformemente continua en G. Pruébese que en el caso de un conjunto abierto no acotado la condición de continuidad uniforme de una función prolongable, siendo suficiente para la prolongación continua, no es necesaria.

4. Constrúyase un ejemplo de la función, continua y acotada en una región, que no pueda ser continuamente prolongada a la clausura de dicha región.

Volveremos ahora a la fórmula de Taylor. Supongamos que la función f es m veces continuamente derivable en la clausura $\overline{G}$ de un conjunto acotado abierto G. En este caso, de acuerdo con los resultados obtenidos en el p. 39.1, en todo punto $x \in G$ tiene lugar el desarrollo (39.20) de la función f según la fórmula de Taylor, con la particularidad de que $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ en la fórmula (39.21) y $\varepsilon(x, \Delta x)$ en la fórmula (39.22) tienden a cero, para $\rho \to 0$, uniformemente en el conjunto G (véase la definición en el p. 20.2), es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ que si

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}, < \delta \tag{39.26}$$

se tiene

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon$$

para todos los puntos $x \in G$.

En el caso dado esto se deduce inmediatamente del método por cuyo intermedio se obtienen las funciones $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}$ y $\varepsilon(\Delta x)$. Efectivamente, por ser la clausura $\overline{G}$ del conjunto abierto G acotada y cerrada, las prolongaciones continuas de las derivadas parciales de orden m de la función dada a $\overline{G}$ son en ella uniformemente continuas, razón por la cual (véase la fórmula (39.13) para el caso de $n = 2$; en el caso general es válida la fórmula análoga), cumplida la condición (39.26), tenemos

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| \leqslant \omega\left(\delta, \frac{\partial f}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}, \overline{G}\right). \tag{39.27}$$

Aquí el segundo miembro (módulo de continuidad de la derivada correspondiente) no depende del punto del conjunto G y tiende a cero cuando $\delta \to 0$. Por ello, de (39.27) se desprende que $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}$ tiende a cero en G de modo uniforme.

Ahora podemos estimar el infinitésimo $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ en la fórmula (39.22). Para n natural arbitrario podemos representarla, por analogía con el caso en que $n = 2$ (véase 39.16), en la forma

$$\varepsilon(x, \Delta x) = \sum_{m_1 + \ldots + m_n = m} \varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)\left(\frac{\Delta x_1}{\rho}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{\Delta x_n}{\rho}\right)^{m_n}.$$

De aquí tenemos:

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| \leqslant \sum_{m_1 + \ldots + m_n = m} |\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)|. \tag{39.28}$$

En el segundo miembro de la desigualdad (39.28) figura cierto número fijo de sumandos; designémoslo con N. En virtud de que la función $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ tiende a cero en G uniformemente (lo que ya se ha demostrado), para cualquier $\varepsilon > 0$ prefijado existe tal $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, que, cumplida la condición $\rho(x, x + \Delta x) < \delta$, tenemos

$$|\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{N}, \quad m_1 + \ldots + m_n = m.$$

De aquí y también de la desigualdad (39.28) se deduce que

$$|\varepsilon(x, \Delta x)| < \varepsilon. \ \square$$

Demos a conocer una estimación más en total del término residual de la fórmula de Taylor que se obtiene de la inscripción de éste en la forma de Lagrange (39.19).

Si la función f está definida en un conjunto abierto G y tiene en dicho conjunto derivadas parciales acotadas de orden m, es decir, si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right| \leqslant M, \quad m_1 + \ldots + m_n = m, \quad x \in G, \tag{39.29}$$

entonces, cumplida la condición $\rho(x, x + \Delta x) < \delta$, para todo $x \in G$ se verifica la desigualdad

$$|r_{m-1}(x, \Delta x)| \leqslant \frac{M n^m \delta^m}{m!}.$$

Esto proviene directamente de la fórmula (39.19), si los valores absolutos de cada sumando de su segundo miembro se estiman por medio de la desigualdad (39.29) y otra desigualdad evidente $|\Delta x_i| \leqslant \delta$.

39.4. CONVERGENCIA UNIFORME SEGÚN EL PARÁMETRO DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES

En el punto anterior hemos tropezado con la noción de convergencia uniforme en el conjunto dado de una familia de funciones dependientes de cierto parámetro cuando este último tiende hacia los valores determinados. En calidad de tales funciones en nuestro caso intervenían $\varepsilon_{m_1 \ldots m_n}(x, \Delta x)$ y $\varepsilon(x, \Delta x)$, donde el papel del parámetro lo desempeñaba Δx. Con este caso, en su forma más sencilla, ya chocamos antes, en el p. 20.2.

Enunciemos la definición de la convergencia uniforme de una familia de funciones en el caso general.

Definición 3. *Supongamos que X es un conjunto arbitrario, $Y \subset R^m$, $y^{(0)}$ es un punto del espacio R^m o uno de los infinitos*) ∞, $+\infty$, $-\infty$ (los dos últimos infinitos merecen ser considerados sólo en el caso cuando $m = 1$), con la particularidad de que la intersección de cualquier entorno reducido y_0 con el conjunto Y es no vacía. Supongamos luego que la función $\varphi(x)$ está definida para todo $x \in X$ y la función $f(x, y)$, para cualesquiera $x \in X$ e $y \in Y$.*

Suele decirse que $f(x, y)$ tiende uniformemente en el conjunto X hacia la función $\varphi(x)$ para $y \to y^{(0)}$ y se escribe en este caso

$$f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad y \to y^{(0)}$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal entorno reducido $\overset{\circ}{U}(y^{(0)})$ del punto $y^{(0)}$ que se verifica la desigualdad

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \tag{39.30}$$

cualesquiera que sean $x \in X$ e $y \in Y \cap \overset{\circ}{U}(y^{(0)})$.

En este caso la variable y se llama con frecuencia parámetro y la función $f(x, y)$, $y \in Y$, "familia de las funciones de x" (en el sentido de que esta función prefija las funciones de la variable x para diferentes valores fijos de $y \in Y$).

Por analogía con el caso de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones (véase el p. 36.1), la condición de convergencia uniforme de las funciones según un parámetro puede enunciarse, empleando la noción habitual de límite de una función, de la manera siguiente.

La función $f(x, y)$ tiende uniformemente en el conjunto X hacia la función $\varphi(x)$ para $y \to y^{(0)}$ cuando, y sólo cuando,

*) En lo sucesivo los infinitos ∞, $+\infty$, $-\infty$ se llamarán también, para simplificar, puntos ("infinitamente alejados").

$$\lim_{y\to y^0}\sup_{x\in X}|f(x,y)-\varphi(x)|=0. \tag{39.31}$$

Así pues, la condicion $f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $y \to y^{(0)}$, es equivalente a que la función $F(y) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in X} |f(x, y) - \varphi(x)|$ tiende a cero cuando $y \to y^{(0)}$. La demostración de esta afirmación no es del todo difícil y es análoga al caso de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones. Esta demostración queda al cargo del lector.

En el caso que se considera es justo también el análogo del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de las sucesiones.

Teorema 4 (criterio de Cauchy). *Para que la función $f(x, y)$, para $y \to y^{(0)}$, tienda uniformemente en el conjunto X hacia cierta función, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista tal entorno reducido $\mathring{U}(y^{(0)})$ del punto $y^{(0)}$ que se verifique la desigualdad*

$$|f(x,y'')-f(x,y')|<\varepsilon, \tag{39.32}$$

cualesquiera que sean

$$y'\in \mathring{U}(y^{(0)})\cap Y,\quad e\quad y''\in \mathring{U}(y^{(0)})\cap Y\quad y\quad x\in X.$$

En efecto, la necesidad en la condición (39.32) proviene fácilmente, como siempre en las situaciones semejantes, de la condición (39.30). Con el fin de demostrar la suficiencia, se debe probar que de la condición (39.32) se infiere que para cualquier $x\in X$ fijo existe $\lim_{y\to y^{(0)}} f(x, y)$ y que la función $f(x, y)$ tiende hacia este límite, para $y \to y^{(0)}$, uniformemente.

Se recomienda que el lector mismo compruebe todas estas afirmaciones.

Ejercicio 5. Demuéstrese: para que la función $f(x, y)$, $x\in X$, $y\in X$, tienda uniformemente en el conjunto X, cuando $y\to y^{(0)}$, hacia la función $\varphi(x)$, $x\in X$, es necesario y suficiente que para toda sucesión $y^{(n)}\in Y$, $y^n\neq y^{(0)}$, $n = 1, 2, \ldots$, que tiende a $y^{(0)}$, la sucesión $f(x, y^{(n)})$, $n = 1, 2, \ldots$, converja uniformemente sobre el conjunto X hacia la función $\varphi(x)$.

Ejemplos. 1. Examinemos una familia de funciones $f(x, y) = e^{-xy}$, donde $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y < +\infty$. Es evidente que

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{si}\quad x>0,\\ 1, & \text{si}\quad x=0\end{cases}$$

(de este modo, la variable y es un parámetro, si se usa la terminología indicada anteriormente). Designaremos la función límite mediante $\varphi(x)$,

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{si}\quad x>0,\\ 1, & \text{si}\quad x=0.\end{cases} \tag{39.33}$$

Demostremos que la función $f(x, y)$ tiende hacia $\varphi(x)$, cuando $y\to+\infty$, de manera no uniforme. Para esto es suficiente probar que existe tal $\varepsilon_0 > 0$ que, cualquiera que sea el entorno $\mathring{U}(+\infty)$, se encontrarán $x\in[0, 1]$ e $y\in \mathring{U}(+\infty)$ tales que se verifique la desigualdad $|e^{-xy} - \varphi(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Elijamos ε_0 tal que sea $0 < \varepsilon_0 < 1$, y un entorno arbitrario $\mathring{U}(+\infty)$. Entonces, cualquiera que sea $y\in \mathring{U}(+\infty)$, para él se verifica

$\lim_{x\to 0} e^{-xy} = 1$, y, por ende, existe tal $x\in(0, 1]$ que

$$|e^{-xy}-\varphi(x)|=|e^{-xy}-0|>\varepsilon_0.$$

De este modo, en el caso dado las condiciones del criterio de Cauchy no se cumplen (véase el teorema 4).

Sin embargo, para todo a, $0 < a < 1$, la familia de funciones $f(x, y) = e^{-xy}$ tiende uniformemente, cuando $y\to+\infty$, hacia cero en el segmento $[a, 1]$. Comprobemos el cumplimiento de las condiciones del criterio de Cauchy en este caso (véase el teorema 4). Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $\eta_\varepsilon > 0$ tal que $e^{-a\eta_\varepsilon} < \varepsilon$ (basta tomar cualquier $\eta > \dfrac{|\ln\varepsilon|}{a}$); por esto para cualesquiera $y > \eta_\varepsilon$ y todos los $x\in[a, 1]$ tendremos

$$|e^{-xy}-0|=e^{-xy}<e^{-a\eta_\varepsilon}<\varepsilon.$$

Por supuesto, la investigación de la convergencia uniforme de la familia de funciones en consideración podría ser ejecutada también aplicando el criterio (39.31). Efectivamente, al emplear la fórmula (39.33), obtendremos

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|e^{-xy}-\varphi(x)|\geqslant\sup_{0<x\leqslant 1}e^{-xy}=1,$$

por lo cual la condición (39.31) no se cumple a ciencia cierta. En cambio, si $0 < a < 1$, entonces

$$\lim_{y\to+\infty}\sup_{a\leqslant x\leqslant 1}|e^{-xy}-\varphi(x)|=\lim_{y\to+\infty}\sup_{a\leqslant x\leqslant 1}e^{-xy}=\lim_{y\to+\infty}e^{-ay}=0.$$

De este modo,

$$e^{-xy}\underset{[0,1]}{\not\rightrightarrows}\varphi(x),\quad e^{-xy}\underset{[0,a]}{\rightrightarrows}\varphi(x),\quad y\to+\infty,\quad 0<a<1.$$

2. En el caso cuando Y es un conjunto de los números naturales, $Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$, e $y^{(0)} = +\infty$, la definición aducida de la convergencia uniforme según un parámetro se convierte en la definición de convergencia uniforme de una sucesión de funciones $f_n(x) = f(x, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, en el conjunto X.

3. Sea la función $f(x, y)$ continua en el rectángulo $Q = \{(x, y): -\infty < a \leqslant x \leqslant b < +\infty,\ -\infty < c \leqslant y \leqslant d < +\infty\}$ y sea $y_0\in[c, d]$.

Designemos mediante $\omega(\delta, f)$ el módulo de continuidad de la función f en el rectángulo Q; entonces

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant\omega(|y-y_0|;f),\quad (x,y)\in Q. \tag{39.34}$$

El segundo miembro de esta desigualdad no depende de x, y, siendo uniforme la continuidad de la función f en el rectángulo Q, $\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta; f) = 0$. Por esta razón, de la desigualdad (39.34) se desprende que en el segmento $[a, b]$ la función $f(x, y)$ tiende uniformemente hacia la función $f(x, y_0)$ cuando $y\to y_0$.

Ejercicio 6. Demuéstrese que si la familia de funciones $f(x, y)$, $x\in X\subset R^n$, $y\subset Y\subset R^m$, es tal que para todo $y\in Y$ fijo las funciones $f(x, y)$ son continuas respecto de x sobre el conjunto X y tienden uniformemente sobre dicho conjunto hacia $\varphi(x)$ para $y\to y^{(0)}$, entonces $\varphi(x)$ es también continua sobre el conjunto X.

39.5. OBSERVACIONES ACERCA DE LAS SERIES DE TAYLOR PARA LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Si la función $f(x)$ está definida y es derivable un número infinito de veces en cierto δ-entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R^n$, entonces, para dicha función la fórmula de Taylor (39.20) será, evidentemente, válida para cualquier n natural, $n = 1, 2, \ldots$, y, además, $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 < \delta^2$. Si, en este caso, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{[k]} f(x^{(0)})$$

convergerá hacia $\Delta y = f(x) - f(x^{(0)})$ (véase el p. 38.2), se obtendrá la siguiente fórmula

$$\Delta y = f(x) - f(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{[k]} f(x^{(0)}),$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $x_i - x_i^{(0)} = \Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. De aquí, trasladando $f(x^{(0)})$ al segundo miembro, obtenemos el desarrollo de la función en serie de potencias llamada *serie de Taylor* de la función f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\left(x_1 - x_1^{(0)} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \left(x_n - x_n^{(0)} \right) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{[k]} f(x^{(0)}),$$

o, abriendo los corchetes,

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(x^{(0)})(x - x^{(0)})k,$$

donde $k = (k_1, \ldots, k_n)$ es un multiíndice.

Ejercicio 7. Desarróllese en serie de Taylor la función $f(x, y) = e^{x+y}$.

§ 40. EXTREMOS DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

40.1. CONDICIONES NECESARIAS DE UN EXTREMO

Los problemas que se estudian en este párrafo y en algunos otros que siguen llevan un carácter analítico y sus demostraciones no se hacen más difíciles al aumentar el número de las variables. Es por eso que nuestra intención es considerar dichos problemas en el caso general n-dimensional, subrayando, si es necesario, sus peculiaridades específicas para los casos de $n = 2$ y $n = 3$.

Definición 1. *Supongamos que la función $f(x)$ está definida en el conjunto $X \subset R^n$. El punto $x^{(0)} \in X$ se llama punto de máximo estricto (de mínimo estricto), si*

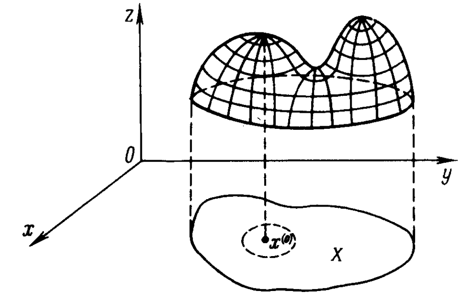


Fig. 157

existe tal entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ que para todo $x \in U(x^{(0)}) \cap X$, $x \neq x^{(0)}$, se verifique la desigualdad $f(x) < f(x^{(0)})$(la desigualdad $f(x) > f(x^{(0)})$ respectivamente).

De este modo, el punto de máximo estricto (de mínimo estricto) se caracteriza por que $\Delta f = f(x) - f(x^{(0)}) < 0$ ($\Delta f > 0$), cualquiera que sea $x \in U(x^{(0)}) \cap X$, $x \neq x^{(0)}$) (fig. 157).

En cambio, si para el punto $x^{(0)}$ existe un entorno $U(x^{(0)})$ tal que para todo $x \in U(x^{(0)}) \cap X$ se verifica la condición $f(x) \leqslant f(x^{(0)})$ ($f(x) \geqslant f(x^{(0)})$), entonces $x^{(0)}$ se denomina simplemente punto de máximo (punto de mínimo).

Definición 2. *Los puntos de máximo y mínimo (estrictos) de una función llevan el nombre de puntos de extremo (estricto).*

Teorema 1. *Supongamos que la función $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está definida en cierto entorno del punto $x^{(0)}$; si dicho punto es un punto de extremo de la función $f(x)$ y si en él existe cualquiera de las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ (j puede asumir uno de los valores* 1, 2, ..., n), *esta última es nula,* $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_j} = 0$.

Corolario. *Si la función $f(x)$ es derivable en el punto de extremo $x^{(0)}$, su diferencial en este punto es igual a cero, $df(x^{(0)}) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN (del teorema y del corolario). Sea, para concretar, $j = 1$. Si $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ es el punto de extremo para la función $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, entonces $x_1^{(0)}$ es el punto de extremo para la función $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ de una sola variable x_1 (fig. 158), por lo cual si en este punto existe derivada $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, entonces, de acuerdo con el teorema de Fermat (véase el p. 11.1), ésta es igual a cero, es decir,

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \left. \frac{df(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_1} \right|_{x_1 = x_1^{(0)}} = 0.$$

Lo mismo ocurre en el caso de cualquier variable x_j ($j = 2, \ldots, n$).

Si la función $f(x)$ es derivable en el punto de extremo $x^{(0)}$, en este punto existen todas las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y, de conformidad con lo demostrado, to-

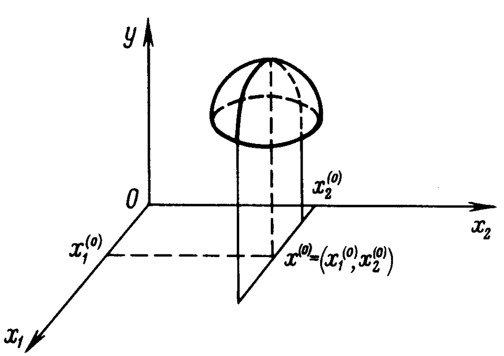


Fig. 158

das ellas son nulas, por lo cual también

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{df(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = 0.\square$$

Ejemplos. 1. Hallemos los puntos de extremo de la función $z = x^2 + y^2$. En virtud de lo demostrado los puntos de extremo se disponen entre aquellos, para los cuales $dz = 0$. Puesto que $dz = 2xdx + 2ydy$, la condición $dz = 0$ se cumple en un único punto (0, 0). En dicho punto $z = 0$, en todos los demás $z = x^2 + y^2 > 0$. Por esta razón (0, 0) es el punto de mínimo estricto para la función $z = x^2 + y^2$ (fig. 159).

2. Investiguemos los puntos de extremo de la función $z = x^2 - y^2$. Procediendo igual que en el caso anterior, encontramos que esta vez también la condición $dz = 0$ se cumple en el punto (0, 0) y en dicho punto $z = 0$. No obstante, aquí tenemos $z > 0$ para $y = 0$ y todo $x \neq 0$, mientras que para $x = 0$ y cualquier $y \neq 0$ se tiene $z < 0$. Por esto, el punto (0, 0) no es un punto de extremo y, consecuentemente, la función $z = x^2 - y^2$ no tiene en general puntos extremos (fig. 160).

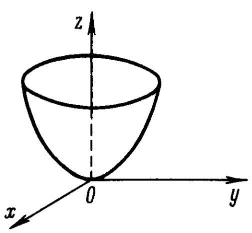


Fig. 159

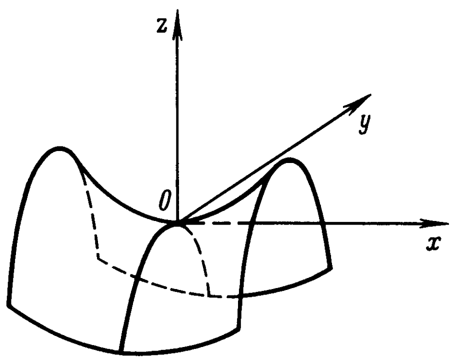


Fig. 160

40.2. CONDICIONES SUFICIENTES DE UN EXTREMO ESTRICTO

Recordemos algunas definiciones referentes al Curso del álgebra.

Definición 3. *Una forma cuadrática* $A(x) = A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, $a_{ji} = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *se denomina definida positiva (definida negativa), si* $A(x) > 0$ $(A(x) < 0$, *respectivamente) para cualquier punto* $x \in R^n$, $x \neq 0$.

Una forma cuadrática, que es definida positiva o definida negativa, lleva, además, el nombre de forma cuadrática de signo definido.

Definición 4. *Una forma cuadrática que asume tanto valores positivos como negativos se llama de signo indefinido.*

Lema 1. *Sea S una esfera unidad en* R^n:

$$S = \{x: x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\},$$

y supongamos que $A(x)$ *es una forma cuadrática de signo definido; entonces*

$$\inf_{x \in S} |A(x)| = \mu > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. La función $A(x)$ es un polinomio de segundo grado respecto de las variables $x_1, \ldots, x_n$, por lo cual $A(x)$ y, consecuentemente, también $|A(x)|$ son continuas en todo el espacio R^n. De aquí se desprende que la función $|A(x)|$ es continua en el compacto S. Conforme al teorema de Weierstrass, la función $|A(x)|$ alcanza en S su cota inferior, es decir, existe tal punto $x^{(0)} \in S$ que

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in S} |A(x)| = |A(x^{(0)})|.$$

Por definición de la forma cuadrática de signo definido, $|A(x)| > 0$ para todo punto $x \in S$, quiere decir, en particular, $\mu = |A(x^{(0)})| > 0$. $\square$

Definición 5. *Sea f una función derivable en el punto* $x^{(0)} \in R^n$. *Si* $df(x^{(0)}) = 0$, *entonces* $x^{(0)}$ *se llama punto estacionario de la función f.*

Es evidente que el punto $x^{(0)}$ en el que la función f es derivable será estacionario, si, y sólo si,

$$\frac{df(x^{(0)})}{dx_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{40.1}$$

Según el corolario del teorema 1, el punto de extremo, donde la función f es derivable, es estacionario; lo recíproco, por supuesto, no es cierto en el caso general: no todo punto estacionario, en el que la función es derivable, es un punto de extremo (véase el ejemplo 2 al final del p. 40.1).

Teorema 2 (condiciones suficientes de un extremo estricto). *Supongamos que la función f está definida y tiene derivadas continuas de segundo orden en cierto entorno del punto* $x^{(0)}$. *Sea* $x^{(0)}$ *un punto estacionario de la función f; en este caso, si la forma cuadrática*

$$A(dx_1, \ldots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i, dx_j, \tag{40.2}$$

(es decir, la segunda diferencial de la función f en el punto $x^{(0)}$) es definida positiva (definida negativa), entonces $x^{(0)}$ es el punto de mínimo estricto (de máximo estricto, respectivamente); en cambio, si la forma cuadrática (40.2) es indefinida, en el punto $x^{(0)}$ no hay extremo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $U(x^{(0)}, \delta_0)$ un δ_0-entorno del punto $x^{(0)}$, estacionario para la función f, en el cual la función f tiene segundas derivadas continuas. Supongamos que el punto

$$x^{(0)} + dx = (x_1^{(0)} + dx_1, \ldots, x_n^{(0)} + dx_n)$$

pertenece a dicho entorno.

Rigiéndose por la fórmula de Taylor (véase (39.23)) y tomando en consideración las condiciones (40.1) referentes al carácter estacionario de un punto, obtenemos

$$\Delta f = f(x^{(0)} + dx) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j + \varepsilon(dx)\rho^2,$$

donde $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$, $\rho^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$, y

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(dx) = 0, \tag{40.3}$$

o bien

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_i}{\rho}\frac{dx_j}{\rho} + 2\varepsilon(dx)\right] =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\left[A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) + 2\varepsilon(dx)\right]. \tag{40.4}$$

El punto $\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$ se dispone en la esfera unidad S (es desir, en la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio igual a 1), pues $\left(\frac{dx_1}{\rho}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx_n}{\rho}\right)^2 = 1.$

Supongamos que la forma cuadrática (40.2) es de signo definido. En este caso, de acuerdo con el lema, $\inf_S |A| = \mu > 0$. Elijamos δ, $0 < \delta < \delta_0$, de un modo tal que sea $2\,|\varepsilon(dx)| < \mu$ cuando $\rho < \delta$. Entonces, para $\rho < \delta$, es decir, para $x^{(0)} + dx \in U(x^{(0)}, \delta)$ y $dx \neq 0$, toda la expresión entre corchetes en el segundo miembro de la fórmula (40.4) será del mismo signo que tiene el primer sumando $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$:

$$\operatorname{sign} \Delta f = \operatorname{sign} A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right).$$

Por eso, si la forma cuadrática (40.2) es definida positiva, tenemos $\Delta f > 0$, y si definida negativa, entonces $\Delta f < 0$, cuando $x^{(0)} + dx \in \overset{\circ}{U}(x^{(0)}, \delta)$. Quiere decir, en el

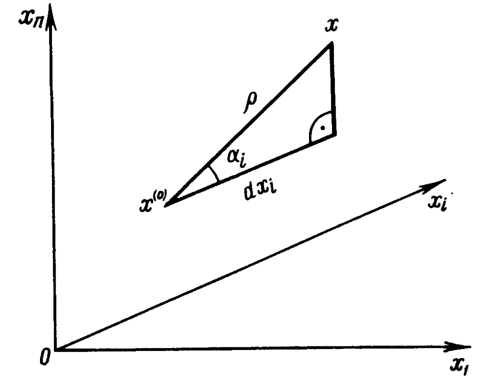


Fig. 161

primer caso $x^{(0)}$ es un punto de mínimo estricto y en el caso segundo, un punto de máximo estricto.

Supongamos ahora que la forma cuadrática (40.2) es indefinida. Esto significa que existen dos puntos $dx' = (dx_1', \ldots, dx_n')$ y $dx'' = (dx_1'', \ldots, dx_n'')$ tales que $A(dx_1', \ldots, dx_n') > 0$ y $A(dx_1'', \ldots, dx_n'') < 0$. Basándonos sobre este hecho no podemos decir de inmediato que el incremento de la función Δf cambia de signo en cualquier entorno del punto $x^{(0)}$, puesto que los puntos $x^{(0)} + dx' = (x_1^{(0)} + dx_1', \ldots, x_n^{(0)} + dx_n')$ y $x^{(0)} + dx'' = (x_1^{(0)} + dx_1'', \ldots, x_n^{(0)} + dx_n'')$ pueden, en general, incluso no pertenecer al dominio de definición de la función f. No obstante, el resultado deseado se deducirá de que la forma cuadrática $A(dx)$ conserva invariable un mismo signo o igualdad a cero en toda recta que pasa por el punto $x^{(0)}$ de la que está extraído este mismo punto, mientras que el valor $A\left(\frac{dx}{\rho}\right)$, $dx \neq 0$, no depende, en general, de la elección del punto en dicha recta.

Examinemos el punto $dx' = (dx_1', \ldots, dx_n')$. Tracemos una semirrecta que tiene su origen en el punto $x^{(0)}$ y pasa por el punto $x^{(0)} + dx'$. Para cualquier punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de esta semirrecta pongamos $dx_i = x_i - x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} dx_i^2}$. En este caso (fig. 161)

$$\frac{dx_i}{\rho} = \cos\alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{40.5}$$

donde $\cos\alpha_i$ son cosenos directores de la semirrecta en consideración. Por esta razón el punto

$$\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n), \tag{40.6}$$

dispuesto, evidentemente, en la esfera unidad*) S con centro $x^{(0)}$, será el mismo para todos los puntos x de esta semirrecta, es decir, el punto (40.6) no depende de la distancia ρ entre x y $x^{(0)}$.

Por consiguiente, el valor de la forma cuadrática (40.2) en el punto (40.6), es decir, $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right)$ tampoco depende de ρ. De aquí, para todo punto (40.6) tenemos

$$A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = A\left(\frac{dx_1'}{\rho'}, \ldots, \frac{dx_n'}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho'^2} A(dx'_1, \ldots, dx'_n) > 0.$$

Sea $A\left(\frac{dx_1}{\rho}, \ldots, \frac{dx_n}{\rho}\right) = \mu' > 0$. Elijamos $\rho_0 > 0$ de modo tal que para $\rho < \rho_0$ tenga lugar la desigualdad $2|\varepsilon(dx)| < \mu'$, lo que es posible en vista de (40.3). Entonces, para cualquier punto $x^{(0)} + dx$, que se dispone en la semirrecta (40.5) y es tal que $0 < \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} dx_i^2} < \rho_0$, la expresión entre corchetes en la fórmula (40.4) tendrá el signo del primer término y, por ende, $\Delta f > 0$. Así pues, en cualquier entorno del punto $x^{(0)}$ hay puntos para los cuales $\Delta f > 0$.

Análogamente, partiendo del valor negativo de la forma cuadrática (40.2) en el punto (dx_i''), se demuestra que en todo entorno del punto $x^{(0)}$ existen puntos, para los cuales $\Delta f < 0$. Esto es precisamente el indicio de que en el caso que se considera $x^{(0)}$ no es un punto de extremo. □

Cuando el teorema citado se aplica en la práctica, surge una pregunta: ¿cómo se establece, si es definida positiva o definida negativa la forma cuadrática (40.2)? Con este fin puede aprovecharse, por ejemplo, el así llamado *criterio de Sylvester* de la definición positiva de una forma cuadrática el cual se demuestra en el curso de álgebra. Este criterio consiste en lo siguiente.

Para que una forma cuadrática

$$A(x) = A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{40.7}$$

en la que $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *sea definida positiva, es necesario y suficiente que se verifiquen las desigualdades*

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

*) Recordemos que para los cosenos directores se verifica la igualdad $\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1$.

Al observar que la forma cuadrática $A(x)$ es definida negativa cuando, y sólo cuando, la forma cuadrática $-A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} (-a_{ij}) x_i x_j$ es definida positiva, obtenemos, haciendo uso de las propiedades conocidas del determinante, el siguiente criterio para distinguir la definición negativa.

Para que la forma cuadrática (40.7) *sea definida negativa, es necesario y suficiente que se verifiquen las desigualdades*

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Enunciemos ahora el teorema 2 para el caso de dos variables, expresando las condiciones que se imponen en la forma cuadrática (40.2) de una manera explícita, en términos de las segundas derivadas parciales.

Teorema 3. *Supongamos que la función $f(x, y)$ está definida y tiene derivadas parciales continuas de segundo orden en cierto entorno del punto (x_0, y_0), que es un punto estacionario para $f(x, y)$, es decir, en este punto*

$$f_x = f_y = 0. \tag{40.8}$$

Entonces, si en (x_0, y_0)

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0, \tag{40.9}$$

es un punto de extremo estricto, a saber, de máximo estricto, si en este punto

$$f_{xx} < 0^{*)},$$

y de mínimo estricto, si

$$f_{xx} > 0.$$

Si en el punto (x_0, y_0)

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0, \tag{40.10}$$

el extremo en él está ausente.

En fin, cuando

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \tag{40.11}$$

en el punto (x_0, y_0), puede ocurrir que haya un extremo en él y puede ocurrir que no lo haya.

Efectivamente, si $f_{xx} \neq 0$ en el punto (x_0, y_0), la forma cuadrática (40.2) en nuestro caso puede escribirse así:

$$A(dx, dy) = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx\, dy + f_{yy} dy^2 =$$

*) De la condición (40.9) proviene, evidentemente, que $f_{xx} \neq 0$ en el punto (x_0, y_0).

$$= \frac{1}{f_{xx}}\left[(f_{xx}dx + f_{xy}dy)^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)dy^2\right]. \qquad (40.12)$$

Todas las derivadas parciales aquí y en adelante se refieren al punto (x_0, y_0).

Vemos inmediatamente que si se cumplen las condiciones (40.9), la expresión entre corchetes en la fórmula (40.12) es positiva para $dx^2 + dy^2 > 0$, es decir, $A(dx, dy)$ es una forma cuadrática definida, a saber, definida positiva cuando $f_{xx} > 0$ y definida negativa, cuando $f_{xx} < 0$. Por supuesto, dicha deducción proviene también del criterio de Sylvester. En el primer caso, según el teorema 2, (x_0, y_0) es el punto de mínimo estricto y en el segundo, de máximo estricto. Si, además, queda cumplida la condición (40.10), entonces para $dy = 0$, $dx \neq 0$ tenemos de (40.12): sign $A(dx, 0) =$ = sign f_{xx}, y para $dx = f_{xy}$, $dy = -f_{xx}$ se obtiene sign $A(f_{xy}, -f_{xx}) = -$sign f_{xx}, de donde se deduce que la forma cuadrática $A(dx, dy)$, es, cumplida la condición (40.10), indefinida.

Así pues, hemos investigado por completo el caso

$$f_{xx} \neq 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0.$$

El caso en que

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} \neq 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$$

se investiga de modo análogo.

Si, en cambio, $f_{xx} = f_{yy} = 0$, pero, como hasta ahora, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$, entonces, evidentemente, $f_{xy} \neq 0$, por lo tanto en este caso se cumple la condición (40.10) y $A(dx, dy) = 2f_{xy}\,dx\,dy$. Vemos de inmediato que la forma cuadrática $A(dx, dy)$ es indefinida bajo las suposiciones adoptadas, pues sign $A(dx, dy) = -$sign $A(dx, -dy)$. Por eso, con el objeto de obtener los valores de la forma cuadrática de signos contrarios, basta tomar, al principio, dx y dy de un mismo signo y después, de signos opuestos. Según el teorema 2, (x_0, y_0) no es en el caso dado un punto de extremo.

Finalmente, el caso $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$ no es compatible con la suposición de que $f_{xx}f_{yy} - f_{xy} \neq 0$. De este modo, hemos examinado todos los casos posibles, cuando se cumple la desigualdad $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$.

Para acabar con la demostración del teorema nos basta mostrar con unos ejemplos que, cuando tiene lugar la correlación (40.11), puede existir un extremo y puede no existir.

El punto (0, 0) para la función $z = x^2 + 2xy + y^2$ es estacionario y en él $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = 2$, y, por tanto, se cumple la condición (40.11). Al advertir que $z = (x + y)^2$, vemos que siempre $z \geqslant 0$, con la particularidad de que $z = 0$ en la recta $x + y = 0$; por ello el punto (0, 0) es un punto de extremo, aunque sea no estricto.

Para la función $z = xy^3$ el punto (0, 0) es también estacionario y en este punto $z_{xx} = z_{yy} = z_{xy} = 0$, por lo cual la condición (40.11) queda asimismo cumplida. Sin embargo, debido a que la fórmula, que representa dicha función, contiene potencias impares de las variables x e y, la función cambia de signo en cualquier entorno de cero, a consecuencia de lo cual, (0, 0) no es un punto de extremo.

40.3. OBSERVACIONES SOBRE LOS EXTREMOS EN LOS CONJUNTOS

Sea f una función derivable en un conjunto acotado abierto G y continua en la clausura $\bar{G}$ de dicho conjunto. Se pide hallar los valores máximo y mínimo de la función f en el conjunto $\bar{G}$ (de acuerdo con el teorema 3, p. 19.5, estos valores existen). Con este objeto podemos, por ejemplo, hallar todos los puntos estacionarios de la función f en G, calcular en éstos los valores de la función y escoger, siempre que sea posible (desde el punto de vista teórico, esto es posible, por ejemplo, cuando el número de los puntos estacionarios sea finito), aquellos en los que la función asume los valores máximo y mínimo entre todos los valores en los puntos estacionarios. A continuación, conviene comparar estos valores con los que toma la función en la frontera del conjunto abierto G, hallando, por ejemplo (en el caso de poder hacerlo), los valores máximo y mínimo de la función f en la frontera de la región G. Al comparar los valores máximo y mínimo en los puntos estacionarios con los valores correspondientes máximo y mínimo en la frontera del conjunto G, podemos, evidentemente, hallar el máximo y el mínimo buscados de f en $\bar{G}$.

Cuando G es una región plana y su frontera está constituida por una curva definida por cierta representación $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, la cuestión sobre la búsqueda de los valores extremos de la función $f(x, y)$ en la frontera de G se reduce a la investigación del extremo de la función de una variable $f(x(t), y(t))$, que se realiza con ayuda de los métodos ya conocidos.

Los métodos que pueden emplearse en el caso multidimensional para buscar puntos extremos en la frontera de una región serán considerados en el § 43.

Ejercicios. 1. Hállense los extremos de la función $z = x^3 + 12xy^2 - 15x - 24y$.

2. ¿Tendrá un extremo la función $z = x^4y^2 - 3x^2y + 2x + y$ en el punto (1, 1)?

3. Hállense los valores máximo y mínimo de la función $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$ en una región cerrada limitada por las líneas $x = 4$, $y = -1$, $x - y = 3$.

4. Sea $a = \text{const} > 0$, $X = \{(x, y) : |x| < a, y \in R\}$. Hállense todos los extremos de la función $z = \frac{3}{2a}x^2 + \sqrt{6(a^2 - x^2)}\cos y$ en X y todos los valores máximos y mínimos de ella en $\bar{X}$.

5. La superficie total de un paralelepípedo rectangular es igual a $6a^2$. ¿Para qué valores de la longitud de sus aristas el volumen del paralelepípedo será máximo?

§ 41. FUNCIONES IMPLÍCITAS

41.1. FUNCIONES IMPLÍCITAS DEFINIDAS POR UNA ECUACIÓN

Aclaremos las condiciones bajo las cuales una ecuación de varias variables define una función unívoca, es decir, define una de dichas variables como función de las demás. Empezaremos nuestras consideraciones por el estudio de una ecuación que contiene dos incógnitas

$$F(x, y) = 0.$$

Si la función de dos variables $F(x, y)$ está definida en cierto subconjunto A del plano R^2_{xy}, $A \subset R^2_{xy}$, y si existe tal función de una variable $y = f(x)$, definida en el conjunto $B \subset R_x$ contenido en la proyección del conjunto A sobre el eje Ox, que para todo $x \in B$ tenga lugar $(x, f(x)) \in A$ y sea válida la identidad $F(x, f(x)) = 0$, entonces f se denomina *función implícita* definida por la ecuación $F(x, y) = 0$.

Lema. *Sea $F(x, y)$ una función continua en cierto entorno rectangular*

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi, \quad |y - y_0| < \eta\}^{*)}$$

del punto (x_0, y_0) y supongamos que dicha función es, para todo $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ fijo, estrictamente monótona respecto de y en el intervalo $(y - \eta, y_0 + \eta)$. En este caso, si

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

existen tales entornos $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, del punto x_0 y $U(y_0) = (y - \varepsilon\, y_0 + \varepsilon)$ del punto y_0, que para todo $x \in U(x_0)$ se tiene una solución, y sólo una, $y \in U(y_0)$ de la ecuación $F(x, y) = 0$. Esta solución, que es una función de x y se designa por $y = f(x)$, es continua en el punto x_0 y

$$f(x_0) = y_0.$$

De este modo, el lema afirma, en particular, que para las suposiciones asumidas, la función implícita $y = f(x)$, definida por la ecuación $F(x, y) = 0$, existe y posee la propiedad de que las igualdades

$$F(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad y = f(x)$$

son equivalentes a condición de que $x \in U(x_0)$, $y \in U(y_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis del lema, la función $F(x, y)$ es, para todo $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ fijo, estrictamente monótona respecto de la variable y en el intervalo $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, en particular, en éste es estrictamente monótona la función $F(x_0, y)$. Supongamos, para concretar, que es estrictamente creciente. Elijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$, subordinado sólo a la condición $0 < \varepsilon < \eta$. Como la función $F(x_0, y)$ de la variable y es, en el segmento $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, estrictamente creciente y, por hipótesis, $F(x_0, y_0) = 0$, entonces

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0.$$

Mas la función de dos variables $F(x, y)$ es, conforme a la suposición, continua en el conjunto abierto $U(x_0, y_0)$ y $(x_0, y_0 - \varepsilon) \in U(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0 + \varepsilon) \in U(x_0, y_0)$, por lo cual existe tal $\delta > 0$, $0 < \delta < \xi$, que en el δ-entorno del punto $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ se verifica la desigualdad $F(x, y) < 0$, y en δ-entorno del punto $(x_0, y_0 + \varepsilon)$, la desigualdad $F(x, y) > 0$ (véase el lema 1 en el p. 19.3). En particular, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (fig. 162) quedan válidas las desigualdades

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x, y_0 + \varepsilon) > 0. \tag{41.1}$$

*) En concordancia con las designaciones aceptadas en este libro, sería más correcto denotar el entorno del punto (x_0, y_0) mediante $U((x_0, y_0))$ en lugar de $U(x_0, y_0)$. Para simplificar las designaciones, convendremos en omitir el segundo paréntesis.

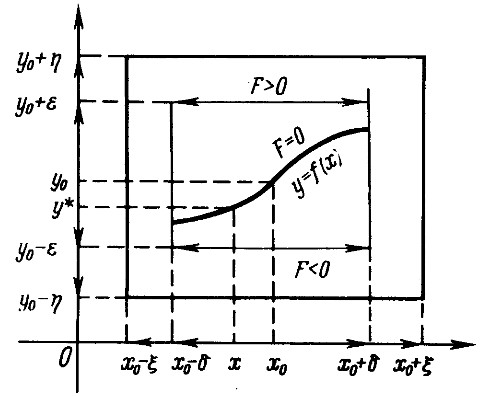


Fig. 162

Pongamos

$$U(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad U(y_0) \stackrel{\text{def}}{=} (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$

Dado que, siendo fijado $x \in U(x_0)$, la función $F(x, y)$ de la variable y es continua en el segmento $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, entonces, de la condición (41.1) se deduce (de acuerdo con el teorema de Cauchy sobre los valores intermedios de una función continua, véase el teorema 2 en el p. 6.2) que existe tal $y^* \in U(y_0)$ (véase la fig. 162) que $F(x, y^*) = 0$. Por ser $F(x, y)$ estrictamente monótona en el segmento $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ respecto de la variable y, el valor indicado de y^* es único.

De este modo, se ha obtenido una correspondencia unívoca (función unívoca) $x \mapsto y^*$, $x \in U(x_0)$, $y^* \in U(y_0)$ que se designará mediante f: $y^* = f(x)$.

Por definición de esta correspondencia, para cualquier $x \in U(x_0)$ e $y^* = f(x)$ tenemos

$$F(x, y^*) = 0, \quad y^* \in U(y_0)$$

con la particularidad de que el punto y^*, que posee dicha propiedad, es único. Hemos demostrado, pues, la existencia y unicidad de la función buscada f.

Luego, por hipótesis del lema, $F(x_0, y_0) = 0$, y, como $x_0 \in U(x_0)$, $y_0 \in U(y_0)$, entonces, debido a la unicidad de la función f, tenemos $y_0 = f(x_0)$.

Al final notemos que $\varepsilon > 0$ se ha fijado arbitrariamente a condición de que $\varepsilon < \eta$, y que se ha encontrado para él tal $\delta > 0$, que de $|x - x_0| < \delta$ (es decir, de la condición $x \in U(x_0)$) provenía la inclusión $f(x) \in U(y_0)$, es decir, la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Esto precisamente significa la continuidad de la función f en el punto x_0. □

Las condiciones suficientes, cómodas para aplicarlas, de la resolubilidad unívoca de la ecuación $F(x, y) = 0$ en cierto entorno del punto (x_0, y_0), para el cual $F(x_0, y_0) = 0$, las proporciona el siguiente teorema.

Teorema 1. *Supongamos que la función $F(x, y)$ es continua en cierto entorno del punto (x_0, y_0) y tiene en dicho entorno una derivada parcial $F_y(x, y)$ que es continua en el punto (x_0, y_0). En este caso, si*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

***existen tales entornos $U(x_0)$ y $U(y_0)$ de los puntos respectivos x_0 e y_0, que para todo $x \in U(x_0)$ se tiene una y sólo una, solución $y = f(x) \in U(y_0)$ de la ecuación $F(x, y) = 0$*)**. *Esta solución es continua en todo punto de $U(x_0)$ e $y_0 = f(x_0)$.*

Si suponemos complementariamente que la función F tiene en cierto entorno del punto (x_0, y_0) una derivada parcial $F_x(x, y)$, continua en el punto (x_0, y_0), entonces la función $f(x)$ tendrá también en el punto x_0 una derivada y para ésta queda válida la fórmula

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Debido a que la función $F(x, y)$ es continua en cierto entorno del punto (x_0, y_0) y es también continua en el mismo punto la derivada parcial $F_y(x, y)$, existe un entorno rectangular

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \xi, \quad |y - y_0| < \eta\}$$

del punto (x_0, y_0), donde la propia función $F(x, y)$ es continua y los valores de la derivada parcial $F_y(x, y)$ son del mismo signo que tiene su valor en el punto (x_0, y_0). Por esto, para todo $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ fijo la función $\varphi(y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, y)$ es derivable en el intervalo $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, mientras que su derivada $\varphi'(y) = F_y(x, y)$ conserva constante el signo. Por consiguiente, la función $\varphi(y)$ es estrictamente monótona en el intervalo indicado.

Así pues, todas las condiciones del lema para la función $F(x, y)$ vienen cumplidas en el entorno rectangular construido $U(x_0, y_0)$. Por lo tanto, existen los entornos $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $U(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ y la única función $y = f(x)$, definida en $U(x_0)$, tales que para todo $x \in U(x_0)$ tienen lugar la inclusión $f(x) \in U(y_0)$ y la igualdad $F(x, f(x)) = 0$, con la particularidad de que la función f es continua en el punto x_0.

Dado que para todo punto (x, y), para el cual $x \in U(x_0)$, $y \in U(y_0)$, existe su entorno rectangular $U(x, y)$ contenido en otro entorno rectangular

$$U_0(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \varepsilon\}$$

(fig. 163), entonces para $U(x, y)$ también se cumplen todas las condiciones del lema. Por consiguiente, siendo única la solución $f(x)$ de la ecuación $F(x, y) = 0$ en el entorno $U_0(x_0, y_0)$, la función $y = f(x)$ es continua en todo punto $x \in U(x_0)$, de conformidad con el mismo lema.

Demostremos ahora la última afirmación del teorema. En vista de la continuidad de las derivadas parciales F_x y F_y en el punto (x_0, y_0), la función F es derivable en este punto:

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) =$$
$$= F_x(x_0, y_0)\, \Delta x + F_y(x_0, y_0)\, \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \qquad (41.2)$$

*) En este caso suele decirse también que la ecuación $F(x, y) = 0$ es resoluble unívocamente en el entorno $U(x_0, y_0) = \{(x, y) : x \in U(x_0), y \in U(y_0)\}$ del punto (x_0, y_0).

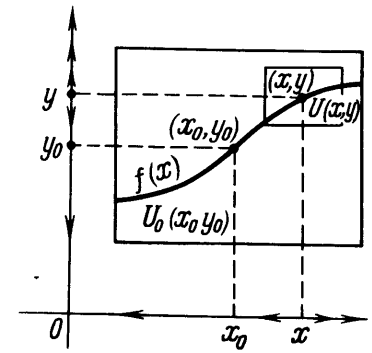


Fig. 163

donde

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Tomemos en la fórmula (41.2)

$$x_0 + \Delta x \in U(x_0), \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Entonces, en vista de la condición $F(x, f(x)) = 0$, obtenemos

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = 0,$$

y, como $F(x_0, y_0) = 0$, de (41.2) tenemos

$$F_x(x_0, y_0)\, \Delta x + F_y(x_0, y_0)\, \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = 0.$$

De aquí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2}. \qquad (41.3)$$

Sea ahora $\Delta x \to 0$; entonces, siendo la función f continua, $\Delta y \to 0$, y esto significa que cuando $\Delta x \to 0$, se tiene $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, de donde se desprende que en la fórmula (41.3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 = 0$. Es por esto que cuando $\Delta x \to 0$, el límite del segundo miembro de la igualdad (41.3) existe y es igual a $-\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$ (recordemos que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$), por consiguiente, cuando $\Delta x \to 0$, existe también el límite del primer miembro, es decir, existe la derivada

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \square \qquad (41.4)$$

OBSERVACIÓN. Si las funciones F_x y F_y son continuas en el entorno $U_0(x_0, y_0)$ del punto (x_0, y_0), la derivada f' es continua en el intervalo $U(x_0)$. Efectivamente, al

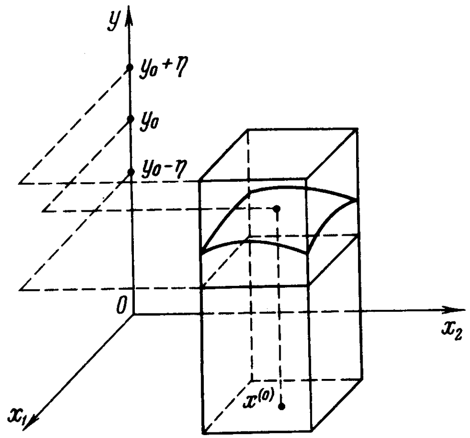


Fig. 164

aplicar la fórmula (41.4) a un punto arbitrario $x \in U(x_0)$, obtenemos

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))},$$

de donde proviene, según el teorema sobre la composición de funciones continuas, la continuidad de la función $f'(x)$ en $U(x_0)$.

Análogamente se introduce la noción de función implícita definida por la ecuación

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, \tag{41.5}$$

como también se enuncia y se demuestra el teorema análogo al teorema 1. Para poder enunciarlo, es sólo suficiente que en el enunciado del teorema 1 por x se entienda un punto de un espacio n-dimensional, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, en particular, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Teorema 1′. *Supongamos que la función $F(x, y) \equiv F(x_1, \ldots, x_n, y)$ es continua en cierto entorno del punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$ y tiene en este entorno la derivada parcial F_y, continua en el punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$.*

Si $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ y $F_y(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$, existen tales entornos U_x y U_y de los puntos respectivos $x^{(0)}$ e $y^{(0)}$, que para todo $x \in U(x)$ existe una solución, y sólo una,

$$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in U_y$$

de la ecuación $F(x, y) = 0$), con la particularidad de que esta solución es continua en U_x y, además, $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.*

Si, en adición, en cierto entorno del punto $(x^{(0)}, y^0)$, existen todas las derivadas parciales F_{x_i}, continuas en el punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$, entonces en el punto $x^{(0)}$ existen también las derivadas parciales f_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, con la particularidad de que si las derivadas parciales F_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, y F_y son continuas en el entorno del punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$, las derivadas parciales f_{x_i} existen y son continuas en cierto entorno del punto $x^{(0)}$.

*) En la fig. 164 se expone el caso en que $n = 2$ y el entorno U_x es rectangular.

En este caso las fórmulas para las derivadas parciales de la función implícita, definida por la ecuación (41.5), tienen por expresión

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejercicios. 1. Enúnciense las condiciones, bajo las cuales la función $f(x)$, definida por la ecuación $F(x, y) = 0$ (teorema 1), tiene en el punto (x_0, y_0) derivadas continuas de orden hasta n inclusive. Hállense las fórmulas para $f''(x_0)$ y $f'''(x_0)$.

2. Sirviéndose del teorema 1 y las respuestas de los ejercicios anteriores, hállense las condiciones suficientes para que exista la función $x = \varphi(y)$ que sea inversa respecto de $y = f(x)$ y que tenga en el punto y_0 derivadas continuas de orden hasta n inclusive. Demuéstrese que

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}.$$

3. Hállense $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, si y es una función definida por la ecuación $\cos x^2y^2 + xy = 2$.

41.2. PRODUCTOS DE LOS CONJUNTOS

Antes de considerar la cuestión referente a la resolubilidad de los sistemas de ecuaciones, introduzcamos unas nociones adicionales.

Sea R_x^n un espacio euclídeo n-dimensional cuyos puntos se designarán mediante $x = (x_1, \ldots, x_n)$, sea R_y^m un espacio euclídeo m-dimensional cuyos puntos se designarán mediante $y = (y_1, \ldots, y_m)$ y sea R_{xy}^{n+m} un espacio euclídeo $(n + m)$-dimensional de los puntos

$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Definición 1. *Supongamos que $A \subset R_x^n$ y $B \subset R_y^m$. El conjunto de tales puntos (x, y) del espacio R_{xy}^{n+m} que $x \in A$ e $y \in B$ se llama producto**) *de los conjuntos A y B y se denota por $A \times B$* (véase el p.1.2*). *De este modo,*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Ejemplos. 1. Si $A = R_x^n$, $B = R_y^m$ entonces

$$A \times B = R_x^n \times R_y^m = R_{xy}^{n+m}.$$

2. Supongamos que $n = 2$ y A es un círculo; $m = 1$ y B es un segmento. En este caso $A \times B$ es un cilindro circular recto (fig. 165).

*) Se emplea también el término "*producto cartesiano*".

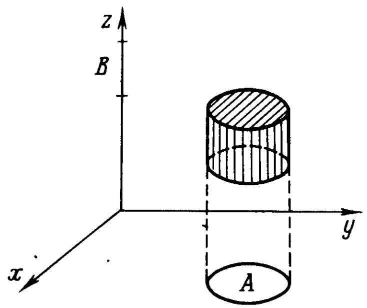


Fig. 165

3. Supongamos que $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in R_x^n$ y $A = P(x^{(0)}; \delta_1, \ldots, \delta_n) = \{x: |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i; i = 1, 2, \ldots, n\}$ es un entorno rectangular del punto $x^{(0)}$; supongamos también que $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \in R_y^m$ y $B = P(y^{(0)}; \eta_1, \ldots, \eta_m) = \{y: |y_j - y_j^{(0)}| < \eta_j, j = 1, 2, \ldots, m\}$ es un entorno rectangular del punto $y^{(0)}$. En este caso

$$A \times B = \{(x, y): |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$|y_j - y_j^{(0)}| < \eta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m\} =$$
$$= P((x^{(0)}, y^{(0)}); \delta_1, \ldots, \delta_n, \quad \eta_1, \ldots, \eta_m) \qquad (41.6)$$

es un entorno rectangular del punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Lo recíproco es también obvio: puesto que todo entorno rectangular del punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$ se escribe mediante la fórmula que está en medio de la igualdad (41.6), siempre puede ser representado como un producto de los entornos rectangulares de los puntos $x^{(0)}$ e $y^{(0)}$.

Ejercicio 4. Demuéstrese que si los conjuntos $A \subset R_x^n$ y $B \subset R_y^m$ son abiertos en los espacios respectivos R_x^n y R_y^m, su producto $A \times B$ será también un conjunto abierto en el espacio R_{xy}^{n+m}.

41.3. FUNCIONES IMPLÍCITAS DEFINIDAS POR UN SISTEMA DE ECUACIONES

Consideraremos las condiciones bajo las cuales el sistema de ecuaciones

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in R^n, \quad y \in R^m, \qquad (41.7)$$

o bien, en la forma desarrollada

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n, \; y_1, \ldots, y_m) &= 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, \; y_1, \ldots, y_m) &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, \; y_1, \ldots, y_m) &= 0, \end{aligned} \qquad (41.8)$$

es unívocamente resoluble respecto de $y_1, \ldots, y_m$ en cierto entorno del punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$ en el que $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Definición 2. *Sea dado un sistema de funciones $u_i = u_i(t_1, \ldots, t_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, que en cierto punto $t^{(0)}$ tienen todas las derivadas parciales de primer orden. En este caso una matriz, compuesta de las derivadas parciales de dichas funciones en el punto $t^{(0)}$*

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} & \frac{\partial u_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} & \frac{\partial u_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t_1} & \frac{\partial u_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial t_n} \end{Vmatrix}$$

o, en la forma más breve,

$$\left\| \frac{\partial u_i}{\partial t_j} \right\| \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

*se denomina matriz de Jacobi**) *del sistema de funciones dado.*

Si $m = n$, el determinante de la matriz de Jacobi se llama *determinante de Jacobi* o *jacobiano* del sistema de funciones $u_1, \ldots, u_n$ según las variables $t_1, \ldots, t_n$ y se designa así**):

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}.$$

Veremos en adelante que el jacobiano de un sistema de funciones surge de un modo natural en las más diversas cuestiones de la teoría de la función de varias variables.

Antes de pasar a la exposición del teorema fundamental, mostremos con un ejemplo sencillo (sin profundizarnos en las detalles) la idea de su demostración y señalemos de qué modo surge en sus condiciones el jacobiano del sistema que se considera. Supongamos que en un entorno del punto (x_0, y_0, z_0) se han dado las funciones continuamente derivables F y Φ, con la particularidad de que

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0,$$
$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Supongamos también que es preciso resolver el sistema de ecuaciones

$$F(x, y, z) = 0,$$
$$\Phi(x, y, z) = 0$$

*) K. Jacobi (1804 — 1851), matemático alemán.

**) Se emplea también la designación $\dfrac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)}$.

en cierto entorno del punto indicado, hallando, a partir del sistema, las variables $y = \varphi(x)$ y $z = \psi(x)$ como funciones continuas φ y ψ de la variable x tales que sea $\varphi(x_0) = y_0$, $\psi(x_0) = z_0$. Al resolver con este fin, por ejemplo, la primera ecuación respecto de z, obtendremos $z = f(x, y)$. Al sustituir esta expresión en la segunda y al resolverla respecto de y, tendremos $y = \varphi(x)$. Poniendo $\psi(x) = f[x, \varphi(x)]$, obtendremos la solución buscada

$$y = \varphi(x)$$
$$z = \psi(x).$$

Surge, naturalmente, una pregunta sobre las condiciones que han de cumplirse para que se puedan ejecutar las operaciones indicadas, o, con más precisión, cuándo existen y están unívocamente definidas todas las funciones mencionadas. (Se debe aclarar, por supuesto, ¿dónde, es decir, para qué valores de las variables x e y, están definidas estas funciones? Esta cuestión no será el objeto del análisis detallado inmediato, pues no queremos apartarnos de la idea principal. Volveremos a considerarla en la demostración del teorema 2 de este punto.)

Para que una de las ecuaciones dadas, la primera, por ejemplo, sea resoluble en cierto entorno del punto (x_0, y_0, z_0) respecto de la variable z, es suficiente que (véase el teorema 1′ en el p. 41.1) $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$. Si $z = f(x, y)$ es la solución correspondiente, entonces, para que la ecuación $\Phi[x, y, f(x, y)] = 0$, que se obtiene como resultado de sustituir dicha solución en la segunda ecuación, sea resoluble respecto de la variable y, resulta suficiente que la derivada parcial total respecto de y en el primer miembro de la igualdad obtenida no se anule en el punto (x_0, y_0), es decir, que en dicho punto se verifique

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

Pero, de acuerdo con el p. 41.1,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},$$

por consiguiente, al sustituir esta expresión en la desigualdad antecedente, llegamos a que la condición de resolubilidad puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(y, z)} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0 \text{ en el punto } (x_0, y_0, z_0).$$

De esta condición se deduce, obviamente, que en el punto (x_0, y_0, z_0) o bien $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, o bien $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \neq 0$, es decir, una de las ecuaciones dadas es resoluble respecto de z.

De este modo, el hecho de que el jacobiano $\dfrac{\partial(F, \Phi)}{\partial(y, z)}$ es distinto de cero en el punto (x_0, y_0, z_0) asegura, para el sistema dado de las ecuaciones, la existencia en cierto

entorno del punto (x_0, y_0, z_0) de una solución en la forma

$$y = \varphi(x)$$
$$z = \psi(x).$$

Enunciemos ahora el teorema fundamental de este párrafo.

Teorema 2. *Supongamos que las funciones* $F_i(x, y) = F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *son continuamente derivables en cierto entorno del punto* $(x^{(0)}, y^{(0)})$, *donde* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$. *En este caso, si* $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *y en el punto* $(x^{(0)}, y^{(0)})$ *el jacobiano* $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}$ *no es igual a cero, entonces existen tales entornos* U_x *y* U_y *de los puntos* $x^{(0)}$ *e* $y^{(0)}$ *de los espacios respectivos* R_x^n *y* R_y^m, *que para todo* $x \in U_x$ *existe una única solución*

$$y = f(x) \in U_y$$

del sistema de ecuaciones (41.7):

$$y = f(x) = \{y_k = f_k(x_1, \ldots, x_n),\quad k = 1, 2, \ldots, m\}^{*)},$$

con la particularidad de que las funciones $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *que forman dicha solución son continuamente derivables en* U_x *y, además,* $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$.

Así pues, si se cumplen las suposiciones del teorema, la condición

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad (x, y) \in U_x \times U_y$$

es equivalente a la siguiente

$$y = f(x), \quad x \in U_x, \quad y \in U_y.$$

DEMOSTRACIÓN. Indiquemos ante todo que la afirmación: la solución $y = f(x)$ del sistema de ecuaciones (41.7) satisface la condición $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$ proviene, evidentemente y de inmediato, de la afirmación sobre la unicidad de la solución $y = f(x) \in U_y$ para $x \in U_x$ y de las condiciones $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $x^{(0)} \in U_x$, $y^{(0)} \in U_y$.

Para demostrar el teorema apliquemos el método de la inducción matemática. Para el caso de una ecuación, es decir, cuando $m = 1$, el teorema se ha enunciado en el p. 41.1. Supongamos ahora que es también lícito para $m - 1$ ecuaciones $(m > 1)$. Demostremos que en tal caso tendrá lugar también para m ecuaciones.

Mostremos primero que cada una de las ecuaciones (41.8), la última, por ejemplo,

$$F_m(x_1, \ldots, x_n, \quad y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

---

*) El sistema de funciones $f_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, viene designado con un símbolo $f(x)$, puesto que define una correspondencia determinada: a los puntos de cierto conjunto del espacio R_x^n el sistema indicado les pone en correspondencia los puntos determinados del espacio R_y^m, o, como suele decirse, aplica el conjunto mencionado del espacio R_x^n en el espacio R_y^m.

puede ser resuelta en el entorno del punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$ por lo menos respecto de una variable. En efecto, por hipótesis del teorema, en el punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

y, por ende, en dicho punto por lo menos un elemento en la última fila del jacobiano es distinto de cero. Supongamos, para concretar, que este elemento será el último:

$$\frac{\partial F_m(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_m} \neq 0.$$

De aquí, en virtud del teorema 1′ del p. 41.1, se desprende que la ecuación $F_m(x, y) = 0$ puede ser resuelta respecto de y_m en cierto entorno del punto (x_0, y_0). Daremos una definición más exacta de esta idea. Designemos mediante U el entorno del punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$, en el que las funciones F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, son continuamente derivables y pongamos $\tilde{y} \stackrel{\text{def}}{=} (y_1, \ldots, y_{m-1})$. Entonces, existen un entorno rectangular U^{m+n-1} del punto

$$(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = (x_1^0, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{m-1}^{(0)}) \tag{41.9}$$

y un entorno U^1 del punto $y_m^{(0)}$ tales que $U^{m+n-1} \times U^1 \subset U$, y se tiene la única función

$$y_m = \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}), \tag{41.10}$$

que está definida en U^{m+n-1} y que satisface las siguientes condiciones: si

$$(x, \tilde{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in U^{m+n-1},$$

entonces

$$\varphi(x, \tilde{y}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in U^1, \tag{41.11}$$

$$F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}, \quad \varphi(x, \tilde{y})) = 0. \tag{41.12}$$

Además, de acuerdo con el mismo teorema 1′, la función $\varphi(x, \tilde{y})$ es continuamente derivable en U^{m+n-1} y

$$\varphi(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = y_m^{(0)}. \tag{41.13}$$

En este caso, si $(x, \tilde{y}) \in U^{m+n-1}$ e $y_m \in U^1$, entonces el sistema (41.8) es equivalente al sistema

$$F_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \quad y_m = \varphi(x, y). \tag{41.14}$$

Sustituyamos en las primeras $m - 1$ ecuaciones del sistema (41.14) la expresión (41.10). Al introducir las designaciones

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) = F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}))$$
$$i = 1, 2, \ldots, m - 1. \tag{41.15}$$

obtendremos, en este caso, el siguiente sistema de $m - 1$ ecuaciones con $m + n - 1$ incógnitas:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Phi_{m-1}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}) = 0. \end{aligned} \tag{41.16}$$

Además, para $(x, \tilde{y}) \in U^{m+n-1}$, $y_m \in U^1$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &\Phi_j(x, \tilde{y}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &y_m = \varphi(x, \tilde{y}) \end{aligned} \tag{41.17}$$

es equivalente al sistema (41.14).

Mostremos que el sistema (41.16) satisface las condiciones que se diferencian de las que son satisfechas por el sistema (41.8), sólo en que $m - 1$ se ha sustituido por m. En efecto, las funciones Φ_k, $k = 1, 2, \ldots, m - 1$, son continuamente derivables en el entorno U^{m+n-1} como composición de las funciones continuamente derivables. De las condiciones $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, y (41.15), (41.13) proviene que $\Phi_k(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m - 1$.
Demostremos que en el punto $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$ (véase (41.9))

$$\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1})} \neq 0.$$

Indiquemos previamente que de (41.10) y (41.15) se deduce que

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{41.18}$$

y de (41.12), que

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{41.19}$$

Ahora, en el determinante $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}$ agreguemos a la k-ésima columna la última columna multiplicada por $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_k}$, $k = 1, \ldots, m - 1$, de lo cual, como se sabe, el valor del determinante no cambiará. Por eso, utilizando (41.18) y (41.19) y desarrollando el determinante obtenido por los elementos de la última fila, obtenemos

$$\left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{matrix} \right|_{(x^{(0)},\, y^{(0)})} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{matrix} \right|_{(x^{(0)},\, \tilde{y}^{(0)})} =$$

$$= \frac{\partial F_m(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_m} \left. \frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1})} \right|_{(x^{(0)},\, \tilde{y}^{(0)})}$$

y como el primer miembro de la igualdad es distinto de cero, será no nulo también el segundo miembro, de donde

$$\left. \frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1})} \right|_{(x^0,\, \tilde{y}^0)} \neq 0.$$

En vista de que las condiciones, análogas a las condiciones para las funciones F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, se cumplen para las funciones Φ_i, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$, y, de acuerdo con la suposición sobre la inducción, el sistema de ecuaciones (41.16) es unívocamente resoluble respecto de las variables $y_1, \ldots, y_{m-1}$ en cierto entorno del punto $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$. Con más precisión, sea U^{m+n-1} un entorno rectangular del punto $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$ obtenido como resultado de la resolución de la ecuación $F_m = 0$ respecto de la variable y_m. Desarrollémoslo en un producto de los entornos rectangulares U'_x y $U_{\tilde{y}}$ de los puntos $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ e $\tilde{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_{m-1}^{(0)})$ en los espacios respectivos R_x^n y $R_{\tilde{y}}^{m-1}$ (aquí $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_{m-1})$): $U^{m+n-1} = U'_x \times U'_{\tilde{y}}$. Entonces, existen un entorno $U_x \subset U'_x$ del punto $x^{(0)}$, un entorno $U_{\tilde{y}} \subset U'_{\tilde{y}}$ del punto $\tilde{y}^{(0)}$ y el único sistema de funciones

$$\begin{gathered} y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{m-1} = f_{m-1}(x) = f_{m-1}(x_1, \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{41.20}$$

que están definidas en el conjunto U_x y que satisfacen las siguientes condiciones: si $x \in U_x$, se tiene

$$(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) \in U_{\tilde{y}} \tag{41.21}$$

y en U_x las funciones (41.20) son continuamente derivables y satisfacen el sistema de ecuaciones (41.16):

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m - 1. \tag{41.22}$$

Es importante notar que en virtud de la unicidad de la solución (41.20) del sistema (41.16) para $x \in U_x$, $\tilde{y} \in U_{\tilde{y}}$ e $y_m \in U^1$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_k &= f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m - 1, \\ y_m &= \varphi(x, y) \end{aligned} \tag{41.23}$$

es equivalente al sistema (41.17).

Sustituyendo las expresiones (41.20) en (41.10), obtendremos una función de x, definida en U_x; designémosla con f_m:

$$y_m = \varphi(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)) = f_m(x_1, \ldots, x_n) = f_m(x). \tag{41.24}$$

Señalemos que el sistema de funciones

$$y_k = f_k(x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{41.25}$$

(véanse (41.20) y (41.24)) es precisamente el sistema buscado de funciones que satisface las exigencias enunciadas en el teorema. En efecto, sea $U_y = U_{\tilde{y}} \times U^1$; entonces si $x \in U_x$, de conformidad con (41.21) y (41.11), $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in U_y$. De (41.15), (41.22), (41.24) y (41.12) se deduce que $F_i(x, f(x)) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, para cualquier $x \in U_x$. Debido al teorema 1′ y la suposición de inducción, las funciones (41.10) y (41.20) y, por lo tanto, la función (41.24), son continuamente derivables.

Hemos demostrado de este modo que la aplicación $f(x)$, definida por las funciones (41.25), es una solución continuamente derivable del sistema de ecuaciones (41.8) en el conjunto U_x, y si, en este caso, $x \in U_x$, entonces $y = f(x) \in U_y$. Observemos, además, que si $x \in U_x$, el sistema (41.25) es equivalente al sistema (41.23).

Resta demostrar la unicidad de la solución del sistema de ecuaciones (41.8). Con este fin representemos en forma del esquema que sigue los pasos (realizados en el transcurso de la demostración) de unos sistemas de ecuaciones a los otros, equivalentes a los primeros, es decir, a aquellos que tienen exactamente las mismas soluciones:

$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

$\Updownarrow$

$F_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m - 1,$

$y_m = \varphi(x, y).$

$\Updownarrow \qquad \Phi_j(x, \tilde{y}) \equiv F_i(x, \tilde{y}, \varphi(x, \tilde{y})), \quad j = 1, 2, \ldots, m - 1,$

$\Phi_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m - 1,$

$y_m = \varphi(x, y).$

$\Updownarrow$

$y_j = f_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, m - 1,$

$$y_m = \varphi(x, \tilde{y}). \qquad f_m(x) \equiv \varphi(x, f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x))$$

$$\Updownarrow$$

$$y_i = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Las flechas dobles significan la equivalencia de los sistemas de ecuaciones en consideración, la cual en todo caso tiene lugar para $x \in U_x$, $y \in U_y$. De esta equivalencia deriva precisamente la unicidad de la solución (41.25) del sistema (41.8) en los entornos que se consideran, de lo cual, según se ha observado anteriormente, en virtud de la condición $F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0, i = 1, 2, \ldots, m$, se deduce que $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$.□

El teorema demostrado sobre las funciones implícitas es uno de los más importantes teoremas del análisis matemático y tiene toda una serie de aplicaciones en diferentes apartados de éste. Con algunas de ellas nos encontraremos en los capítulos ulteriores de nuestro curso. El teorema citado es un "teorema puro de existencia": tanto su enunciado, como la demostración aducida no dan origen, en el caso general, a un método concreto de resolución del sistema (41.8). Por ejemplo, si todas las F_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, en el sistema citado de ecuaciones son funciones elementales, entonces, siguiendo el esquema de la demostración del teorema, no tendremos éxito en "hallar (se trata de un caso general) en la forma explícita" todas aquellas funciones cuya existencia se ha utilizado en la demostración mencionada, y obtener una solución del sistema que tenga también la forma de las funciones elementales. Realmente, en este caso la solución del sistema de ecuaciones (41.8), la que existe en virtud del teorema citado, no es, en el caso general, una lista de las funciones elementales (si incluso dicho sistema consta de una sola ecuación).

Naturalmente, si las funciones F_k son elementales y, por consiguiente, vienen definidas mediante ciertas fórmulas, la solución del sistema (41.8) puede hallarse con cualquier grado de exactitud, es decir, en principio, las tablas de los valores de estas soluciones pueden ser compuestas con cualquier grado de exactitud. En realidad, sin embargo, la exactitud, con la que se calculan las soluciones, se determina, desde luego, por el objetivo concreto, en aras del cual se resuelve el sistema en consideración. El propio teorema 2 en este caso nos da una certeza objetiva de que, al realizar correctamente los cálculos correspondientes, calculamos, de hecho, la solución buscada del sistema. No nos detendremos en los métodos numéricos que se emplean para solucionar los sistemas de ecuaciones; sólo algunas de las cuestiones de la resolución numérica de las ecuaciones se consideran en "Complemento" al final de este tomo.

Indiquemos como una circunstancia esencial que el teorema 2, al igual que todos los teoremas de este tipo, proporciona métodos cualitativos, en el caso dado, para estudiar las propiedades de las soluciones del sistema de ecuaciones.

Resulta interesante notar que las derivadas parciales de la solución del sistema (41.8) se expresan con facilidad, si se cumplen las condiciones del teorema 2, en forma explícita a través de las derivadas parciales de las funciones F_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Efectivamente, con el fin de hallar la derivada parcial $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, se deben derivar las igualdades (41.8) respecto de x_i, considerándolas identidades según $x_1, \ldots, x_n$, es decir, sustituyendo en ellas sus soluciones $y_j = y_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$. En este caso obtendremos

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Este sistema de ecuaciones, lineales respecto de $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, en virtud de que su determinante en el punto considerado es distinto de cero:

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y, \ldots, y_m)} \neq 0,$$

tiene una solución, y sólo una, la cual puede hallarse, por ejemplo, según la regla de Cramer*).

Si es preciso hallar todas las derivadas

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

conviene calcular las diferenciales de ambos miembros de las identidades mencionadas arriba (41.8). Haciendo uso de la invariación de la forma de la primera diferencial respecto de la elección de las variables, obtendremos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} dy_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

En vista de la misma condición $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m} \neq 0$, este sistema de las ecuaciones, lineales respecto de $dy_1, \ldots, dy_m$, tiene una solución y ésta es única. Si la hallamos, el coeficiente de dx_i en la expresión para dy_j será precisamente la derivada parcial $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$.

Los dos métodos son aplicables también para el cálculo de las derivadas de órdenes superiores de las funciones $y_j(x_1, \ldots, x_n)$ que son soluciones del sistema de las ecuaciones (41.8) (por ejemplo, bajo el supuesto de que todas las funciones F_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, tienen derivadas continuas de órdenes correspondientes). Aplicando el método de diferenciales, se debe recordar, por supuesto, que las diferenciales de orden superior al primero, si se expresan en términos de las diferenciales de las funciones, son más complejas, en lo que se refiere a su expresión, en comparación con el caso cuando ellas se expresan sólo en términos de las diferenciales de las variables independientes (véase el p. 21.2).

Las derivadas de órdenes superiores de las funciones $y_j(x_1, \ldots, x_n)$ pueden obtenerse también, por derivación sucesiva, a partir de las expresiones para las prime-

*) G. Cramer (1704 — 1752), matemático suizo.

ras derivadas $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, determinadas según las fórmulas de Cramer a base del sistema de ecuaciones citado anteriormente

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

en forma de una razón entre dos determinantes. Dicha razón puede derivarse tantas veces cuantas veces son derivables las funciones F_k, $k = 1, \ldots, m$. En este caso, si todas las derivadas de las funciones F_k, $k = 1, \ldots, m$, de orden hasta r inclusive son continuas, lo serán también todas las derivadas parciales de las funciones $y_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$, de orden hasta el mismo r.

Un conjunto (llamado también a menudo una clase) de todas las funciones que son r veces continuamente derivables en la región G se denota con $C^r(G)$. De este modo: *si, adicionalmente a las condiciones del teorema 2,* $F_k \in C^r(U)$, $k = 1, \ldots, m$, *donde* U *es un cierto entorno del punto* $(x^{(0)}, y^{(0)})$, *las soluciones* $y_j = y_j(x_1, \ldots, x_n)$ *del sistema de ecuaciones* (41.7) *pertenece también a la clase* $C^r(U_x)$ *en cierto entorno* U_x *del punto* $x^{(0)}$.

Ejercicios. 5. ¿Bajo qué condiciones impuestas sobre f y g, la ecuación $y = xf(z) + g(z)$ define, en cierto entorno U del punto (x_0, y_0), la función $z(x, y) \in C^2(U)$? Demuéstrese que, cumplidas estas condiciones, para cualesquiera $(x, y) \in U$

$$z_y^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + z_x^2 z_{yy} = 0.$$

6. Sea dado un sistema de ecuaciones

$$uf'(v) = [y - f(v)]^2$$
$$(x + v)f'(v) = y - f(v).$$

Hállense las condiciones, impuestas sobre la función f, para las cuales este sistema define en cierto entorno U del punto (x_0, y_0) las funciones $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ de la clase $C^1(U)$. Demuéstrese que en este caso $u_x u_y = u$ en todo punto de U.

41.4. APLICACIONES

En este punto se estudiarán las aplicaciones $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$, es decir, aplicaciones de tal índole que a todo punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ del conjunto X, dispuesto en el espacio puntual aritmético n-dimensional R^n (véase el p. 18.1), le ponen en correspondencia el punto $y = (y_1, \ldots, y_m)$ del espacio puntual aritmético m-dimensional R^m. De este modo, $f: (x_1, \ldots, x_n) \to (y_1, \ldots, y_m)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in X$. Obviamente, la definición de tal aplicación f es equivalente a la definición de m funciones $f_j: X \to R$ tales que sea $f_j: x \mapsto y_j$, $j = 1, \ldots, m$, $x \in X$, $y_j \in R$. Estas funciones

$$f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in X, \tag{41.26}$$

se denominan *funciones coordenadas de la aplicación* f y se escribe

$$f = (f_1, \ldots, f_m).$$

A las aplicaciones que se consideran se generaliza el concepto de continuidad.

Definición 3. *Una aplicación* $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$, *se denomina continua en el punto* $x^{(0)} \in X$, *si para cualquier entorno* $V(y^{(0)})$ *del punto* $y^{(0)} = f(x^0)$ *existe tal entorno* $U(x^{(0)})$ *del punto* $x^{(0)}$ *que*

$$f(U(x^{(0)}) \cap X \subset V(y^{(0)}).$$

Por cuanto en todo entorno de un punto*) se contiene su entorno esférico, dicha definición es equivalente a la siguiente.

Una aplicación $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$, *se denomina continua en el punto* $x^{(0)} \in X$, *si para cualquier* ε*-entorno del punto* $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ *existe tal* δ*-entorno del punto* $x^{(0)}$ *que*

$$f(U(x^{(0)}, \delta) \cap X) \subset U(y^{(0)}, \varepsilon).$$

Esto, a su vez, puede ser parafraseado, con ayuda de las desigualdades, de la manera siguiente.

Una aplicación $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$, *se denomina continua en el punto* $x^{(0)} \in X$, *si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe tal* $\delta > 0$ *que para todos los puntos* $x \in X$, *que satisfacen la condición* $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$, *se cumple la desigualdad*

$$\rho(f(x), f(x^{(0)})) < \varepsilon.$$

La definición de continuidad puede enunciarse también en términos de las sucesiones.

Definición 3′. *Una aplicación* $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$, *se denomina continua en el punto* $x^{(0)} \in X$ *si para cualquier sucesión* $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, *tal que* $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, *tiene lugar*

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}).$$

La equivalencia de estas dos definiciones se demuestra por analogía con la demostración de la equivalencia de las definiciones del límite de funciones según Cauchy y según Heine. Demos a conocer esta demostración.

Supongamos que la aplicación f *es continua en el punto* $x^{(0)}$ en el sentido de la definición 3, $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, y

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}. \tag{41.27}$$

Prefijemos $\varepsilon > 0$. Para ε existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in X$, $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$, se verifica la desigualdad $\rho(f(x), f(x^{(0)})) < \varepsilon$.

En virtud de la condición (41.27), existe tal número k_0 que para cualesquiera $k \geqslant k_0$ tenemos $x^{(k)} \in U(x^{(0)}, \delta)$ y, por consiguiente, $\rho(f(x^{(k)}), f(x^{(0)})) < \varepsilon$. Esto precisamente significa que $\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)})$.

Supongamos ahora que la aplicación f es continua en el punto $x^{(0)}$ en el sentido de la definición 3′ y que las condiciones de la definición 3 no están cumplidas, es decir, existe tal $\varepsilon_0 > 0$, que para cualquier $\delta > 0$ existe un $x_\delta \in U(x^{(0)}, \delta) \cap X$, para el

*) Recordemos que se llama entorno de un punto cualquier conjunto abierto que contiene dicho punto (véase la definición 14 en el p. 18.2).

cual $\rho(f(x_\delta), f(x^{(0)})) \geqslant \varepsilon_0$. Tomando sucesivamente $\delta = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, y poniendo, para abreviar, $x^{(k)} = x_{1/k}$, obtenemos $x^{(k)} \in U\left(x^{(0)}, \frac{1}{k}\right) \cap X$, es decir, $\rho\left(x^{(k)}, x^{(0)}\right) < \frac{1}{k}$. Por consiguiente, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ y $x^{(k)} \in X$; sin embargo, $\rho(f(x^{(k)}), f(x^{(0)}) \geqslant \varepsilon_0$ y, de este modo, la sucesión $\{f(x^{(k)})\}$ no tiene el punto $f(x^{(0)})$ en calidad de su límite. La contradicción obtenida demuestra la afirmación enunciada. □

Lema 1. ***La aplicación $f = (f_1, \ldots, f_m)$: $X \to R^m$, $X \subset R^n$, es continua en el punto $x^{(0)}$ cuando, y sólo cuando, en dicho punto son continuas todas las funciones coordenadas $f_1, \ldots, f_m$.***

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que la aplicación f es continua en el punto $x^{(0)} \in X$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \overset{\text{def}}{=} f(x^{(0)})$. De acuerdo con la definición 3, para todo entorno $V(y^{(0)})$ del punto $y^{(0)}$, en particular, para cada uno de sus entornos cúbicos (véase el p. 18.1)

$$P(y^{(0)}, \varepsilon) = \{y: |y_i - y_i^{(0)}| < \varepsilon\}$$

existe tal entorno $U(x^{(0)})$ del punto $x^{(0)}$ que

$$f(U(x^{(0)}) \cap X) \subset P(y^{(0)}, \varepsilon).$$

Por consiguiente, para todo $x \in U(x^{(0)}) \cap X$ se verifican las desigualdades

$$|f_j(x) - y_j^{(0)}| < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Esto es testimonio de que todas las funciones coordenadas $f_1, \ldots, f_m$ son continuas en el punto $x^{(0)}$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que todas las funciones coordenadas $f_1, \ldots, f_m$ son continuas en el punto $x^{(0)} \in X$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) = f(x^{(0)})$ y está dado un entorno $V(y^{(0)})$ del punto $y^{(0)}$. En este caso existe tal $\varepsilon > 0$ que el entorno ε-cúbico $P(y^{(0)}, \varepsilon)$ del punto $y^{(0)}$ está contenido en $V(y^{(0)})$,

$$P(y^{(0)}, \varepsilon) \subset V(y^{(0)}).$$

Por ser continua cada una de las funciones f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, en el punto $x^{(0)}$ existen tales entornos $U_j = U(x^{(0)})$ que para $x \in U_j \cap X$ se verifica la desigualdad

$$|f_j(x) - y_j^{(0)}| < \varepsilon. \tag{41.28}$$

Pongamos $U = \bigcap\limits_{i=1}^{m} U_j$. Entonces, U, siendo una intersección de un número finito de los conjuntos abiertos U_j, será conjunto abierto, con la particularidad de que como todos los U_j contenían el punto $x^{(0)}$, lo contiene también U. De este modo, el conjunto U es un entorno del punto $x^{(0)}$. Además, si $x \in U \cap X$, entonces para todo $j = 1, 2, \ldots, m$, se verifican las desigualdades (41.28). Esto quiere decir que

$$f(x) \in P(y^{(0)}, \varepsilon),$$

y, por lo tanto, $f(x) \in V(y^{(0)})$. Así pues, para un entorno arbitrario $V(y^{(0)})$ se ha encontrado tal entorno U del punto $x^{(0)}$ que

$$f(U \cap X) \subset V(y^{(0)}). \ \square$$

El lema 1 muestra, en particular, que las definiciones de las aplicaciones continuas de un segmento introducidas al considerar el concepto de curva en el p. 16.1 (cuando el segmento se aplica en un espacio tridimensional) y en el p. 18.2 (cuando el segmento se aplica en un espacio euclídeo arbitrario n-dimensional) como aplicaciones cuyas funciones coordenadas son continuas, son equivalentes a la definición de las aplicaciones continuas de un segmento como aplicaciones de tal género que en todo punto del segmento satisfacen las condiciones de la definición 3 de este párrafo.

La aplicación: f: $X \to R_y^m$, $X \subset R_x^n$ se llama ***continua en el conjunto*** X, si es continua en todo punto del conjunto X.

Lema 2. *La aplicación f de un conjunto abierto del espacio R_x^n en el espacio R_y^m es* ***continua en dicho conjunto cuando, y sólo cuando, la preimagen de cada conjunto*** *abierto del espacio R_y^m, realizándose la aplicación f, será un conjunto abierto del espacio R_x^n.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que f aplica continuamente el conjunto abierto $G \subset R_x^n$ en el espacio R_y^m y sea U un conjunto abierto del espacio R_y^m: $U \subset R_y^m$. Mostremos que la preimagen $f^{-1}(U)$ de este conjunto es un conjunto abierto en el espacio R_x^n. Si el conjunto $f^{-1}(U)$ es vacío, la afirmación queda obvia, puesto que todo conjunto vacío es abierto.

Supongamos que el conjunto $f^{-1}(U)$ no es vacío, es decir, existe un punto $x^{(0)} \in f^{-1}(U)$ y, por lo tanto, $f(x^{(0)}) \in U$. Como U es un conjunto abierto, será un entorno del punto $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Por ello, por ser la aplicación f continua en el punto $x^{(0)}$ (véase la definición 3′), existe tal entorno U_x de este punto que $f(U_x \cap G) \subset U$, por consiguiente, $U_x \cap G \subset f^{-1}(U)$. Como el conjunto $U_x \cap G$, representando una intersección de dos conjuntos abiertos U_x y G, es abierto y puesto que $x^{(0)} \in U_x \cap G$, entonces $x^{(0)}$ es un punto interior del conjunto $f^{-1}(U)$.

De este modo, todo punto de la preimagen del conjunto abierto U es un punto interior de esta preimagen, quiere decir, la preimagen es un conjunto abierto.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea f una aplicación del conjunto abierto G del espacio R_x^n en R_y^m y supongamos que, al realizarse esta aplicación, la preimagen de cada conjunto abierto en el espacio R_y^m es un conjunto abierto en R_x^n. Sea $x^{(0)} \in G$. Mostremos que la aplicación f es continua en el punto $x^{(0)}$.

Sea U_y cierto entorno del punto $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Como la preimagen $f^{-1}(U_y)$ del conjunto abierto U_y es, por hipótesis, un conjunto abierto, y, evidentemente, $x^{(0)} \in f^{-1}(U_y) \subset G$, entonces el conjunto $U_x = f^{-1}(U_y)$ es un entorno del punto $x^{(0)}$ y, además, $f(U_x) = U_y$. De aquí se deduce de inmediato la continuidad de la aplicación f en el punto $x^{(0)}$ (véase la definición 3). □

Ejemplo. Examinemos la aplicación f: $R^2 \to R$, definida por la fórmula $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. De acuerdo con el lema 2, la preimagen del conjunto abierto $(-\infty, 0)$, es decir, un conjunto de puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ (y, por consiguiente, forman el interior de una elipse), como también la preimagen del conjunto abierto $(0, +\infty)$, o sea, un conjunto de tales puntos (x, y) que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ (estos puntos forman el exterior de una elipse), son conjuntos abiertos.

En general, si $f\colon R^n \to R$ es una función continua en R^n, para cualquier número $a \in R$ los conjuntos $\{x : f(x) < a,\ x \in R^n\}$ y $\{x : f(x) > a,\ x \in R^n\}$ son conjuntos abiertos, siendo preimágenes de los conjuntos abiertos $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$.

El teorema de Weierstrass en el cual se demuestra que las funciones continuas en un compacto son acotadas y pueden alcanzar sus cotas inferior y exterior se extiende también al caso de las aplicaciones continuas. Con más precisión, resulta válida la siguiente afirmación.

Lema 3. *Sea $f\colon A \to R^m$, $A \subset R^n$ una aplicación continua de un compacto A en el espacio R^m. El conjunto $f(A)$ es también un compacto en este caso.*

En la forma más breve: *la preimagen continua de un compacto es un compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y^{(k)} \in f(A)$ una sucesión arbitraria de los puntos pertenecientes a $f(A)$. Por definición de la preimagen de un conjunto para la aplicación dada, existe tal punto $x^{(k)} \in A$, que $f(x^{(k)}) = y^{(k)}$, cualquiera que sea $k = 1, 2, \ldots$. Como A es un compacto, de la sucesión $\{x^{(k)}\}$ se puede separar una subsucesión convergente $\{x^{(k_s)}\}$ cuyo límite $x^{(0)}$ pertenece al compacto A: $\lim\limits_{s\to\infty} x^{(k_s)} = x^{(0)} \in A$.

Por ser la función f continua en el punto $x^{(0)}$, tenemos

$$\lim_{s\to\infty} f(x^{(k_s)}) = f(x^{(0)}), \text{ es decir, } \lim_{s\to\infty} y^{(k_s)} = f(x^{(0)}) \in f(A).$$

De este modo, de toda sucesión de puntos, pertenecientes al conjunto $f(A)$, se puede separar una sucesión convergente cuyo límite pertenece a dicho conjunto. Esto precisamente significa que $f(A)$ es un compacto. $\square$

OBSERVACIÓN. Del lema 3 se infiere el teorema demostrado anteriormente de que una función real continua en un compacto alcanza sus cotas inferior y exterior (véase el p. 19.5) En efecto, de conformidad con el lema 3, el conjunto de valores de tal función es un compacto en una recta numérica, mientras que todo compacto tiene en una recta númerica los puntos finitos maximal y minimal. Esto proviene de que un compacto es un conjunto acotado y, por ende, tiene la cota superior (inferior) finita la cual, en virtud de su definición, es un punto adherente del conjunto. Ya que el compacto está cerrado, el punto pertenece a él y es, evidentemente, su punto maximal (minimal).

La noción de continuidad uniforme se generaliza también para el caso de las aplicaciones.

Definición 4. *La aplicación f del conjunto $X \subset R^n_x$ en el espacio R^m_y se llama uniformemente continua, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, que para cualesquiera puntos $x' \in X$ y $x'' \in X$, que satisfacen la condición $\rho(x', x'') < \delta$, se verifica la desigualdad $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.*

Para las aplicaciones es lícita también una afirmación análoga al teorema de Cantor (véase el p. 19.6) para las funciones continuas.

Lema 4. *Una aplicación continua de un compacto es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN. Hagamos uso del mismo método que se aplicó al demostrar el teorema de Cantor sobre la continuidad uniforme de las funciones reales continuas en un compacto (véase el teorema 5 en el p. 19.6).

Admitamos que existe una aplicación $f\colon A \to R^m$, $A \subset R^n$, continua en el compacto A, pero de manera no uniforme. En este caso existe tal $\varepsilon_0 > 0$ que para cualquier $\delta > 0$ existen unos puntos $x'_\delta \in A$ y $x''_\delta \in A$, para los cuales tienen lugar las desigualdades

$$\rho(x''_\delta, x'_\delta) < \delta \quad \text{y} \quad \rho(f(x''_\delta), f(x'_\delta)) \geqslant \varepsilon_0.$$

Sea $\delta = \dfrac{1}{k}$, $x'^{(k)} \overset{\text{def}}{=} x'_{1/k}$, $x''^{(k)} \overset{\text{def}}{=} x''_{1/k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Como A es un compacto, de la sucesión $\{x'^{(k)}\}$ se puede separar una subsucesión convergente $\{x'^{(k_s)}\}$ cuyo límite $x^{(0)}$ está contenido en el conjunto A: $\lim\limits_{s\to\infty} x'^{(k_s)} = x^{(0)} \in A$. En este caso de

$$\rho(x''^{(k_s)}, x^{(0)}) \leqslant \rho(x'^{(k_s)}, x''^{(k_s)}) + \rho(x'^{(k_s)}, x^{(0)}) < \frac{1}{k_s} + \rho(x'^{(k_s)}, x^{(0)}) \to 0,$$

cuando $s \to \infty$, se deduce que la subsucesión $\{x''^{(k_s)}\}$ de la segunda sucesión $\{x''^{(k)}\}$ también converge hacia el punto $x^{(0)}$.

Cabe señalar ahora que de la continuidad de la aplicación f en el punto $x^{(0)}$ se desprende que

$$\lim_{s\to\infty} f(x'^{(k_s)}) = \lim_{s\to\infty} f(x''^{(k_s)}) = f(x^{(0)}),$$

y puesto que

$$\rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) \leqslant \rho(f(x''^{(k_s)}), f(x^{(0)})) + \rho(f(x^{(0)}), f(x'^{(k_s)})) \to 0, \text{ para } s \to \infty,$$

entonces, $\lim\limits_{s\to\infty} \rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) = 0$. Esto contradice la condición $\rho(f(x''^{(k_s)}), f(x'^{(k_s)})) \geqslant \varepsilon_0$. $\square$

Con ayuda de las propiedades demostradas de las aplicaciones continuas se puede obtener una propiedad de las regiones (es decir, de los conjuntos abiertos linealmente conexos, véase el p. 18.2) que será útil en lo que sigue. Enunciemos dicha propiedad también en forma de un lema.

Lema 5. *Un conjunto abierto constituye una región cuando, y sólo cuando, sus dos puntos cualesquiera pueden ser unidos mediante una línea quebrada íntegramente dispuesta en el conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia de la condición enunciada no requiere demostración. En efecto, si en cierto conjunto abierto $G \subset R^n$ cualesquiera dos puntos pueden unirse mediante cierta quebrada, íntegramente dispuesta en el conjunto, entonces, puesto que toda quebrada es una curva (véase el p. 16.5), cualesquiera dos puntos del conjunto G resultan unidos en él por una curva lo que testimonia, según la definición (véase la definición 25 en el p. 18.2), que el conjunto abierto G es linealmente conexo, es decir, es una región (véase la definición 26 en el mismo punto).

Demostremos la necesidad de las condiciones del lema. Sea G una región del espacio R^n. Examinemos los puntos $x \in G$ e $y \in G$. Por definición de la región, existe una curva $\gamma = \{r(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, que une en G los puntos x e y, es decir, $r(a) = x$, $r(b) = y$ y $r(t) \in G$, $a \leqslant t \leqslant b$. La curva γ representa en sí la imagen continua del segmento $[a, b]$ que es un compacto y, por lo tanto (véase el lema 3), la curva también es un compacto. Por cuanto el compacto γ y el conjunto cerrado $R^n \setminus G$ no se intersecan, la distancia entre ellos es superior a cero (véase el lema 7 en el p. 18.2). Por consiguiente, existe un número $\eta > 0$ tal que $\rho(\gamma, R^n \setminus G) > \eta$.

La aplicación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, del segmento $[a, b]$, siendo continua, es también uniformemente continua (véase el lema 4). Por esto existe tal $\delta > 0$, que para cualesquiera dos puntos $t' \in [a, b]$ y $t'' \in [a, b]$, que satisfacen la condición $|t'' - t'| < \delta$, se verifica la desigualdad

$$\rho(r(t''),\quad r(t')) < \eta.$$

De aquí se deduce que para cualquier partición $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ de finura $\delta_\tau < \delta$ todos los puntos de la quebrada λ_τ cos vértices $r(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$ estarán contenidos en G (¿por qué?). Por consiguiente, $\lambda_\tau \subset G$.

Puesto que el origen y el extremo de la quebrada λ_τ los consituyen el origen y el extremo, respectivamente, de la curva γ, es decir, los puntos prefijados arbitrariamente x e y de G, hemos demostrado, pues, que cualesquiera dos puntos de una región pueden unirse mediante una quebrada. □

Supongamos ahora que $X \subset R^n_x$, $D \subset R^m_y$, $y = f(x)$ es la aplicación del conjunto X en R^m_y con la particularidad de que $f(X) \subset D$ y $z = g(y)$ es la aplicación de D en R^p_z, es decir, f: $X \to D$, g: $D \to R^p_z$. En este caso tiene sentido la composición $g \circ f$: $X \to R^p_z$, que aplica el conjunto $X \subset R^n_x$ en el espacio p-dimensional R^p_z: $(g \circ f) \overset{\text{def}}{=} g(f(x))$, $x \in X$.

Hemos de notar que si la aplicación $f(x)$ del conjunto X es continua en el punto $x^{(0)} \in X$, y $g(y)$ está definida en cierto entorno del punto $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, siempre existe tal entorno U_x del punto $x^{(0)}$ que en el conjunto $X \cap U_x$ tiene sentido la composición $g \circ f$. En efecto, sea U_y un entorno del punto $y^{(0)}$ en el que viene definida la aplicación $g(y)$; de acuerdo con la definición 3, para dicho entorno existe tal entorno U_x que $f(U_x \cap X) \subset U_y$. Es evidente que para todos los puntos $x \in U_x \cap X$ tiene sentido precisamente la composición $g \circ f$.

Recordemos, además, que, de conformidad con la terminología introducida para las funciones (véase el p. 1.2*), la aplicación f: $X \to R^m_y$, $X \subset R^n_x$ se llama *biunívoca* o bien *inyección* si a los puntos diferentes del conjunto X les corresponden en esta aplicación distintos puntos. En este caso suele decirse también que el conjunto X se aplica biunívocamente mediante dicha aplicación sobre el conjunto $f(X)$, es decir, f: $X \to f(X)$ es una biyección. Cumplida esta condición, en el conjunto $f(X)$ existe una aplicación inversa unívoca (una función inversa) $f^{-1}(y) = x$, donde x es tal que $f(x) = y$. Por ello, $f^{-1}[f(x)] = x$, es decir, ésta es una *aplicación idéntica* (se denomina aplicación idéntica del conjunto X aquella que a todo punto $x \in X$ le pone en correspondencia el mismo punto).

Definición 5. *Si la aplicación f del conjunto $X \subset R^n_x$ en el espacio R^m_y es biunívoca y continua sobre X y una aplicación inversa f^{-1} es continua sobre $f(X)$, entonces f se llama aplicación homeomorfa o homeomorfismo, y el conjunto $f(X)$, imagen homeomorfa del conjunto X, o bien, que es lo mismo, un conjunto homeomorfo respecto del conjunto X.*

Obviamente, si f es un homeomorfismo del conjunto X, f^{-1} es el homeomorfismo del conjunto $f(X)$.

Cuando se realiza la aplicación homeomorfa de un conjunto abierto sobre otro conjunto abierto, las imágenes de los subconjuntos abiertos son también abiertas. En efecto, si f es una aplicación homeomorfa del conjunto abierto G sobre otro conjunto abierto Γ, V es un subconjunto abierto del conjunto G, $W = f(V)$, entonces $V = f^{-1}(W)$, es decir, V es una imagen del conjunto W, al realizarse la aplicación continua f^{-1} del conjunto abierto Γ, y, por consiguiente, W es una preimagen del conjunto abierto V en esta aplicación. Por ello, de acuerdo con el lema 2, el conjunto W es abierto.

Consideraremos ahora la composición de las aplicaciones continuas.

Lema 6. *Sea f: $X \to R^m$, $X \subset R^n$, g: $D \to R^s$, $D \supset f(X)$. Si la aplicación f es continua en el punto $x^{(0)} \in X$, y g es continua en el punto $f(x^{(0)})$, entonces la composición $g \circ f$ es también continua en el punto $x^{(0)}$.*

La demostración de dicha afirmación puede realizarse por un método análogo al empleado en la demostración del teorema 6, p. 5.16 y del teorema 2, p. 19.5. Este último método se basa en la definición de la continuidad en términos de los entornos. Con el fin de evitar la repitición, esta vez demostraremos el lema, partiendo de la definición de continuidad en términos de las sucesiones.

Sea $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$. En este caso $f(x^{(k)}) \in D$ y, por ser continua la aplicación f en el punto $x^{(0)}$, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}). \tag{41.29}$$

En vista de que la aplicación g es continua en el punto $f(x^{0})$, para cualquier sucesión $y^{(k)} \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = f(x^{(0)})$ tiene lugar $\lim\limits_{k\to\infty} g(y^{(k)}) = g(f(x^{(0)}))$. En particular, debido a (41.29), para $y^{(k)} = f(x^{(k)})$, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} g(f(x^{(k)})) = g(f(x^{(0)})).$$

Esto precisamente implica la continuidad de la composición $g \circ f$ en el punto $x^{(0)}$. □

Ejercicio 7. Demuéstrese que la aplicación biunívoca continua de un compacto del espacio R^n en cierto espacio R^m es un homeomorfismo.

Como conclusión determinemos qué se entenderá por imagen de una curva, para una aplicación continua dada, y demostremos el lema sobre las imágenes continuas de los conjuntos linealmente conexos.

Sea f una aplicación continua del conjunto $X \subset R^n_x$ en el espacio R^m_y y Γ, una *curva dispuesta íntegramente en el conjunto X*, es decir, se ha dado una clase de las aplicaciones equivalentes de segmentos en el conjunto X (véase el § 16).

Sea

$$x(t),\quad a \leqslant t \leqslant b,$$

una de las representaciones de la curva Γ. Una curva en el espacio R^m_y cuya representación es la aplicación

$$f[x(t)],\quad a \leqslant t \leqslant b,$$

se denomina *imagen de la curva* Γ en la aplicación f y se designa por $f(\Gamma)$.

Esta definición es correcta, puesto que, con las suposiciones adoptadas, $f(x(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una aplicación continua de un segmento en el espacio y, por consiguiente, define cierta curva.

Lema 7. *Sea f: $X \to R^m$ una aplicación continua del conjunto linealmente conexo $X \subset R^n$ en el espacio R^m. En este caso el conjunto $f(X)$ es también linealmente conexo.*

En la forma más breve: *la imagen continua de un conjunto linealmente conexo es linealmente conexa.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es un conjunto linealmente conexo y f es su aplicación continua en R^m. Para demostrar que el conjunto $f(X)$ es linealmente conexo, hay que demostrar que sus dos puntos cualesquiera pueden unirse en $f(X)$ mediante una curva continua (véase la definición 25 en el p. 18.2). Sea $y^{(1)} \in f(X)$ e $y^{(2)} \in f(X)$; elijamos dos puntos cualesquiera $x^{(1)} \in f^{-1}(y^{(1)})$ y $x^{(2)} \in f^{-1}(y^{(2)})$. Como $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$ y X es linealmente conexo, existe tal curva Γ, que su origen coincide con el punto $x^{(1)}$, el extremo coincide con el punto $x^{(2)}$ y todos los puntos de ella pertenecen al conjunto X.

La curva $f(\Gamma)$ es la curva buscada. En efecto, su origen es el punto $y^{(1)} = f(x^{(1)})$ y el extremo, el punto $y^{(2)} = f(x^{(2)})$. Todos los demás puntos de la curva pertenecen al conjunto $f(X)$. De este modo, $f(X)$ es un conjunto linealmente conexo.□

Ejercicios. 8. La aplicación f: $R^2 \to R^2$ viene dada de modo siguiente: $(x, y) \mapsto (2x, 3y)$. ¿En qué ésta transforma la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$?

9. Hállese la imagen de la recta $x = 2$ del plano Oxy, realizándose la aplicación f: $R^2 \to R^2$, definida del modo siguiente: $(x, y) \mapsto (xy, y)$.

10. En el plano Oxy se ha dado una recta $x = c$ ($c = \text{const} \neq 0$). Hállese su imagen en la aplicación f: $R^2 \mapsto R^2$ con las funciones coordenadas ($e^x \cos y$, $e^x \operatorname{sen} y$).

41.5. APLICACIONES VECTORIALES

Al estudiar las aplicaciones derivables (su definición se dará en el p. 41.7) resulta más conveniente que el espacio R^n, donde se dispone el conjunto que se aplica, y el espacio R^m, en el cual se realiza la aplicación, sean considerados como espacios euclídeos vectoriales (véase el p. 18.4). Para simplificar, un vector n-dimensional con coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ se designará mediante el mismo símbolo x que se ha usado para designar un punto del espacio puntual n-dimensional con las mismas coordenadas. Esto no nos conducirá a una equivocación, pues tanto el punto del espacio n-dimensional como el vector n-dimensional representan un surtido ordenado de n números naturales.

Sea $X \subset R^n$ y f: $X \to R^m$, donde, en nuestro caso, la aplicación f pone en correspondencia a todo vector $x \in X$ cierto vector $y = f(x) \in R^m$. Las aplicaciones de este tipo se llamarán *vectoriales*.

Si $e_1, \dots, e_n$ son los vectores coordenados en el espacio R^n (véase el p. 18.4), $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ son los vectores coordenados en el espacio R^m y $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = (y_1, \dots, y_m) = \sum_{j=1}^{m} y_j \varepsilon_j$ e $y = f(x)$, entonces cualquier coordenada y_j, $j = 1, 2, \dots, m$, del vector y es también una función del vector $x \in X$ y, por lo tanto, una función de sus coordenadas $x_1, \dots, x_n$:

$$y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{41.30}$$

Igual que en el caso de un espacio puntual (véase (41.26)), las funciones (41.30) se denominan *funciones coordenadas de la aplicación* f y se escribe $f = (f_1, \dots, f_m)$

La interpretación de los puntos n-dimensionales $(x_1, \dots, x_n)$ en calidad de vectores no impide, por supuesto, que se consideran tales propiedades de las aplicaciones como son su continuidad y continuidad uniforme. Por ello, todo lo dicho en el punto anterior sobre las aplicaciones queda en vigor para las aplicaciones vectoriales. Recordemos, además, que para la distancia $\rho(x, y)$ entre los vectores x e y es válida la fórmula (véase la vórmula (18.37) en el punto 18.4) $\rho(x, y) = |x - y|$.

A título de ejemplo señalemos que la longitud $|x|$ del vector $x \in R^n$ es una función continua en R^n. Esto proviene de la desigualdad (18.36): como para todo $x_0 \in R^n$ y todo $x \in R^n$ se verifica la desigualdad $||x| - |x_0|| \leqslant |x - x_0|$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{|x - x_0| \to 0} |x| = |x_0|.$$

41.6. APLICACIONES LINEALES

Consideraremos una clase especial de las aplicaciones del espacio R^n en R^m, denominadas *lineales*.

Definición 6. *Una aplicación f: $R^n \to R^m$ se llama lineal (o, en forma más completa, lineal homogénea), si para cualesquiera dos vectores $x' \in R^n$, $x'' \in R^n$ y dos números $\lambda' \in \mathbf{R}$, $\lambda'' \in \mathbf{R}$ se verifica la igualdad*

$$f(\lambda' x' + \lambda'' x'') = \lambda' f(x') + \lambda'' f(x'').$$

De esta definición se deduce por inducción que, realizándose la aplicación lineal f, cualquier combinación lineal finita de vectores $x^{(j)} \in R^n$ se aplica en la misma combinación lineal de imágenes $f(x^{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, k$, de dichos vectores

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(x^{(j)}).$$

Las aplicaciones homogéneas lineales se llaman corrientemente *operadores lineales*. Del operador lineal f: $R^n \to R^m$ se dice que él actúa de R^n en R^m.

De la definición del operador lineal se desprende inmediatamente que la composición $g \circ f$ de operadores lineales f: $R^n \to R^m$ y g: $R^m \to R^s$ es también un operador lineal $g \circ f$: $R^n \to R^s$.

Sea f: $R^n \to R^m$ un operador lineal. La imagen de todo vector coordenado $e_j \in R^n$, $j = 1, 2, \dots, n$, es, en la aplicación f, un vector del espacio R^m y, por ende, se descompone según los vectores coordenados $\varepsilon_i \in R^m$, $i = 1, 2, \dots, m$. Designemos los coeficientes de esta descomposición con a_{ij}:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varepsilon_i.$$

Sea $y = f(x)$, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ e

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i \varepsilon_i. \tag{41.31}$$

Por ser lineal la aplicación f, obtenemos

$$y = f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\varepsilon_j. \tag{41.32}$$

Al comparar los coeficientes de la descomposición del vector y según los vectores coordenados $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ en (41.31) y (41.32), obtendremos

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n. \end{aligned} \tag{41.33}$$

Viceversa, es fácil comprobar que toda aplicación $f: R^n \to R^m$, cuyas funciones coordenadas tienen la forma (41.33), es un operador lineal.

La matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots\dots\dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{41.34}$$

se llama *matriz del operador lineal f*.

Evidentemente, si (41.34) es una matriz del operator lineal f, para cualquier $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ tiene lugar (véase (41.32)) la descomposición

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\varepsilon_i. \tag{41.35}$$

Ejemplo. Sea π_i un operador de proyección sobre el i-ésimo eje coordenado, es decir,

$$\pi_i(y) = \pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i \tag{41.36}$$

(i es un número fijo entre los números $1, 2, \dots, m$). En este caso π_i es un operador lineal con la matriz cuadrada de orden m compuesta sólo por ceros salvo el i-ésimo elemento de la diagonal principal el cual es igual a uno:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Con ayuda de los operadores de proyección π_i, $i = 1, 2, \dots, n$, se establece fácilmente la relación entre una aplicación vectorial arbitraria $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$ y sus funciones coordenadas f_i (véase (41.30)):

$$f_i = \pi_i \circ f, \tag{41.37}$$

es decir, toda función coordenada f_i, $i = 1, 2, \dots, m$, es una composición de la aplicación f con el operador de proyección π_i.

Si $m = 1$, es decir, el operador lineal $f: R^n \to \boldsymbol{R}$ aplica el espacio R^n en el conjunto de todos los números reales, se denomina corrientemente *funcional lineal*.

En virtud de (41.33), toda funcional lineal tiene por expresión

$$y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \tag{41.38}$$

donde $a_1, \dots, a_n$ son ciertos números reales.

Al designar con a un vector de coordenadas $(a_1, \dots, a_n)$, llegamos a que toda funcional lineal $f: R^n \to \boldsymbol{R}$ tiene por expresión

$$f(x) = (a, x),$$

donde con (a, x) está designado el producto escalar de los vectores a y x. Es evidente también lo recíproco: toda aplicación de la forma $x \mapsto (a, x)$ es una funcional lineal $f: R^n \to \boldsymbol{R}$.

Ejercicio 11. Establézcase cuáles de las aplicaciones a seguir son lineales:
a) $f: R^3 \to R^2$, siendo $f(x, y, z) = (x, z)$;
b) $f: R^4 \to R^4$, siendo $f(x) = -x$, donde x es un vector arbitrario en R^4;
c) $f: R^3 \to R^3$, siendo $f(x) = x + (0, -1, 0)$ donde x es un vector arbitrario en R^3;
d) $f: R^2 \to R^2$, seindo $f(x, y) = (2x + y, y)$;
e) $f: R^2 \to R^2$, siendo $f(x, y) = 2x, y - x)$;
f) $f: R^2 \to R^2$, siendo $f(x, y) = (y, x)$;
g) $f: R^2 \to \boldsymbol{R}$, siendo $f(x, y) = xy$.

Recordemos las definiciones de algunas operaciones sobre matrices (conocidas del álgebra). Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices rectangulares con el mismo número de columnas y filas, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, la *suma* de ellas se determina como una matriz cuyo elemento c_{ij} es la suma de los elementos correspondientes de las matrices A y B, es decir,

$$c_{ij} \overset{\text{def}}{=} a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Se llama *producto de la matriz A* por el número λ una matriz cuyos elementos c_{ij} se obtienen todos de los elementos correspondientes de la matriz A multiplicándolos por λ

$$c_{ij} \overset{\text{def}}{=} \lambda\, a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Si el número de las columnas en la matriz $A = (a_{ij})$ es igual al número de las filas de la matriz $B = (b_{jk})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, s$, entonces el *producto AB* de las matrices A y B se determina como una matriz compuesta de los elementos c_{ik}, que se determinan según las fórmulas:

$$c_{ik} \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

He aquí dos propiedades de los operadores lineales las cuales nos harán falta en lo sucesivo.

1°. *Si f y g son operadores lineales, $f: R^n \to R^m$, $g: R^n \to R^m$ y λ y μ, números arbitrarios, entonces $\lambda f + \mu g$ es también un operador lineal que actúa de R^n en R^m, con la particularidad de que si A y B son las matrices de los operadores lineales f y g, la suma $\lambda A + \mu B$ será la matriz del operador $\lambda f + \mu g$.*

La demostración de esta afirmación se efectúa por comprobación inmediata: si

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

son funciones coordenadas de la aplicación f, mientras que

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

son funciones coordenadas de la aplicación g, entonces para las funciones coordenadas de la aplicación $\lambda f + \mu g$ tendremos (al sumar y multiplicar por números los vectores, sus coordenadas se suman y se multiplican por los mismos números)

$$\lambda y_i + \mu z_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \mu \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})x_j,$$

es decir, primero, las funciones coordenadas de la aplicación $\lambda f + \mu g$ son funciones lineales y, segundo, los elementos c_{ij} de la matriz de la aplicación $\lambda f + \mu g$ los constituyen los números $c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$, es decir, los elementos de la matriz $\lambda A + \mu B$, donde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. □

2°. *Si f y g son operadores lineales, $f: R^n \to R^m$, $g: R^m \to R^s$, su composición $g \circ f$ es también un operador lineal $R^n \to R^s$ y la matriz de la composición es igual al producto de matrices de las aplicaciones g y f.*

Realicemos nuevamente la comprobación inmediata de la afirmación. Si

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

son funciones coordenadas de la aplicación f y

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}y_i, \quad k = 1, 2, \dots, s,$$

son funciones coordenadas de la aplicación g, entonces

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}y_i = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij} \right) x_j,$$

es decir, primero, las funciones coordenadas de la composición $g \circ f$ son funciones lineales, y, segundo, los elementos c_{kj} de la matriz de la composición se obtienen de los elementos de las matrices a_{ij} y b_{ki} de los operadores f y g según la regla

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}. \tag{41.39}$$

Según se ha dicho, tal matriz (c_{kj}) se llama precisamente producto de las matrices (b_{ki}) y (a_{ij}). □

Observemos que todo operador lineal $f: R^n \to R^m$ es una aplicación continua del espacio R^n, dado que todas sus funciones coordenadas (41.33) son continuas, pues son lineales.

La longitud del vector $x \in R^n$, como se ha notado en el p. 41.5, es una función continua en el espacio R^n. Por esta razón, si $f: R^n \to R^m$ es un operador lineal, entonces la función $|f(x)|$, representando una composición de dos funciones continuas, será también continua en R^n.

Por cuanto la bola unidad $Q^n = \{x \in R^n : |x| \leqslant 1\}$ es un compacto, para todo operador lineal $f: R^n \to R^m$ la restricción de la función continua $|f|: R^n \to R$ a la bola Q^n, es decir, la función $|f|: Q^n \to R$, está acotada:

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| < +\infty. \tag{41.40}$$

Definición 7. *Para el operador lineal (en particular, para una funcional lineal, cuando $m = 1$) $f: R^n \to R^m$ el número $\sup\limits_{|x| \leqslant 1} |f(x)|$ lleva el nombre de norma*[*] *del operador y se denota con $\|f\|$:*

$$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)|. \tag{41.41}$$

En virtud de la desigualdad (41.40), la norma de cualquier operador lineal es finita.

Estimemos la longitud de la imagen del vector $x \in R^n$ en términos de la norma del operador f y la longitud x del propio vector. Para todo $x \neq 0$, $x \in R^n$, el vector $\xi = \dfrac{x}{|x|}$ tiene la longitud 1 : $|\xi| = \left|\dfrac{x}{|x|}\right| = \dfrac{1}{|x|}|x| = 1$. Por ello, al utilizar la linealidad del operador f, la propiedad (18.34) de la longitud del vector y la definición (41.41), obtendremos

$$|f(x)| = \left|f\left(|x|\frac{x}{|x|}\right)\right| = \left||x| f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| = |x|\left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |x| \sup_{|\xi| \leqslant 1} |f(\xi)| = |x| \, \|f\|,$$

es decir,

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \, |x|. \tag{41.42}$$

[*] La definición general de la norma se dará en el p. 57.3.

De esta desigualdad se infiere que para $|x| < 1$ es válida la desigualdad $|f(x)| < \|f\|$. Recordemos que una función, continua en el compacto, alcanza en éste su valor máximo (véase el teorema 3 en el p. 19.6). Por eso una función $|f|: Q^n \to R$, siendo continua en el compacto Q^n, alcanza en éste su valor máximo

$$\|f\| \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \max_{|x| \leqslant 1} |f(x)|,$$

y, como para $|x| < 1$ tiene lugar la desigualdad $|f(x)| < \|f\|$, el máximo mencionado se alcanza cuando $|x| = 1$, es decir, en la esfera unidad $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$. De este modo

$$\|f\| = \max_{|x| = 1} |f(x)|. \tag{41.43}$$

Demos a conocer una expresión más para la norma de un operador lineal

$$\|f\| = \sup_{x \in R^n,\, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|}. \tag{41.44}$$

Demostrémosla. Empleando otra vez la propiedad de la longitud (18.34) de un vector, la linealidad de la aplicación f y la fórmula (41.41), obtenemos

$$\sup_{x \in R^n,\, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = \sup_{x \in R^n,\, x \neq 0} \left| \frac{1}{|x|} f(x) \right| =$$

$$= \sup_{x \in R^n,\, x \neq 0} \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| = \sup_{|\xi| = 1} |f(\xi)| = \|f\|.$$

No es difícil estimar la norma $\|f\|$ del operador lineal f en términos de los elementos de su matriz (41.34). Fijándonos en que el cuadrado de longitud del vector es igual a la suma de cuadrados de sus coordenadas y aplicando la fórmula (41.35) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz (18.2), tendremos

$$|f(x)|^2 = \left| \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) e_i \right|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) |x|^2.$$

De aquí, para todo $x \neq 0$, $x \in R^n$:

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Por ello, en virtud de (41.44),

$$\|f\| = \sup_{x \in R^n,\, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}. \tag{41.45}$$

De este modo queda demostrada la desigualdad (41.40), esta vez, de "modo algebraico".

41.7. APLICACIONES DERIVABLES

Pasemos ahora a la definición de aplicaciones vectoriales derivables. Recordemos previamente que una función de n variables $f: X \to R$, $X \subset R^n$*), definida en el entorno del punto $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, se llama *derivable* en este punto, si existen tales constantes $a_1, \dots, a_n$ (son derivadas parciales de la función f en este punto: $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$), que

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= a_1 h_1 + \dots + a_n h_n + o(h),\ h \to 0, \tag{41.46}$$

donde $h = (h_1, \dots, h_n)$.

La aplicación lineal (funcional lineal)

$$(h_1, \dots, h_n) \mapsto a_1 h_1 + \dots + a_n h_n$$

en la fórmula (41.46) se denomina *diferencial de la función* f en el punto x. Al designarla mediante $D(x)$, obtenemos

$$D(x)(h) = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n.$$

De este modo, la definición de la derivabilidad (41.46) puede representarse en la forma

$$f(x + h) = f(x) + D(x)(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

De modo análogo se determina, en el caso general, la derivabilidad de la aplicación.

Para las aplicaciones que se realizan de un espacio n-dimensional a un espacio m-dimensional "o pequeño" se determina de la manera siguiente: sea U un entorno del punto $x_0 \in X$, $\alpha: U \to R^m$; diremos que $\alpha = o(x)$ para $x \to x_0$, siempre que $|\alpha| = o(|x|)$, $x \to x_0$, es decir, si existe tal función $\varepsilon: U \to R$, que

$$|\alpha(x)| = \varepsilon(x)|x|, \tag{41.47}$$

$$x \in U \text{ y } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Sin ninguna duda $|\alpha(x)|$ es la longitud de un vector en el espacio R^m y $|x|$ es la longitud del vector en el espacio R^n. Para las expresiones del tipo $o(x)$, que son vecto-

*) Con R se designa, como siempre, el conjunto de todos los números reales.

res, quedan vigentes las reglas habituales de operaciones con el símbolo "o pequeño", por ejemplo, $o(x) + o(x) = o(x)$ para $x \to x_0$, etc.

Definición 8. *Sea U un entorno del punto $x \in R^n$ en el espacio R^n. Un aplicación $f: U \to R^m$ se llama derivable en el punto x, si existe tal aplicación lineal (operador lineal) $l: R^n \to R^m$ que*

$$f(x + h) = f(x) + l(h) + o(h), \quad h \to 0, h \in R^n. \tag{41.48}$$

El operador lineal l se llama diferencial de la aplicación f en el punto x y se denota con $D(x)$ o, más detalladamente, con $D_f(x)$.

Haciendo uso de esta designación, la definición de la derivabilidad (41.48) puede escribirse en la forma

$$f(x + h) = f(x) + D_f(x)(h) + o(h), \quad h \to 0. \tag{41.49}$$

La matriz de la diferencial $D_f(x)$ (véase (41.34)) *se llama derivada de la aplicación f en el punto x y se designa mediante $f'(x)$.*

Observemos que de la fórmula (41.48) proviene inmediatamente que una aplicación, derivable en el punto x, es continua en él:

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x).$$

Teorema 3. *Si la aplicación $f: X \to R^m, X \subset R^n$, es derivable en el punto $x \in X$, entonces su diferencial en este punto se define unívocamente.*

Corolario. *La diferencial de una aplicación lineal coincide con la misma aplicación.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Supongamos que a la par con la igualdad (41.48) se cumple también la igualdad

$$f(x + h) = f(x) + l_1(h) + o(h), \quad h \to 0, \tag{41.50}$$

donde $l_1: R^n \to R^m$, l_1 es un operador lineal. Restando una de estas igualdades de la otra, obtenemos

$$l(h) - l_1(h) = o(h) \quad \text{para} \quad h \to 0,$$

es decir, existe tal función $\varepsilon(h)$, definida en cierto entorno V del origen de coordenadas del espacio R^n, es decir, $\varepsilon: V \to R$, que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ y que para todo $h \in V$ tiene lugar la igualdad

$$|l(h) - l_1(h)| = \varepsilon(h)\,|h|. \tag{41.51}$$

Tomemos ahora arbitrariamente $k \in R^n$; para todo t suficientemente pequeño tendremos $tk \in V$. Por eso, en (41.51) para tales t podemos poner $h = tk$:

$$|l(tk) - l_1(tk)| = \varepsilon(tk)\,|tk|.$$

Como $|tk| = |t|\,|k|$ y las aplicaciones l y l_1 son lineales, tendremos

$$l(tk) - l_1(tk) = t[l(k) - l_1(k)],$$

y, por ende,

$$|l(k) - l_1(k)| = \varepsilon(tk)\,|k|. \tag{41.52}$$

Pero $\lim_{t \to 0} tk = 0$, por lo cual, en virtud de la propiedad de la función ε, tenemos también $\lim_{t \to 0} \varepsilon(tk) = 0$. Pasando al límite para $t \to 0$ en (41.52), obtendremos $|l(k) - l_1(k)| = 0$, es decir, para cualquier $k \in R^n$

$$l(k) = l_1(k).$$

Esto precisamente indica que $l = l_1$. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Sea $f: R^n \to R^m$ un operador lineal. Por ser lineal para cualesquiera $x \in R^n$ y $h \in R^n$, tenemos

$$f(x + h) = f(x) + f(h),$$

es decir, la igualdad (41.48) se cumple para $l = f$ y $o(h) \equiv 0$. Debido a la unicidad de la diferencial, $D_f(x) = f$. □

Teorema 4 ((linealidad de la diferencial). *Si las aplicaciones $f: X \to R^m$ y $g: X \to R^m$, $X \subset R^n$, son derivables en el punto $x \in X$, entonces para cualesquiera números λ y μ la combinación lineal $\lambda f + \mu g$ será también derivable en el punto x y*

$$D_{\lambda f + \mu g}(x) = \lambda D_f(x) + \mu D_g(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Debido a la derivabilidad de las aplicaciones f y g en el punto x, tenemos (véase (41.49)):

$$f(x + h) = f(x) + D_f(x)(h) + o(h), \quad h \to 0$$
$$g(x + h) = g(x) + D_g(x)(h) + o(h), \quad h \to 0;$$

de aquí

$$(\lambda f(x + h) + \mu g(x + h)) =$$
$$= [\lambda f(x) + \mu g(x)] + [\lambda D_f(x) + \mu D_g(x)]\,(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Como $\lambda D_f(x) + \mu D_g(x)$ es una aplicación lineal (véase el p. 41.6), entonces, de conformidad con la definición 8, la aplicación lineal $\lambda D_f(x) + \mu D_g(x)$ es la diferencial de la aplicación $\lambda f + \mu g$. □

Teorema 5. *Supongamos que $X \subset R^n$, $D \subset R^m$, $f: X \to D$, $g: D \to R^s$, con la particularidad de que la aplicación f es derivable en el punto $x \in X$ y g, en el punto $f(x)$. En este caso la composición $g \circ f$ es derivable en el punto x y su diferencial en el mismo es igual a la composición de diferenciales de las aplicaciones f y g:*

$$D_{g \circ f}(x) = D_g(f(x)) \circ D_f(x). \tag{41.53}$$

Corolario. *Cumplidas las condiciones del teorema, la derivada de la composición de aplicaciones es igual al producto de las derivadas:*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\,f'(x). \tag{41.54}$$

Como se ve de las fórmulas aducidas, gracias a la elección adecuada de las definiciones y anotaciones, en las formulaciones de los teoremas tiene lugar la analogía completa con el caso unidimensional.

DEMOSTRACIÓN. Por ser derivable la aplicación f, tenemos

$$(g \circ f)(x + h) = g(f(x + h)) = g(f(x) + D_f(x)(h) + o(h)), \quad h \to 0. \tag{41.55}$$

De este modo, el argumento de la función g en el punto $y = f(x)$ ha recibido un incremento

$$k = D_f(x)(h) + o(h). \tag{41.56}$$

Por ello, de (41.55) tenemos en virtud de que la función g es derivable:

$$(g \circ f)(x + h) = g(y + k) = g(y) + D_g(y)(k) + o(k), \quad k \to 0. \tag{41.57}$$

Dado que (véase la desigualdad (41.42)).

$$|D_f(x)(h)| \leqslant \|D_f(x)\|\,|h|, \tag{41.58}$$

donde la norma $\|D_f(x)\|$ del operador lineal $D_f(x)$ es un número no negativo, entonces para la función $k = k(h)$, definida por la igualdad (41.56), obtendremos

$$\lim_{h \to 0} k = 0. \tag{41.59}$$

Más aún, resulta justa la estimación

$$|k| \leqslant \|D_f(x)\|\,|h| + |o(h)|, \quad h \to 0,$$

y como, para h suficientemente pequeños, tiene lugar la desigualdad $|o(h)| < |h|$, para h de este género es lícita también la estimación

$$|k| \leqslant (\|D_f(x)\| + 1)\,|h|. \tag{41.60}$$

Luego, de la definición de $o(k)$ (véase (41.47)) se desprende que existe una función $\varepsilon(k)$ tal que

$$\lim_{k \to 0} \varepsilon(k) = 0 \tag{41.61}$$

y $|o(k)| = \varepsilon(k)\,|k|$. Por esta razón, en virtud de (41.60), para h mencionados suficientemente pequeños, se verifica la desigualdad

$$|o(k)| = \varepsilon(k)\,|k| \leqslant \varepsilon(k)(\|D_f(x)\| + 1)\,|h|. \tag{41.62}$$

Por cuanto de (41.59) y (41.61) se infiere que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(k) = 0$, se tiene, por consiguiente,

$$\varepsilon(k)(\|D_f(x)\| + 1)\,|h| = o(h) \quad \text{para} \quad h \to 0,$$

entonces de (41.62) tenemos $|o(k)| \leqslant o(h)$, $h \to 0$, de donde

$$o(k) = o(h) \quad \text{para} \quad h \to 0.$$

Esto significa que la fórmula (41.57) puede escribirse en la forma

$$(g \circ f)(x + h) = g(y) + D_g(y)(k) + o(h), \quad h \to 0, \tag{41.63}$$

donde k se determina por la fórmula (41.56).

Consideremos ahora el sumando medio en el segundo miembro de la igualdad (41.63). Puesto que la aplicación $D_g(y)$ es lineal, tenemos

$$D_g(y)(k) = D_g(y)(D_f(x)(h) + o(h)) =$$
$$= D_g(y)(D_f(x)(h)) + D_g(y)o(h), \quad h \to 0. \tag{41.64}$$

Debido a la desigualdad (41.42), tendremos $|D_g(y)o(h)| \leqslant \|D_g(y)\|\,|o(h)|$, por lo cual

$$D_g(y)o(h) = o(h), \quad h \to 0;$$

por consiguiente, de (41.64) obtendremos:

$$D_g(y)(k) = D_g(y)(D_f(x)(h)) + o(h) = (D_g(y) \circ D_f(x))(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Sustituyendo la expresión obtenida para $D_g(y)$ en (41.63) y tomando en consideración que $y = f(x)$, tendremos en definitiva

$$(g \circ f)(x + h) = g(f(x)) + (D_g(f(x)) \circ D_f(x))(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Como la composición de operadores lineales es un operador lineal, entonces, por la unicidad de la diferencial, el operador $D_g(f(x)) \circ D_f(x)$ es la diferencial de la composición $f \circ g$, es decir, la fórmula (41.53) queda demostrada.

La fórmula (41.54) se deduce de ésta en seguida, puesto que en la composición de los operadores lineales sus matrices se multiplican. □

Teorema 6. *La aplicación $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon X \to R^m$, $X \subset R^n$, es derivable en el punto $x \in X$, si, y sólo si, todas las funciones coordenadas suyas $f_i\colon X \to R$, $i = 1, 2, \ldots, m$, son derivables en dicho punto. En este caso los elementos a_{ij} de la matriz de la diferencial $D_f(x)$ son derivadas parciales correspondientes de las funciones coordenadas:*

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

En otras palabras, la derivada $f'(x)$ es la matriz de Jacobi del sistema de funciones f_i (véase la definición 2 del p. 41.3),

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{41.65}$$

y se llama también *matriz de Jacobi de la aplicación* f en el punto x.

DEMOSTRACIÓN 1. Las funciones coordenadas $f_i = \pi_i \circ f$ (véase (41.37)) son una composición de dos aplicaciones derivables: la aplicación f, que es derivable en el punto f por hipótesis, y la proyección π_i (véase (41.36)) que es derivable en todo el espacio R^m como cualquier operador lineal $R^m \to R$. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema 5, las funciones f_i, $i = 1. 2, \ldots, m$, son derivables en el punto x.

2. Supongamos que todas las funciones coordenadas $f_i = \pi_i \circ f$ de la aplicación son derivables en el punto x. Teniendo presente (41.46), esto implica que existen tales constantes a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ que

$$f_i(x + h) = f_i(x) + a_{i1}h_1 + \ldots + a_{in}h_n + o(h), \; h \to 0, \; i = 1, 2, \ldots, m. \tag{41.66}$$

De aquí, como se sabe (véase (20.2)), proviene que los coeficientes a_{ij} de los incrementos h_j que adquieren los argumentos x_j son las derivadas parciales correspondientes de las funciones f_i:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{41.67}$$

Designemos mediante l: $R^n \to R^m$ un operador lineal con la matriz (a_{ij}). Por cuanto $(o(h), \dots, o(h)) = o(h)$*), las igualdades (41.66) pueden escribirse en la forma

$$f(x + h) = f(x) + l(h) + o(h), \quad h \to 0.$$

Esto precisamente significa la derivabilidad de la aplicación f, además de (41.67) se infiere la validez de la fórmula (41.65). □

OBSERVACIÓN 1. En vista de las fórmulas (41.54) y (41.65), el corolario del teorema 5 significa que la matriz de Jacobi de la composición de aplicaciones f y g es igual al producto de las matrices de Jacobi de las aplicaciones mencionadas.

Esto, por otra parte, se deduce también directamente de la fórmula de derivación de una función compuesta: si $z_k = g_k(y_1, \dots, y_m)$, $k = 1, 2, \dots, s$, e $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$, entonces (véase (20.26))

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z_k}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad k = 1, 2, \dots, s, \; j = 1, 2, \dots, n,$$

que, de acuerdo con la regla de multiplicación de las matrices (véase el p. 41.6) significa que la matriz $\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right)$ es un producto de las matrices $\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)$ y $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$:

$$\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right).$$

Definición 9. *En el caso cuando $m = n$, el determinante*

$$\det\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$$

de la matriz de Jacobi (41.65) *se llama determinante de Jacobi o jacobiano de la aplicación f: $X \to R^n$, $X \subset R^n$, en el punto $x \in X$ y se denota* (véase el p. 41.3)

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \quad o \quad \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}.$$

OBSERVACIÓN 2. Por el curso de álgebra conocemos que al multiplicar las matrices cuadradas, sus determinantes se multiplican, razón por la cual, cumplidas las condiciones del teorema 5 en el caso de $m = n = s$, el jacobiano de la composición de las aplicaciones f y g es igual al producto de jacobianos de las aplicaciones f y g

*)La notación $(o(h), \dots o(h)) = o(h)$ significa que el vector cuyas coordenadas son infinitésimos de orden superior a h, es de por sí un infinitésimo de orden más elevado que h cuando $h \to 0$. La coincidencia que en el caso dado tiene lugar entre las designaciones del vector y de sus coordenadas se debe a que para el vector n-dimensional se ha elegido, para no complicar la notación, la designación x en la que no está reflejada la dimensión del vector. Ésta se pone de manifiesto sólo cuando el vector se escribe con ayuda de las coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$$\frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}. \tag{41.68}$$

En efecto,

$$\frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_j}\right) = \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_i}\right)\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}\;\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

OBSERVACIÓN 3. Supongamos que $X \subset R^n$ e Id: $X \to X$ es una aplicación idéntica del conjunto X sobre sí mismo. En la forma coordenada se escribe como la condición de igualdad de las cordenadas de los puntos correspondientes en esta aplicación a la imagen v la preimagen, es decir, las funciones coordenadas tienen por expresión

$$f_i(x) = x_i, \; i = 1, 2, \dots, n, \; (x_1, \dots, x_n) \in X.$$

Si $x^{(0)}$ es un punto interior del conjunto X, estas funciones pueden derivarse en dicho punto y, puesto que $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$ para $i \neq j$ y $\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$, entonces la matriz de Jacobi de la aplicación idéntica es una matriz unidad

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Supongamos ahora que $U \subset R^n$, $V \subset R^n$ y f: $U \to V$ es una aplicación biunívoca (inyectiva), mientras que f^{-1}: $f(U) \to U$ es la aplicación inversa a la primera. En este caso, para todo punto $x \in U$ tenemos $f^{-1}(f(x)) = x$, es decir, la composición $f^{-1} \circ f$ es una aplicación idéntica.

Supongamos que la aplicación f es derivable en el punto $x_0 \in U$ (por tanto, x_0 es un punto interior del conjunto U, pues solo para tales puntos viene determinada la noción de derivabilidad), mientras que la aplicación inversa f^{-1} es derivable en el punto $f(x_0)$. Como $f^{-1} \circ f$ es un aplicación idéntica, en vista de la fórmula (41.54) tenemos

$$(f^{-1})'f' = (f^{-1} \circ f)' = (\mathrm{Id})' = X. \tag{41.69}$$

Pasando de esta igualdad de las matrices a los jacobianos de éstas, obtendremos

$$\det(f^{-1})' \det f' = 1, \tag{41.70}$$

ya que $\det X = 1$.

Si la aplicación f viene dada por las funciones coordenadas (41.30), la fórmula (41.70) puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = 1. \tag{41.71}$$

De esta fórmula se deduce que con las suposiciones admitidas tanto el jacobiano de la aplicación f en el punto x, como el de la aplicación inversa f^{-1} en el punto $f(x)$ no se anulan.

Escribamos la fórmula (41.71) en otra forma

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}}. \tag{41.72}$$

Dicha fórmula representa una generalización evidente de la fórmula para la derivada de la función inversa de una sola variable: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$.

Como conclusión enunciaremos dos definiciones útiles.

Definición 10. *Una aplicación $f: X \to R^m$, $X \subset R^n$, derivable en todo punto $x \in X$, se denomina aplicación derivable del conjunto X.*

Obviamente, si una aplicación es derivable en el conjunto X, entonces, cualquiera que sea el punto $x \in X$, de acuerdo con la definición 8, la aplicación f queda definida en cierto entorno del punto, es decir, X es un conjunto abierto.

De conformidad con el teorema 6, la aplicación $f = (f_1, \dots, f_n)$ es derivable en el conjunto X cuando, y sólo cuando, son derivables en dicho conjunto todas las funciones coordenadas suyas $f_1, \dots, f_n$. Si todas las funciones coordenadas son continuamente derivables en X, es decir, si todas sus primeras derivadas parciales son continuas en X, entonces la aplicación f se llama *aplicación continuamente derivable del conjunto X.*

Definición 11. *Una aplicación homeomorfa $f: G \to D$, donde G y D son conjuntos abiertos del espacio R^n, se llama difeomorfa o difeomorfismo, si son derivables tanto la propia aplicación citada como la aplicación inversa $f^{-1}: D \to G$.*

41.8. APLICACIONES CON UN JACOBIANO DISTINTO DE CERO. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA REGIÓN

Consideraremos ante todo la cuestión acerca de la existencia de una aplicación inversa a la dada. Como se sabe, en el caso de $n = 1$, para una función continuamente derivable en cierto segmento, la condición de que la derivada de ésta no se reduzca a cero (la que conlleva a su monotonía estricta) resulta suficiente para que exista una función unívoca continuamente derivable que sea inversa respecto de la dada. Cuando n es arbitrario, el caso se complica considerablemente: las correspondientes condiciones puntuales impuestas sobre las propiedades de derivabilidad de la aplicación sólo permiten afirmar que la aplicación inversa existe localmente, es decir, en un entorno del punto. Con más precisión, queda válido el siguiente teorema.

Teorema 7. *Sea*

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{41.73}$$

una aplicación continuamente derivable del conjunto abierto $G \subset R^n$ en el espacio R^n. Si el jacobiano de esta aplicación no se anula en el punto $x^{(0)} \in G$, existen, pues, tales entornos U_x y U_y de los puntos respectivos $x^{(0)}$ e $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, que $f(x)$, $x \in U_x$, es la aplicación biunívoca del entorno U_x sobre el entorno U_y, y la aplicación inversa es continuamente derivable en el conjunto U_y.

Corolario. *Sea f una aplicación continuamente derivable del conjunto abierto $G \subset R^n$ en el espacio R^n. Si el jacobiano de la aplicación f no es nulo en G, la imagen del conjunto G en esta aplicación es también un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Examinemos las funciones

$$F_i(x, y) = f_i(x_1, \dots, x_n) - y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Están definidas para todo $y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n_y$ y para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in G \subset R^n_x$. Con su ayuda el sistema de ecuaciones (41.73) que prefijan la aplicación f, se escribirá en la forma

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{41.74}$$

Las funciones $F_i(x, y)$ están definidas y son continuamente derivables en cierto entorno del punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$ (como tal entorno puede ser tomado, por ejemplo, $G \times R^n_y$),

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0 \text{ y } \left.\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} = \left.\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0.$$

De este modo, resultan cumplidas todas las condiciones del teorema 2 de este párrafo sobre la resolubilidad del sistema de ecuaciones.

En virtud de este teorema, las ecuaciones (41.74), o, que es lo mismo, el sistema (41.73) pueden ser resueltos y, además, de un modo único, respecto de las variables $x_1, \dots, x_n$ en cierto entorno del punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$. Más detalladamente esto significa que existen tales entornos U^*_x y U_y de los puntos respectivos $x^{(0)}$ e $y^{(0)}$, $x^{(0)} \in U^*_x$, $y^{(0)} \in U_y$, y tal aplicación única

$$x = g(y) = \begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = g_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{41.75}$$

que aplica el entorno U_y en el entorno U^*_x, que para todo $y \in U_y$ tiene lugar la identidad

$$f[g(y)] = y.$$

En otras palabras, para todo punto $y \in U_y$ existe, y además, el único punto $x = g(y) \in U^*_x$ el que, al realizarse la aplicación f, pasa al punto y. De este modo, $x \in f^{-1}(y) \cap U^*_x$ y $g(y)$ es una aplicación unívoca, continuamente derivable e inversa respecto de f en U_y: $g = f^{-1}$.

Pongamos $U_x = U^*_x \cap f^{-1}(U_y)$. Entonces, U_x es un conjunto abierto, pues representa una intersección de dos conjuntos abiertos U^*_x y $f^{-1}(U_y)$ (el carácter abierto del conjunto $f^{-1}(U_y)$ se desprende de que es una preimagen del conjunto abierto U_y en la aplicación continua f, véase el lema 2 en el p. 41.4). Es evidente que

U_x se aplica biunívocamente sobre U_y y, dado que $x^{(0)} \in U_x^*$ y $f(x^{(0)}) = y^{(0)} \in U_y$, entonces $x^{(0)} \in U_x$, es decir, U_x es el entorno buscado del punto $x^{(0)}$. □

OBSERVACIÓN 1. Los entornos U_x y U_y que figuran en las condiciones del teorema 4 poseen, además, la propiedad adicional de que el jacobiano de la aplicación f del entorno U_x sobre el entorno U_y no se anula en el entorno U_x, mientras que el jacobiano de la aplicación inversa f^{-1} no se anula en el entorno U_y. Esto proviene inmediatamente de la fórmula (41.71). En efecto, en vista de que la aplicación f transforma biunívocamente el entorno U_x en el U_y y que f y f^{-1} son continuamente derivables, la fórmula mencionada puede emplearse para el caso de la aplicación f, considerada sobre el conjunto U_x. Conforme a esta fórmula, un producto de los jacobianos de las aplicaciones f y f^{-1} es igual a uno y, por lo tanto, cada uno de ellos no es igual a cero.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Supongamos que $y = f(x)$ es una aplicación continuamente derivable del conjunto abierto G en el espacio R^n y que $y^{(0)}$ es un punto arbitrario del conjunto $f(G)$. Elijamos un punto $x^{(0)}$ en la preimagen del punto $y^{(0)}$: $x^{(0)} \in f^{-1}(y^{(0)})$. Por consiguiente, $f(x^{(0)}) = y^{(0)}$. En virtud del teorema 4, existen tales entornos $U_x \subset G$ y U_y de los puntos respectivos $x^{(0)}$ e $y^{(0)}$ que $f(U_x) = U_y$. Por consiguiente, $U_y \subset f(G)$. En otras palabras, para todo punto $y_{(0)} \in f(G)$ existe su entorno contenido en el conjunto $f(G)$. De este modo, cualquier punto del conjunto $f(G)$ es interior para este conjunto lo que es un indicio de que $f(g)$ es un conjunto abierto. □

OBSERVACIÓN 2. Si en cierta aplicación f para los puntos $x^{(0)}$ e $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ existen unos entornos respectivos U_x y U_y que se aplican biunívocamente por f uno sobre el otro, suele decirse que *la aplicación f es localmente biunívoca en el punto* $x^{(0)}$.

Si en este caso la aplicación f es continua en U_x y f^{-1} es continua en U_y, entonces f se llama *aplicación localmente homeomorfa* en el punto $x^{(0)}$ u *homeomorfismo local*. Por fin, si el homeomorfismo local citado es un difeomorfismo, la aplicación en consideración recibe el nombre de *difeomorfismo local* en el punto dado (véanse las definiciones de homeomorfismo y difeomorfismo en el p. 41.4 y el p. 41.7).

Empleando la terminología mencionada, podemos decir que la aplicación f, considerada en el teorema 4, es una aplicación localmente difeomorfa en todo punto en el que el jacobiano es destinto de cero.

Teorema 8 (principio de conservación de la región). *La imagen de una región n-dimensional de un espacio n-dimensional en la aplicación continuamente derivada con un jacobiano que no se reduce a cero, es una región.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G una región, $G \subset R^n$, e $y = f(x)$ una aplicación de G en R^n que satisface las condiciones del teorema. De acuerdo con el corolario del teorema 4, el conjunto $f(G)$ es abierto y, según el lema 7 del p. 41.4, es linealmente conexo. Por ello, si G es una región, el conjunto $f(G)$ será también una región, siempre que se cumplen las condiciones del teorema. □

Ejercicio 12. Constrúyase un ejemplo de una aplicación continuamente derivable de cierta región plana cuyo jacobiano nunca se reduce a cero y no es biunívoco

41.9. FUNCIONES IMPLÍCITAS DEFINIDAS POR UNA ECUACIÓN EN LA QUE SE TRASTORNAN LAS CONDICIONES DE UNICIDAD. PUNTOS SINGULARES DE LAS CURVAS PLANAS

Ya sabemos que si las coordenadas de cierto punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ satisfacen la ecuación

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0 \tag{41.76}$$

y si en este punto la derivada $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ no es nula, entonces bajo ciertas condiciones correspondientes impuestas sobre la continuidad de la misma función F y de la derivada citada, la ecuación (41.76) resulta resoluble en cierto entorno del punto $x^{(0)}$ respecto de x_i y la solución es una función continuamente derivable de las demás coordenadas.

Surge, naturalmente, la cuestión: ¿qué sucederá, cuando en el punto $x^{(0)}$ las derivadas parciales respecto de todos los argumentos se reduzcan a cero: definirá o no, en este caso, la ecuación (41.76) algunas funciones? Detendrémonos en esta cuestión, limitándonos a la consideración de un caso bidimensional, teniendo en cuenta la enorme dificultad con la que se resuelve.

Así pues, consideraremos una ecuación

$$F(x, y) = 0, \tag{41.77}$$

donde la función F está definida y es continuamente derivable en cierto entorno del punto (x_0, y_0) de tal género que

$$F(x_0, y_0) = 0. \tag{41.78}$$

Sea

$$F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0 \tag{41.79}$$

Mostremos que incluso si se cumplen estas condiciones, la ecuación (41.77) se resuelve, a veces, en el entorno del punto (x_0, y_0) respecto de una de las variables, de suerte que se obtendrá una función continuamente derivable; no obstante, en el caso general, esto se puede hacer de una manera que no es única. De tal modo, la condición

$$F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0) \neq 0, \tag{41.80}$$

que en nuestro caso no se cumple (véase (41.79)) y que permite aplicar el teorema 1 sobre las funciones implícitas a una de las variables, puede llamarse, naturalmente, condición de solubilidad unívoca de la ecuación (41.77).

Definición 12. *Un punto (x_0, y_0) cuyas coordenadas satisfacen las condiciones* (41.78) *y* (41.79) *se denomina punto singular de la ecuación* (41.77).

Un punto singular se llama aislado, si existe un entorno suyo en el cual el punto citado es el único punto singular.

En el lenguaje geométrico esto significa que si la ecuación (41.77) es una representación implícita de alguna curva, entonces en el entorno de los puntos singulares de esta ecuación la curva no representa, en el caso general, la gráfica de cierta función unívoca suave (lo que tiene lugar, si se cumplen las condiciones (41.80)); aquí pueden surgir diferentes singularidades que ahora serán el objeto de nuestra consideración.

Introduzcamos, para abreviar, las siguientes designaciones

$$F_{xx}(x_0, y_0) = F^0_{xx}, \quad F_{xy}(x_0, y_0) = F^0_{xy}, \quad F_{yy}(x_0, y_0) = F^0_{yy}.$$

Teorema 9. *Supongamos que la función $F(x, y)$ está definida y es dos veces continuamente derivable en cierto entorno de un punto singular aislado (x_0, y_0) de la ecuación* (41.77) *y sea*

$$F^0_{xx}F^0_{yy} - F^{02}_{xy} \neq 0.$$

En este caso, si

$$F^0_{xx}F^0_{yy} - F^{02}_{xy} > 0, \tag{41.81}$$

entonces (x_0, y_0) es una solución aislada de la ecuación (41.77), *es decir, existe un entorno del punto (x_0, y_0) tal que ningún punto de él, salvo (x_0, y_0) satisface la ecuación* (41.77); *en cambio, si*

$$F^0_{xx}F^0_{yy} - F^{02}_{xy} < 0, \tag{41.82}$$

la ecuación (41.77) *es resoluble en cierto entorno del punto (x_0, y_0) pero no unívocamente: hay dos diferentes funciones derivables que satisfacen la ecuación* (41.77). *Por ello (x_0, y_0) se llama en este caso punto doble.*

Por ejemplo, si

$$F^0_{yy} \neq 0, \tag{41.83}$$

existen dos funciones derivables $f_1(x)$ y $f_2(x)$, definidas en cierto entorno del punto x_0, tales que en dicho entorno $F(x, f_1(x)) = 0$, $F(x, f_2(x)) = 0$, con la particularidad de que $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$, mientras que las derivadas de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en el punto x_0 son diferentes raíces de la ecuación

$$F^0_{xx} + 2F^0_{xy}k + F^0_{yy}k^2 = 0^{*)}. \tag{41.84}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se cumple la condición (41.81). Junto con (41.79) es suficiente para que exista en el punto (x_0, y_0) un extremo estricto de la función $F(x, y)$ (véase el teorema 3 en el p. 40.2). Por eso existe un entorno U del punto (x_0, y_0) tal que para $(x, y) \in U$ y $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ o bien siempre $F(x, y) > F(x_0, y_0)$, o bien siempre $F(x, y) < F(x_0, y_0)$ y como $F(x_0, y_0) = 0$, se tiene $F(x, y) \neq 0$ para cualesquiera $(x, y) \in U$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, es decir, (x_0, y_0) es la solución aislada de la ecuación (41.77)$^{**)}$.

Supongamos ahora que se cumple la condición (41.82). Desarrollemos la función $F(x, y)$, rigiéndonos por la fórmula de Taylor, en el entorno del punto (x_0, y_0)

*) Las raíces de esta ecuación son reales y diferentes, en virtud de las condiciones (41.82) y (41.83).

**) Para demostrar esta afirmación se usa no el hecho de que (x_0, y_0) es el punto singular aislado, sino que es sólo un punto simplemente singular en el que se cumple la condición (41.81).

hasta los sumandos de segundo orden. Tomando en consideración las condiciones (41.78) y (41.79), obtendremos

$$F(x, y) = \frac{1}{2}[F^0_{xx}(x - x_0)^2 + 2F^0_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + F^0_{yy}(y - y_0)^2] + o(r^2), \tag{41.85}$$

donde $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Pongamos $x - x_0 = r\cos\varphi$, $y - y_0 = r \operatorname{sen}\varphi$. Evidentemente, (r, φ) son las coordenadas polares del punto (x, y), con la particularidad de que a título de origen del sistema polar de coordenadas se ha adoptado el punto (x_0, y_0).

En estas coordenadas

$$F(x, y) = \frac{r^2}{2}(F^0_{xx}\cos^2\varphi + 2F^0_{xy}\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + F^0_{yy}\operatorname{sen}^2\varphi) + o(r^2) =$$
$$= \frac{r^2}{2}P(\varphi) + o(r^2), \tag{41.86}$$

donde

$$P(\varphi) = F^0_{xx}\cos^2\varphi + 2F^0_{xy}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + F^0_{yy}\operatorname{sen}^2\varphi, \tag{41.87}$$

o bien, para $\varphi \neq \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$P(\varphi) = \cos^2\varphi(F^0_{xx} + F^0_{xy}\operatorname{tg}\varphi + F^0_{yy}\operatorname{tg}^2\varphi). \tag{41.88}$$

Supongamos ahora que queda cumplida también la condición (41.83). Sean k_1 y k_2 las raíces de la ecuación (41.84) y sean $\varphi_1 = \operatorname{arctg} k_1$ y $\varphi_2 = \operatorname{arctg} k_2$. En este caso

$$\varphi_1 \neq \pm\pi/2, \quad \varphi_2 \neq \pm\pi/2, \tag{41.89}$$

y de (41.88) se infiere que

$$P(\varphi) = \cos^2\varphi(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_1)(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_2). \tag{41.90}$$

De la fórmula (41.90) se ve que la función $P(\varphi)$ se anula, para $\varphi \neq \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, cuando $\varphi = \varphi_1 + k\pi$ y $\varphi = \varphi_2 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, con la particularidad de que al pasar el argumento por estos valores, la función cambia de signo. Será cómodo para nosotros interpretar $P(\varphi)$ como función de un punto de la circunferencia C de radio igual a la unidad (este radio se elige a fin de simplificar el caso, para que las longitudes de los arcos coincidan con los ángulos φ) y centro en el punto (x_0, y_0).

Sea $\varepsilon > 0$. Designemos mediante $U_1 = U_1(\varepsilon)$ un ángulo abierto determinado por la desigualdad $\varphi_1 - \varepsilon < \varphi < \varphi_1 + \varepsilon$, es decir,

$$U_1 = \{(r, \varphi): \varphi_1 - \varepsilon < \varphi < \varphi_1 + \varepsilon\},$$

y pongamos correspondientemente

$$U_2 = \{(r, \varphi): \varphi_2 - \varepsilon < \varphi < \varphi_2 + \varepsilon\};$$

eligiendo, además, $\varepsilon > 0$ tan pequeño que U_1 y U_2 no se corten y no contengan en sí los semiejes de las ordenadas y, por consiguiente, las semirrectas verticales en general (lo último siempre puede conseguirse en vista de las condiciones (41.89)).

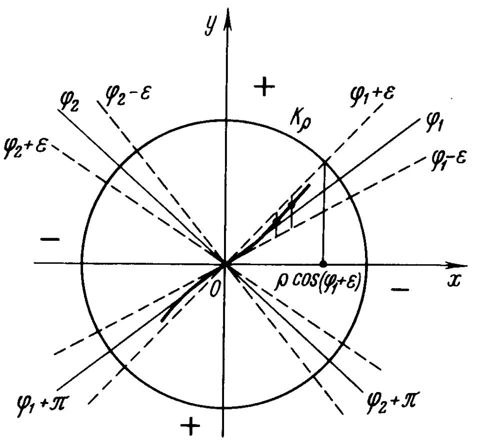


Fig. 166

Sean U_1^* y U_2^* los ángulos centrales simétricos con U_1 y U_2 respecto del punto (x_0, y_0):

$$U_1^* = \{(r, \varphi): \varphi_1 + \pi - \varepsilon < \varphi < \varphi_1 + \pi + \varepsilon\},$$
$$U_2^* = \{(r, \varphi): \varphi_2 + \pi - \varepsilon < \varphi < \varphi_2 + \pi + \varepsilon\}.$$

Por la elección del número ε los conjuntos U_1, U_2, U_1^* y U_2^* no se cortan dos a dos (fig. 166).

Examinemos ahora $P(\varphi)$ como función de un punto de la circunferencia mencionada C. Para simplificar, designemos también mediante φ un punto de la circunferencia C, al cual corresonde el ángulo polar φ. Eliminemos en la circunferencia C los intervalos con centros en los puntos φ_1, φ_2, $\varphi_1 + \pi$ y $\varphi_2 + \pi$ de longitud $2\,\varepsilon$*); por la elección adecuada de $\varepsilon > 0$, estos intervalos no tienen puntos comunes. El conjunto restante, que se designará con B, es limitado y cerrado y, por lo tanto, representa un compacto. En B la función $P(\varphi)$ es continua y no se anula, a consecuencia de lo cual

$$\inf_{\varphi \in B} |P(\varphi)| = \mu > 0. \tag{41.91}$$

Designemos mediante K_ρ un círculo cerrado con centro en el punto (x_0, y_0) y radio ρ:

$$K_\rho = \{(r, \varphi): 0 \leqslant r \leqslant \rho\},$$

y mediante L_ρ, un conjunto que se obtiene por sustracción (en el sentido de la teoría de conjuntos, véase el p. 1.1) de los conjuntos U_1, U_2, U_1^* y U_2^* del círculo K_ρ. Es ob-

*) Se llama intervalo de longitud $2\,\varepsilon$ en la circunferencia con centro en un punto, cuyo ángulo polar es igual a φ_0, un conjunto de sus puntos cuyos ángulos polares φ satisfacen la desigualdad $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$.

vio que debido a (41.91) se tiene

$$\inf_{(r,\varphi) \in L_\rho} |P(\varphi)| = \mu > 0.$$

Ahora, observando que de (41.86) se deduce

$$F(x, y) = \frac{r^2}{2}[P(\varphi) + \alpha(r, \varphi)], \tag{41.92}$$

donde $\lim\limits_{r \to 0} \alpha(r, \varphi) = 0$, elijamos $\rho > 0$ de modo tal que para $r \leqslant \rho$ se verifique la desigualdad

$$|\alpha(r, \varphi)| < \mu. \tag{41.93}$$

Entonces, de (41.92) se desprende que para todos los puntos $(r, \varphi) \in L_\rho$ la expresión que figura en el segundo miembro de la fórmula (41.92) es del mismo signo que $P(\varphi)$.

El conjunto L_ρ se compone de cuatro sectores cerrados (véase fig. 166), en cada uno de los cuales, a excepción de su centro, la función $P(\varphi)$ y, por ende, debido a la elección adecuada de ρ, la función $F(x, y)$ adquieren valores de un mismo signo, y en los sectores vecinos, de signos contrarios.

Examinemos ahora el ángulo $U_1 = U_1(\varepsilon)$. Sea, para concretar, $0 \leqslant \varphi_1 < \pi/2$. La intersección de la clausura $\overline{U}_1$ del ángulo U_1 con la recta vertical $x = x^*$, $x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon)$, representa un segmento en cuyos extremos superior e inferior la función $F(x^*, y)$ toma los valores de signos diferentes. La función $F(x^*, y)$ considerada como función de una sola variable y con x^* fijado, es continua en el segmento mencionado y por eso se anula en cierto punto y^* del segmento, es decir, para todo x^*, donde $x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon)$, existe por lo menos un punto y^* tal que

$$F(x^*, y^*) = 0, \quad (x^*, y^*) \in U_1(\varepsilon) \cap K_\rho. \tag{41.94}$$

Definamos $y = f_1(x)$ como una función que pone en correspondencia al número x^* el número y^*:

$$f_1(x^*) = y^*, \quad x_0 < x^* \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon).$$

Mostremos que para ε y ρ suficientemente pequeños la función f_1 está definida unívocamente, es decir, existen tales $\varepsilon > 0$ y $\rho > 0$ que con x^* dado las condiciones (41.94) definen unívocamente y^*. Admitamos lo contrario. Tomemos las sucesiones $\varepsilon_n \to 0$ y $\rho_n \to 0$, para $n \to \infty$. En este caso existen dos sucesiones de los puntos que tienen abscisas iguales x_n y ordenadas distintas y_n' e y_n'', tales que

$$(x_n, y_n') \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}, \quad F(x_n, y_n') = 0,$$
$$(x_n, y_n'') \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}, \quad F(x_n, y_n'') = 0.$$

En virtud del teorema de Rolle, en el segmento $[y_n', y_n'']$ de la recta $x = x_n$ existe tal punto y_n que

$$F_y(x_n, y_n) = 0. \tag{41.95}$$

siendo, además, en este caso $(x_n, y_n) \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n}$; por hipótesis (véase (41.79)) teníamos

$$F_y(x_0, y_0) = 0. \tag{41.96}$$

Según la fórmula de incrementos finitos aplicada a la función $F_y(x, y)$ se tiene

$$F_y(x_n, y_n) - F_y(x_0, y_0) = F_{yx}(\xi_n, \eta_n)(x_n - x_0) + F_{yy}(\xi_n, \eta_n)(y_n - y_0),$$
$$(\xi_n, \eta_n) \in U_1(\varepsilon_n) \cap K_{\rho_n},$$

de donde, en virtud de (41.95) y (41.96),

$$F_{xy}(\xi_n, \eta_n) + F_{yy}(\xi_n, \eta_n)\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = 0. \tag{41.97}$$

Sea $(x_n, y_n) = (r_n, \psi_n)$. Evidentemente, $|\psi_n - \varphi_1| < \varepsilon_n$; y por esta razón de la condición $\varepsilon_n \to 0$ se deduce que $\psi_n \to \varphi_1$ cuando $n \to \infty$, y como $\operatorname{tg} \psi_n = \dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \operatorname{tg} \varphi_1 = k_1. \tag{41.98}$$

Pasando al límite en la igualdad (41.97) para $n \to \infty$, en vista de (41.98) tenemos

$$F^0_{xy} + F^0_{yy}k_1 = 0, \quad \text{es decir,} \quad k_1 = -\frac{F^0_{xy}}{F^0_{yy}};$$

sustituyendo este valor de la raíz en la ecuación (41.84), obtenemos

$$F^0_{xx}F^0_{yy} - F^{02}_{xy} = 0,$$

que contradice la condición (41.82).

Así pues, la función $y = f_1(x)$ se define realmente de modo unívoco cuando ε y ρ son suficientemente pequeños. En lo que sigue supondremos que ε y ρ se han elegido precisamente de la manera indicada.

Definamos adicionalmente la función f_1 en el punto x_0, al poner $y_0 = f_1(x_0)$. Obviamente, por la propia definición de la función $f_1(x)$, tenemos

$$F(x, f_1(x)) = 0, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon).$$

Mostremos que en el punto x_0 la función $f_1(x)$ tiene una derivada a la derecha y que esta derivada es igual a k_1. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrariamente fijado. De lo dicho más arriba se desprende la existencia de tal $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ que la parte correspondiente de la gráfica de la función $f_1(x)$ se dispone íntegramente en $U_1(\varepsilon) \cap K_\rho$: .

$$(x, f_1(x)) \in U_1(\varepsilon) \cap K_\rho, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon) \tag{41.99}$$

Tomemos $\delta = \rho\cos(\varphi_1 + \varepsilon)$ y sea x tal que $0 < x - x_0 < \delta$, $y = f_1(x)$ y $(x, y) = (r, \varphi)$. En virtud de (41.99), tenemos $|\varphi - \varphi_1| < \varepsilon$. Esto significa que $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \varphi = \varphi_1$, y, por lo tanto, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_1$. Puesto que $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$, de lo demostrado se deduce que

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg}\varphi_1,$$

es decir, la función $f_1(x)$ tiene derivada a la derecha en el punto x_0 y esta derivada es igual a $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$.

De esta misma manera se demuestra, analizando el comportamiento de la función $F(x, y)$ en el ángulo U_1^*, que en el segmento $[x_0 - \delta', x_0]$ existe, para cierto $\delta' > 0$, tal función $f_1(x)$ que siendo $x_0 - \delta' \leqslant x \leqslant x_0$, se tiene

$$F(x, f_1(x)) = 0, \quad (x, f_1(x)) \in U^*_1, \quad f_1'(x_0) = k_1$$

(por derivada se entiende en el caso dado la derivada a la izquierda).

Si ρ se toma tan pequeño que en un entorno circular de radio ρ del punto (x_0, y_0) no se contengan otros puntos singulares de la ecuación (41.77), a excepción de (x_0, y_0), la función $f_1(x)$ será derivable en todo punto $x \neq x_0$. Esto se deduce en seguida del teorema sobre las funciones implícitas que fue demostrado anteriormente (véase el teorema 1 en el p. 41.1). De resultas hemos obtenido la función $f_1(x)$ que está definida en cierto entorno del punto x_0 y que posee todas las propiedades requeridas.

Análogamente se demuestra la existencia de la función $f_2(x)$ que también es una solución de la ecuación (41.77) y satisface las condiciones del teorema, con la particularidad de que la gráfica de esta función pasa en los ángulos U_2 y U_2^* y por el punto (x_0, y_0).

Si $F^0_{yy} = 0$ y $F^0_{xx} \neq 0$, entonces todos los razonamientos quedan los mismos; sólo conviene cambiar de lugar los ejes Ox y Oy, de suerte que obtendremos, como resultado, las soluciones de la ecuación (41.77) en forma de las funciones de la variable y: $f_1(y)$ y $f_2(y)$.

Si, por fin, $F^0_{xx} = F^0_{yy} = 0$ y, por lo tanto, $F^0_{xy} \neq 0$, entonces resulta más conveniente realizar el cambio de variables: $x = \xi + \eta$ e $y = \xi - \eta$ (gírense los ejes de coordenadas al ángulo $\pi/4$). En este caso (de lo que es fácil convencerse por derivabilidad directa)

$$F^0_{\xi\xi} = -F^0_{\eta\eta} = 2F^0_{xy} \neq 0, \; F^0_{\xi\eta} = 0,$$

es decir, en el nuevo sistema de coordenadas se obtendrá el caso ya estudiado. En particular, la ecuación (41.84) para los coeficientes angulares de las tangentes en el punto singular tiene, en el sistema de coordenadas ξ, η, la forma siguiente

$$k^2 - 1 = 0,$$

y, por consiguiente, $k_{1,2} = \pm 1$. En otras palabras, las bisectrices de los ángulos coordenados, que representan los ejes en el sistema antiguo de coordenadas x, y, son las tangentes a las gráficas de dos funciones definidas por la ecuación (41.77) en cierto entorno del punto singular que se considera. □

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ es una representación implícita de alguna curva, en el punto singular (x_0, y_0) de esta ecuación la curva puede tener (aunque no sea necesariamente) ciertas singularidades, es decir, en el entorno del punto singular de dicha ecuación la curva no es, en el caso general, la gráfica de cierta función unívoca suave.

Cabe recordar también que un conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (41.77) no es (en el caso general) siempre una curva en el sentido de la definición de la curva dada paramétricamente, enunciada anteriormente (véase el p. 16.2*).

Ejemplos. 1. Sea dada una ecuación $y^2(x^2 + y^2 + 1) = 0$. Aquí, $F(x, y) = y^2(x^2 + y^2 + 1)$, por lo cual $F_x = 2xy^2$, $F_y = 2x^2y + 4y^3 + 2y$. Las condiciones para la presencia de un punto singular (41.78) y (41.79) nos dan en este caso

$$x_0 = 0, y_0 = 0.$$

De este modo, de punto singular sirve el punto (0, 0). No obstante, en este punto la curva, definida por la ecuación, no tiene singularidad, puesto que la ecuación (el factor $x^2 + y^2 + 1$ nunca se reduce a cero) es equivalente a la $y = 0$ y la curva en consideración representa una gráfica de la función explícita $y = f(x) \equiv 0$. Observemos que en el punto (0, 0) para este caso

$$F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 0, \tag{41.100}$$

de lo que podemos convencernos con facilidad.

2. Para la ecuación

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0, \tag{41.101}$$

las condiciones (41.79) se convierten en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x^3 + 2xy^2 - x = 0,$$
$$2y^3 + 2x^2y - y = 0.$$

Al sumar y restar estas ecuaciones, obtenemos el sistema

$$(x + y)(2x^2 + 2y^2 - 1) = 0$$
$$(x - y)(2x^2 + 2y^2 - 1) = 0.$$

De aquí, o bien $x = y = 0$, o bien $2x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, sin embargo, el punto (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la última correlación no es una raíz de la ecuación (41.101) (para este punto $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, y, por lo tanto, en el primer miembro no hay factor que se reduzca a cero).

De este modo, el único punto singular es (0, 0). Es fácil comprobar que aquí se cumple la condición (41.81) y, por ende, el punto (0, 0) es una raíz aislada de la ecuación (41.101). Desde el punto de vista geométrico, como se ve en seguida, la ecuación (41.101) define la circunferencia unidad y el centro de ésta (0, 0) (este conjunto no porta, evidentemente, ninguna curva dada paramétricamente en el sentido del p. 16.2*).

3. Para la ecuación

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \tag{41.102}$$

las condiciones (41.79) para la existencia de un punto singular conducen al sistema de ecuaciones

$$x^2 - ay = 0,$$
$$y^2 - ax = 0,$$

de donde o bien $x = y = 0$, y en este caso dicho punto satisface la ecuación (41.102), o bien $x = a, y = a$, pero las coordenadas de este punto no constituyen la solución de la ecuación (41.102). Aquí, otra vez, (0, 0) es el único punto singular.

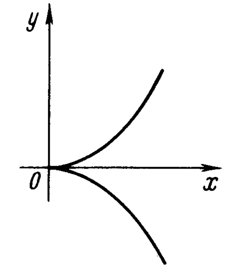


Fig. 167

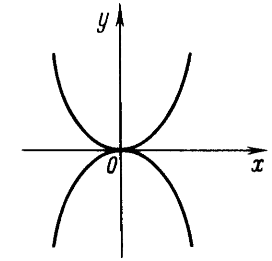


Fig. 168

No es difícil convencerse de que en el caso dado se cumplen las condiciones (41.82) y, por consiguiente, (0, 0) es un punto doble.

Geométricamente, para una curva cuya representación explícita es la ecuación (41.102) (se llama folio de Descartes y con ella ya chocamos en el p. 14.5) el punto (0, 0) es un *punto múltiple* (véase la fig. 70 en el tomo I).

4. Para la ecuación

$$y^2 - x^3 = 0, \tag{41.103}$$

(0, 0) es un punto singular; en dicho punto ya se cumple la condición (41.100) y, consecuentemente, en este caso no se cumplen las condiciones del teorema 6. Geométricamente, una curva expresada por la ecuación (41.103) y llamada parábola semicúbica $y = \pm x^{3/2}$, tiene en el punto (0, 0) una tangente y se dispone en el entorno de este punto por un lado respecto de la normal.

Los puntos de esta índole se llaman *puntos de retroceso* (fig. 167).

5. Para la ecuación

$$y^2 - x^4 = 0 \tag{41.104}$$

el punto (0, 0) es también singular y aquí se cumple nuevamente la condición (41.100). La ecuación (41.104) se descompone, evidentemente, en dos ecuaciones: $y = x^2$ e $y = -x^2$ que definen dos parábolas y estas últimas tienen en el punto (0, 0) una tangente común.

Los puntos singulares, en cierto entorno de los cuales la ecuación (41.77) define dos curvas continuamente derivables que tienen en el punto (x_0, y_0) una tangente común, se llaman *puntos autoadherentes* (fig. 168) de estas dos curvas.

Puede ocurrir que, cumplida la condición (41.100), el punto singular resulte ser la solución aislada de la ecuación (41.77) o su punto doble.

Como conclusión, ofrecemos algunas explicaciones para la ecuación (41.84). Si (x_0, y_0) es un punto singular de la ecuación (41.77), entonces, realizado el traslado paralelo del origen de coordenadas al punto (x_0, y_0), la ecuación (41.77) adquiere la forma

$$F_{xx}^0x^2 + 2F_{xy}^0xy + F_{yy}^0y^2 + o(x^2 + y^2) = 0, \tag{41.105}$$

(aquí, con x e y están designadas las coordenadas del punto en el nuevo sistema de coordenadas y por índice 0, puesto por arriba, se designan los valores de las derivadas parciales en el punto (0,0) de este sistema), de donde, con una exactitud de hasta los infinitésimos de orden superior, nuestra ecuación puede escribirse del modo siguiente:

$$F^0_{xx}x^2 + 2F^0_{xy}xy + F^0_{yy}y^2 = 0. \tag{41.106}$$

Si se cumple la condición (41.82), el primer miembro de la ecuación (41.106) se descompone en dos factores reales, cada uno de los cuales, siendo igualado a cero, proporciona las tangentes a las dos ramas de la curva en el punto (0, 0) (véase (41.84)). Cuando se cumple la condición (41.81), el primer miembro de la ecuación (41.106) se descompone en dos factores complejos: "las tangentes son imaginarias". Esto es natural, puesto que no hay sentido en hablar aquí de una tangente, pues en el caso dado el punto singular es aislado.

Esta observación es de comodidad especial cuando se trata de determinar el carácter del punto singular en el caso de una curva algebraica, es decir, de la curva definida por la ecuación

$$P(x, y) = 0, \tag{41.107}$$

donde $P(x, y)$ es un polinomio de dos variables x e y. Si (0, 0) es un punto singular de esta ecuación, de las condiciones (41.78) y (41.79) se deduce que dicho polinomio no contiene término independiente ni tampoco los términos de primer orden, es decir, la ecuación (41.107) tiene por expresión

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + Q(x, y) = 0,$$

donde $Q(x, y)$ es un polinomio, todos los términos del cual son por lo menos de tercer orden. El comportamiento de las soluciones de esta ecuación se determina por su parte principal, es decir, por la ecuación

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

que para el caso dado es precisamente la ecuación (41.106), pues aquí se ve claramente que

$$a = F^0_{xx}, \quad b = F^0_{xy} \quad \text{y} \quad c = F^0_{yy}.$$

En cambio, si el punto (0, 0) satisface la ecuación (41.107), pero no es un punto singular, entonces (41.107) tiene por expresión

$$Ax + By + R(x, y) = 0, \quad A^2 + B^2 > 0,$$

donde $R(x, y)$ es un polinomio, todos los términos del cual tienen el orden no inferior al segundo. Del teorema sobre las funciones implícitas (véase el teorema 1 en el p. 41.1) se deduce que la ecuación

$$Ax + By = 0$$

es en este caso una ecuación de la tangente en el punto (0, 0) a la gráfica de la solución de la ecuación (41.107).

Ejercicios. Investíguese el comportamiento de cada una de las siguientes curvas en el entorno de sus puntos singulares; hállense las tangentes en el punto singular.

13. $y^2 = x^2 + x^3$.
14. $y^2 = x^2 - x^3$.

15. $y^2 = x^2 - x^4$.
16. $(x^2 - 9)y^2 = x^4$.
17. $y^2 = x(x - 3)^2$.
18. $y(y - 2)^2 = x^2$.
19. $4y^2 = x^5 + 5x^4$.
20. $(x^2 - y^2)y = x^4$.
21. $(y - x^2)^2 = x^5$.

41.10. CAMBIO DE VARIABLES

En las diversas cuestiones del análisis matemático y en las aplicaciones de éste, al estudiar tal o cual fórmula que contiene unas funciones y sus derivadas (ordinarias o parciales), resulta a menudo conveniente pasar a otras variables independientes y, a veces, a otras funciones ligadas por relaciones determinadas con las funciones que figuran en la fórmula que se considera. Todas estas transformaciones se realizan sobre la base de las reglas de derivación de las funciones implícitas y compuestas. He aquí unos ejemplos.

Sea $u = u(x, y)$. Transformemos las expresiones

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \text{ y } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

reduciéndolas a las coordenadas polares r y φ. La primera de estas expresiones es el cuadrado de la longitud del gradiente ∇u de la función u, es decir, es igual a $|\nabla u|^2$, mientras que la segunda expresión tiene una designación especial Δu:

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{41.108}$$

$$\Delta u \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{41.109}$$

El símbolo Δ, que es indicio de la aplicación a la función u de la operación (41.109), lleva el nombre de *operador de Laplace**).

De las fórmulas que ligan las coordenadas cartesianas con las polares

$$x = r\cos\varphi, y = r\operatorname{sen}\varphi, \tag{41.110}$$

encontramos

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\operatorname{sen}\varphi, \frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}\varphi, \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi. \tag{41.111}$$

Apliquemos las fórmulas de derivación de una función compuesta:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi.$$

*) P. Laplace (1749 — 1827), mecánico y matemático francés.

Resolvamos estas igualdades respecto de $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r} \tag{41.112}$$

y sustituyamos las expresiones obtenidas en (41.108):

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Pasemos ahora al cálculo de la expresión (41.109). Derivemos las fórmulas (41.110) respecto de x y luego respecto de y:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial x} - r\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ 0 &= \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 0 &= \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial y} - r\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ 1 &= \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned}\right\}$$

Resolvamos los sistemas obtenidos respecto de $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$;

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen}\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}. \tag{41.113}$$

Derivemos ahora las fórmulas (41.112) respecto de x e y; entonces, empleando (41.113), obtendremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi - \frac{2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2\varphi +$$

$$+ \frac{2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Al sustituir las expresiones obtenidas en (41.109), tendremos

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Cuando en la expresión a transformar figuran no una sola, sino varias derivadas de orden dado, resulta más cómodo emplear el método de cálculo de las diferenciales, en lugar de las derivadas. Por ejemplo, considerando x e y como variables independientes, obtendremos las expresiones para las diferenciales dr y $d\varphi$. De las fórmulas (41.110) tenemos

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi, \; dy = \operatorname{sen}\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

de aquí

$$dr = \cos\varphi dx + \operatorname{sen}\varphi\, dy, \; d\varphi = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}dx + \frac{\cos\varphi}{r}dy \tag{41.114}$$

(observemos que de estas fórmulas se deducen inmediatamente también las fórmulas (41.113).

Para la función $u = u(x, y)$ tenemos

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)dy. \tag{41.115}$$

En la expresión para la diferencial du los coeficientes de dx y dy son las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$, por lo cual, de (41.115) se obtienen las dos fórmulas (41.112).

Hallemos, a continuación, las segundas diferenciales d^2r y $d^2\varphi$, haciendo uso de (41.114):

$$d^2r = -\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, dx + \cos\varphi\, d\varphi\, dy =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, dx^2 - 2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\, dx\, dy + \cos^2\varphi\, dy^2}{r},$$

$$d^2\varphi = -\left(\frac{\cos\varphi}{r}dx + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{r}dy\right)d\varphi + \left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r^2}dx - \frac{\cos\varphi}{r^2}dy\right)dr =$$

$$= \frac{2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\, dx^2 - 2(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi)\, dx\, dy - 2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\, dy^2}{r^2}.$$

Ahora, de (41.115) obtendremos para d^2u

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}dr^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\, d\varphi}dr\, d\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}d\varphi^2 + \frac{\partial u}{\partial r}d^2r + \frac{\partial u}{\partial \varphi}d^2\varphi =$$

$$= \left(\cos^2\varphi\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) dx^2 + 2(\ldots)\,dx\,dy + (\ldots)\,dy^2.$$

De aquí se obtienen las expresiones para las segundas derivadas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ que intervienen como los coeficientes de dx^2, $2dx\,dy$ y dy^2.

Los métodos análogos son aplicables, por supuesto, en el caso en que se realiza algún otro cambio de variables $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, cuando se tienen derivadas de órdenes superiores y también cuando se trata de las funciones del mayor número de variables.

Ejercicio 22. Transfórmese la expresión $|\nabla u|^2$, donde $u = u(x, y)$ a las coordenadas ortogonales ξ, η, es decir, tales que

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\,\frac{\partial y}{\partial\eta} = 0.$$

23. Transfórmese la ecuación $y'' - xy'^3 + e^y y'^3 = 0$, considerando y como una nueva variable independiente y x, como una función de y.

24. En la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ pásese a las nuevas variables independientes $u = x + y$, $v = x - y$.

25. En la expresión $\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{1}{2}z\left(\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ pásese a las variables u, v, $w = w(u, v)$, si $u = x^2$, $v = y^2$, $w = z^2$ $\left(\text{respuesta: } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)$.

Problema 27. En un espacio n-dimensional transfórmese la expresión $|\nabla u|^2$, donde $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, reduciéndola a las coordenadas ortogonales $\xi_1, \ldots, \xi_n$, es decir, a tales coordenadas que para $i \neq k$ se verifica la igualdad

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial\xi_i}\,\frac{\partial x_j}{\partial\xi_k} = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

§ 42. DEPENDENCIA DE LAS FUNCIONES

42.1. CONCEPTO DE DEPENDENCIA DE LAS FUNCIONES. CONDICIÓN NECESARIA PARA LA DEPENDENCIA DE LAS FUNCIONES

Definición 1. *Sean dadas en el conjunto abierto $G \subset R^n$ las funciones continuamente derivables*

$$y_i = \varphi_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, m,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in G. \tag{42.1}$$

Si existen un conjunto abierto D en el espacio $R^{m-1}_{y_1, \ldots, y_{m-1}}$ y una función, continuamente derivable en D, $\Phi(y_1, \ldots, y_{m-1})$ tales que en todo punto $x \in G$ se cumplen las condiciones $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)) \in D$ y $\Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)) = \varphi_m(x)$, entonces la función φ_m se llama dependiente en el conjunto G de las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

Definición 2. *Si entre las funciones del sistema* (42.1) *hay una función, dependiente de las demás en el conjunto G, dicho sistema se denomina dependiente en el conjunto G.*

Si ninguna función del sistema (42.1) *depende de las restantes en el conjunto G, este sistema se llama independiente en G.*

A veces, para abreviar, en lugar de la expresión "sistema de funciones dependiente (independiente)" diremos simplemente "funciones dependientes (independientes)".

En la cuestión sobre la dependencia del sistema de funciones (42.1) el papel fundamental lo desempeña la matriz de Jacobi de este sistema

$$\left\|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right\|,\ i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{42.2}$$

i es el número de la fila y j, el número de la columna.

Teorema 1 (condición necesaria para la dependencia de las funciones). *Supongamos que $m \leqslant n$ y el sistema de funciones* (42.1) *es dependiente en un conjunto abierto G. Entonces, en todo punto de este conjunto el rango de la matriz de Jacobi* (42.2)*) *del sistema citado es inferior a m.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, el sistema de funciones (42.1) es dependiente en G, puesto que por lo menos una de estas funciones depende de las demás. Sea, para concretar, que φ_m depende de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$:

$$\varphi_m(x) = \Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)),\ x \in G,$$

donde Φ es una función continuamente derivable de $(m - 1)$ argumentos $y_1, \ldots, y_{m-1}$. De aquí

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\,\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \text{ para cualquier } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Esta fórmula muestra que la m-ésima fila de la matriz de Jacobi (42.2) en todo punto $x \in G$ es una combinación lineal de las filas restantes de esta matriz y, por lo tanto, el rango de la matriz de Jacobi (42.2) es inferior a m en todo punto $x \in G$. □

Corolario. *Supongamos que $m = n$ y el sistema de funciones* (42.1) *es depen-*

*) Recordemos que se llama rango de una matriz el número máximo de sus filas linealmente independientes. Este número coincide con el orden máximo del menor de dicha matriz distinto de cero.

diente en G. En este caso su jacobiano $\dfrac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ *es igual a cero en todos los puntos del conjunto G.*

Gorolario 2 (condiciones suficientes para la independencia de las funciones). *Supongamos que* $m \leqslant n$ *y el rango de la matriz de Jacobi* (42.2) *por lo menos en un punto del conjunto abierto G es igual a m. En este caso el sistema* (42.1) *es independiente en el conjunto G.*

El corolario 1 se obtiene inmediatamente del teorema demostrado cuando $m = n$.

El corolario 2 se demuestra con facilidad por reducción al absurdo.

Por cuanto las filas de la matriz de Jacobi (42.2) son coordenadas de los gradientes de la función (42.1), el teorema 1 puede parafrasearse del modo siguiente.

Si el sistema de funciones (42.1) *es dependiente en la región G, los gradientes* $\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_m$ *de estas funciones son linealmente dependientes en todo punto de G.*

42.2. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DEPENDENCIA DE LAS FUNCIONES

En este punto conservamos intactas las designaciones del párrafo anterior y supondremos, como hasta ahora, que las funciones (42.1) son continuamente derivables en el conjunto abierto $G \subset R^n$.

Teorema 2 (condiciones suficientes para la dependencia local de las funciones). *Supongamos que el rango de la matriz de Jacobi* (42.2) *del sistema de funciones* (42.1) *en cualquier punto del conjunto abierto G no es superior al número r,* $r < m \leqslant n$, *y en cierto punto* $x^{(0)} \in G$ *es igual a r, en otras palabras, existen tales variables* $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ *y las funciones* $y_{i_1} = \varphi_{i_1}(x), \dots, y_{i_r} = \varphi_{i_r}(x)$ *que*

$$\left.\frac{\partial(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_r})}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{42.3}$$

En este caso todas r funciones, que figuran en la condición (42.3), *son independientes en el conjunto G y existe un entorno del punto* $x^{(0)}$ *tal que cualquiera de* $m - r$ *funciones restantes depende en dicho entorno de las r funciones mencionadas.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para simplificar la anotación, que la condición (42.3) tiene por expresión

$$\left.\frac{\partial(y_1, \dots, y_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0 \tag{42.4}$$

(esto siempre puede lograrse, numerando, si se desea, las funciones y los argumentos del sistema (42.1) en el orden debido). De acuerdo con el corolario 2 del teorema 1 en el p. 42.1, las funciones $y_1, \dots, y_r$ son independientes en G.

Mostremos que cada una de las funciones restantes depende de ellas en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Sea $y_i^{(0)} = \varphi_i(x^{(0)})$, $i = 1, 2, \dots, m$. Examinemos el sistema de las primeras r funciones del sistema (42.1):

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_r &= \varphi_r(x_1, \dots, y_n)\,. \end{aligned} \tag{42.5}$$

Elijamos ante todo tal η_0 que todo punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ perteneciente a η_0-entorno cúbico del punto $x^{(0)}$, es decir, todo punto x, para el cual $|x_i - x_i^{(0)}| < \eta_0$, $i = 1, 2, \dots, n$, pertenezca al conjunto $G: x \in G$. Esto es siempre posible, pues el conjunto mencionado es abierto.

Luego, en virtud de la condición (42.4) y el teorema sobre las funciones implícitas (véase el p. 41.3), el sistema (42.5) es resoluble respecto de las variables $x_1, \dots, x_r$ en cierto entorno del punto $(x^{(0)}, y^{(0)})$:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r &= f_r(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{42.6}$$

Las funciones $f_1, \dots, f_r$ en este caso están definidas y son continuamente derivables en cierto entorno del punto $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

En la forma más amplia (si a título de entorno se toman los entornos cúbicos) esto significa lo siguiente: pueden escogerse tales números $\delta > 0$ y $\eta > 0$ (con el fin de comodidad, pueden ser incluso inferiores a η_0 : $\delta < \eta_0$, $\eta < \eta_0$) que si designamos con U el entorno cúbico del punto $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ prefijado por las desigualdades

$$|y_i - y_i^{(0)}| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad |x_j - x_j^{(0)}| < \delta, \quad j = r + 1, \dots, n$$

entonces

1) en el entorno U las funciones f_k, $k = 1, 2, \dots, r$, están definidas y son continuamente derivables;

2) para todos los puntos $(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n) \in U$ son válidas las desigualdades

$$|f_k(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n) - x_k^{(0)}| < \eta, \quad k = 1, 2, \dots, r;$$

3) en el entorno U se verifican las igualdades

$$\varphi_i(f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

donde por f_k, $k = 1, \dots, r$, se entienden los segundos miembros de las igualdades (42.6).

Consideremos una composición de funciones (42.6) y $\varphi_{r+1}(x_1, \dots, x_n)$, es decir, una función

$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \tag{42.7}$$

en la que $f_k = f_k(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$, $k = 1, \dots, r$. Esta función compuesta está definida a ciencia cierta y es continuamente derivable en el entorno cúbico U, mencionado arriba, del punto

$$(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_{r+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Probemos que, realmente, la función (42.7) en este entorno U no depende de las variables $x_{r+1}, \dots x_n$, es decir, no varía cuando cambian las variables citadas y, consecuentemente, es, de hecho, sólo función de las variables $y_1, \dots, y_r$. Con este objeto basta mostrar que para la función (42.7) en el entorno U se verifica la igualdad

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = 0, j = r + 1, \dots, n \tag{42.8}$$

(véase el p. 20.4 o la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange en el p. 39.2, de la cual se deduce directamente la suficiencia de la condición (42.8) para que una función sea independiente de las variables $x_{r+1}, \dots, x_n$ en una región convexa y, por consiguiente, en un entorno cúbico).

Para demostrar la igualdad (42.8), fijemos uno de los valores $j (j = r + 1, \dots, n)$ y las coordenadas x_k cuyos índices k toman los valores $r + 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, n$; designémoslas mediante x_k^* y elijamos x_k^* de una manera tal que sea $|x_k^* - x_k^{(0)}| < \delta$, $k = r + 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, n$.

Consideraremos una aplicación

$$\begin{gathered} y_1 = y_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_r = y_r, \\ y_{r+1} = \varphi_{r+1}(f_1^*, \dots, f_r^*, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*), \end{gathered} \tag{42.9}$$

donde $f_k^* = f_k(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*)$, del entorno cúbico $U^{(j)}$del punto $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)})$ que se define por las desigualdades

$$|y_k - y_k^{(0)}| < \delta, k = 1, 2, \dots, r, \; |x_j - x_j^{(0)}| < \delta.$$

Para subrayar cuáles son precisamente las variables que cambian, representemos simbólicamente la aplicación (42.9) en la forma

$$(y_1, \dots, y_r, x_j) \to (y_1, \dots, y_r, y_{r+1}).$$

Esta aplicación es continuamente derivable en $U^{(j)}$; su matriz de Jacobi tiene por expresión

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial y_2} & \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial y_r} & \dfrac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} \end{Vmatrix}$$

y, por esta razón

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(y_1, \dots, y_r, x_j)} = \frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j}, \tag{42.10}$$

es decir, el jacobiano de la aplicación en consideración es igual a la derivada que nos interesa.

En el entorno $U^{(j)}$ esta aplicación puede representarse como composición de dos aplicaciones: de la aplicación continuamente derivable

$$\begin{gathered} x_1 = f_1(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = f_r(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*), \\ x_j = x_j \end{gathered}$$

del entorno $U^{(j)}$ y la aplicación continuamente derivable

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_r = \varphi_r(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*), \\ y_{r+1} = \varphi_{r+1}(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*) \end{gathered}$$

del entorno del punto $(x_1^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}, x_j^{(0)})$ definido mediante las desigualdades

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \eta, i = 1, 2, \dots, r, \; |x_j - x_j^{(0)}| < \delta.$$

Por ser adecuadamente elegidos los números δ y η, la composición de estas aplicaciones la que con los fines ilustrativos puede ser representada en la forma

$$(y_1, \dots, y_r, x_j) \to (x_1, \dots, x_r, x_j) \to (y_1, \dots, y_r, y_{r+1}),$$

está definida y es continuamente derivable en el entorno $U^{(j)}$. La primera de estas aplicaciones es continuamente derivable en el entorno $U^{(j)}$ del punto $(y_1^{(0)}, \dots, y_r^{(0)}, x_j^{(0)})$ y la segunda es continuamente derivable en el entorno correspondiente del punto $(x_1^{(0)}, \dots, x_r^{(0)}, x_j^{(0)})$. Por ello, de (42.10) y de las propiedades de los jacobianos de aplicaciones (véase el p. 41.7) tenemos

$$\frac{\partial y_{r+1}}{\partial x_j} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(y_1, \dots, y_r, x_j)} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \dots, x_r, x_j)} \frac{\partial(x_1, \dots, x_r, x_j)}{\partial(y_1, \dots, y_r, x_j)}. \tag{42.11}$$

De acuerdo con la condición del teorema, el rango de la matriz de Jacobi en el conjunto G es igual o inferior a r, por consiguiente,

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_r, y_{r+1})}{\partial(x_1, \dots, x_r, x_j)} = 0$$

en todo punto de G. Por ello, de (42.11) se desprende en seguida que para cualquier punto $(y_1, \dots, y_r, x_j) \in U^{(j)}$ y, por ende, para todo punto

$$(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}^*, \dots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \dots, x_n^*) \in U$$

se verifica la igualdad (42.8). Puesto que las coordenadas x_k^* se han fijado arbitrariamente, con tal de que sea $|x_k^* - x_k^{(0)}| < \delta$, $k = r + 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, n$, esto quiere decir que la igualdad (42.8) es justa en todo el entorno U.

De este modo, la función (42.7) depende sólo de las variables $y_1, \dots, y_r$. Al designarla por el símbolo Φ, obtendremos

$$\varphi_{r+1}(f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = \Phi(y_1, \dots, y_r).$$

Elijamos ahora δ_0, $\delta_0 < \delta$ y $\delta_0 < \eta$, de una manera tal que para $|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_0$, $i = 1, 2, \dots, n$, se cumplan las desigualdades

$$|y_i - y_i^{(0)}| < \delta, j = 1, 2, \dots, r.$$

Esto es posible, puesto que las funciones $y_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, 2, \dots, r$, del sistema (42.5) son continuas en el punto $x^{(0)}$.

En virtud de lo demostrado, para cualquier punto x del entorno δ_0-cúbico del punto $x^{(0)}$, es decir, para todo punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ tal que

$$|x_i - x_i^{(0)}| < \delta_0, i = 1, 2, \dots, n,$$

será válida la identidad

$$\varphi_{r+1}(x) = \Phi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)),$$

es decir, en el entorno citado del punto $x^{(0)}$ las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}$ son dependientes.

Análogamente se demuestra también la dependencia de cada una de las funciones $\varphi_{r+2}, \dots, \varphi_m$ de $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ en cierto entorno del punto $x^{(0)}$. □

Al igual que la condición necesaria para la dependencia de las funciones, las condiciones suficientes pueden enunciarse también en términos de los gradientes. Para simplificar, limitémonos al caso en que $r = m - 1$.

Si los gradientes $\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_m$ son linealmente dependientes en todo punto de la región G, entonces, cualquiera que sea el punto $x \in G$ en el que $m - 1$ de los gradientes mencionados son linealmente independientes, existe un entorno suyo en el cual las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ son dependientes. Además, si, por ejemplo, los gradientes $\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_{m-1}$ son linealmente independientes en el punto dado y, por lo tanto, el gradiente $\nabla\varphi_m$ en él es una combinación lineal de ellos, entonces en el entorno mencionado la función φ_m depende de las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$.

Conviene fijar la atención en que las condiciones suficientes para la dependencia de las funciones, establecidas aquí, tienen un carácter local, a diferencia de los resultados del punto anterior que son de carácter global. Esto significa lo siguiente: si un sistema de m funciones continuamente derivables (42.1) es dependiente en el conjunto abierto $G \subset R^n$, entonces, de acuerdo con el teorema 1 del p. 42.1, en *todo* punto de dicho conjunto el rango de la matriz de Jacobi de este sistema es inferior a m (correspondientemente, si por lo menos en un punto del cunjunto G el rango de la matriz que se considera es igual a m, el sistema es independiente en *todo* el conjunto G). En cuanto al teorema 2 de este punto, se debe decir que éste sólo afirma que si en algún punto $x^{(0)} \in G$ se cumplen sus condiciones, el sistema dado de funciones será dependiente sólo en *cierto entorno* del punto citado (y no en todo el conjunto G). De este modo, efectivamente, la afirmación del teorema 2 tiene un carácter local.

Diremos, además, que si en *todo* punto $x^{(0)}$ del conjunto abierto G se cumplen las condiciones del teorema 2, entonces, naturalmente, en este caso, el sistema de funciones en consideración será dependiente en cierto entorno de todo punto. No obstante, el teorema 2 no garantiza que dicha dependencia será la misma en todos los entornos indicados, es decir, del teorema 2 no se infiere que en diferentes puntos unas mismas funciones serán dependientes de las otras y que las funciones Φ que "cristalizan en realidad" la dependencia de unas mismas funciones, consideradas en distintos entornos, serán coincidentes en los puntos de intersección de estos entornos. Por consiguiente, del teorema 2 no se infiere ni mucho menos que el sistema de funciones que satisface las condiciones de este teorema en todos los puntos $x^{(0)}$ del conjunto G será dependiente en todo el conjunto G en su total en el único sentido, es decir, en el sentido de la definición 1. Esto precisamente sirve de testimonio de que el teorema 2 no lleva el carácter global.

Observemos que existe un acceso algo más general al concepto de dependencia de las funciones que permite construir la teoría global de este problema, sin embargo no nos detendremos en ello.

Ejemplo. Examinemos un sistema de funciones

$$u = \operatorname{sen}(x + y)$$

$$v = \cos(x + y). \tag{42.12}$$

El jacobiano de este sistema es nulo en todo el plano

$$\begin{vmatrix} \cos(x + y) & \cos(x + y) \\ -\operatorname{sen}(x + y) & -\operatorname{sen}(x + y) \end{vmatrix} = 0,$$

y, como es fácil de ver, el rango de la matriz de Jacobi de este sistema es igual a uno en todos los puntos del plano.

Según el teorema 2, las funciones (42.12) son dependientes en el entorno de cada punto del plano. En el caso dado la dependencia de las funciones se halla fácilmente en la forma explícita, por ejemplo, en el conjunto abierto de los puntos (x, y), para los cuales $\cos(x + y) > 0$, ella puede ser dada por la fórmula $v = \sqrt{1 - u^2}$.

Ejercicios. 1. Sean $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = xy + yz + zx$, $w = x + y + z$. Demuéstrese que las funciones u, v, w son dependientes y hállese la ecuación que expresa su dependencia.

2. Investíguese la cuestión sobre la dependencia de las funciones $u = \xi^3 + \eta^3 + \zeta^3$, $v = \xi\eta\zeta$, $w = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, $z = \xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi$.

Problema 28. Una función $u = u(x, y)$ se denomina armónica en una región plana, si en todos los puntos de esta región satisface la ecuación $\Delta u = 0$ (véase (41.109)). Demuéstrese que dos funciones armónicas son dependientes en una región plana cuando, y sólo cuando son linealmente dependientes.

§ 43. EXTREMO CONDICIONADO

43.1. CONCEPTO DE EXTREMO CONDICIONADO

Supongamos que en un conjunto abierto $G \subset R^n$ vienen definidas las funciones

$$y_i = f_i(x), i = 1, 2, \dots, m, \tag{43.1}$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in G$. Designemos mediante X un conjunto de los puntos $x \in G$, donde todas las funciones f_i, $i = 1, 2, \dots, m$ se reducen a cero:

$$X = \{x: f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m, x \in G\}. \tag{43.2}$$

Las ecuaciones

$$f_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m, \tag{43.3}$$

se llamarán *ecuaciones de conexión (enlace).*

Definición 1. *Sea* $y = f_0(x)$ *una función definida en G. El punto* $x^{(0)} \in X$ *se llama punto de extremo condicionado**) *de la funcion* $f_0(x)$ *respecto de las ecuaciones de enlace* (43.3) *(o si se cumplen dichas ecuaciones), siempre que es un punto de extremo ordinario de esta función al considerarse ésta sólo en el conjunto X* (véase el p. 40.1).

En otras palabras, el valor de la función $f_0(x)$ en el punto $x^{(0)}$ se compara aquí no con todos los valores suyos en un entorno suficientemente pequeño de este punto, sino sólo con los valores en los puntos pertenecientes, a la vez, al mencionado entorno suficiente pequeño y al conjunto X. Al igual que en el caso de los extremos ordinarios, podemos, desde luego, considerar los puntos de extremo simplemente condicionado y los de extremo estrictamente condicionado.

Ejemplos. 1. Consideraremos una función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \tag{43.4}$$

y la ecuación de enlace

$$x + y - 1 = 0. \tag{43.5}$$

Hallemos el extremo condicionado de la función (43.4) para el caso en que se cumple la ecuación de enlace (43.5). De (43.5) tenemos $y = 1 - x$, de donde

$$f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

De este modo, cuando se cumple la condición de enlace, la función (43.4) es una función de una sola variable. Su extremo se halla de una manera elemental: igualando a cero su derivada (la condición necesaria de un extremo), obtenemos $2x - 1 = 0$, de donde $x = \frac{1}{2}$. En el punto dado la función que se considera, tiene, evidentemente, un mínimo (la función es un polinomio de segundo grado cuyo término mayor tiene coeficiente positivo). Al valor $x = \frac{1}{2}$, de conformidad con la ecuación de enlace (43.5), le corresponde $y = \frac{1}{2}$.

Por consiguiente, en el punto (1/2, 1/2) la función (43.4) alcanza su mínimo respecto de la ecuación de enlace (43.5). En el lenguaje geométrico esto significa que el punto del paraboloide $z = x^2 + y^2$, que se proyecta en el punto (1/2, 1/2), es el más inferior de todos sus puntos dispuestos por encima de la recta (43.5) (fig. 169). Este ejemplo muestra que un punto en el que la función alcanza su extremo condicionado, no es, en el caso general, punto de extremo de esta función.

2. Consideraremos la función $f(x, y) = y^2 - x^2$ y la ecuación de enlace $y = 2x$.

Tenemos $f(x, 2x) = 3x^2$, es decir, si se cumplen las ecuaciones de enlace, la función en consideración es también una función de una sola variable y, evidentemente, alcanza su mínimo cuando $x = 0$ (fig. 170). De conformidad con la ecuación de enlace, al valor $x = 0$ corresponde el valor de $y = 0$, y, por lo tanto, la función $f(x, y) = y^2 - x^2$ tiene en el punto (0, 0) un mínimo condicionado respecto de la ecuación de enlace $y = 2x$.

*) Se ha adoptado también el término "extremo relativo".

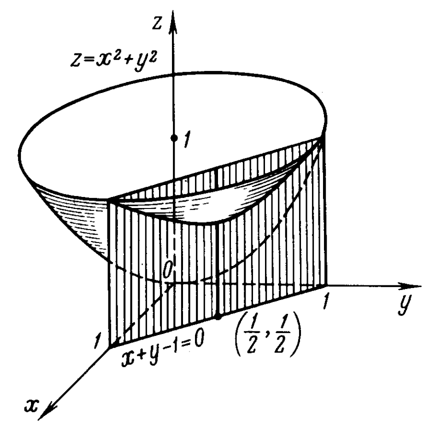


Fig. 169

Cabe destacar que en este caso la propia función $f(x, y)$ no tiene máximo ni mínimo en ningún punto del plano. De este modo, el ejemplo considerado muestra que la función puede no tener un extremo, pero, para ciertas ecuaciones de enlace, puede tener un extremo condicionado.

En lo sucesivo supondremos que

1) todas las funciones $f_0, f_1, \ldots, f_m$ son continuamente derivables en el conjunto abierto G;

2) en el punto $x^{(0)}$ que se considera, los vectores $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ son linealmente independientes, es decir, el rango de la matriz de Jacobi

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right), j = 1, 2, \ldots, m, i = 1, 2, \ldots, n,$$

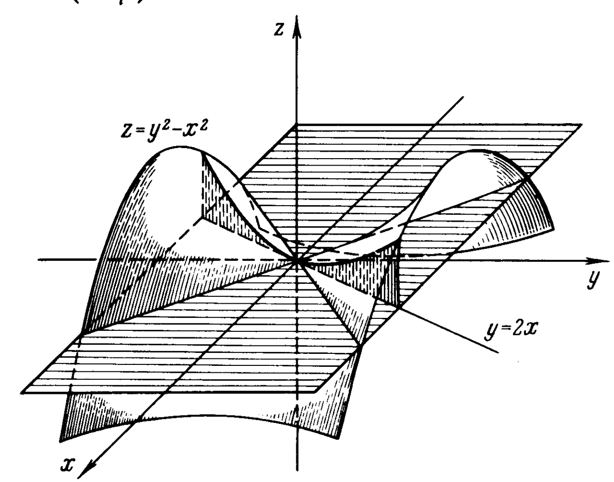


Fig. 170

es igual a m, o sea, al número de sus filas (las filas de la matriz de Jacobi son componentes de los gradientes $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$).

De acuerdo con los resultados del párrafo anterior, esto significa que las funciones del sistema (43.1) son independientes en cierto entorno del punto $x^{(0)}$. Por cuanto en un espacio n-dimensional no pueden haber más de n vectores linealmente independientes y el rango de la matriz no puede exceder del número de columnas, entonces, de la condición 2) proviene que $m \leqslant n$.

Conforme a la condición 2), en el punto $x^{(0)}$ al menos uno de los determinantes del tipo

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})}$$

es distinto de cero. Supongamos, para concretar, que en el punto $x^{(0)}$

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \neq 0. \tag{43.6}$$

Entonces, en virtud del teorema sobre las funciones implícitas (véase el p. 41.3), el sistema de ecuaciones (43.3) en cierto entorno del punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ puede resolverse respecto de las variables $x_1, \dots, x_m$:

$$\begin{array}{c} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{array} \tag{43.7}$$

Al sustituir los valores de $x_1, \dots, x_m$, proporcionados por las fórmulas (43.7), en $y = f_0(x)$, es decir, al examinar la composición de las funciones f_0 y $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, obtendremos una función

$$y = f_0(\varphi_1(x_{m+1}, \dots x_n), \dots, \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=} g(x_{m+1}, \dots, x_n) \tag{43.8}$$

de $n - m$ variables $x_{m+1}, \dots, x_n$ que está definida y es continuamente derivable en cierto entorno del punto $\tilde{x}^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ en el espacio $(n-m)$-dimensional R^{n-m}

Como, de acuerdo con el teorema sobre las funciones implícitas, las condiciones (43.3) y (43.7) son equivalentes, resulta válida la siguiente afirmación.

El punto $x^{(0)}$ es un punto de extremo condicionado (estricto) para la función $f_0(x)$ respecto de las ecuaciones de enlace (43.3) *cuando, y sólo cuando, $\tilde{x}^{(0)}$ sea un punto de extremo ordinario (estricto) de la función* (43.8).

Si $\tilde{x}(0)$ es un punto de extremo ordinario de la función g, será el punto estacionario de esta función (véase el p. 40.1):

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0. \tag{43.9}$$

Recordemos que la diferencial es una función homogénea lineal y el hecho de que ella es nula significa que es nula dicha función, cualesquiera que sean los valores de sus argumentos, en el caso dado, para cualesquiera $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$. Esto es factible, evidentemente, cuando y sólo cuando, todos los coeficientes de los

argumentos citados, es decir, las derivadas $\dfrac{\partial g}{\partial x_{m+k}}$, $k = 1, 2, \dots n - m$, se anulan en el punto $x^{(0)}$. La condición (43.9) es necesaria para que en el punto $x^{(0)}$ haya un extremo condicionado.

De este modo, el método, basado en la resolución del sistema de ecuaciones (43.3), permite reducir el problema de búsqueda del extremo condicionado al problema, ya estudiado, sobre un extremo ordinario. Precisamente este procedimiento se ha empleado en los ejemplos considerados más arriba. Sin embargo, resulta a menudo imposible o muy embarazoso expresar la solución del sistema (43.3) en términos de las funciones elementales, razón por la cual es deseable disponer de un método que permita hallar el extremo condicionado sin resolver el sistema (43.3). Tal método va expuesto más abajo.

43.2. MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE PARA BUSCAR LOS PUNTOS DE EXTREMO CONDICIONADO

En este punto se supondrá que todas las funciones $f_0, f_1, \dots, f_m$ son continuamente derivables en el conjunto abierto G.

Teorema 1. *Sea $x^{(0)}$ un punto de extremo condicionado de la función f_0, cumpliéndose las ecuaciones de enlace* (43.3). *En este punto los gradientes ∇f_0, $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ son linealmente dependientes, es decir, existen tales números λ_0, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, de los cuales no todos son nulos, que*

$$\lambda_0 \nabla f_0 + \lambda_1 \nabla f_1 + \dots + \lambda_m \nabla f_m = 0. \tag{43.10}$$

Corolario. *Si en el punto $x^{(0)}$ de extremo condicionado de la función f_0 respecto de las ecuaciones de enlace* (43.3) *los gradientes $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ son linealmente independientes, es decir, el rango de la matriz de Jacobi*

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right), j = 1, 2, \dots, m \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

es igual a m, entonces existen tales $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ que en dicho punto

$$\nabla f_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla f_j = 0, \tag{43.11}$$

es decir, ∇f_0 es una combinación lineal de los gradientes $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$.

En la forma coordenada esta condición tiene por expresión: para cualquier $i = 1, 2, \dots, n$ en el punto $x^{(0)}$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0. \tag{43.12}$$

La función

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x), \tag{43.13}$$

donde los números $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ satisfacen la condición (43.12), se llama *función de Lagrange* del problema en consideración y los propios números, *multiplicadores de Lagrange*.

La condición (43.12) significa que si $x^{(0)}$ es un punto de extremo condicionado de la función f_0 respecto de la ecuación de enlace (43.3), será punto estacionario para la función de Lagrange, es decir,

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n. \tag{43.14}$$

Antes de demostrar el teorema aclaremos su sentido y mostremos cómo usarlo para la obtención de los puntos de extremo condicionado. Ante todo fijemos la atención en que en la función del tipo (43.13), para los números arbitrarios $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, cualquier punto de su extremo condicionado es a la vez el punto de extremo condicionado de la función de partida f_0, y viceversa. Elijamos tales valores de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ que se cumplan las condiciones (43.12), es decir, que el punto dado de extremo condicionado resulte ser también el punto estacionario de la función (43.11).

Para la obtención de los puntos de extremo condicionado, conviene considerar un sistema de $n + m$ ecuaciones (43.3) y (43.10) respecto de las incógnitas $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ y resolverlo (si esto es factible), hallando $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ y eliminando, cuanto sea posible, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. El teorema enunciado afirma que todos los puntos de extremo condicionado estarán entre los puntos $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, determinados de este modo. La cuestión de qué puntos entre los mencionados serán realmente puntos de extremo condicionado requiere unas investigaciones adicionales; algunos razonamientos referentes a esta cuestión serán aducidos en el p. 43.5*.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Demostremos una afirmación que es equivalente al teorema: si en el punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ que satisface las ecuaciones de enlace

$$f_k(x^{(0)}) = 0, k = 1, 2, \dots, m, \tag{43.15}$$

los gradientes $\nabla f_0, \nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ son linealmente independientes, entonces $x^{(0)}$ no es el punto de extremo condicionado.

Así pues, sean $\nabla f_0, \nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ linealmente independientes y, por consiguiente, el rango de la matriz de Jacobi $\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\right), j = 0, 1, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n$, es igual a $m + 1$. Entonces, en dicha matriz existe un menor de orden $m + 1$ distinto de cero. Para concretar, convengamos en considerar que el menor se ha formado por las primeras $m + 1$ columnas, es decir,

$$\left.\frac{\partial(f_0, f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})}\right|_{x = x^{(0)}} \neq 0. \tag{43.16}$$

El conjunto G es abierto, por lo cual existe tal $\delta_0 > 0$, que para todo δ, $0 < \delta < \delta_0$, el cubo

$$Q^n{}_\delta = \{x : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta, i = 1, 2, \dots, n\}$$

se dispone dentro de G y, por ende, en este cubo están definidas todas las funciones $f_0, f_1, \dots, f_m$.

Fijemos $x_{m+2} = x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$ e introduzcamos las designaciones

$$x^* = (x_1, \dots, x_{m+1})$$

$$Q_\delta^{m+1} = \{x^* : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta, i = 1, 2, \dots, m + 1\}.$$

Obviamente, las funciones $f_j(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}), j = 0, 1, \dots, m$, están definidas y son continuamente derivables en todo punto de Q_δ^{m+1}. Consideraremos una aplicación Φ: $Q_\delta^{m+1} \to R^{m+1}$, definida por las fórmulas

$$\begin{aligned} y_1 &= f_0(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ y_2 &= f_1(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{m+1} &= f_{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}). \end{aligned} \tag{43.17}$$

En vista de (43.16), para el punto $x^{*(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_{m+1}^{(0)})$ tenemos

$$\left.\frac{\partial(y_1, \dots, y_{m+1})}{\partial(x_1, \dots, x_{m+1})}\right|_{x^* = x^{*(0)}} = \left.\frac{\partial(f_0, f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})}\right|_{x = x^{(0)}} \neq 0,$$

y debido a (43.15),

$$\Phi(x^{*(0)}) = (f_0(x^{(0)}), 0, \dots, 0).$$

Por ello, (véase el teorema 7 en el p. 41.8 sobre la invertibilidad local de la aplicación continuamente derivable en un punto, donde su jacobiano es distinto de cero) existe tal $\varepsilon > 0$ que en el entorno

$$V = \{y = (y_1, \dots, y_{m+1}) : |y_1 - f_0(x^{(0)})| < \varepsilon, |y_j| < \varepsilon, j = 2, 3, \dots, m + 1\}$$

(fig. 171) está definida una aplicación inversa respecto de Φ, y, por lo tanto, en cualquier punto de este entorno se aplica algún punto de Q_δ^{m+1}.

En particular, puesto que para cualquier η, $0 < \eta < \varepsilon$, tiene lugar la inclusión $(f(x^{(0)}) \pm \eta, 0, \dots, 0) \in V$, entonces en el cubo Q_δ^{m+1} existen los puntos $x'^* = (x_1', \dots, x_{m+1})$ y $x''^* = (x_1', \dots, x_{m+1})$ que, realizándose la aplicación Φ, se aplican en los puntos indicados del entorno V:

$$\Phi(x'^*) = (f(x^{(0)}) + \eta, 0, \dots, 0), \Phi(x''^*) = (f(x^{(0)}) - \eta, 0, \dots, 0).$$

Si ponemos, para abreviar, $x' = (x_1', \dots, x_{m+1}', x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ y $x'' = (x_1'', \dots, x_{m+1}'', x_{m+2}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, entonces en la inscripción coordenada obtendremos (véase (43.17)):

$$f_0(x') = f_0(x^{(0)}) + \eta > f(x^{(0)}),$$

$$f_k(x') = 0, k = 1, 2, \dots, m, x' \in Q_\delta^n$$

y

$$f_0(x'') = f_0(x^{(0)}) - \eta < f(x^{(0)}),$$

$$f_k(x'') = 0, k = 1, 2, \dots, m, x'' \in Q_\delta^n.$$

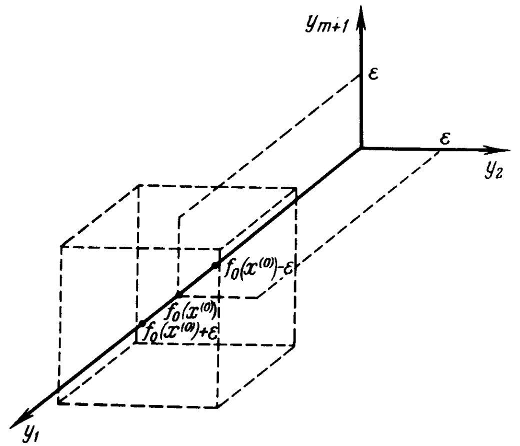


Fig. 171

Puesto que $\delta > 0$, $0 < \delta < \delta_0$, es arbitrario, esto es indicio de que $x^{(0)}$ no es el punto de extremo condicionado. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Si los vectores $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ son linealmente independientes, en la igualdad (43.10) tenemos $\lambda_0 \neq 0$, puesto que si fuera $\lambda_0 = 0$, los vectores mencionados serían, en virtud de (43.10), linealmente dependientes. Al dividir ambos miembros de (43.10) por λ_0, obtendremos una igualdad del tipo (43.11). □

43.3*. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL MÉTODO DE LAGRANGE

Daremos ahora algunas explicaciones geométricas al teorema 1. Consideraremos, para no complicar, el caso de un extremo condicionado de la función de dos variables $z = f(x, y)$ verificándose la ecuación de enlace $\varphi(x, y) = 0$.

Supongamos que las funciones f y φ son continuamente derivables en el entorno del punto (x_0, y_0), $\nabla\varphi(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial y}\right) \neq 0$ y $\varphi(x_0, y_0) = 0$. En vista de la condición $\nabla\varphi(x_0, y_0) \neq 0$, de acuerdo con el teorema sobre las funciones implícitas, la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ en el entorno del punto (x_0, y_0) define cierta curva suave cuya representación explícita tiene por expresión o bien $y = y(x)$, o bien $x = x(y)$. Por cuanto nos interesan sólo los puntos suficientemente próximos a (x_0, y_0), la curva mencionada se llamará simplemente curva $\varphi(x, y) = 0$ (es decir, en otras palabras, en lo que sigue se considerará siempre la restricción de las funciones f y φ al entorno indicado del punto (x_0, y_0)).

El gradiente $\nabla\varphi(x_0, y_0)$ es una normal a la curva $\varphi(x, y) = 0$ en el punto (x_0, y_0) (p. 20.6). Designemos con τ el vector unidad tangente a la curva $\varphi(x, y)$ en el punto (x_0, y_0). Supongamos, para concretar, que la curva en consideración se da por la

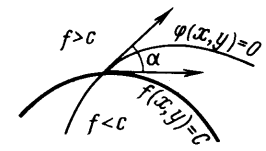


Fig. 172

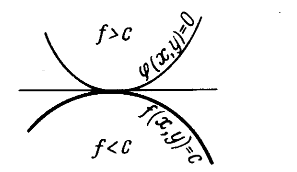


Fig. 173

ecuación $y = y(x)$. Si el punto (x_0, y_0) es un punto de extremo condicionado, entonces x_0 es un punto de extremo ordinario para la funcion $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, g(x))$ (véase el p. 43.1), y, por lo tanto, $g'(x) = 0$, es decir, la derivada de la función f en el punto (x_0, y_0) según la dirección de la curva $\varphi(x, y) = 0$, o bien, que es lo mismo (véase el p. 20.7), según la dirección del vector τ, es igual a cero

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \tau} = (\nabla f(x_0, y_0), \tau) = 0.$$

Esto significa la ortogonalidad del gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ y del vector tangente τ, lo que es equivalente al carácter colineal de los vectores $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla\varphi(x_0, y_0)$:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda\nabla\varphi(x_0, y_0),$$

es decir, se cumple la condición (43.11). El cumplimiento de esta condición en el punto de extremo condicionado puede explicarse también de otro modo. Sea $f(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} c$. Si en el punto (x_0, y_0) no se cumple la condición (43.11), es decir, cuando los gradientes ∇f y $\nabla\varphi$ no son colineales, esto significa que en dicho punto $\nabla f \neq 0$ y la línea de nivel $f(x, y) = c$ corta en este punto la curva $\varphi(x, y) = 0$, haciendo con ésta cierto ángulo α, distinto de 0 y π (fig. 172). Por eso en todo entorno suficientemente pequeño del punto (x_0, y_0) una parte de la curva $\varphi(x, y) = 0$ resultará ser dispuesta en el dominio $f < c$ ("en el dominio de los valores menores") y otra parte, en el dominio $f > c$ ("en el dominio de los valores mayores"). Esto significa que en el punto (x_0, y_0) no hay extremo condicionado de que se trata.

En el caso en que los vectores ∇f y $\nabla\varphi$ sean colineales, $\nabla f = \lambda\nabla\varphi$, una parte de la curva $\varphi(x, y) = 0$ puede pertenecer a cierto entorno del punto (x_0, y_0), íntegramente dispuesto en el dominio de valores menores $f < c$ (fig. 173) o bien en el dominio de valores mayores $f > c$. En este caso en el punto (x_0, y_0) se alcanza un extremo condicionado.

Sin embargo, siendo colineales los vectores ∇f y $\nabla\varphi$ la curva $\varphi(x, y) = 0$ puede también disponerse en cualquier entorno suficientemente pequeño del punto (x_0, y_0), con la particularidad de que una parte de dicha curva se dispondrá en el dominio de valores menores y la otra parte, en el de valores mayores de la función f (fig. 174); en este caso en el punto (x_0, y_0) tampoco habrá extremo condicionado. Una situación semejante aparece, por ejemplo, cuando las curvas $f(x, y) = c$ y $\varphi(x, y) = 0$ tienen en el punto (x_0, y_0) una tangente común, con la particularidad de que la curva $f(x, y) = c$ está dispuesta en un entorno suficientemente pequeño del punto (x_0, y_0) por un lado de la tangente mencionada, mientras que la curva $\varphi(x, y) = 0$ sufre inflexión en dicho punto, pasando de un lado de la tangente al otro lado.

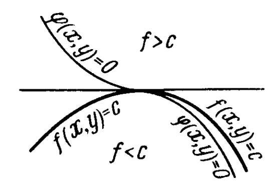


Fig. 174

Lo dicho aclara aquella circunstancia que (43.10) es una *condición necesaria* para que haya extremo condicionado, *pero no suficiente*.

Los razonamientos geométricos aducidos referentes a la cuestión acerca del extremo condicionado quedan válidos también en el caso multidimensional.

43.4*. PUNTOS ESTACIONARIOS DE LA FUNCIÓN DE LAGRANGE

Se dará aquí la descripción de los puntos estacionarios de la función de Lagrange (43.13) por medio de la función $g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ introducida en el p. 43.1 (véase (43.8)). Demostremos previamente un lema sencillo conocido del curso de álgebra lineal.

Sea dado un sistema de ecuaciones homogéneas lineales

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0, i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.18}$$

y una ecuación homogénea lineal más

$$b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0. \tag{43.19}$$

El sistema de ecuaciones obtenido por adición de la ecuación (43.19) al sistema (43.18) se denominará *sistema ampliado* (43.18)—(43.19).

Lema. *Para que el sistema ampliado* (43.18) — (43.19) *sea equivalente al sistema básico* (43.18), *es necesario y suficiente que la ecuación* (43.19) *sea una combinación lineal del sistema de ecuaciones* (43.18).

Corolario. *Para que la ecuación* (43.19) *sea una combinación lineal de las ecuaciones* (43.18) *o bien, que es lo mismo, para que el vector*

$$b \stackrel{\text{def}}{=} (b_1, \ldots, b_n) \tag{43.20}$$

constituya una combinación lineal de los vectores

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i1}, \ldots, a_{in}), i = 1, 2, \ldots, m, \tag{43.21}$$

es necesario y suficiente que toda solución del sistema (43.18) *sea la solución de la ecuación* (43.19).

DEMOSTRACION DEL LEMA. Supongamos que el rango de la matriz (a_{ij}) de los coeficientes del sistema (43.18) es igual a m_0. Es evidente que $m_0 \leqslant m$. Si $m_0 < m$, entonces $m - m_0$ ecuaciones del sistema (43.18) son combinaciones lineales de las demás. Al desechar aquellas $m - m_0$ ecuaciones lineales que son combinaciones lineales de las restantes, obtendremos un sistema de m_0 ecuaciones linealmente independientes equivalente al sistema (43.18), con la particularidad de que la ecuación

(43.19) constituye una combinación lineal de las ecuaciones del sistema (43.18) cuando, y sólo cuando, es una combinación lineal del sistema mencionado formado por m_0 ecuaciones restantes. Por eso, desde el mismo principio convengamos en considerar que $m = m_0$, es decir, que el rango de la matriz (a_{ij}) de los coeficientes del sistema (43.18) es igual a m, es decir, al número de ecuaciones de este sistema.

Supongamos que los sistemas (43.18) y (43.18) — (43.19) son equivalentes. Esto significa que los espacios de sus soluciones coinciden. Por cuanto todas las ecuaciones del sistema básico (43.18) figuran en el sistema ampliado (43.18) — (43.19), toda solución del sistema ampliado será también la solución del sistema básico, es decir, el espacio de soluciones del sistema ampliado está contenido en el espacio de soluciones del sistema básico. Por consiguiente, la coincidencia de estos espacios equivale a la igualdad de sus dimensiones.

La dimensión s del espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneas lineales es igual, como se sabe, al número de las incógnitas n de dicho sistema, del cual se ha sustraído el rango r de la matriz de los coeficientes del sistema: $s = n - r$. De aquí se deduce que la equivalencia de los sistemas (43.18) y (43.18)—(43.19) implica la igualdad de los rangos de sus matrices. El rango de la matriz de los coeficientes del sistema (43.18) es igual, por hipótesis, a m, es decir, los vectores (43.21) son linealmente independientes.

El rango de la matriz de los coeficientes del sistema ampliado (48.18) — (43.19), de acuerdo con lo expuesto en nuestras condiciones, es también igual a m. Por ello, los vectores (véanse (43.20) y (43.21))

$$b, a_1, \ldots, a_m \tag{43.22}$$

son linealmente dependientes. Esto es indicio de que b es una combinación lineal de los vectores $a_1, \ldots, a_m$.

Efectivamente, la dependencia lineal de los vectores (43.22) significa que existen tales números $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m$, no todos nulos, que

$$\mu_0 b + \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_m a_m = 0. \tag{43.23}$$

Aquí, a ciencia cierta, $\mu_0 \neq 0$, puesto que de lo contrario los vectores $a_1, \ldots, a_m$ resultarían ser linealmente dependientes. Al dividir la igualdad (43.23) por μ_0, llegamos a que b es una combinación lineal de los vectores $a_1, \ldots, a_m$.

Viceversa, si b es una combinación lineal de los vectores (43.21), entonces los sistemas de vectores (43.21) y (43.22) tienen cada uno exactamente m vectores linealmente independientes, es decir, los rangos de las matrices de los coeficientes de los sistemas de ecuaciones (43.18) y (43.18) — (43.19) son iguales.

Así pues, la condición de que el vector b es una combinación lineal de los vectores (43.21):

$$b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m$$

es equivalente a la igualdad de rangos de las matrices de los coeficientes de los sistemas básico y ampliado en consideración y, por consiguiente, significa su equivalencia. □

La afirmación del corolario proviene seguidamente del lema, ya que los sistemas (43.18) y (43.18) — (43.19) son, evidentemente equivalentes cuando, y sólo cuando, toda solución del sistema (43.18) es, a la vez, la solución del sistema (43.19); las demás ecuaciones de estos sistemas son simplemente coincidentes. □

OBSERVACIÓN 1. El lema demostrado y sus corolarios tienen una sencilla interpretación geométrica en el espacio vectorial *euclídeo* n-dimensional R^n, es decir, en un espacio n-dimensional provisto de un producto escalar. Haciendo uso de la designación del producto escalar, el sistema (43.18) puede escribirse en la forma

$$(a_i, x) = 0, i = 1, 2, \dots, m, \tag{43.24}$$

y la ecuación (43.19), en la forma

$$(b, x) = 0, \tag{43.25}$$

donde los vectores $a_1, \dots, a_m$ y b están definidos en (43.20) y (43.21), mientras que $x = (x_1, \dots, x_n)$.

El conjunto de toda una serie de combinaciones lineales de los vectores $a_1, \dots$ $\dots, a_m$ forma un subespacio del espacio R^n y se denomina *subespacio tendido sobre dichos vectores*. Desígnémoslo $\mathscr{L}(a_1, \dots, a_m)$.,

El conjunto de soluciones del sistema (43.24) se compone de todos los vectores x ortogonales al subespacio $\mathscr{L}(a_1, \dots, a_m)$. Designemos este conjunto de soluciones con T. Es también un subespacio del espacio R^n.

Los subespacios $L \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}(a_1, \dots, a_m)$ y T se denominan *complementos ortogonales* uno al otro en el *espacio* R^n.

Dado que $L = \mathscr{L}(a_1, \dots, a_m)$, la representación del vector b en forma de una combinación lineal de los vectores $a_1, \dots, a_m$ es equivalente a su pertenencia al subespacio L del espacio R^n: $b \in L$. Esta condición es equivalente, a su vez, a la ortogonalidad del vector b al subespacio T: $b \perp T$, la que significa que para todo $x \in T$ tiene lugar la igualdad $(b, x) = 0$, es decir, que toda solución x del sistema (43.24) es la solución de la ecuación (43.25). Esto es precisamente la afirmación del corolario del lema.

OBSERVACIÓN 2. Recordemos un método por medio del cual pueden obtenerse todas las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Supongamos que el sistema (43.18) se compone de las ecuaciones linealmente independientes. En este caso el rango de la matriz de sus coeficientes es igual a m. Esto significa que existe un menor de dicha matriz de orden m, distinto de cero. Sea, para concretar,

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1m} \\ a_{m1} \cdots a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{43.26}$$

En este caso todas las soluciones del sistema (43.18) pueden obtenerse, fijando arbitrariamente las últimas $n - m$ coordenadas del vector $(x_1, \dots, x_n)$. Las coordenadas restantes se obtienen unívocamente del sistema de ecuaciones (43.18). En efecto, tomemos una solución arbitraria $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ del sistema (43.18). Realizada la sustitución $x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$ en (43.18), se obtendrá un sistema de m ecuaciones lineales (con m incógnitas $x_1, \dots, x_m$) tal que la matriz de los coeficientes de este sistema es regular, en virtud de la condición (43.26). Por esta razón existen los únicos valores $x_1, \dots, x_m$ que satisfacen el sistema obtenido. Por cuanto $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ fue también la solución del sistema (43.18), se tiene $x_1 = x_1^{(0)}, \dots,$ $x_m = x_m^{(0)}$.

Pasemos ahora al análisis de los puntos estacionarios de la función de Lagrange.

Teorema 2. *Supongamos que las funciones $f_0, f_1, \dots, f_m$ son continuamente derivables en la región $G \subset R^n$, $x^{(0)} \in G$,*

$$f_i(x^{(0)}) = 0, i = 1, 2, \dots, m,$$

y el rango de la matriz de Jacobi de las funciones $f_1, \dots, f_m$ en el punto $x^{(0)}$ es igual a m. Para que en el punto $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ el gradiente ∇f_0 sea una combinación lineal de los gradientes $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ es necesario y suficiente que el punto $x^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ sea estacionario para la funcion $g(x) = g(x_{m+1}, \dots, x_n)$ (véase (43.8)).

Recordemos que si en el punto $x^{(0)}$ el gradiente ∇f_0 es una combinación lineal

$$\nabla f_0 = \lambda_1 \nabla f_1 + \dots + \lambda_m \nabla f_m, \tag{43.27}$$

de los gradientes $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$, esto es equivalente a que existe una función de Lagrange

$$F = f_0 - \lambda_1 f_1 - \dots - \lambda_m f_m, \tag{43.28}$$

para la cual el punto $x^{(0)}$ es estacionario:

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n. \tag{43.29}$$

Esta es simplemente una inscripción coordenada de la condición (43.27), pues, en virtud de (43.28),

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i}, i = 1, \dots, m.$$

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, el rango de la matriz de Jacobi del sistema de funciones $f_1, \dots, f_m$ en el punto $x^{(0)}$ es igual a m. Convengamos en considerar, para concretar, como en el p. 43.1, que

$$\left. \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{43.30}$$

Sustituyamos en la ecuación de enlace (43.3) las funciones (43.7) que representan las soluciones de estas ecuaciones y derivemos las identidades obtenidas respecto de las variables $x_{m+1}, \dots, x_n$. Obtendremos para el punto $\tilde{x}^{(0)}$ las igualdades $df_i(\tilde{x}^{(0)}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, válidas para cualesquiera incrementos $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ de las variables independientes $x_{m+1}, \dots, x_n$ (recordemos que la diferencial es una función lineal definida en todo el espacio). Al hacer uso de la invariación de la forma de la primera diferencial respecto de la elección de las variables, llegamos a que en el punto $x^{(0)}$ se cumplen las igualdades

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_i}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots$$
$$\dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n = 0, i = 1, 2, \dots, m, \tag{43.31}$$

donde $dx_{m+1}, \dots dx_n$ son arbitrarios, mientras que $dx_1, \dots, dx_m$ se hallan a partir de las fórmulas (43.7). De este modo, el vector

$$dx = (dx_1, \dots, dx_m, dx_{m+1}, \dots, dx_n) \quad (43.32)$$

es la solución del sistema homogéneo lineal (43.31).

Cabe notar que en virtud de la condición (43.30), los valores de $dx_1, \dots, dx_m$, para $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ dados, se hallan también unívocamente del sistema (43.31). De la observación 2 se infiere, además, que mediante el método indicado se obtienen todas las soluciones del sistema (43.31).

El carácter estacionario del punto $\tilde{x}^{(0)}$ para la función $g(\tilde{x}) = g(x_{m+1}, \dots, x_n)$ significa que $dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0$. Por ser invariante la forma de la primera diferencial, esta igualdad puede escribirse más detalladamente como sigue

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_0}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial x_n} dx_n = 0, \quad (43.33)$$

donde $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ pueden prefijarse de modo arbitrario, mientras que $dx_1, \dots, dx_m$ se deben hallar de las fórmulas (43.7), o bien, que proporciona el mismo resultado, de las fórmulas (43.31). En otras palabras, cualquier solución del sistema de ecuaciones (43.31) es, a la vez, la solución de la ecuación (43.33). Conforme al corolario del lema, esto resulta posible cuando, y sólo cuando, la ecuación (43.33) es una combinación lineal de las ecuaciones del sistema (43.31), es decir, cuando existen tales números $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ que

$$\nabla f_0 = \lambda_1 \nabla f_1 + \dots + \lambda_m \nabla f_m. \ \square$$

OBSERVACIÓN 3. De acuerdo con la observación 2, la totalidad de todas las soluciones del sistema de ecuaciones (43.31) forma un subespacio T del espacio R^n que es un complemento ortogonal al subespacio $L = \mathscr{L}(\nabla f_1, \dots, \nabla f_m)$. Todo vector $y \in T$ es ortogonal respecto de cualquier gradiente ∇f_i, por lo cual será natural llamarlo *vector tangente* en el punto $x^{(0)}$ a la hipersuperficie $f_i(x) = 0$, la cual representa un conjunto de nivel (véase § 19) de la función f_i, $i = 1, \dots, m$.

De este modo, el espacio de soluciones T del sistema (43.31) se compone de los vectores tangentes simultáneamente a todas las hipersuperficies $f_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$, y por esta razón lo llaman espacio tangente de la intersección de todas las hipersuperficies $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Recordemos que los vectores del espacio tangente T, es decir, las soluciones del sistema (43.31) han sido designados mediante dx (43.32).

Puesto que, de acuerdo con el teorema 2, en el punto de extremo condicionado tiene lugar la inclusión

$$\nabla f_0 \in L = \mathscr{L}(\nabla f_1, \dots, \nabla f_m),$$

se tiene

$$\nabla f_0 \perp T.$$

En otras palabras, el gradiente ∇f_0 es ortogonal simultáneamente a todas las tangentes dx a las superficies $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$:

$$(\nabla f_0, dx) = 0$$

(ésta es otra notación de la ecuación (43.33)), es decir, el gradiente ∇f_0 es perpendicular al espacio tangente T en el punto $x^{(0)}$. Pero el conjunto de todos los vectores ortogonales a ∇f_0 forma un subespacio $(n-1)$-dimensional T_0, denominado espacio tangente a la hipersuperficie $f_0(x) = f_0(x^{(0)})$. En virtud de lo dicho anteriormente, cada vector de T, siendo ortogonal al gradiente ∇f_0, pertenece a T_0, es decir, $T \subset T_0$.

Así pues, *si* $x^{(0)}$ *es un punto de extremo condicionado, entonces* $T \subset T_0$, *es decir, el espacio tangente en el punto* $x^{(0)}$ *de intersección de todas las hipersuperficies, definidas por las ecuaciones de enlace, está contenido en el espacio tangente en el mismo punto de la hipersuperficie* $f_0(x) = f_0(x^{(0)})$.

OBSERVACIÓN 4. Del teorema 2 se deduce una vez más el corolario del teorema 1. Efectivamente, si $x^{(0)}$ es un punto de extremo condicionado, entonces $\tilde{x}^{(0)}$ será el punto de extremo ordinario para la función g (véase el p. 43.1) y, por consiguiente, su punto estacionario. Por ello, de acuerdo con el teorema 2, $x^{(0)}$ es el punto estacionario para la función de Lagrange, es decir, se cumple la condición (43.29).

43.5*. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LOS PUNTOS DE EXTREMO CONDICIONADO

En este punto se supondrán también vigentes todas las suposiciones impuestas en las funciones f_0 y f_i, $i = 1, 2, \dots, m$, en el p. 43.1. Sea

$$F = f_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$$

una función de Lagrange (véase (43.13)) para la función f_0 y las ecuaciones de enlace (43.3). Supongamos que $x^{(0)} \in G$ satisface las ecuaciones de enlace (43.3) y es un punto estacionario de la función de Lagrange, es decir, un punto cuyas coordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones (43.12) y (43.3). Nuestro objeto es la obtención de un método, por cuyo intermedio se pueden establecer las condiciones suficientes para que $x^{(0)}$ sea punto de extremo condicionado del problema en consideración.

Observemos ante todo que si el punto $x \in G$ satisface las ecuaciones de enlace (43.3), entonces

$$\Delta f_0 = f_0(x) - f_0(x^{(0)}) = F(x) - F(x^{(0)}) = \Delta F. \quad (43.34)$$

De aquí se ve en seguida que si $x^{(0)}$ es un punto de extremo habitual para la función F, es decir, si ΔF no cambia de signo en cierto entorno del punto $x^{(0)}$, entonces $x^{(0)}$ es el punto de extremo condicionado para la función f_0.

En efecto, de (43.34) se deduce en este caso que el incremento Δf_0 para los valores admisibles de x, es decir, para aquellos que satisfacen las ecuaciones de enlace, tampoco cambia de signo. Esta condición suficiente impone, sin embargo, una restricción demasiado fuerte sobre el comportamiento de la función de Lagrange $F(x)$ en el punto considerado: ésta debe tener extremo ordinario, lo que hace muy estrecho el dominio de la aplicación eventual de la condición indicada en la resolución de los problemas. Por esta razón parece conveniente obtener un criterio suficiente más general para un extremo condicionado.

Supongamos que $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ satisface las ecuaciones de enlace (43.3). Volvamos a considerar la función (43.8), es decir, una función $g(\tilde{x}) = g(x_{m+1}, \ldots \ldots, x_n)$, $\tilde{x} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, que se obtiene de $f_0(x) = f_0(x_1, \ldots, x_n)$ a condición de que $x_1, \ldots, x_m$ son funciones de las variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$, determinadas por las ecuaciones de enlace (43.3) en cierto entorno del punto $x^{(0)}$. Supondremos adicionalmente que $f_0(x)$ y $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, son dos veces continuamente derivables en el punto $x^{(0)}$.

Se ha notado más arriba (véase el p. 43.1) que $x^{(0)}$ es un punto de extremo condicionado (estricto) para la función $f_0(x)$ respecto de las ecuaciones de enlace (43.3) cuando, y sólo cuando, $\tilde{x}^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ es un punto de extremo ordinario (estricto) para la función $g(x)$. Por eso, si, por ejemplo, en el punto $x^{(0)}$ la función $g(x)$ satisface las condiciones suficientes para la existencia de un extremo estricto, en este punto la función $f_0(x)$ tendrá extremo estricto condicionado respecto de las ecuaciones de enlace (43.3). Las condiciones suficientes para un extremo estricto ordinario se han obtenido anteriormente (véase el teorema 2 en el p. 40.2). Para nuestro caso tienen por expresión

$$1)\ \frac{\partial g(\tilde{x}^{(0)})}{\partial x_i} = 0, i = m + 1, \ldots, n; \tag{43.35}$$

2) la segunda diferencial

$$d^2 g(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{i,j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 g(\tilde{x}^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{43.36}$$

es una forma cuadrática definida positiva o definida negativa.

Si se cumplen estas condiciones, $\tilde{x}^{(0)}$ es un punto de mínimo estricto o de máximo estricto para la función $g(x)$. En virtud de lo expuesto anteriormente, las condiciones mencionadas son también suficientes para que $x^{(0)}$ sea un punto de mínimo (máximo) estricto condicionado para la función $f_0(x)$ respecto de las ecuaciones de enlace (43.3). No obstante, no son cómodas para el empleo práctico, pues requieren que se conozca la función $g(\tilde{x})$. Por ello, partiendo de las condiciones suficientes obtenidas de un extremo estricto condicionado, que se expresan mediante la función $g(\tilde{x})$, llegaremos a las condiciones suficientes del mismo extremo, pero expresadas esta vez sólo en términos de la función de Lagrange y las ecuaciones de enlace.

Observemos ante todo que en virtud de la condición (43.6), el sistema (43.31) es resoluble y, además, unívocamente respecto de $dx_1, \ldots, dx_m$, siendo fijadas arbitrariamente $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. El sistema (43.31) que expresa la igualdad a cero de las diferenciales de las funciones $f_i(x)$ en el punto $x^{(0)}$:

$$df_i = 0, i = 1, 2, \ldots, m,$$

cuando se cumplen las condiciones (43.3), se escribirá en la forma breve así:

$$df = 0, \tag{43.37}$$

donde $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Sea $x^{(0)}$ un punto estacionario para la función de Lagrange $F(x)$ (véase (43.13)). Esto significa que $dF(x^{(0)}) = 0$, es decir, que en este punto $\nabla f_0 + \sum_{i=1}^{m} \nabla f_i = 0$.

En el teorema 2, p. 43.4*, se ha mostrado que en este caso $\tilde{x}^{(0)}$ es un punto estacionario para la función $g(\tilde{x})$, es decir,

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = 0. \tag{43.38}$$

Expliquemos una vez más la deducción de esta fórmula y mostremos que

$$d^2 g(\tilde{x}^{(0)}) = d^2 F(x^{(0)})|_{df=0}. \tag{43.39}$$

Esta igualdad debe entenderse como una igualdad de las funciones de $n - m$ variables $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. En el segundo miembro de la igualdad (43.39) las variables restantes $dx_1, \ldots, dx_m$, que figuran en las expresiones de las diferenciales escritas, se determinan a partir del sistema de ecuaciones (43.37) o bien, que es lo mismo (véanse las fórmulas (43.7)),

$$dx_k = d\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n-m}), k = 1, 2, \ldots, m.$$

Aprovechando la invariación de la forma de la primera diferencial respecto de la elección de las variables y la fórmula (43.8), tenemos

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_0(\tilde{x}^{(0)})}{\partial x_j} dx_j.$$

Sumemos a esta igualdad la suma (igual a cero) de los primeros miembros de las identidades (43.31) multiplicadas, respectivamente, por las constantes λ_i que integran la función de Lagrange $F(x)$ (con más precisión, la i-ésima igualdad (43.31) se multiplica por la constante λ_i). Luego, al hacer uso de la condición (43.13), obtendremos

$$dg(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)\right] dx_j \bigg|_{x=x^{(0)}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

La afirmación (43.38) queda demostrada.

La igualdad (43.39) se demuestra del modo análogo. Escribamos, ante todo, la segunda diferencial para la función $g(\tilde{x})$ en el punto $\tilde{x}^{(0)}$:

$$d^2 g(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_0(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_0(x^{(0)})}{\partial x_j} d^2 x_j. \tag{43.40}$$

Luego, al haber derivado las identidades que se obtienen como resultado de derivar las ecuaciones de enlace (43.3), es decir, las identidades

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n = 0, i = 1, 2, \ldots, n,$$

tendremos en el punto $x^{(0)}$:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^{(0)})}{\partial x_j} d^2 x_j = 0, i = 1, 2, \ldots, m. \tag{43.41}$$

Al multiplicar la i-ésima igualdad (43.41) por la constante λ_i, que figura en la función de Lagrange $F(x)$, sumemos las expresiones obtenidas al segundo miembro de la igualdad (43.40); en este caso tendremos

$$d^2g(\tilde{x}^{(0)}) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_j} d^2x_j,$$

donde dx_i, $i = 1, 2, \dots, n$, satisface el sistema de ecuaciones (43.37). Por cuanto el punto $x^{(0)}$ es estacionario para la función de Lagrange, el segundo miembro de la igualdad obtenida se reduce a cero y de este modo la fórmula (43.39) queda demostrada.

Diremos que la forma cuadrática $d^2F(x^{(0)})$ es cuadrática definida positiva (negativa) de las variables dx_i, $i = 1, 2, \dots, n$, a condición de que estas variables satisfacen el sistema de ecuaciones (43.37) siempre que para cualesquiera dx_i, $i = 1, 2, \dots, n$, que satisfacen este sistema de ecuaciones y son tales que $\sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2 > 0$, se verifica la desigualdad $d^2F(x^{(0)}) > 0$ ($d^2F(x^{(0)}) < 0$, respectivamente).

Supongamos que el punto $x^{(0)}$ satisface las ecuaciones de enlace (43.3) y es estacionario para la función de Lagrange (43.13) y supongamos también que la segunda diferencial de la función de Lagrange en este punto es una forma cuadrática definida positiva (negativa) de las variables $dx_1, \dots, dx_n$ a condición de que ellas satisfacen el sistema de ecuaciones (43.37). Entonces, de (43.38) y (43.39) proviene que $\tilde{x}^{(0)}$ es un punto estacionario para la función $g(\tilde{x})$ y que la segunda diferencial de esta función en el punto $\tilde{x}^{(0)}$ es una forma cuadrática definida positiva (negativa) de las variables $dx_{m+1}, \dots, dx_n$, y, por consiguiente, la función $g(\tilde{x})$ tiene en el punto $\tilde{x}^{(0)}$ un mínimo (máximo) estricto; quiere decir que la función $f_0(x)$ admite en el punto $x^{(0)}$ un mínimo (máximo) estricto condicionado respecto de las ecuaciones de enlace (43.3).

Enunciemos el resultado obtenido en forma del teorema.

Teorema 3. *Si* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ *satisface las ecuaciones de enlace* (43.3) *y es un punto estacionario para la función de Lagrange* (43.13) *y si la segunda diferencial de la función de Lagrange en este punto es la forma cuadrática definida positiva (negativa) de las variables* $dx_1, \dots, dx_n$ *a condición de que éstas satisfacen el sistema de ecuaciones* (43.31), *entonces* $x^{(0)}$ *es un punto de mínimo (máximo) estricto condicionado para la función* f_0 *respecto de las ecuaciones de enlace* (43.3).

De este modo, con el fin de investigar el extremo condicionado de un punto estacionario de la función de Lagrange (43.13), se debe analizar si es o no definida la forma cuadrática (43.39), es decir, examinar la segunda diferencial de la función de Lagrange en este punto, siendo cumplidas las condiciones de enlace (43.3) (cuando las diferenciales dx_i, $i = 1, 2, \dots, n$, están ligadas entre sí por las relaciones (43.31)). En este caso hemos de tener en cuenta que si la segunda diferencial de la función de Lagrange en el punto que se considera resulta ser definida positiva (negativa) sin que se cumplan las condiciones de enlace, lo será, por supuesto, cuando dichas condiciones se cumplan.

Supongamos, por ejemplo, que se requiere hallar los puntos de extremo de la función $f(x, y) = xy$, cuando el punto (x, y) se dispone en la recta $x - y = 0$. La función de Lagrange será, en este caso, $F(x, y) = xy - \lambda(x - y)$, y, como $\frac{\partial F}{\partial x} = y - \lambda$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda$, entonces para la determinación de los puntos estacionarios de la función $F(x, y)$ que satisfagan las condiciones de enlace tenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y &= 0, \\ y - \lambda &= 0, \\ x + \lambda &= 0, \end{aligned}$$

de las cuales se desprende que $x = y = \lambda = 0$.

Investiguemos en el punto $(0, 0)$ la segunda diferencial de la función $F(x, y)$, siendo cumplidas las condiciones de enlace, es decir, cuando $dx - dy = 0$. Tenemos

$$d^2F = 2dx\,dy, \tag{43.42}$$

y, por consiguiente, si se cumplen las condiciones de enlace,

$$d^2F = dx^2 \geqslant 0, \tag{43.43}$$

es decir, la segunda diferencial (43.42), representando una forma cuadrática indefinida, se convierte, siempre que se cumplan las condiciones de enlace, en una forma cuadrática definida positiva (43.43). Por eso $(0, 0)$ es el punto de mínimo estricto condicionado para el problema que acabamos de considerar. Esto, además, se ve claramente de lo siguiente: a lo largo de la recta $x - y = 0$ la función $f(x, y) = xy$ tomará la forma $f(x, x) = x^2$, admitiendo, evidentemente, en el punto $x = 0$ un mínimo estricto.

Ejercicios: Hállence los puntos de extremo condicionado de las funciones con las ecuaciones indicadas de enlace:

1. $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, $x^2 + y^2 = 1$.
2. $z = x^2 + y^2$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
3. $u = xyz$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.
4. $u = x^2 + y^2 + z^2$, $Ax + By + Cz + D = 0$.
5. $u = 2x + y - z + 1$, $x^2 + y^2 - 2z^2 - 22 = 0$.
6. Hállese el valor máximo de la función $z = xy$ en el círculo unitario $x^2 + y^2 \leqslant 1$.
7. Inscríbase en un círculo de radio dado un n-ágano de área máxima.
8. Represéntese el número $a > 0$ en forma de una suma de los sumandos $x_1, \dots, x_n$ de un modo tal que el producto $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, n$) asuma el valor máximo.

CAPÍTULO SEXTO

CÁLCULO INTEGRAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 44. INTEGRALES MÚLTIPLES

44.1. CONCEPTO DE VOLUMEN EN UN ESPACIO n-DIMENSIONAL (MEDIDA DE JORDAN). CONJUNTOS MEDIBLES

Recordemos brevemente los conceptos principales relacionados con la definición de volumen n-dimensional (área, cuando $n = 2$) y demos a conocer la nueva definición de volumen (medida) de un conjunto la que se diferenciará de la introducida antes (véase el p. 31.1).

Sea R^n un espacio euclídeo n-dimensional ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Sus puntos se designarán, como siempre, con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, donde x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son las coordenadas del punto x en cierto sistema de coordenadas fijado de una vez y para siempre. Fijemos un número entero no negativo k, ($k = 0, 1, \ldots$). Consideraremos el i-ésimo eje coordenado ($i = 1, 2, \ldots, n$), es decir, un conjunto de puntos x cuyas coordenadas son $x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$. Por los puntos del eje que tienen las coordenadas del tipo $x_i = 10^{-k}m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ tracemos unos hiperplanos de dimensión $n - 1$ ortogonales al eje mencionado. El conjunto de todos los hiperplanos de esta índole construidos para todos los ejes coordenados x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, engendra una familia de los cubos cerrados n-dimensionales del tipo

$$Q^n = \left\{x : \frac{m_i}{10^k} \leqslant x_i \leqslant \frac{m_i + 1}{10^k}, i = 1, 2, \ldots, n\right\}, \tag{44.1}$$

donde m_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, recorren independientemente uno del otro el conjunto de todos los números reales.

Los cubos (44.1) se llaman *cubos de rango k*, la totalidad de ellos se designa con T_k, $k = 0, 1, \ldots$.

El conjunto de todos los cubos de rango k cubre, obviamente, todo el espacio, es decir,

$$R^n = \bigcup_{Q^n \in T_k} Q^n.$$

Dos cubos de un mismo rango pueden tener en calidad de puntos comunes sólo algunos de sus puntos de frontera. Cuando $n = 1$, el cubo (44.1) es, evidentemente, un segmento y cuando $n = 2$, un cuadrado.

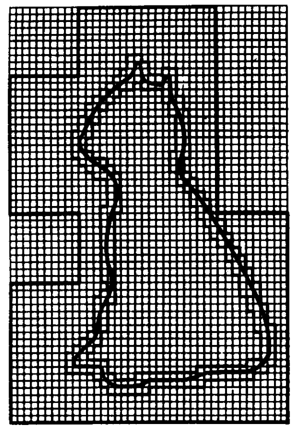


Fig. 175

El número $1/10^{kn}$ lleva el nombre de volumen n-dimensional del cubo (44.1) y se denota con μQ^n:

$$\mu Q^n \stackrel{\text{def}}{=} 10^{-kn}.$$

Para un conjunto S, que representa la unión de un número finito o numerable de diferentes cubos Q_j^n de rango dado k, $j = 1, 2, \ldots$:

$$S = \bigcup_j Q_j^n, \; Q_j^n \in T_k,$$

su volumen n-dimensional μS se determina por la igualdad

$$\mu S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \mu Q_j^n. \tag{44.2}$$

Por lo visto, μS es un número no negativo o $+\infty$.

Sea ahora X un conjunto arbitrario en R^n. Designemos mediante $s_k = s_k(X)$ el conjunto de puntos de todos los cubos n-dimensionales de rango k íntegramente dispuestos en X, y mediante $S_k = S_k(X)$, el conjunto de puntos de todos los cubos n-dimensionales de rango k, cada uno de los cuales se interseca con el conjunto X por un conjunto no vacío ($k = 0, 1, 2, \ldots$):

$$s_k(X) = \bigcup_{Q^n \subset X} Q^n, \; S_k(X) = \bigcup_{Q^n \cap X \neq \varnothing} Q^n, \; Q^n \in T_k.$$

De este modo, todos los cubos de rango k, contenidos en s_k, se disponen en el conjunto X, mientras que los cubos de rango k, contenidos en S_k, forman un recubrimiento del conjunto X (fig. 175), es decir, $s_k(X) \subset X \subset S_k(X)$. Cabe notar que el conjunto X se dispone "estrictamente dentro" del poliedro $S_k = S_k(X)$, es decir, no se interseca con su frontera ∂S_k. Efectivamente, el punto $x \in X \cap \partial S_k$ no puede existir, puesto que si fuera punto de frontera para $S_{\bar{k}}$, pertenecería a la cara de cierto cubo de rango k. Ya que los cubos en consideración son cerrados, entonces, por definición del poliedro S_k, le pertenecerían a él todos los cubos de rango k que contienen dicha cara, pues ésta última contiene el punto $x \in X$. De este modo, el punto citado no sería punto de frontera para S_k.

Es evidente que

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_k \subset s_{k+1} \subset \ldots, \; S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \ldots,$$

y, por consiguiente, en virtud de la definición (44.2),

$$\mu s_0 \leqslant \mu s_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu s_k \leqslant \mu s_{k+1} \ldots, \; \mu S_0 \geqslant \mu S_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu S_k \geqslant \mu S_{k+1} \geqslant \ldots \tag{44.3}$$

De este modo, se han obtenido dos sucesiones monótonas cuyos términos son los elementos del conjunto ampliado de números reales $\bar{R}$ (véase el p. 2.5), a saber, o bien los números reales no negativos, o bien $+\infty$. Por eso, para cualquier conjunto $X \subset R^n$ siempre existen los límites finitos o infinitos

$$\lim_{k \to \infty} \mu s_k(X) \text{ y } \lim_{k \to \infty} \mu S_k(X)$$

Definición 1. *El límite finito o infinito* $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu s_k(X)$ *lleva el nombre de medida de Jordan*[1] *n-dimensional inferior o interior del conjunto X y se designa mediante* $\mu_* X$.

$$\mu_* X \overset{\text{def}}{=} \lim_{k \to +\infty} \mu s_k(X), \tag{44.4}$$

mientras que el límite $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu S_k(X)$ *se denomina medida de Jordan n-dimensional superior o exterior del conjunto X y se designa mediante* $\mu^* X$,

$$\mu^* X \overset{\text{def}}{=} \lim_{k \to +\infty} \mu S_k(X). \tag{44.5}$$

Si las medidas inferior $\mu_* X$ *y superior* $\mu^* X$ *del conjunto X son finitas y coinciden, el conjunto se llama medible según Jordan. El valor general de las medidas de Jordan inferior y superior del conjunto medible X se designa con* μX *y se llama medida de Jordan n-dimensional o volumen n-dimensional del conjunto X:*

$$\mu X = \mu_* X = \mu^* X. \tag{44.6}$$

Para un conjunto vacío debe ser, por definición, $\mu \varnothing = 0$.

A veces, en lugar de μX se escribirá $\mu_n X$, con el fin de subrayar que se trata aquí de una medida del conjunto X que se considera como el subconjunto del espacio precisamente n-dimensional.

En lo que sigue, para simplificar, la medida de Jordan se llamará simplemente *medida* y el conjunto medible según Jordan, conjunto *medible*.

Por conjunto medible, como lo muestra el mismo sentido de la palabra "medible", se entiende en las matemáticas tal conjunto puntual en R^n que pueda ser medido de tal o cual manera, es decir, a este conjunto se le puede asignar, rigiéndose por ciertas reglas, un número no negativo que representa un volumen en el caso tridimensional, una área en el caso bidimensional y una longitud, en el caso unidimensional. Si la dimensión de un espacio $n \geqslant 3$, el conjunto, medible según Jordan en este espacio, se llama *cubicable* y en el caso de $n = 2$, *cuadrable*. Los términos relativos a los conjuntos cubicable y cuadrable reflejan el hecho de que la medición mencionada arriba del conjunto se realiza por medio de los cubos, o los cuadrados, respectivamente.

[1] C. Jordan (1838 — 1922), matemático francés.

Por cálculos inmediatos no es difícil comprobar que si el conjunto X representa en sí una unión de un número finito de diferentes cubos n-dimensionales ($n = 1, 2, \ldots$) de rango dado, es mediable y su medida de Jordan coincide con la medida determinada por la igualdad (44.2).

Para todo conjunto X es evidente que

$$\mu s_k(X) \geqslant 0, \quad \mu S_k(X) \geqslant 0,$$

cualquiera que sea $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Pasando al límite para $k \to \infty$, obtenemos $\mu_* X \geqslant 0$, $\mu^* X \geqslant 0$. De aquí se deduce la siguiente propiedad de la medida de Jordan.

Propiedad 1°. *Para todo conjunto medible,* $\mu X \geqslant 0$.

Observemos ahora que en virtud de las definiciones (44.4) y (44.5), para todo conjunto X queda definida una medida de Jordan finita o infinita, inferior y superior. Además, puesto que para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ se verifica la desigualdad $0 \leqslant \mu s_k(X) \leqslant \mu S_k(X)$, entonces, al pasar al límite para $k \to \infty$, tendremos para cualquier conjunto X

$$0 \leqslant \mu_* X \leqslant \mu^* X.$$

De aquí proviene evidentemente que si la medida superior del conjunto X es igual a cero, $\mu^* X = 0$, el conjunto X es medible y $\mu X = 0$.

Si en el conjunto X se tiene un punto interior, existe tal número k_0 que el conjunto $s_{k_0}(X)$ será no vacío; por lo tanto, $\mu s_{k_0}(X) > 0$, de donde, en virtud de (44.3), (44.4) y (44.6), se deducirá que $\mu_* X > 0$. Efectivamente, si x es un punto interior del conjunto X, existe tal $\varepsilon > 0$, que el entorno esférico $U(x, \varepsilon)$ está contenido en X. Por ello, será suficiente tomar tal rango k_0 que la longitud de la diagonal de un cubo*) de rango k_0 sea menor que ε:

$$10^{-k_0}\sqrt{n} < \varepsilon.$$

En este caso el cubo Q^n de rango k, que contiene el punto x (por lo menos un cubo de esta especie siempre existe) se dispondrá íntegramente dentro del conjunto $s_{k_0}(X)$ (fig. 176). Por esta razón

$$\mu s_{k_0}(X) \geqslant \mu Q^n > 0.$$

De lo expuesto se infiere que la *medida de Jordan inferior de cualquier conjunto abierto G es siempre positiva:* $\mu_* G > 0$.

Observemos que el volumen de un conjunto abierto, determinado anteriormente en el p. 31.1, coincide con su medida de Jordan inferior. No obstante, para construir un análogo, bastante general de la integral de Riemann en el caso de las fun-

*) La diagonal de un cubo n-dimensional con la arista de longitud a es igual a $a\sqrt{n}$.

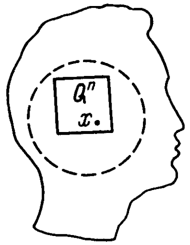


Fig. 176

ciones de varias variables, sólo el concepto de medida de Jordan inferior resulta insuficiente. Para este objeto es muy cómodo el concepto de conjunto medible según Jordan.

Si el conjunto X es acotado, $\mu_* X$ y $\mu^* X$ son siempre finitas. En efecto, del hecho de que el conjunto X es acotado proviene que dicho conjunto se interseca sólo con el conjunto finito de cubos de rango nulo y, por consiguiente, $S_0(X)$ se compone del número finito de cubos. Por ello, de acuerdo con (44.2), $\mu S_0(X) < +\infty$. Pero, para todo $k = 0, 1, \ldots$

$$s_k(X) \subset S_k(X) \subset S_0(X).$$

Por esta razón

$$0 \leqslant \mu s_k(X) \leqslant \mu S_k(X) \leqslant \mu S_0(X).$$

De aquí, pasando al límite para $k \to +\infty$, obtendremos

$$0 \leqslant \mu_* X \leqslant \mu^* X \leqslant \mu S_0(X) < +\infty,$$

es decir, las medidas $\mu_* X$ y $\mu^* X$ son finitas.

Si, en cambio, el conjunto X no es acotado, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ el conjunto $S_k(X)$ se compone de un número infinito de cubos de rango k. Por eso, en virtud de la fórmula (44.2), para todo k tenemos $\mu S_k(X) = +\infty$, por consiguiente, también $\mu^* X = +\infty$, es decir, el conjunto X es a ciencia cierta no medible. De aquí:

si un conjunto es medible según Jordan quiere decir que es acotado.

Las medidas de Jordan, tanto superior como inferior, poseen la así llamada *propiedad de monotonía*. Enunciémosla en forma de un lema.

Lema 1. *Si $X_1 \subset X_2$, se tiene*

$$\mu_* X_1 \leqslant \mu_* X_2, \mu^* X_1 \leqslant \mu^* X_2. \tag{44.7}$$

Esto se deduce directamente del hecho de que para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ tienen lugar las inclusiones

$$s_k(X_1) \subset s_k(X_2), \quad S_k(X_1) \subset S_k(X_2), \tag{44.8}$$

pues la primera de ellas significa que un cubo de rango k dispuesto en X_1 se dispone también en X_2, mientras que la segunda es indicio de que un cubo de rango k que se interseca con el conjunto X_1 se corta también con X_2. Ambas afirmaciones pro-

vienen de la inclusión $X_1 \subset X_2$. De (44.8), en virtud de (44.2), se desprende la validez de las desigualdades

$$\mu s_k(X_1) \leqslant \mu s_k(X_2), \quad \mu S_k(X_1) \leqslant \mu S_k(X_2).$$

Al hacer tender k hacia $+\infty$, obtenemos en límite (44.7). □

Corolario 1. *Si $X_1 \subset X_2$ y $\mu X_2 = 0$, se tiene $\mu X_1 = 0$.*

Efectivamente, en vista del lema 1

$$0 \leqslant \mu^* X_1 \leqslant \mu^* X_2 = \mu X_2 = 0.$$

Por tanto, $\mu^* X_1 = 0$, de donde también $\mu X_1 = 0$. □

Corolario 2. *Si $\mu X = 0$ y $\overline{X}$ es una clausura del conjunto X*(véase el p. 18.2), *entonces $\mu \overline{X} = 0$.*

En efecto, de la condición $\mu X = 0$ se infiere que para todo $\varepsilon > 0$ existe un rango k tal que

$$\mu S_k(X) < \varepsilon.$$

El poliedro $S_k(X)$ se compone de un número finito de cubos cerrados (si el número de cubos de rango k contenidos en el conjunto $S_k(X)$ fuera infinito, entonces, de acuerdo con (44.2), su medida sería infinita: $\mu S_k(X) = +\infty$) y, por ende, es un conjunto cerrado: $\overline{S_k(X)} = S_k(X)$. Pero, $X \subset S_k(X)$, por lo cual $\overline{X} \subset \overline{S_k(X)} = S_k(X)$. De aquí $\mu^* \overline{X} \leqslant \mu^* S_k(X) = \mu S_k(X)$, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$:

$$\mu^* \overline{X} < \varepsilon.$$

Esto es posible sólo cuando $\mu \overline{X} = 0$. □

Del lema 1 se desprende la siguiente propiedad para los conjuntos medibles.

Propiedad 2° (monotonía de la medida). *Si X_1 y X_2 son unos conjuntos medibles según Jordan y $X_1 \subset X_2$, entonces*

$$\mu X_1 \leqslant \mu X_2. \tag{44.9}$$

Lema 2 (semiaditividad de la medida superior). *Para toda totalidad finita de conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_m$ tiene lugar la desigualdad*

$$\mu^* \bigcup_{j=1}^{m} X_j \leqslant \bigcup_{j=1}^{m} \mu^* X. \tag{44.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier rango $k = 0, 1, 2, \ldots$ se verifica la igualdad

$$S_k\left(\bigcup_{j=1}^{m} X_j\right) = \bigcup_{j=1}^{m} S_k(X_j).$$

En efecto, cada cubo de rango k que se interseca con el conjunto $\bigcup_{j=1}^{m} X_j$, se interseca por lo menos con uno de los conjuntos X_j y viceversa. Por ello, en virtud de (44.2)

$$\mu S_k\left(\bigcup_{j=1}^{m} X_j\right) = \mu \bigcup_{j=1}^{m} S_k(X_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu S_k(X_j).$$

Pasando aquí al límite para $k \to +\infty$, obtenemos (44.10). □

Corolario. *La unión de un número finito de los conjuntos de medida cero tiene medida cero.*

En efecto, si $\mu X_j = 0, j = 1, 2, \ldots, m$, entonces, en virtud de (44.10)

$$\mu^* \bigcup_{j=1}^{m} X_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu^* X_j = \sum_{j=1}^{m} \mu X_j = 0.$$

Por consiguiente, el conjunto $\bigcup_{j=1}^{m} X_j$ es medible y su medida superior y, por tanto, la medida son iguales a cero:

$$\mu \bigcup_{j=1}^{m} X_j = 0. \ \square$$

Ejercicios. 1. Pruébese que la unión de una totalidad numerable de los conjuntos cuya medida de Jordan es cero puede no tener la medida cero.

2. Demuéstrese que si X_1 y X_2 son los conjuntos abiertos, entonces

$$\mu_*(X_1 \cup X_2) \leqslant \mu_* X_1 + \mu_* X_2.$$

Indicación. Es útil aprovechar la afirmación contenida en el ejercicio 14 del p. 18.3. ¿Será siempre válida esta desigualdad, es decir, sin la suposición de que los conjuntos X_1 y X_2 son abiertos?

3. Dése un ejemplo de tales conjuntos disjuntos X_1 y X_2 que

$$\mu^*(X_1 \cup X_2) \neq \mu^* X_1 + \mu^* X_2.$$

El criterio de mensurabilidad de los conjuntos se establece mediante el siguiente teorema.

Teorema 1. *Para que el conjunto X sea medible según Jordan, es necesario y suficiente que sea acotado y que su frontera ∂X tenga medida de Jordan igual a cero:*

$$\mu \partial X = 0. \tag{44.11}$$

Cualquiera que sea el conjunto X, designemos mediante $\sigma_k = \sigma_k(X)$ el conjunto de puntos de aquellos, y sólo aquellos, cubos de rango k que están contenidos en $S_k(X)$ y no se contienen en $s_k(X)$:

$$\sigma_k(X) = \bigcup_{Q^n \subset S_k,\, Q^n \not\subset s_k} Q^n.$$

De este modo, el conjunto $\sigma_k(X)$ se compone de los cubos cerrados y la diferencia en el sentido de la teoría de conjuntos $S_k(X) \backslash s_k(X)$ se contiene en el conjunto $\sigma_k(X)$ y, en el caso general, no coincide con éste. Por otra parte

$$\overline{S_k(X) \backslash s_k(X)} = \sigma_k(X)^{*)}.$$

Antes de demostrar el teorema demos a conocer un lema.

*)La raya por encima del conjunto significa, como siempre, su clausura (véase el p. 18.2)

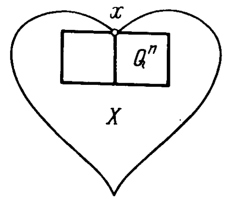


Fig. 177

Lema 3. *Para todo conjunto acotado* $X \subset R^n$ *son válidas las inclusiones*

$$\partial X \subset \sigma_k(X) \subset S_k(\partial X). \tag{44.12}$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Mostremos primero que

$$\partial X \subset \sigma_k(X). \tag{44.13}$$

Por cuanto $X \subset S_k(X)$, se tiene $\overline{X} \subset \overline{S_k(X)}$. El conjunto $S_k(X)$ se compone, por ser acotado el conjunto X, de un número finito de cubos cerrados y por esta razón es cerrado: $\overline{S_k(X)} = S_k(X)$. Por consiguiente, para cualquier $k = 0, 1, 2, \ldots, \overline{X} \subset S_k(X)$, por ende, también $\partial X \subset S_k(X)$, pues $\partial X \subset \overline{X}$.

Tomemos un punto de frontera x del conjunto X: $x \in \partial X$. En virtud de la inclusión $\partial X \subset S_k(X)$ existe por lo menos un cubo Q^n de rango k tal que $x \in Q^n$ y $Q^n \subset S_k(X)$. Si Q^n no está contenido en $s_k(X)$, entonces, por lo visto, $Q^n \subset \sigma_k(X)$ y, por tanto, también $x \in \sigma_k(X)$.

Si, en cambio, $Q^n \subset s_k(X)$ (fig. 177), entonces, en virtud de las inclusiones $x \in Q^n$ y $Q^n \subset s_k(X) \subset X$, tenemos $x \in X$. Por eso, en este caso, todos los cubos de rango k que contienen el punto x, se disponen en $S_k(X)$, pues la intersección de todo cubo de esta índole con el conjunto X contiene el punto x y, por tanto, no es vacía. Todos estos cubos no pueden pertenecer al conjunto X, de lo contrario el punto x no sería punto de frontera del conjunto X, sino el interior. Por ello, entre todos los cubos de rango k que contienen el punto x existe por lo menos un cubo Q_0^n que no se contiene en $s_k(X)$, es decir, $Q_0^n \subset S_k(X)$, pero $Q_0^n \not\subset s_k(X)$. De aquí se deduce que $Q_0^n \subset \sigma_k(X)$, y, dado que $x \in Q_0^n$, entonces también en este caso $x \in \sigma_k(X)$. El punto x fue punto arbitrario de la frontera ∂X, y por eso, la inclusión (44.13) se ha demostrado.

La segunda inclusión (44.12), es decir, la inclusión $\sigma_k(X) \subset S_k(\partial X)$ se demuestra de un modo más fácil, sin que incluso se suponga la acotación del conjunto X. Todo cubo Q^n de rango k, que se dispone en $\sigma_k(X)$ tiene, a ciencia cierta, tanto los puntos del conjunto X (pues, en virtud de la definición de conjunto $\sigma_k(X)$, cualquier cubo de rango k, contenido en este conjunto, se contiene también en $S_k(X)$, y, por lo tanto, se interseca con X) como aquellos que no pertenecen a X (pues, de conformidad con la misma definición, ningún cubo de rango k, dispuesto íntegramente en X, es decir, perteneciente a $s_k(X)$, no se contiene en $\sigma_k(X)$). Como el cubo Q^n es un conjunto linealmente conexo, hay en él, a ciencia cierta, unos puntos de la frontera del conjunto X (véase el lema 9 en el p. 18.2). Esto significa precisamente que $Q^n \subset S_k(\partial X)$ y, como Q^n fue un cubo arbitrario de rango k, dispuesto en $\sigma_k(X)$, sé tiene

$$\sigma_k(X) \subset S_k(\partial X). \ \square \tag{44.14}$$

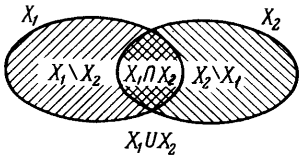


Fig. 178

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. NECESIDAD. Sea X un conjunto medible. De acuerdo con lo demostrado, es acotado. Luego, conforme a la definición de conjunto medible, las medidas inferior y superior del conjunto X son finitas e iguales: $\mu_*X = \mu^*X$, es decir,

$$\lim_{k\to+\infty} \mu s_k(X) = \lim_{k\to\infty} \mu S_k(X). \tag{44.15}$$

Por cuanto, conforme a la definición del conjunto $\sigma_k(X)$ y la fórmula (44.2),

$$\mu\sigma_k(X) = \mu S_k(X) - \mu\, s_k(X), \tag{44.16}$$

de (44.15) se infiere que

$$\lim_{k\to+\infty} \mu\sigma_k(X) = 0. \tag{44.17}$$

En virtud de la inclusión (44.13) y la monotonía de la medida superior (véase (44.7), para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ se verifica la desigualdad

$$\mu^*\partial X \leqslant \mu^*\sigma_k(X) = \mu\sigma_k(X).$$

Pasando al límite para $k \to +\infty$, en vista de (44.17), obtendremos $\mu^*\partial X = 0$. Por lo tanto, el conjunto ∂X es medible según Jordan y $\mu\partial X = 0$.

SUFICIENCIA. Sea X un conjunto acotado y $\mu\partial X = 0$. Por definición de la medida

$$\lim_{k\to+\infty} \mu S_k(\partial X) = 0. \tag{44.18}$$

En virtud de la inclusión (44.14) y la monotonía de la medida (véase la propiedad 2 de la medida) se verifica la desigualdad $\mu\sigma_k(X) \leqslant \mu S_k(\partial X)$, y por lo tanto (véase (44.16)), la desigualdad

$$\mu S_k(X) - \mu s_k(X) \leqslant \mu S_k(\partial X). \tag{44.19}$$

Por cuanto el conjunto X es acotado, su medida inferior μ_*X y la superior μ^*X son finitas y, por ende (véanse (44.4) y (44.5)) en la desigualdad (44.19) podemos pasar al límite para $k \to +\infty$. En vista de (44.18), obtendremos

$$\mu^*X - \mu_*X = 0, \text{ es decir, } \mu^*X = \mu_*X.$$

Esto significa precisamente la mensurabilidad según Jordan del conjunto X. □

Con ayuda del teorema 1 se muestra fácilmente que al realizarse las operaciones de unión en el sentido de la teoría de conjuntos, como también las de intersección y sustracción su mensurabilidad no se perturba. Observemos previamente que para cualesquiera dos conjuntos X_1 y X_2, dispuestos en el espacio R^n, son válidas las inclusiones (fig. 178).

$$\partial(X_1 \cup X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2, \tag{44.20}$$

$$\partial(X_1 \cap X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2, \tag{44.21}$$

$$\partial(X_1 \setminus X_2) \subset \partial X_1 \cup \partial X_2, \tag{44.22}$$

Demostremos, por ejemplo, la inclusión (44.21). Sea $x \in \partial(X_1 \cap X_2)$. Entonces, ante todo, $x \in \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2$, pues de lo que $x \in \partial(X_1 \cap X_2)$ se deduce que en todo entorno del punto x se tienen puntos que pertenecen simultáneamente a X_1 y a X_2, es decir, x es un punto de adherencia tanto del conjunto X_1, como del X_2. Si $x \in \partial X_1$ o bien $x \in \partial X_2$, o bien tienen lugar ambos casos, entonces, evidentemente, $x \in \partial X_1 \cup \partial X_2$. Si, en cambio, $x \notin \partial X_1$ y $x \notin \partial X_2$, entonces, como $x \in \overline{X}_1$ y $x \notin \partial X_1$, x es un punto interior para el conjunto X_1 y, por analogía, punto interior para el conjunto X_2 (pues la clausura de todo conjunto sólo se compone de los puntos interiores de este conjunto y sus puntos de frontera; cada uno de ellos puede ser, naturalmente, vacío). En este caso el punto x cuenta con los entornos $U_1(x) \subset X_1$ y $U_2(x) \subset X_2$, cuya intersección $U(x) = U_1(x) \cap U_2(x)$ será también el entorno del punto x, y, evidentemente, $U(x) \subset X_1 \cap X_2$. De este modo, para el punto x se ha encontrado un entorno $U(x)$, todos los puntos del cual pertenecen al conjunto $X_1 \cap X_2$, es decir, x es un punto interior y no de frontera de dicho conjunto: $x \notin \partial(X_1 \cap X_2)$. La contradicción obtenida muestra que el caso en que $x \notin \partial X_1$ y, a la vez, $x \notin \partial X_2$ es imposible, siempre que $x \in \partial(X_1 \cap X_2)$.

Ejercicio 4. Demuéstrense las inclusiones (44.20) y (44.22).

De las inclusiones (44.20) y (44.21) se establece con facilidad la validez de las inclusiones

$$\partial \bigcup_{j=1}^{m} X_j \subset \bigcup_{j=1}^{m} \partial X_j, \quad \partial \bigcap_{j=1}^{m} X_j \subset \bigcap_{j=1}^{m} \partial X_j, \tag{44.23}$$

empleando el método de inducción matemática para cualquier número finito de conjuntos.

Propiedad 3°. *La unión e intersección de un número finito de los conjuntos medibles según Jordan, como también la diferencia entre dos tales conjuntos, son conjuntos medibles según Jordan.*

Efectivamente, si los conjuntos X_j son medibles, entonces, de acuerdo con el teorema 1, $\mu\partial X_j = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Por ello, debido al corolario del lema 2, $\mu \bigcup_{j=1}^{m} \partial X_j = 0$, y en este caso (véase el corolario 1 del lema 1) de las inclusiones (44.23) se deduce, respectivamente, que

$$\mu\partial \bigcup_{j=1}^{m} X_j = 0, \quad \mu\partial \bigcap_{j=1}^{m} X_j = 0.$$

De aquí proviene que, en virtud del mismo teorema 1, los conjuntos $\bigcup_{j=1}^{m} X_j$ y

$\bigcap\limits_{j=1}^{m} X_j$ son también medibles. Análogamente se demuestra la mensurabilidad de la diferencia entre los conjuntos medibles.

Ahora podemos demostrar fácilmente que para la medida de Jordan se verifica la desigualdad análoga a la desigualdad (44.10) para la medida superior. Enunciemos la afirmación correspondiente.

Para cualquier totalidad finita de conjuntos medibles $X_1, X_2, \ldots, X_m$ es válida la desigualdad

$$\mu \bigcup_{j=1}^{m} X_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu X_i. \tag{44.24}$$

En efecto, si los conjuntos X_i son medibles, se tiene $\mu^* X_i = \mu X_i$, y, de acuerdo con lo demostrado, la unión $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$ es también medible y, por tanto, $\mu^* \bigcup\limits_{j=1}^{m} X_i = \mu \bigcup\limits_{j=1}^{m} X_i$. Por esta razón, la fórmula (44.24) en el caso que se considera coincide con la fórmula (44.10).

Propiedad 4° (aditividad de la medida). *La medida de una unión de un número finito de los conjuntos medibles según Jordan disjuntos dos a dos es igual a la suma de las medidas de estos conjuntos.*

De este modo, si X_i son conjuntos medibles, $X_i \cap X_j = \varnothing, i \neq j, i = 1, 2, \ldots, m$, entonces

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i = \sum_{i=1}^{m} \mu X_i. \tag{44.25}$$

Demostremos esto. Como para cualquier rango k es válida la inclusión $s_k(X_i) \cap \cap\, s_k(X_j) \subset X_i \cap X_j$, de la condición $X_i \cap X_j = \varnothing$, para $i \neq j$, se infiere que $s_k(X_i) \cap \cap\, s_k(X_j) = \varnothing, i \neq j$; por ello, de acuerdo con (44.2),

$$\sum_{i=1}^{m} \mu s_k(X_i) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(X_i). \tag{44.26}$$

Si el cubo de rango k se dispone en cierto conjunto X_i, se dispone también en la unión $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$, y, por consiguiente,

$$\bigcup_{i=1}^{m} s_k(X_i) \subset s_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right).$$

De aquí, en virtud de (44.26) y la monotonía de la medida (en el caso dado incluso de la fórmula (44.2)) se desprende que

$$\sum_{i=1}^{m} \mu s_k(X_i) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(X_i) \leqslant \mu s_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right).$$

Pasando al límite para $k \to +\infty$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{m} \mu X_i \leqslant \mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i. \tag{44.27}$$

Por otra parte, para cualesquiera conjuntos medibles se verifica la desigualdad (44.24). Evidentemente, de (44.24) y (44.27) proviene la igualdad (44.25), es decir, aditividad de la medida.

OBSERVACIÓN. De las propiedades 3 y 4 se infiere que si a un conjunto medible se le suma o se le resta un conjunto de medida cero, el conjunto obtenido será también medible y la medida de éste será igual a la del conjunto de partida. Efectivamente, si X es un conjunto medible y $\mu X_0 = 0$, entonces, según la propiedad 3 de la medida, los conjuntos $X \setminus X_0$ y $X \cup X_0$ son también medibles. Luego, de conformidad con la propiedad 4, para $X_0 \subset X$ y $\mu X_0 = 0$ tenemos

$$\mu X = \mu[(X \setminus X_0) \cup X_0] = \mu(X \setminus X_0) + \mu X_0 = \mu(X \setminus X_0).$$

Tomando en consideración la monotonía de la medida y las desigualdades (44.24) llegamos a que para todo X_0, $\mu X_0 = 0$ se verifican las desigualdades

$$\mu X \leqslant \mu(X \cup X_0) \leqslant \mu X + \mu X_0 = \mu X,$$

de donde $\mu(X \cup X_0) = \mu X$.

De lo expuesto proviene, además, que si a un conjunto medible se le agrega o se le resta algún conjunto de sus puntos de frontera, se obtendrá nuevamente un conjunto medible de la misma medida que el conjunto dado. Esto se debe a que en virtud del teorema 1, la frontera de un conjunto medible y, por ende, cualquier subconjunto de ésta, tienen medida cero. De este modo, en particular, si el conjunto X es medible, su clausura $\overline{X} = X \cup \partial X$ es también medible, con la particularidad de que $\mu X = \mu \overline{X}$.

La afirmación recíproca no es cierta: *existen unos conjuntos no medibles según Jordan cuyas clausuras son medibles.* De ejemplo sencillo del conjunto semejante sirve el conjunto de todos los puntos reales en cierto segmento. Dicho conjunto es no medible (¿por qué?), mientras que su clausura está constituida por un segmento que es medible.

Los ejemplos de conjuntos medibles de dimensión tan grande como se quiera se pueden obtener construyendo cilindros cuyas bases son los conjuntos medibles. Enunciemos la definición del cilindro.

Definición 2. *Sea X_0 un conjunto dispuesto en la hipersuperficie $R^{n-1} = \{x : x_n = 0\}$ del espacio R^n, y sean a y b unos números reales, $a \leqslant b$. El conjunto*

$$X = \{x : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \in X_0,\ a \leqslant x_n \leqslant b\}$$

se llama cilindro n-dimensional de base X_0 y generatriz (paralela al eje coordenado x_n) de longitud $h = b - a$.

Es obvio que recurriendo a la noción de producto de los conjuntos (véase el p. 1.2* ó 41.2), podemos decir que el cilindro X es un producto de los conjuntos X_0 y del segmento $[a, b] : X = X_0 \times [a, b]$. Si X_0 es un conjunto acotado, el cilindro de base X_0 es un conjunto acotado. De aquí se infiere que todo cilindro, de cuya base sirve un conjunto medible, es acotado, pues el conjunto medible es acotado.

Teorema 2. *Si X_0 es un conjunto medible según Jordan del espacio R^{n-1}, todo cilindro n-dimensional X de base X_0 es un conjunto medible según Jordan del espacio R^n y*

$$\mu_n X = h\mu_{n-1}X_0, \tag{44.28}$$

donde h es la longitud de la generatriz del cilindro X.

Corolario. *Si la base del cilindro tiene medida $(n-1)$-dimensional igual a cero, entonces el propio cilindro n-dimensional tiene medida n-dimensional que es también igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Observemos, ante todo, que la proyección*) de cualquier cubo n-dimensional Q^n de rango k representa un cubo $(n-1)$-dimensional Q^{n-1} también de rango k y

$$\mu Q^n = 10^{-k}\mu Q^{n-1}. \tag{44.29}$$

Designemos mediante $q_1^{n-1}, \ldots, q_l^{n-1}$ los cubos $(n-1)$-dimensionales de rango k que componen el conjunto $s_k(X_0)$ y mediante $Q_1^{n-1}, \ldots, Q_m^{n-1}$, los cubos $(n-1)$-dimensionales que componen el conjunto $S_k(X_0)$.

Sean $q_{i1}^n, \ldots, q_{ip}^n$ los cubos n-dimensionales de $s_k(X)$ que se proyectan en el cubo $q_i^{n-1} \subset \mathring{s}_k(X_0)$. Por cuanto X es un cilindro, el número p de estos cubos n-dimensionales q_{ij}^n será el mismo para todo $i = 1, 2, \ldots, l$, por lo cual

$$s_k(X) = \bigcup_{i=1}^{l} \bigcup_{j=1}^{p} q_{ij}^n. \tag{44.30}$$

Análogamente, el número r de cubos n-dimensionales Q_{ij}^n de $S_k(X)$ que se proyectan en un mismo cubo Q_i^{n-1} de $S_k(X_0)$ es igual para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, por lo cual

$$S_k(X) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{r} Q_{ij}^n. \tag{44.31}$$

La proyección del conjunto $\bigcup_{j=1}^{p} q_{ij}^n$ sobre el eje x_n es un segmento de longitud $p \cdot 10^{-k}$, con la particularidad de que

$$p \cdot 10^{-k} \leqslant h, \tag{44.32}$$

pues todos los cubos q_{ij}^n se contienen en $s_k(X)$ y, por consiguiente, en el cilindro X. En cuanto a la proyección del conjunto mencionado sobre el hiperplano R^{n-1}, ésta representa uno de los cubos q_i^{n-1}, por lo cual

*) Se llama proyección $\mathrm{pr}_{x_n} X$ del conjunto $X \subset R^n$ sobre el hiperplano $R^{n-1} = \{x : x_n = 0\}$ un conjunto de puntos del tipo $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ para cada uno de los cuales existe tal x_n que $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in X$.

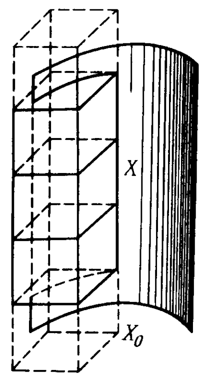


Fig. 179

$$\mu_n s_k(X) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p} \mu_n q_{ij}^n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{10^k}\mu_{n-1}q_i^{n-1} =$$

$$= \frac{p}{10^k}\sum_{i=1}^{l} \mu_{n-1}q_i^{n-1} = \frac{p}{10^k}\mu_{n-1}s_k(X_0). \tag{44.33}$$

La proyección de la "columna de cubos" $\bigcup_{j=1}^{r} Q_{ij}^n$ (fig. 179) sobre el eje x_n es un segmento de longitud $10^{-k}r$, con la particularidad de que

$$h \leqslant \frac{r}{10^k} \leqslant h + \frac{2}{10^k}. \tag{44.34}$$

Luego, cada columna de este género se proyecta sobre el hiperplano R^{n-1} en el cubo Q_i^{n-1} que o bien se contiene en $s_k(X_0)$ o bien en $\sigma_k(X_0) = \overline{S_k(X_0) \setminus s_k(X_0)}$ (el conjunto $\sigma_k(X_0)$ se ha introducido al demostrar el teorema 1). Por esta razón

$$\mu_n S_k(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \mu_n Q_{ij}^n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{10^k}\mu_{n-1}Q_i^{n-1} =$$

$$= \frac{r}{10^k}\sum_{i=1}^{m} \mu_{n-1}Q_i^{n-1} = \frac{r}{10^k}[\mu s_k(X_0) + \mu\sigma_k(X_0)]. \tag{44.35}$$

Observemos, por fin, que cada una de las columnas $\bigcup_{j=1}^{r} Q_{ij}^n$ que se proyecta en el cubo $q^{n-1} \subset s_k(X_0)$ se diferencia de la columna $\bigcup_{j=1}^{p} q_{ij}^n$, que se proyecta en el mismo cubo, sólo en dos cubos adicionados a la columna por arriba y por debajo (en el sentido de decrecimiento, de crecimiento, respectivamente, de la coordenada x_n, véase la fig. 179). Por ello

$$r = p + 2.$$

De aquí y de las desigualdades (44.32) y (44.34) tenemos

$$\frac{p}{10^k} \leqslant h \leqslant \frac{p+2}{10^k} = \frac{r}{10^k} \leqslant h + \frac{2}{10^k}.$$

Debido a esta circunstancia, de las desigualdades (44.33) y (44.35), obtenemos

$$\mu_n S_k(X) - \mu_n s_k(X) = \frac{r-p}{10^k}\mu_{n-1} s_k(X_0) + $$

$$+ \frac{r}{10^k}\mu\sigma_k(X_0) \leqslant \frac{2}{10^k}\mu_{n-1}X_0 + \left(h + \frac{2}{10^k}\right)\mu\sigma_k(X_0)$$

y como $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2}{10^k} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\mu\sigma_k(X_0) = 0$, entonces

$$\lim_{k\to+\infty}[\mu_n S_k(X) - \mu_n s_k(X)] = 0. \qquad (44.36)$$

El conjunto X_0 es acotado, como cualquier otro conjunto medible. No es difícil convencerse de que los diámetros $d(X_0)$ y $d(X)$ de los conjuntos X_0 y X están ligados mediante la correlación $d(X) = \sqrt{[d(X_0)]^2 + h^2}$, de la cual se deduce que el conjunto X es también acotado. Por ello, de acuerdo con lo expuesto más arriba, tiene medidas finitas superior e inferior. De las fórmulas (44.4), (44.5) y (44.36) proviene que dichas medidas son iguales: $\mu^*X = \mu_*X$, es decir, el conjunto X es medible.

Demostremos ahora la fórmula (44.28). Con este objeto multipliquemos por h la desigualdad

$$\mu_{n-1}s_k(X_0) \leqslant \mu X_0 \leqslant \mu_{n-1}S_k(X_0).$$

Al aplicar las desigualdades (44.32) y (44.34), tendremos (véase también (44.33) y (44.35))

$$\mu_n s_k(X) = \frac{p}{10^k}\mu_{n-1}s_k(X_0) \leqslant h\mu X_0 \leqslant \frac{r}{10^k}\mu_{n-1}S_k(X_0) = \mu_n S_k(X),$$

observando que en virtud de (44.36) ambos miembros de la desigualdad obtenida tienden, para $k \to \infty$, hacia un mismo límite μX, de lo que se infiere la fórmula (44.28).

Problema 29. Constrúyase un ejemplo de región que sea no medible según Jordan.

Problema 30. Demuéstrese que la medida de Jordan no depende de cómo se elige el sistema de coordenadas cartesianas.

44.2. CONJUNTOS DE MEDIDA CERO

En el punto antecedente se ha establecido que un conjunto es medible según Jordan cuando, y sólo cuando, su frontera tiene medida cero. Resulta importante, pues, conocer los criterios, rigiéndose por los cuales se podría establecer que un con-

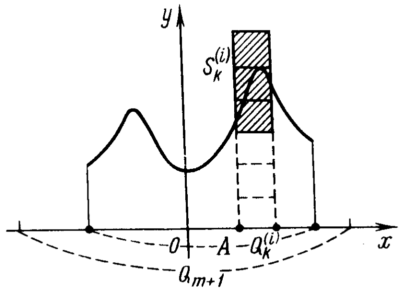


Fig. 180

junto tiene medida cero. Como ejemplo suficientemente general de conjuntos de medida cero sirven los cilindros en cuya base se disponen conjuntos de medida cero (véase el corolario del teorema 2). Otra clase amplia de los conjuntos de medida cero se proporciona en el teorema que sigue.

Teorema 3. *La gráfica de cualquier función continua en un compacto tiene medida cero.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ es continua en el compacto $A \subset R^n_x$. Sea X la gráfica de esta función, es decir, el conjunto de tales puntos $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ en el espacio n-dimensional R^{n+1}_{xy} que $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ e $y = f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$X = \{(x, y) : (x_1, \ldots, x_n) \in A, \ y = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Mostremos que la medida de Jordan $(n + 1)$-dimensional del conjunto X es igual a cero. El conjunto A, siendo un compacto, es acotado. Por eso existe tal número natural m que el cubo n-dimensional

$$P_m = \{x : -m \leqslant x_i \leqslant m, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

contiene el conjunto $A : P_m \supset A$. Con mayor razón el cubo

$$P_{m+1} = \{x : -m - 1 \leqslant x_i \leqslant m + 1, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

también contiene $A : P_{m+1} \supset A$, y más aún, cualquiera que sea el cubo Q de cierto rango $k = 0, 1, 2, \ldots$, que se interseca con el conjunto A, es decir, $Q \subset S_k(A)$, está contenido también en $P_{m+1} : Q \subset P_{m+1}$. Por lo tanto, para todo k se tiene $S_k(A) \subset$ $\subset P_{m+1}$. Aquí y en adelante mediante $S_k(A)$, $S_k(X)$, al igual que en el p. 44.1, se denotan los conjuntos de puntos de todos los cubos de rango k de los espacios correspondientes que se intersecan con los conjuntos $A \subset X^n_x$, $X \subset R^{n+1}_{xy}$.

El conjunto $S_k(X)$ se descompone en un número finito de "columnas" $S_k^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, cada una de las cuales consta de los cubos $(n + 1)$-dimensionales de rango k que tienen una misma proyección (véase la llamada en la pág. 128) Q_k^i en el espacio R^n_x (en la fig. 180 se muestra el caso en que $n = 1$):

$$S_k(X) = \bigcup S_k^{(i)}, \ \mathrm{pr}_y S_k^{(i)} = Q_k^{(i)}, \ k = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (44.37)$$

Designemos con $\omega(\delta)$ el módulo de continuidad de la función f en A. Observando que la diagonal (el diámetro *)) del cubo n-dimensional con la arista de longitud $1 \cdot 10^{-k}$ es igual a $\sqrt{n} \cdot 10^{-k}$, para la altura $h_k^{(i)}$ de cada columna $S_k^{(i)}$ tenemos (véase la fig. 161) una estimación

$$h_k^{(i)} \leqslant \omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}. \tag{44.38}$$

Efectivamente, para estimar la altura $h_k^{(i)}$, a la distancia $\omega(10^{-k}\sqrt{n})$ entre los valores máximo y mínimo de la función $f(x)$ en el cubo $Q_k^{(i)}$ es suficiente añadir las longitudes de las aristas de los cubos más inferior y más superior de la columna en consideración $S_k^{(i)}$ (esta estimación se logra cuando los puntos de la gráfica, correspondientes a los valores extremos mencionados, se dispongan en las aristas, paralelas al espacio R_x^n, de los cubos de rango k). De (44.37) y (44.38) obtenemos:

$$\mu S^k(X) = \mu \bigcup_i S_k^{(i)} = \sum_i \mu S_k^{(i)} =$$
$$= \sum_i h_k^{(i)} \mu Q_k^{(i)} \leqslant \left[\omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}\right] \sum_i \mu Q_k^{(i)} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\omega\left(\frac{\sqrt{n}}{10^k}\right) + \frac{2}{10^k}\right] \mu P_{m+1}. \tag{44.39}$$

Siendo la función f continua en el compacto, es uniformemente continua en él, por lo cual $\lim\limits_{k\to+\infty} \omega(10^{-k}\sqrt{n}) = 0$, y como $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{2}{10^k} = 0$, de (44.39) tenemos $\lim\limits_{k\to\infty} \mu S_k(X) = 0$, lo que es testimonio de que $\mu^* X = 0$, por consiguiente, también $\mu X = 0$. □

En virtud de los teoremas 2 y 3, todo conjunto acotado cuya frontera puede ser representada como una unión de un número finito de los conjuntos, cada uno de los cuales representa o bien una parte de la gráfica de una función continua en el conjunto cerrado acotado, o bien una parte de cilindro con la base de medida cero, es un conjunto medible, pues debido a la aditividad de la medida, la medida de la frontera del conjunto citado es igual a cero y, por lo tanto, de acuerdo con el teorema 1, el conjunto es medible. De este modo hemos obtenido la descripción de una clase bastante amplia de conjuntos medibles según Jordan que se encuentran frecuentemente en el análisis matemático y en sus aplicaciones. Así, por ejemplo, los conjuntos planos (trapecios curvilíneos, "sectores" de las curvas definidas en las coordenadas polares, como también cuerpos de revolución, cuyas áreas y, respectivamente, volúmenes, se calculaban en el § 32 con ayuda de la integral unidimensional de Riemann) son conjuntos medibles según Jordan, pues sus fronteras tienen medida cero, de lo que no es difícil convencerse.

De modo semejante son medibles según Jordan los paralelepípedos y elipsoides, en particular, las esferas, puesto que sus fronteras pueden representarse en forma de la unión de las gráficas de las funciones continuas en los compactos.

*) Véase en el p. 19.6 la definición de diámetro de un conjunto.

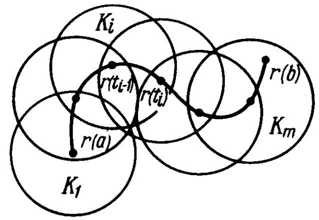


Fig. 181

Cabe notar que en el § 31 se ha introducido el concepto de medida mes G para los conjuntos abiertos. Al comparar la definición para la medida mencionada con la aducida en el p. 44.1, vemos que mes $G = \mu_* G$ es decir, la medida introducida en el § 31 es una medida inferior de Jordan. Sin embargo, en virtud de lo expuesto más arriba, todos los conjuntos considerados en los ejemplos del § 32 eran medibles según Jordan y, por consiguiente, para ellos mes G fue la medida de Jordan, es decir, para los conjuntos mencionados tuvo lugar mes $G = \mu G$.

Resulta interesante generalizar el teorema 3 para el caso de los conjuntos dados paramétricamente, en particular, para unas curvas paramétricas. Se pone de manifiesto que incluso en este caso, para que las curvas en consideración tengan medida cero no es suficiente que sean sólo continuas. Existen, por ejemplo, unas curvas $x_i = x_i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($x_i(t)$ son las funciones continuas en cierto segmento $[a, b]$) llamadas curvas de Peano*) que pasan por cada punto de cierto cubo n-dimensional y, por ende, no tienen medida cero.

Problema 31. Constrúyase un ejemplo de curva de Peano.

Teorema 4. *Toda curva plana rectificable tiene medida cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dada una curva rectificable γ, cuya longitud es igual a S. Supongamos, además, que $r = r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es cierta representación de la curva γ. Dividamos la curva mencionada de manera sucesiva, o sea, en el orden de crecimiento del parámetro t, mediante los puntos $r(t_i)$, $t_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $t_0 = a$, $t_m = b$, en m partes de igual longitud, es decir, adoptemos tal partición $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=m}$ del segmento $[a, b]$, que la longitud de cada parte γ_i (de la curva γ), definida por la representación $r = r(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, tenga la longitud S/m.

Designemos mediante K_i un círculo cerrado de radio S/m y centro en el punto $r(t_{i-1})$. Ya que el arco γ_i es de longitud S/m y su origen coincide con el centro del círculo K_i, se dispone íntegramente en este círculo (fig. 181). De aquí se deduce que toda la curva γ está contenida en la reunión de los círculos K_i:

$$\gamma \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

*) J. G. Peano (1858 — 1932), matemático italiano.

Por consiguiente, por ser monótona y semiaditiva la medida superior (véase los lemas 1 y 2 en el p. 44.1),

$$\mu^*\gamma \leqslant \mu^* \bigcup_{i=1}^{m} K_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu^* K_i. \qquad (44.40)$$

Pero, $\mu^* K_i = \mu K_i = \pi\left(\frac{S}{m}\right)^2$, $i = 1, \dots, m$*), por lo cual, de (44.40) tenemos

$$\mu^*\gamma \leqslant \pi S^2/m.$$

El primer miembro de la desigualdad no depende de m, mientras que el segundo miembro tiende a cero cuando $m \to +\infty$, a consecuencia de lo cual $\mu\gamma = 0$. □

Ejercicio 5. Demuéstrese que toda curva rectificable tiene en un espacio tridimensional una medida cero.

De los teoremas 1 y 4 proviene que todo conjunto plano acotado, cuya frontera es una curva rectificable, es medible.

44.3. DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL MÚLTIPLE

Enunciemos la definición de la integral múltiple de Riemann. Con este fin introduzcamos ante todo el concepto de partición de un conjunto medible y el de finura de dicha partición.

Sea X un conjunto medible según Jordan, $X \subset R^n$. Un sistema finito $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ de conjuntos no vacíos medibles según Jordan X_i, $i = 1, 2, \dots, i_0$, se denomina *partición del conjunto X*, siempre que

1) las intersecciones de dos en dos de los conjuntos X_i tienen medida cero:

$$\mu(X_i \cap X_j) = 0, \; i \neq j;$$

2) $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i = X.$

El número $\delta_\tau = \max_{i=1,2,\dots,i_0} d(X_i)$, donde $d(X_i)$ es el diámetro del conjunto X_i, lleva el nombre de *finura de la partición* τ.

Por ser aditiva la medida de Jordan, para toda partición $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ del conjunto X tenemos

$$\mu X = \sum_{i=1}^{i_0} \mu X_i. \qquad (44.41)$$

En efecto, supongamos que para i fijo se tiene $X_i^* = \bigcup_{j\neq 1} X_i \cap X_j$ y $X^* = \bigcup_{i=1}^{i_0} X_i^*$. En tal caso, en virtud del p. 1) de la definición de partición de un conjunto, $\mu(X_i \cap X_j) = 0$, $i \neq j$, por lo cual $\mu X_i^* \leqslant \sum_{j \neq 1} \mu(X_i \cap X_j) = 0$, es decir, $\mu X_i^* = 0$. De aquí $\mu X^* \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} \mu X_i^* = 0$, por consiguiente, $\mu X^* = 0$. Además, los conjuntos X^*, $X_i \setminus X^* = X_i^{**}$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, son disjuntos dos a dos y, en virtud del p. 2), $\bigcup_{i=1}^{i_0} X_i^{**} \cup X^* = \bigcup_{i=1}^{i_0} X_i = X$.

Puesto que

$$\mu X_i = \mu(X_i \setminus X^*) = \mu X_i^{**},$$

de todo lo dicho proviene, por ser aditiva la medida, que

$$\mu X = \sum_{i=1}^{i_0} \mu X_i^{**} + \mu X^* = \sum_{i=1}^{i_0} \mu X_i. \; \square$$

Para simplificar las designaciones, a veces, en lugar de $\{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ escribiremos $\{X_i\}$.

Sean $\tau = \{X_i\}$ y $\tau' = \{X_j'\}$ las particiones del conjunto medible X. La partición τ' se llama *inscrita* en la partición τ, si para cualquier $X_j' \in \tau'$ existe tal elemento de $X_i \in \tau$ que $X_j' \subset X_i$. En este caso suele escribirse $\tau' > \tau$, o bien $\tau < \tau'$.

Cabe señalar dos propiedades de las particiones de un conjunto.

1°. *Si $\tau < \tau'$ y $\tau' < \tau''$, se tiene $\tau < \tau''$.*

2°. *Para cualesquiera dos particiones $\tau' = \{X_i'\}$ y $\tau'' = \{X_j''\}$ de un conjunto medible X existe tal partición suya τ que $\tau > \tau'$ y $\tau > \tau''$.*

La propiedad 1° proviene, evidentemente, de la definición de partición inscrita. A título de partición τ, indicada en la propiedad 2°, puede tomarse un conjunto de toda una serie de intersecciones no vacías $X_i' \cap X_j''$.

Como ejemplo de partición de un conjunto medible interviene una totalidad de toda clase de intersecciones no vacías del conjunto dado con los cubos de cierto rango fijado k. De aquí se ve que para todo conjunto medible existen particiones cuya finura es tan menuda como se quiera.

Definición 3. *Sea $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ una función dada en el conjunto medible según Jordan $X \subset R^n$ y sea τ una partición del conjunto X, $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$; elijamos arbitrariamente los puntos $\xi^{(i)} \in X_i$, $i = 1, 2, \dots, i_0$. Una suma del tipo*

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(i_0)}) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)}) \mu X_i \qquad (44.42)$$

lleva el nombre de suma integral de Riemann de la función f.

Al igual que en el caso de la función de una sola variable, la definición de la integral múltiple puede enunciarse, haciendo uso del concepto de límite de una sucesión o "el lenguaje $\varepsilon - \delta$".

*) En efecto, la circunferencia C, que es la frontera del círculo K, puede representarse como reunión de dos semicircunferencias, cada una de las cuales representa la gráfica de una función continua en el segmento. Por ello, de acuerdo al teorema 3, $\mu C = 0$, por consiguiente, todo círculo K es un conjunto medible.

Definición 4. *El número A se denomina integral de Riemann de la función f referida al conjunto medible según Jordan $X \subset R^n$, si cualquiera que sea la sucesión de particiones $\tau_m = \{X_i^m\}_{i=1}^{i=i^{(m)}}$, $m = 1, 2, \dots$, del conjunto X tal que las finuras de las particiones τ_m tienden a cero cuando $m \to +\infty$: $\lim_{m \to +\infty} \delta_{\tau_m} = 0$, y cualesquiera que sean los puntos $\xi^{(i, m)} \in X_i^m$ $i = 1, 2, \dots, i^{(m)}$, la sucesión de sumas integrales $\sigma_{\tau_m}(f; \xi^{(1, m)}, \dots, \xi^{(i^{(m)}, m)})$ tiene como su límite, para $m \to +\infty$, el número A:*

$$\lim_{m \to +\infty} \sigma_{\tau_m}(f; \xi^{(1, m)}, \dots, \xi^{(i^{(m)}, m)}) = A. \tag{44.43}$$

La integral de la función f, referida al conjunto X, se disigna mediante

$$\int f(x)dX \text{ o bien } \int\int_X \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Si existe la integral $\int f(x)dX$, la función f se llama *integrable según Riemann* en el conjunto X. Las funciones integrables según Riemann se denominarán con frecuencia *integrables*.

La igualdad (44.43), es decir, la definición de la integral, se escribe brevemente como la fórmula

$$\int f(x)dX = \lim_{\sigma_\tau \to 0} \sigma_\tau. \tag{44.44}$$

En términos de ε y δ este límite significa lo siguiente: *para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta_\varepsilon > 0$, que cualquiera que sea la partición $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ del conjunto X de finura $\delta_\tau < \delta_\varepsilon$ y cualesquiera que sean los puntos $\xi^{(i)} \in X_i$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, se verifica la desigualdad*

$$|\sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(i_0)}) - \int f(x)dX| < \varepsilon. \tag{44.45}$$

Recurriendo al modo habitual, se demuestra que las definiciones (44.43) y (44.45) del límite de sumas integrales son equivalentes.

Señalemos que la definición de la integral (44.44) en el caso en que $n = 1$ y a título de conjunto, respecto al cual se realiza la integración, sirve un segmento, no coincide formalmente con la definición de integral de Riemann, introducida anteriormente, de la función de una sola variable, puesto que en aquel caso se consideraban sólo las particiones de un segmento en segmentos, mientras que ahora se consideran toda clase de particiones de un segmento en conjuntos medibles según Jordan. No obstante, se puede mostrar (lo haremos en el p. 44.7*) que para $n = 1$ ambas definiciones resultan equivalentes al considerar el caso en que un conjunto, respecto del cual se realiza la integración, es un segmento, es decir, las dos definiciones conducen a un mismo concepto de integrabilidad de las funciones y a un mismo concepto de integral.

Al determinar una integral referida al conjunto $X \subset R^n$, se pueden utilizar, para formar las sumas integrales, no todos los elementos de las particiones τ del conjunto X, sino despreciar aquellos sumandos que corresponden a los elementos de la partición cuyas clausuras se intersecan con cierto conjunto fijo de medida cero. Analicemos esta circunstancia más detalladamente.

Sea X un conjunto medible, $X_0 \subset X$, y sea $\tau = \{X\}_{i=1}^{i=i_0}$ la partición del conjunto X. Designemos mediante $\tau(X_0)$ la totalidad de aquellos elementos de la partición τ, cuyas clausuras no se intersecan con el conjunto X_0:

$$\tau(X_0) = \{X_i : \overline{X}_i \cap X_0 = \varnothing, X_i \in \tau\} \tag{44.46}$$

y, viceversa, con $\tau_0(X_0)$, la totalidad de aquellos X_i, para los cuales sus clausuras $\overline{X}_i$ se cortan con X_0:

$$\tau_0(X_0) = \{X_i : \overline{X}_i \cap X_0 \neq \varnothing, X_i \in \tau\}. \tag{44.47}$$

Lema 6. *Sea X un conjunto del espacio R^n medible según Jordan, $X_0 \subset X$ y $\mu X_0 = 0$. En este caso*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} \mu X_i = 0. \tag{44.48}$$

Esta igualdad significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que cualesquiera que sean las particiones τ del conjunto X de finura $\delta_\tau < \delta$, se verifica la desigualdad

$$\sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} \mu X_i < \varepsilon.$$

La sumación en la fórmula (44.48) se efectúa sólo según aquellos índices i, para los cuales $X_i \in \tau_0(X_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $X_0 \subset X$ y $\mu X_0 = 0$; entonces también $\mu \overline{X}_0 = 0$ (véase en el p. 44.1 la observación que sigue tras la demostración de la aditividad de una medida). Por ello, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal rango k que

$$\mu S_k(\overline{X}_0) < \varepsilon. \tag{44.49}$$

Aquí, como siempre, $S_k(\overline{X}_0)$ denota la totalidad de los puntos de todos los cubos de rango k que se intersecan con el conjunto $\overline{X}_0$ y, por lo tanto, lo recubren: $\overline{X}_0 \subset S_k(\overline{X}_0)$.

Recordemos que $\overline{X}_0$ se dispone estrictamente dentro del poliedro $S_k(\overline{X}_0)$, es decir, no se corta con su frontera (véase el p. 44.1). Por cuando el conjunto X_0 es acotado y cerrado, mientras que la frontera $\partial S_k(\overline{X}_0)$ del poliedro $S_k(\overline{X}_0)$, igual que la frontera de cualquier conjunto, está cerrada, entonces $\overline{X}_0$ y $\partial S_k(\overline{X})$ se hallan a una distancia positiva δ uno de la otra (véase el lema 7 en el p. 18.2).

$$\delta = \rho(\overline{X}_0, \partial S_k(\overline{X})) > 0. \tag{44.50}$$

Por ello todo conjunto D de diámetro $d(D)$ inferior a δ, que se corta con el conjunto $X_0 \subset \overline{X}_0$, se dispondrá íntegramente en $S_k(\overline{X}_0)$ (fig. 182). Efectivamente, si $d(D) < \delta$ y existe $x \in D \cap X_0$, entonces (véase (44.50)) $D \subset U(x, \delta) \subset S_k(\overline{X}_0)$, donde, como hasta ahora, $U(x, \delta)$ es el entorno esférico del punto x de radio δ.

Sea ahora $\tau = \{X_i\}$ una partición del conjunto X de finura $\delta_\tau < \delta$. Entonces para todo elemento X_i de esta partición cuya clausura se corta con el conjunto X_0, es decir, para cada $X_i \in \tau_0(X_0)$ tendremos $X_i \subset S_k(\overline{X}_0)$. Por esta razón

$$\bigcup_{X_i \in \tau_0(X_0)} X_i \subset S_k(\overline{X}_0).$$

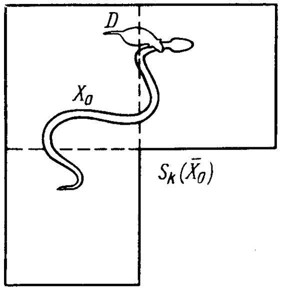


Fig. 182

Por consiguiente, en virtud de (44.49),

$$\sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} \mu X_i = \mu \bigcup_{X_i \in \tau_0(X_0)} X_i \leqslant \mu S_k(\bar{X}_0) < \varepsilon. \square$$

Introduzcamos una designación más. Sea X un conjunto medible, sea $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ cierta partición de este conjunto, $X_0 \subset X$. Para cualquier función f, definida en X, pongamos (véanse (44.46) y (44.47))

$$\sigma_{\tau(X_0)} = \sigma_{\tau(X_0)}(f; \xi^{(i)}, \ldots, \xi^{(i_0)}) = \sum_{X_i \in \tau(X_0)} f(\xi^{(i)})\mu X_i. \qquad (44.51)$$

Esta inscripción significa que la sumación en el segundo miembro de la igualdad se realiza sólo según aquellos índices i, para los cuales $X_i \in \tau(X_0)$. Como siempre, $\xi^{(i)} \in X_i$. Para la simetría de la inscripción, las sumas integrales ordinarias de Riemann pueden, por analogía, anotarse en la forma

$$\sigma_\tau = \sum_{X_i \in \tau} f(\xi^{(i)})\mu X_i.$$

En lugar del símbolo de sumación $\sum\limits_{X_i \in \tau}$ a veces, para abreviar, se escribirá $\sum\limits_{\tau}$. El límite de las sumas $\sigma_{\tau(X_0)}$ para $\delta_\tau \to 0$ se determina por analogía con el límite correspondiente de las sumas integrales σ_τ.

Teorema 5. *Supongamos que X es un conjunto del espacio R^n medible según Jordan y $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ es la partición en este conjunto, $X_0 \subset X$ y $\mu X_0 = 0$. Si la función f está acotada en el conjunto X, entonces la integral de Riemann*

$$\int f(x)dX = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau$$

existe cuando, y sólo cuando, existe el límite

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau(X_0)}.$$

Además, si el último límite existe, es igual a la integral $\int f(x)dX$.

Las sumas $\sigma_{\tau(X_0)}$ se llamarán, para abreviar, sumas integrales incompletas (correspondientes al conjunto X_0).

DEMOSTRACIÓN. Cualquiera que sea la partición $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ del conjunto X, la clausura $\bar{X}_i$ de todo elemento X_i o bien no se corta con el conjunto X_0 y en este caso $X_i \in \tau(X_0)$ (véase (44.46)), o bien sí se corta (véase (44.47)) y en tal caso $X_i \in \tau_0(X_0)$. Por consiguiente, $\tau = \tau(X_0) \cup \tau_0(X_0)$, con la particularidad de que $\tau(X_0)$ y $\tau_0(X_0)$ no tienen elementos comunes.

Pongamos

$$\sigma_{\tau_0(X_0)} = \sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} f(\xi^{(i)})\mu X_i, \quad \xi^{(i)} \in X_i.$$

Aquí la sumación en el segundo miembro se realiza según aquellos índices i, para los cuales $X_i \in \tau_0(X_0)$. Es evidente que para cualquier suma integral de Riemann se verifica la igualdad (véanse (44.42) y (44.51))

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau(X_0)} + \sigma_{\tau_0(X_0)}. \qquad (44.52)$$

Por ser la función f acotada en X, existe tal constante $M > 0$, que para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $|f(x)| \leqslant M$. Por eso

$$|\sigma_{\tau_0(X_0)}| \leqslant \sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} |f(\xi^{(i)})| \mu X_i \leqslant M \sum_{X_i \in \tau_0(X_0)} \mu X_i.$$

Dado que, de acuerdo con el lema 6, $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sum\limits_{X_i \in \tau_0(X_0)} \mu X_i = 0$, se tiene

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau_0(X_0)} = 0.$$

Debido a esto, de la igualdad (44.52) se desprende que la suma integral σ_τ y la suma integral incompleta $\sigma_{\tau(X_0)}$ simultáneamente o bien tienen los límites o no los tienen cuando $\delta_\tau \to 0$, con la particularidad de que si estos límites existen, son iguales. $\square$

Del teorema demostrado se deduce que si una función está definida y es acotada en cierto conjunto medible X, entonces, al definir la integral como un límite de sumas integrales, podemos desechar en éstas todos los sumandos que corresponden a los elementos de la partición cuyas clausuras contienen puntos de frontera, pues el conjunto $X_0 = \partial X$ tiene medida cero (véase el teorema 1 en el p. 44.1).

Del teorema 5 proviene, además, que si una función f está definida y es continua en el conjunto medible X, la variación de sus valores en cierto conjunto $X_0 \subset X$ de medida cero que tiene por resultado la aparición de otra función, también acotada en X, no influye en la integrabilidad de la función, ni tampoco en el valor de la integral de la función, si existe. Esto se sigue directamente de lo que con la variación indicada de la función la suma $\sigma_{\tau(X_0)}$ queda inalterable, mientras que, en virtud del teorema 5, si su límite para $\delta_\tau \to 0$ existe, es igual a la integral $\int f(x)dX$:

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_{\tau(X_0)} = \int f(x)dX.$$

De esta observación se infiere, en particular, que la función f es integrable en el conjunto medible X cuando, y sólo cuando, en dicho conjunto sea integrable cualquier función que se obtiene de f por cambio arbitrario de sus valores en los puntos de frontera (es decir, en el conjunto $X \cap \delta X$) de un modo tal que los valores citados queden, sin embargo, acotados. Al realizarse esta operación, tampoco cambia el valor de la integral $\int f(x)dX$. Todo esto se debe a que la frontera de un conjunto me-dible y, por tanto, cualquier parte de ésta tienen medida cero.

De este modo, la integrabilidad y el valor de una integral de la función extendida al conjunto X no dependen de los valores de la función en los puntos de frontera del conjunto medible X, siempre que estos valores son acotados.

44.4. EXISTENCIA DE LA INTEGRAL

Como ejemplo más sencillo de función integrable según Riemann interviene la función numérica arbitraria f, definida en cierto conjunto $X \subset R^n$, cuya medida de Jordan es igual a cero: $\mu X = 0$. En este caso para cualquier partición $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ del conjunto X tendremos $\mu X_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, i_0$, eso, sea cual sea la elección de los puntos $\xi^{(i)} \in X_i$ obtendremos $f(\xi^{(i)})\mu X_i = 0$ y, por consiguiente, (véase (44.42)),

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(i_0)}) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i = 0.$$

De aquí, de acuerdo con la definición de la integral, ella, en este caso, existe y es igual a cero:

$$\int f(x)dX = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = 0.$$

Como la función f es arbitraria, puede ser, en particular, no acotada. En otras palabras, para su integrabilidad según Riemann en un conjunto arbitrario medible según Jordan, la condición de que dicha función sea acotada no es necesaria. Recor-demos que para que una función sea integrable según Riemann en un segmento, la condición de acotar esta función era necesaria (véase el teorema 1 en el p. 27.2). Sin embargo, introducidas ciertas modificaciones, el teorema sobre la acotación de una función integrable resulta válido también para la integral que aquí se considera.

Demostremos previamente un lema.

Lema 7. *Supongamos que la función f está definida en un conjunto medible según Jordan X, $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ es la partición de este conjunto y X^*, la reunión de todos los elementos de dicha partición que tienen medida positiva:* $X^* = \bigcup_{\mu X_i > 0} X_i$.

Si la función f no está acotada en el conjunto X^*, entonces, cualquiera que sea ***el número $M > 0$, se pueden escoger los puntos $\xi^{(i)} \in X_i$ de modo tal que sea válida la desigualdad***

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i \right| > M.$$

Corolario. ***Sea f una función definida en el conjunto medible según Jordan X. Si para X existen las particiones tan pequeñas como se quiera, para las cuales la función f no está acotada en la unión de todos elementos de medida positiva, entonces f no será integrable en X.***

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. **Por hipótesis del lema, el conjunto X^* es una reunión de los elementos X_i de medida positiva de la partición τ. Puesto que cualquier partición consta de un número finito de elementos, X^* es una suma finita de los conjuntos citados $X_i \in \tau$. Por ello, si la función f no está acotada en el conjunto X^*, tampoco está en cierto conjunto X_i de medida positiva. Sea este conjunto, para concretar, X_1. Debido a que la función f no está acotada en X_1, se puede escoger tal sucesión $\xi_n^{(1)} \in X_1$, $n = 1, 2, \dots$, que se verificará la igualdad $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n^{(1)}) = \infty$. Fijemos de tal o cual manera los puntos restantes $\xi^{(i)} \in X_i$ para $i = 2, 3, \dots, i_0$.**

Ya que la suma $\sum_{i=2}^{n} f(\xi^{(i)})\mu X_i$ es un número fijo y $\mu X_i > 0$, en la suma

$$f(\xi_n^{(1)})\mu X_1 + \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i$$

el primer sumando tiende al infinito cuando $n \to \infty$, mientras que el segundo sumando es una constante; por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} \left| f(\xi^{(1)})\mu X_1 + \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i \right| = +\infty.$$

Por eso, para cualquier número $M > 0$ podemos elegir tal número $n_0 = n_0(M)$ que se verifique la desigualdad

$$\left| f(\xi_{n_0}^{(1)})\,\mu X_1 + \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i \right| > M. \square$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Si la función f es integrable en el conjunto X, es decir, si existe el límite

$$\lim_{\delta_\tau\to 0} \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i = \int f(x)dX,$$

entonces para todo $\xi > 0$, por ejemplo, para $\xi = 1$, existe tal $\delta_0 > 0$ que cualesquiera que sean las particiones $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ del conjunto X de finura $\delta < \delta_0$, no importa cual sea la elección de los puntos $\xi^{(i)} \in X_i \in \tau$ se verifica la desigualdad

$$\left| \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i - \int f(x)dX \right| < 1$$

y, por consiguiente, la desigualdad

$$\int f(x)dX - 1 < \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i < \int f(x)dX + 1. \tag{44.53}$$

En cambio, si la función f satisface las condiciones del corolario, entonces para el conjunto X existe la partición τ de finura $\delta_\tau < \delta_0$, para la cual la función f no está acotada en la unión de todos los elementos de medida positiva de esta partición. En este caso, conforme al lema 7, la suma $\sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi^{(i)})\mu X_i$ puede hacerse, debido a la elección adecuada de los puntos $\xi^{(i)} \in X_i \in \tau$, tan grande como se quiera en su magnitud absoluta. Por ello, tal función no puede ser integrable, pues para ella no se cumple la condición (44.53). □

Mostremos ahora que si menospreciamos el conjunto de medida cero, toda función integrable será acotada.

Teorema 6. *Si una función f es integrable en el conjunto X, existe tal conjunto de medida cero $X_0 \subset X$: $\mu X_0 = 0$, que la función f esté acotada en $X \setminus X_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función f es integrable en X y el conjunto X_0, citado en el teorema, no existe. Tomemos cualquier $\delta_0 > 0$ y una partición τ del conjunto X de finura $\delta_\tau < \delta_0$. Designemos con X^* la reunión de todos los elementos de medida positiva. El conjunto $X \setminus X^*$ es, pues, la reunión de un número finito de conjuntos $X_i \in \tau$ de medida cero, por lo cual el mismo conjunto tiene medida cero: $\mu(X \setminus X^*) = 0$. Consecuentemente, según la hipótesis aceptada, la función f no está acotada en el conjunto X^*. De aquí, de acuerdo con el corolario del lema 7, llegamos a que la función f no es integrable. □

Probemos ahora que para una clase importante de los conjuntos abiertos medibles según Jordan el teorema sobre la acotación de las funciones integrables queda enteramente en vigor. Para demostrarlo nos hará falta un lema geométrico.

Lema 8. *La intersección no vacía de un cubo cerrado n-dimensional con un conjunto abierto de un espacio n-dimensional tiene la medida inferior de Jordan positiva.*

Corolario. *Para cualquier conjunto abierto medible según Jordan existen particiones tan pequeñas como se quiera, cuyos elementos tienen todos medida positiva.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Supongamos que Q es un cubo n-dimensional y sea G un conjunto abierto del espacio R^n y $Q \cap G \neq \varnothing$. Cualquiera que sea el punto $x \in Q \cap G$, por ser abierto el conjunto G, existe tal entorno de dicho punto $U(x)$ (por ejemplo, el propio conjunto G) que

$$U(x) \subset G. \tag{44.54}$$

No es difícil convencerse de que en el conjunto $U(x)$ siempre hay un punto interior y del cubo Q. Efectivamente, puede ocurrir que el mismo punto x sea interior para el cubo Q, y en tal caso podemos tomar $y = x$. En cambio, si x es un punto de frontera del cubo Q, será punto de frontera también para el conjunto de los puntos interiores del cubo. Por esta razón su entorno $U(x)$ contiene, a ciencia cierta, el punto interior y del cubo Q (fig. 183). En virtud de la definición de punto interior (véase el p. 18.2), existe tal entorno suyo $V(y)$ que

$$V(y) \subset Q. \tag{44.55}$$

En vista de (44.54) y (44.55), son lícitas las inclusiones

$$U(x) \cap V(y) \subset U(x) \subset G, \quad U(x) \cap V(y) \subset V(y) \subset Q;$$

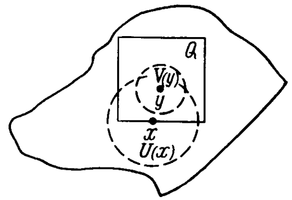


Fig. 183

y por ende

$$U(x) \cap V(y) \subset Q \cap G. \tag{44.56}$$

Dado que $y \in U(x)$ e $y \in V(y)$, la intersección $U(x) \cap V(y)$ no es vacía, pues contiene en todo caso el punto y. Luego, siendo la misma una intersección de dos conjuntos abiertos, es también abierta, razón por la cual (véase el p. 44.1)

$$\mu_*[U(x) \cap V(y)] > 0.$$

En virtud de la propiedad de monotonía de la medida inferior (véase el lema 1 en el p. 44.1), de (44.56) tenemos

$$\mu_*[U(x) \cap V(y)] \leqslant \mu_*(Q \cap G).$$

De las últimas dos desigualdades se pone de manifiesto que $\mu_*(Q \cap G) > 0$. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Sea G un conjunto medible abierto en R^n. Fijemos una partición del espacio R^n en cubos de cierto rango k. El conjunto de cubos Q de este rango que tienen una intersección no vacía con el conjunto G, es finito, pues el conjunto G está acotado, debido a su mensurabilidad. Numeremos todos los cubos mencionados: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i_0}$. Los conjuntos $X_i = Q_i \cap G = \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, son medibles y forman la partición $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ del conjunto G. En efecto, por una parte $X_i = Q_i \cap G \subset G$, por consiguiente, $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} X_i \subset G$, pero, por otra parte, todo punto $x \in G$, al igual que cualquier otro punto del espacio R^n, pertenece por lo menos a un cubo Q de rango $k: x \in Q \cap G$. En este caso $Q \cap G \in \tau$, es decir, para cierto i se tiene $Q = Q_i$, por lo cual $x \in Q_i \cap X = X_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{i_0} X_i$. De este modo, $\bigcup\limits_{i=1}^{i_0} X_i = G$.

Luego, $X_i \cap X_j \subset Q_i \cap Q_j$. Si la intersección $Q_i \cap Q_j$ no es vacía, representa un cubo de dimensión inferior a n, y, por consiguiente, es la gráfica de una función continua (incluso lineal) en un compacto. Por esta razón su medida es igual a cero: $\mu(Q_i \cap Q_j) = 0$, de donde también $\mu(X_i \cap X_j) = 0$, $i \neq j$. Por fin, de conformidad con el lema 8, $\mu X_i > 0$.

Existen, evidentemente, las particiones del tipo indicado tan pequeñas como se quiera. En efecto, cualquiera que sea $\delta > 0$, basta elegir tal rango k que sea $10^{-k}\sqrt{n} <$

$< \delta$ ($d(Q) = 10^{-k}\sqrt{n}$ es el diámetro del cubo de rango k) y entonces

$$d(X_i) = d(Q_i \cap G) \leqslant d(Q_i) = 10^{-k}\sqrt{n} < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, i_0,$$

por lo cual $\delta_\tau < \delta$. □

Teorema 7. ***Si una función es integrable en un conjunto abierto, está acotada.***

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función f es integrable en un conjunto medible G. Según la definición de integral, el conjunto G es medible según Jordan y debido al corolario del lema 8, existen particiones, tan pequeñas como se quiera, de dicho conjunto, todos los elementos de las cuales tienen medida positiva. Es evidente que, en virtud del lema 8 para las particiones construidas al demostrar el corolario del lema citado, la reunión de todos sus elementos de medida positiva coincide con el mismo conjunto G. Si la función f fuera no acotada en G, entonces, de acuerdo con el corolario del lema 7, no sería integrable.

OBSERVACIÓN. Según se ve de la demostración aducida del teorema 7, el carácter abierto del conjunto G se ha requerido sólo para mostrar que existen sus particiones, tan pequeñas como se quiera, cuyos elementos tienen todos medida positiva. De este modo, para todos los conjuntos que poseen esta propiedad la integrabilidad de las funciones en ellos conlleva a su carácter acotado.

Podemos convencernos con facilidad de que la clausura G de todo conjunto abierto medible G también tiene particiones, tan pequeñas como se quiera, todos los elementos de las cuales tienen medida positiva. Efectivamente, basta tomar de nuevo todos los cubos Q_i de rango k que hacen con G una intersección no vacía. En este caso con mayor razón tendrán no una intersección vacía con la clausura $\overline{G}$ del conjunto G: $Q_i \cap \overline{G} \supset Q_i \cap G = \varnothing$. Además, como $S_k(G)$ es un conjunto cerrado y $G \subset S_k(G)$, entonces $\overline{G} \subset S_k(G)$. Por lo tanto, si ponemos $X_i = Q_i \cap \overline{G}$, donde $Q_i \cap G \neq \varnothing$, la partición $\tau = \{X_i\}$ forma el recubrimiento de la clausura $\overline{G}$ del conjunto G, pues el poliedro $S_k(G)$ se compone sólo de los cubos indicados Q_i y, según el lema 8,

$$\mu X_i = \mu(Q_i \cap \overline{G}) \geqslant \mu(Q_i \cap G) > 0.$$

Ejercicio 6. Constrúyase un ejemplo de función no acotada e integrable en un conjunto *de medida positiva*

Si la función f está acotada en un conjunto medible, se pueden determinar, igual que en el caso unidimensional, las sumas superiores e inferiores de Darboux.

Definición 5. *Sea f una función acotada en el conjunto medible según Jordan X, sea $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ la partición del conjunto X,*

$$m_i = \inf_{x \in X_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in X_i} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, i_0.$$

En tal caso las sumas

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu X_i, \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu X_i$$

llevan los nombres respectivos de sumas inferiores y superiores de Darboux.

Para las sumas de Darboux y sumas integrales de Riemann son válidas las siguientes desigualdades evidentes

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau.$$

Lo mismo que para la función de una sola variable, para cualesquiera dos particiones τ_1 y τ_2 es lícita la desigualdad

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}.$$

Teorema 8. *Para que la función f, acotada en un conjunto medible según Jordan $X \subset R^n$, sea integrable según Riemann en dicho conjunto, es necesario y suficiente que*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{44.57}$$

Si se cumplen estas condiciones, se tiene

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \int f(x)dX. \tag{44.58}$$

La condición (44.57) es equivalente a la siguiente

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \omega(f; X_i)\mu X_i = 0, \tag{44.59}$$

donde $\omega(f; X_i)$ es la oscilación de la función f en el conjunto $X_i \in \tau = \{X_i\}$.

La demostración de este teorema es análoga a la que se realiza en el caso unidimensional y se recomienda que esta demostración quede a cargo del propio lector.

Ejercicio 7. Enúnciense las definiciones de los límites (44.57) — (44.59) con ayuda de las sucesiones y empleando el "lenguaje $\varepsilon - \delta$".

Teorema 9. ***Si una función es continua en un compacto medible según Jordan, será integrable en éste.***

DEMOSTRACIÓN. Sea X un compacto medible, $X \subset R^n$, y sea f una función continua en dicho compacto. Toda función, continua en un compacto, está acotada (véase el p. 19.6) y es uniformemente continua (véase el p. 19.7) en él. Por ello, aquí también la demostración es la misma que en el caso unidimensional (véase el p. 27.5): se obtiene con facilidad la estimación

$$\sum_{i=1}^{i_0} \omega(f; X_i)\mu X_i \leqslant \omega(\delta_\tau; f)\mu X,$$

donde $\omega(\delta, f)$ es el módulo de continuidad de la función f. De esta estimación se deduce directamente el cumplimiento de la condición (44.59), por lo cual, conforme al teorema 8, tiene lugar también la integrabilidad de la función f. □

44.5*. SOBRE LA INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES DISCONTINUAS

La continuidad de una función no es una condición necesaria de integrabilidad: existen también funciones integrables discontinuas. Una clase bastante amplia de las funciones integrables discontinuas se determina por el siguiente teorema.

Teorema 10. *Si una función está acotada en un compacto medible según Jordan y el conjunto de puntos de discontinuidad de la función citada tiene medida de Jordan cero la función es integrable según Riemann.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función está definida y acotada en un compacto, esto es, en un conjunto cerrado acotado $X \subset R^n$, con la particularidad de que el compacto X es medible según Jordan. Siendo f acotada en X, existe tal constante $M > 0$, que para todo $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)| \leqslant M. \tag{44.60}$$

Sea X_0 un conjunto de los puntos de discontinuidad de la función f. De conformidad con la hipótesis del teorema, $\mu X_0 = 0$, razón por la cual para todo $\varepsilon > 0$ fijo existe tal rango k que

$$\mu S_k(X_0) < \frac{\varepsilon}{3^n 4M}. \tag{44.61}$$

Esto es una consecuencia de que en el caso dado, con arreglo a la definición de medida, $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu S_k(X_0) = 0$. Supongamos que el poliedro $S_k(X_0)$ se compone de los cubos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$. Denotemos con P_j un cubo que se obtiene de Q_j con ayuda de la transformación de semejanza con centro en el centro del cubo Q_j y la razón de semejanza igual a tres; en este caso

$$\mu P_j = 3^n \mu Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{44.62}$$

Pongamos $P = \bigcup\limits_{j=1}^{s} P_j$. En virtud de las desigualdades (44.61) y (44.62), tenemos

$$\mu P = \mu \bigcup_{j=1}^{s} P_j \leqslant \sum_{j=1}^{s} \mu P_j = \sum_{j=1}^{s} 3^n \mu Q_j = 3^n \mu S_k(X_0) < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{44.63}$$

Cabe notar que el conjunto P se obtiene de $S_k(X_0)$, orlando el último con una franja de cubos cuyas aristas son de longitud 10^{-k}, por lo cual todo conjunto A de diámetro $d(A)$ inferior a 10^{-k}, que se corta con el conjunto $S_k(X_0)$, está contenido en P (fig. 184):

$$d(A) < 10^{-k}, \quad A \cap S_k(X_0) \neq \varnothing \Rightarrow A \subset P. \tag{44.64}$$

Designemos ahora con G el conjunto de puntos interiores del poliedro $S_k(X_0)$. Evidentemente, G es un conjunto abierto y como, según la hipótesis, del teorema, X es cerrado, entonces el conjunto $F = X \setminus G$ es también cerrado y, además por ser X acotado, el conjunto F es también acotado, razón por la cual F es un compacto. Luego, el conjunto X_0 se dispone en el interior del poliedro $S_k(X_0)$, es decir, $X_0 \subset G$ (según se ha observado anteriormente, véase el p. 44.1, esto tiene lugar, en general, para cualquier conjunto X y se deduce de la definición del poliedro $S_k(X)$). De aquí se pone claro que la función f es continua en el compacto F y, como, además, el conjunto F es medible en su calidad de diferencia entre dos conjuntos medibles X y G, entonces, de acuerdo con el teorema 9, la función f es integrable en F.

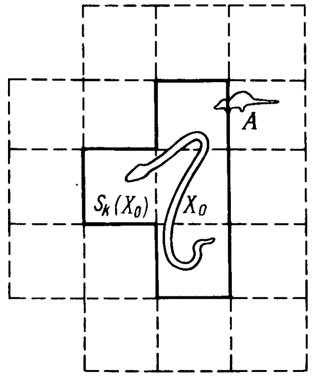


Fig. 184

Por eso, para $\varepsilon > 0$ elegido más arriba, existe tal $\delta > 0$, que para toda partición τ_F del conjunto F de finura $\delta_{\tau_F} < \delta$ se verifica la desigualdad

$$S_{\tau_F} - s_{\tau_F} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{44.65}$$

donde S_{τ_F} y s_{τ_F} son las sumas superiores e inferiores de Darboux de la función f, correspondientes a la partición τ_F del conjunto F.

Sea

$$\delta_0 = \min\,\{10^{-k}, \delta\}, \tag{44.66}$$

$\tau \overset{\text{def}}{=} \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ una partición del conjunto X de finura $\delta_\tau < \delta_0$. Es evidente que $\tau_F \overset{\text{def}}{=} \{X_i \cap F\}$, donde $X_i \cap F \neq \varnothing$, es una partición del conjunto F de finura $\delta_{\tau_F} \leqslant \delta_\tau < \delta_0$, y, por esta razón, en virtud de (44.66), para τ_F se verifica la desigualdad (44.65).

Pongamos

$$M_i = \sup_{x \in X_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in X_i} f(x),$$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu X_i, \; s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu X_i,$$

$$M_i' = \sup_{x \in X_i \cap F} f(x), \; m_i' = \inf_{x \in X_i \cap F} f(x),$$

$$S_{\tau_F} = \sum_{X_i \cap F \neq \varnothing} M_i' \mu(X_i \cap F), \; s_{\tau_F} = \sum_{X_i \cap F \neq \varnothing} m_i' \mu(X_i \cap F).$$

Todo conjunto $X_i \in \tau$ se interseca con G o no se interseca. Si no se interseca, es decir, si $X_i \cap G = \varnothing$, se tiene $X_i \subset F$ y para tales índices i tenemos $M_i = M_i'$, $m_i = m_i'$, $X_i \cap F = X_i$.

Dado que $X_i \neq \varnothing$ y $X_i \subset X = F \cup G$, de $X_i \cap G = \varnothing$ se deduce que $X_i \subset F$ y, por consiguiente, $X_i \cap F \neq \varnothing$. Por ello, al observar que en las sumas que vienen abajo todos los sumandos son no negativos, obtendremos

$$\sum_{X_i \cap G = \varnothing} (M_i - m_i)\mu X_i = \sum_{X_i \cap G = \varnothing} (M_i' - m_i')\mu X_i \leqslant \sum_{X_i \cap F \neq \varnothing} (M_i' - m_i')\mu(X_i \cap F) =$$

$$= S_{\tau_F} - s_{\tau_F} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (44.67)$$

Si $X_i \cap G \neq \varnothing$, en virtud de (44.64) y (44.66), $X_i \subset P$ y por esta razón para estos índices i (véase, además, (44.63)) tenemos

$$\sum_{X_i \cap G \neq \varnothing} \mu X_i = \mu \bigcup_{X_i \cap G \neq \varnothing} X_i \leqslant \mu P < \frac{\varepsilon}{4M}. \qquad (44.68)$$

Al hacer uso de las desigualdades obvias $|m_i| \leqslant M$, $|M_i| \leqslant M$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, que se desprenden directamente de (44.60) y al aplicar la desigualdad (44.68), tendremos

$$\sum_{X_i \cap G \neq \varnothing} (M_i - m_i)\mu X_i \leqslant \sum_{X_i \cap G \neq \varnothing} [|M_i| + |m_i|]\mu X_i \leqslant 2M \sum_{X_i \cap G \neq \varnothing} \mu X_i < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (44.69)$$

De (44.67) y (44.69) se deduce que

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} (M_i - m_i)\mu X_i =$$

$$= \sum_{X_i \cap G \neq \varnothing} (M_i - m_i)\mu X_i + \sum_{X_i \cap G = \varnothing} (M_i - m_i)\mu X_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De aquí, de acuerdo con el teorema 8, se deduce la integrabilidad de la función f en el conjunto X. □

44.6. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL MÚLTIPLE

Consideraremos aquí las propiedades de la integral múltiple análogas a las de la función de una sola variable por un segmento. Recordemos que la integrabilidad de una función (según Riemann) en cierto conjunto presupone la mensurabilidad de éste según Jordan.

1°. *Sea X un conjunto medible; en este caso* $\int dX = \mu X$.

Efectivamente, el integrando es idénticamente igual a la unidad. Por ello, si $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ es cierta partición del conjunto X, entonces (véase (44.41))

$$\int dX = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} \mu X_i = \mu X. \ □$$

2°. *Sean X y X^* unos conjuntos medibles, $X^* \subset X$ y sea f una función acotada e integrable en X; será también integrable en X^*.*

En efecto, el conjunto $X^{**} = X \setminus X^*$ es también medible, siendo una diferencia entre dos conjuntos medibles. Sean $\tau^* = \{X_i^*\}$ una partición del conjunto X^* de finura δ_{τ^*} y $\tau^{**} = \{X_j^{**}\}$ una partición del conjunto X^{**} de finura $\delta_{\tau^{**}} < \delta_{\tau^*}$. Entonces, $\tau = \{X_i^*, X_j^{**}\}$ será la partición del conjunto X de finura $\delta_\tau = \delta_{\tau^*}$. Si

$$\omega_\tau = \sum_{\tau^*} \omega(f, X_i^*)\, \mu X_i^* + \sum_{\tau^{**}} \omega(f, X_j^{**})\, \mu X_i^{**}$$

y

$$\omega_{\tau^*} = \sum_{\tau^*} \omega(f, X_i^*)\, \mu X_i^*,$$

entonces, evidentemente, $0 \leqslant \omega_{\tau^*} \leqslant \omega_\tau$. Pero $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega_\tau = 0$, por lo cual $\lim\limits_{\delta_{\tau^*} \to 0} \omega_{\tau^*} = 0$, de donde proviene la integrabilidad de la función f en el conjunto X^* (véase (44.59)). □

3°. **Aditividad de la integral por los conjuntos.** *Si X' y X'' son unos conjuntos medibles, $X = X' \cup X''$, $X' \cap X'' = \varnothing$, y la función f está acotada y es integrable en el conjunto X, entonces las integrales $\int f(x)dX'$ y $\int f(x)dX''$ existen y*

$$\int f(x)dX = \int f(x)dX' + \int f(x)dX''. \qquad (44.70)$$

Ya que la existencia de las integrales $\int f(x)dX'$ y $\int f(x)dX''$ proviene de la propiedad 2°, nos queda demostrar sólo la fórmula (44.70). Sean $\tau' = \{X_i'\}$ y $\tau'' = \{X_j''\}$ las particiones de los conjuntos respectivos X' y X''. En este caso $\tau = \{X_i', X_j''\}$ es la partición del conjunto X y su finura es igual a las máxima de las finuras de las particiones $\delta_{\tau'}$ y $\delta_{\tau''}$: $\delta_\tau = \max\{\delta_{\tau'}, \delta_{\tau''}\}$.

Sea $\xi^{(i)} \in X_i'$, $\eta^{(j)} \in X_j''$,

$$\delta_{\tau'} = \sum_{\tau'} f(\xi^{(i)})\mu X_i', \quad \sigma_{\tau''} = \sum_{\tau''} f(\eta^{(j)})\mu X_j'',$$

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau'} + \sigma_{\tau''}. \qquad (44.71)$$

Por ser f integrable en los conjuntos X, X' y X'', tenemos

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int f(x)dX, \quad \lim_{\delta_{\tau'} \to 0} \sigma_{\tau'} = \int f(x)dX', \quad \lim_{\delta_{\tau''} \to 0} \sigma_\tau = \int f(x)dX'',$$

Por ello, pasando al límite en la igualdad (44.71) para $\delta_\tau \to 0$, obtendremos (44.70). □

OBSERVACIÓN. Conviene fijar la atención en la siguiente circunstancia: puede suceder que la función f esté definida en el conjunto $X = X' \cup X''$, donde X' y X'' son conjuntos medibles, $X' \cap X'' = \varnothing$, las integrales $\int f(x)dX'$ y $\int f(x)dX''$ existen, mientras que la integral $\int f(x)dX$ no existe.

Aclaremos lo dicho con un ejemplo. Sean (r, φ) las coordenadas polares de un punto en un plano

$$f(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{si } r < 1, \\ 1/\varphi, & \text{si } r = 1, \ 0 < \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

sea $X' = \{(r, \varphi): r < 1\}$ un círculo abierto y $X'' = \{(r, \varphi): r = 1\}$, una circunferencia. Evidentemente, $\mu X'' = 0$, por lo cual, pese a que la función f no está acotada en X'', es integrable y $\int f(r, \varphi)dX'' = 0$. Existe también la integral $\int f(r, \varphi)dX' = 0$. No obstante, la integral $\int f(r, \varphi)\, dX$ referida a un círculo cerrado $X = X' \cup X''$ no existe. Efectivamente, el conjunto X representa la clausura de una región, razón por la cual dicho conjunto tiene particiones, tan pequeñas como se quiera, todos los elementos de las cuales cuentan con una medida positiva. Por lo tanto (véase la observación al teorema 7), toda función integrable en X está acotada, en tanto que la función dada f no está acotada y no es, por ende, integrable.

Es importante observar que la situación semejante no puede tener lugar para las funciones acotadas: si la función f está acotada y es integrable en los conjuntos medibles X' y X'', $X' \cap X'' = \varnothing$, entonces será integrable también en el conjunto $X = X' \cup X''$, con la particularidad de que queda lícita la fórmula (44.70). Esto será demostrado en el p. 44.7*.

Sólo diremos que en el caso cuando uno de los conjuntos, X' o X'', tiene medida cero, la integrabilidad de la función acotada f en su reunión, si se presupone la integrabilidad de dicha función en cada uno de los conjuntos, se obtiene por repetición textual de los razonamientos aducidos en la demostración del teorema 10. En efecto, sea f integrable y acotada en los conjuntos medibles X' y X'', $\mu X' = 0$, $X = X' \cup X''$. En este caso si construimos, al igual que en la demostración aducida, un conjunto $G \supset X'$ (el conjunto X' desempeña aquí el papel del conjunto X_0 del teorema 10) y ponemos $F = X \setminus G$, entonces tendremos $F \subset X''$ y, por lo tanto, en virtud de la propiedad 2° de las integrales, la función f resultará integrable en el conjunto F, de donde se desprende, igual que antes, su integrabilidad en el conjunto X, y, por ende, en virtud de la propiedad 3°, la validez de la fórmula (44.70), donde $\int f(x)dX' = 0$.

Del modo semejante se demuestra la afirmación general, pero el procedimiento para ello resulta ser más complicado.

4°. **Linealidad de la integral.** *Si las funciones f_1 y f_2 son integrables en el conjunto X, para cualesquiera números λ_1 y λ_2 existe la integral $\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\, dX$ y se verifica la igualdad*

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\, dX = \lambda_1 \int f_1(x)\, dX + \lambda_2 \int f_2(x)\, dX.$$

5°. *Si las funciones f y g son integrables y están acotadas en cierto conjunto, entonces su producto y la razón f/g (para $\inf\limits_X |g| > 0$) son integrables en dicho conjunto.*

6°. **Integración de las desigualdades.** *Si las funciones f y g son integrables en el conjunto X y si para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $f(x) \leqslant g(x)$, entonces $\int f(x)dX \leqslant \int g(x)dX$.*

7°. *Si la función f es integrable y está acotada en un conjunto X, el valor absoluto de la función $|f|$ es también integrable en el conjunto, con la particularidad de que $\left|\int f(x)dX\right| \leqslant \int |f(x)|\, dX$.*

La demostración de las propiedades 4°, 5°, 6°, 7° se efectúa por analogía completa con el caso unidimensional (véase el p. 28.1).

8°. **Monotonía de la integral de las funciones no negativas extendida a los conjuntos.** *Si X y X^* son unos conjuntos medibles, $X^* \subset X$, y la función f es no negativa, acotada e integrable en X, entonces*

$$\int f(x)dX^* \leqslant \int f(x)dX. \tag{44.72}$$

En efecto, en vista de las propiedades 2° y 3°, las integrales $\int f(x)dX^*$ y $\int f(x)d(X \setminus X^*)$ existen y

$$\int f(x)dX = \int f(x)dX^* + \int f(x)d(E \setminus X^*).$$

Como $f(x) \geqslant 0$, se tiene, en virtud de la propiedad 6°, $\int f(x)d(X \setminus X^*) \geqslant 0$, de lo que proviene la desigualdad (44.72). □

9°. *Supongamos que la función f es integrable y no negativa en un conjunto abierto medible G, $x^{(0)} \in G$ y la función f es continua en el punto $x^{(0)}$, siendo $f(x^{(0)}) > 0$. En este caso*

$$\int f(x)dG > 0. \tag{44.73}$$

En efecto, por ser la función f continua en el punto $x^{(0)}$, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal entorno $U = U(x^{(0)})$ de este punto que con cualquiera $x \in U$ se verifica la desigualdad $f(x^{(0)}) - \varepsilon < f(x) < f(x^{(0)}) + \varepsilon$. Además, debido a que el conjunto G es abierto, el entorno U siempre puede elegirse de modo tal que sea $U \subset G$.

Al escoger $\varepsilon = \dfrac{f(x^{(0)})}{2}$, obtendremos para éste tal entorno U que para cualesquiera x, pertenecientes a este entorno, tendremos $f(x) > \dfrac{f(x^{(0)})}{2}$. De aquí, aplicando sucesivamente las propiedades 8°, 6° y 1°, llegamos a que

$$\int f(x)dG \geqslant \int f(x)dU \geqslant \frac{f(x^{(0)})}{2} \int dU = \frac{f(x^{(0)})}{2} \mu U > 0,$$

pues $\mu U > 0$, como medida de cualquier conjunto abierto. □

Demos a conocer un corolario directo de la propiedad 9°.

Corolario. *Si la función f es continua, integrable y no negativa en un conjunto abierto medible G y no es idénticamente igual a cero, entonces $\int f(x)dG > 0$.*

10°. **Aditividad total de la integral extendida a los conjuntos.** *Supongamos que la función f está acotada y es integrable en el conjunto X, mientras que $\{X_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, es la sucesión de tales conjuntos medibles $X_k \subset X$, que*

$$\lim_{k \to +\infty} \mu X_k = \mu X.^{*)} \tag{44.74}$$

En este caso

$$\lim_{k \to +\infty} \int f(x)dX_k = \int f(x)dX. \tag{44.75}$$

Por ser la integral aditiva, tenemos

$$\int f(x)dX - \int f(x)dX_k = \int f(x)d(X \setminus X_k).$$

Como, según la hipótesis, f es una función acotada, es decir, existe tal constante $M > 0$ que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in X$, entonces

$$\left|\int f(x)dX - \int f(x)dX_k\right| = \left|\int f(x)d(X \setminus X_k)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |f(x)|\, d(X \setminus X_k) \leqslant M \int d(X \setminus X_k) = M\mu(X \setminus X_k).$$

Según la propiedad de aditividad de la medida tenemos $\mu(X \setminus X_k) = \mu X - \mu X_k$, por consiguiente

$$\left|\int f(x)dX - \int f(x)dX_k\right| \leqslant M(\mu X - \mu X_k).$$

De aquí, en virtud de (44.74) proviene precisamente (44.75). □

11°. **Teorema del valor medio.** *Supongamos que las funciones f y g están acotadas y son integrables en el conjunto X. Si la función g no cambia de signo en X y $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in X$, entonces existe tal número λ, $m \leqslant \lambda \leqslant M$, que*

$$\int f(x)g(x)dX = \lambda \int g(x)dX.$$

Corolario. *Sea X un conjunto medible linealmente conexo o una clausura de un conjunto linealmente conexo. En este caso, si la función f está acotada, es integrable y continua en X, existe tal punto $\xi \in X$, que $\int f(x)dX = f(\xi)\mu X$.*

El teorema sobre el valor medio se demuestra por analogía completa con el caso unidimensional (véase el p. 28.2). Para obtener el corolario, se debe usar el teorema sobre los valores intermedios de la función continua en un conjunto linealmente conexo o en la clausura de éste (véase el p. 19.6).

44.7*. CRITERIOS DE INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES DE RIEMANN Y DARBOUX Y LOS COROLARIOS

Supongamos que la función f está definida y acotada en un conjunto medible según Jordan X, $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ es la partición del conjunto, $m_i = \inf_X f$,

*) Con las sucesiones de conjuntos medibles, que poseen la propiedad (44.74), ya nos encontramos, véase, por ejemplo, el teorema 2 en el p. 31.2.

$M_i = \sup_X f$, $s_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \mu X_i$, $S_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} M_i \mu X_i$ son las sumas de Darboux, inferior y superior, correspondiente a la partición τ. Pongamos

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, I^* = \inf_\tau S_\tau; \tag{44.76}$$

I_* e I^* se llaman *integrales de Darboux inferior y superior,* respectivamente, de la función f. Resulta que las integrales inferior y superior de Darboux representan no sólo las cotas superior e inferior de las sumas integrales de Darboux, sino también su límite a condición de que la finura de las particiones tiende a cero.

Teorema 11. *Si la función f está acotada en un conjunto medible según Jordan X, resulta*

$$I_* = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau,\quad I^* = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau.$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos la validez de la primera fórmula (la segunda se demuestra de modo análogo). Supongamos que $|f(x)| \leqslant M$, $x \in X$, y está dado $\varepsilon > 0$. En vista de la definición (44.76), existe tal partición $\tau^* = \{X_i^*\}$ del conjunto X que

$$s_{\tau^*} > I_* - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.77}$$

Aquí $s_{\tau^*} = \sum_{i=1}^{i_0} m_i^* \mu X_i^*$, $m_i^* = \inf_{X_i^*} f$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$. Sea

$$X_0 = \bigcup_{i=1}^{i_0} \partial X_i^* \tag{44.78}$$

Por cuanto cada conjunto X_i^* es medible, $\mu \partial X_i^* = 0$; por ello $\mu X_0 = 0$. Por consiguiente, existe tal rango $k = k(\varepsilon)$, que

$$\mu S_k(X_0) < \frac{\varepsilon}{3^{n+1}M}. \tag{44.79}$$

Probemos que para cualquier partición $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_0}$ del conjunto X de finura $\delta_\tau < 10^{-k}$ se verifica la igualdad

$$I_* - \varepsilon < s_\tau \leqslant I_*. \tag{44.80}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, esto significa que $\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = I_*$.

La desigualdad $s_\tau \leqslant I_*$ proviene directamente de la definición de integral inferior I_* (véase (44.76)). Por eso basta sólo demostrar la desigualdad

$$s_\tau > I_* - \varepsilon \tag{44.81}$$

a condición de que $\delta_\tau < 10^{-k}$.

Supongamos que $S_k = S_k(X_0)$ se compone de los cubos $Q_1, \ldots, Q_m$. Por analogía con lo que se hizo al demostrar el teorema 10, designemos mediante P_j un cubo que se obtiene de Q_j por transformación de semejanza de centro en el centro del cubo Q_j y la razón de semejanza igual a $3, j = 1, 2, \ldots, m$. Pongamos

$$P = \bigcup_{j=1}^{m} P_j, \quad G = X \setminus P. \tag{44.82}$$

De las definiciones de los conjuntos P y G se desprende que el conjunto G está separado del poliedro $S_k(X_0)$ por una "franja" de cubos con las aristas de longitud 10^{-k}. Estimemos ante todo la medida μP. De la definición del conjunto P (véase (44.82)) y la desigualdad (44.79) tenemos (compárese con (44.63))

$$\mu P = \mu \bigcup_{j=1}^{m} P_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mu P_j = 3^n \sum_{j=1}^{m} \mu Q_j = 3^n \mu S_k(X_0) < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{44.83}$$

Hemos de notar a continuación que para todo conjunto $A \subset X$ de diámetro $d(A) < 10^{-k}$, que se interseca con el conjunto $G : A \cap G \neq \varnothing$, existe y, además, el único conjunto $X_i^* \in \tau^*$ tal que

$$A \subset X_i^*. \tag{44.84}$$

En efecto, elijamos un punto $x \in A \cap G$. Puesto que $A \subset X$, entonces $x \in X$, y, por ende, el punto x está contenido en cierto elemento X_i^* de la partición τ^*. Para este elemento se cumple precisamente la inclusión (44.84). Efectivamente, si la inclusión dada no tuviera lugar, existiría un punto $y \in A \setminus X_i^*$. Ya que $x \in A$, $y \in A$ y $d(A) < 10^{-k}$, resulta que $\rho(x, y) < 10^{-k}$. Por consiguiente, el segmento que tiene por sus extremos los puntos x e y, la longitud inferior a 10^{-k} y el extremo x dispuesto en el conjunto G, no se interseca con el conjunto $S_k(X_0)$, pues está separado de G por una franja de ancho 10^{-k}. No obstante, de lo que un extremo del segmento pertenece a cierto conjunto, en el caso dado al conjunto X_i^*, y el otro no le pertenece, se infiere (véase el lema 9 en el punto 18.2) que en dicho segmento existe un punto $z \in \partial X_i^*$. Mas (véase (44.78)) $\partial X_i^* \subset X_0 \subset S_k(X_0)$, es decir, $z \in S_k(X_0)$. Por lo tanto, el segmento citado se interseca con el conjunto $S_k(X_0)$. La contradicción obtenida demuestra la inclusión (44.84).

Demostremos la unicidad del conjunto X_i^* que satisface la inclusión (44.84). Supongamos que existe un conjunto más, $X_k^* \in \tau^*$, tal que $A \subset X_k^*$, $k \neq i$. En este caso $A \subset X_i^* \cap X_k^*$. Si la intersección $X_i^* \cap X_k^*$ contuviera por lo menos un punto que fuera al mismo tiempo interior para los conjuntos X_i^* y X_k^*, este punto sería interior también para la intersección $X_i^* \cap X_k^*$ y entonces tendría lugar la desigualdad $\mu(X_i^* \cap X_k^*) > 0$. Esta desigualdad contradice la definición de partición (véase el p. 44.3), en virtud de la cual $\mu(X_i^* \cap X_k^*) = 0$ cuando $i \neq k$. Por consiguiente, todo punto de la intersección $X_i^* \cap X_k^*$, y, por ende, todo punto del conjunto A es un punto de frontera por lo menos para uno de los conjuntos X_i^*, X_k^*. Pero, en tal caso $A \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} \partial X_i^* = X_0 \subset S_k(X_0)$. Esto es imposible, puesto que el conjunto A se interseca con el conjunto G el cual no se corta con $S_k(X_0)$. La contradicción se ha obtenido de la suposición sobre la existencia del segundo elemento X_k^* de τ^* que contiene el conjunto A. Por consiguiente, tal elemento es único.

Tomemos ahora una partición arbitraria $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_0}$ del conjunto X de finura $\delta_\tau < 10^{-k}$. Dividamos la suma inferior de Darboux

$$s_\tau = \sum_{j=1}^{j_0} m_j \mu X_j, \quad m_j = \inf_{x \in X_j} f(x), \; j = 1, 2, \ldots, j_0,$$

en dos sumandos correspondientes a aquellos X_j que se intersecan con el conjunto G y aquellos que no se intersecan con él y, por lo tanto, se disponen íntegramente en el conjunto P (véase (44.82)):

$$s_\tau = \sum_{X_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu X_j + \sum_{X_j \subset P} m_j \mu X_j. \tag{44.85}$$

Al emplear la desigualdad evidente

$$|m_j| \leqslant M, \; j = 1, 2, \ldots, j_0. \tag{44.86}$$

donde $|f(x)| \leqslant M$, $x \in X$, y la estimación (44.83), obtendremos

$$\Big|\sum_{X_j \subset P} m_j \mu X_j\Big| \leqslant \sum_{X_j \subset P} |m_j| \mu X_j \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{X_j \subset P} \mu X_j \leqslant M\mu \bigcup_{X_j \subset P} X_j \leqslant M\mu P < M \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

En particular, $\sum_{X_j \subset P} m_j \mu X_j > -\dfrac{\varepsilon}{3}$. Por esto de (44.85) tenemos

$$s_\tau > \sum_{X_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu X_j - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{44.87}$$

Diremos ahora que $d(X_j) \leqslant \delta_\tau < 10^{-k}$, razón por la cual para todo X_j, que se interseca con el conjunto G, existe, en virtud de (44.84) tal $X_i^* \in \tau^*$, que $X_j \subset X_i^*$. Designaremos mediante G_i la reunión de todos aquellos X_j que se intersecan con G y están contenidos en X_i^*:

$$G_i = \bigcup_{X_j \subset X_i^*, \, X_j \cap G \neq \varnothing} X_j.$$

Agrupando en la suma $\sum_{X_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu X_j$ los sumandos contenidos en un mismo conjunto G_i, escribamos la suma citada en la forma

$$\sum_{X_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu X_j = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{X_j \subset G_i} m_j \mu X_j. \tag{44.88}$$

Con el fin de estimar la suma interior, observemos que para todo $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, i_0$, de acuerdo con la igualdad obvia

$$X_i^* = (X_i^* \cap G_i) \cup (X_i^* \setminus G_i) = G_i \cup (X_i^* \setminus G_i)$$

(la segunda igualdad proviene de la inclusión $G_i \subset X_i^*$), tenemos

$$m_i^* \mu X_i^* = m_i^* \mu G_i + m_i^* \mu(x_i^* \setminus G_i) = $$
$$= m_i^* \mu \bigcup_{X_j \subset G_i} X_j + m_i^* \mu(X_i^* \setminus G_i) =$$
$$= m_i^* \sum_{X_j \subset G_j} \mu X_j + m_i^* \mu(X_i^* \setminus G_i). \quad (44.89)$$

Estimemos el segundo sumando. Todo punto $x \in X_i^* \setminus G_i$ pertenece a cierto conjunto $X_j \in \tau : x \in X_j$. Este conjunto X_j no puede intersecarse con G, puesto que todo $X_j \in \tau$, que se interseca con G, está contenido íntegramente en cierto elemento de la partición τ^* (véase (44.84)). Por cuanto la intersección $X_j \cap X_i^*$ no es vacía: $x \in X_j \cap X_i^*$, a título de este elemento en el caso dado puede intervenir sólo el conjunto X_i^*, es decir, $X_j \subset X_i^*$. Mas, en vista de la definición del conjunto G_i, tendría lugar en estas circunstancias la inclusión $X_j \subset G_i$, y, por lo tanto, $x \in G_i$. Esto contradice la suposición de que $x \in X_i^* \setminus G_i$. Así pues, el conjunto X_j no se interseca con G y, por ende, $X_j \subset P$. De aquí se deduce, en particular, que $x \in P$. Ya que x es un punto arbitrario del conjunto $X_i^* \setminus G_i$, se tiene $X_i^* \setminus G_i \subset P$, por lo cual $X_i^* \setminus G_i \subset X_i^* \cap P$.

Al hacer uso de dicha inclusión y de la desigualdad (44.86), tenemos

$$m_i^* \mu(X_i^* \setminus G_i) \leqslant M\mu(X_i^* \cap P).$$

Sustituyendo esta desigualdad en (44.89), tendremos

$$m_i^* \mu X_i^* \leqslant \sum_{X_j \subset G_i} m_i^* \mu X_j + M \mu(X_i^* \cap P).$$

Ha de notarse ahora que de la inclusión $X_j \subset G_i \subset X_i^*$ proviene la desigualdad $m_i^* \leqslant m_j$ (la cota inferior de un subconjunto no es menor que la cota inferior del propio conjunto) y obtenemos

$$m_i^* \mu X_i^* \leqslant \sum_{X_j \subset G_i} m_j \mu X_j + M \mu(X_i^* \cap P),$$

de donde

$$\sum_{X_j \subset G_i} m_j \mu X_j \geqslant m_i^* \mu X_i^* - M \mu(X_i^* \cap P).$$

Al sumar ambos miembros según i desde 1 hasta i_0, en virtud de (44.88), tendremos

$$\sum_{X_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu X_j \geqslant \sum_{i=1}^{i_0} m_i^* \mu X_i - M \sum_{i=1}^{i_0} \mu(X_i^* \cap P) = s_{\tau^*} - $$
$$- M \sum_{i=1}^{i_0} \mu(X_i^* \cap P).$$

Puesto que, de acuerdo con (44.83),

$$\sum_{i=1}^{i_0} \mu(X_i^* \cap P) = \mu \bigcup_{i=1}^{i_0} X_i^* \cap P \leqslant \mu P < \frac{\varepsilon}{3M},$$

resulta

$$\sum_{X_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu X_j > s_{\tau^*} - \frac{\varepsilon}{3}. \quad (44.90)$$

Al aplicar, ahora, sucesivamente las desigualdades (44.87), (44.90) y (44.77), obtendremos

$$s_\tau > \sum_{X_j \cap G \neq \varnothing} m_j \mu X_j - \frac{\varepsilon}{3} > s_{\tau^*} - \frac{2\varepsilon}{3} > I_* - \varepsilon,$$

es decir, la desigualdad (44.81) y, por lo tanto, el teorema 11 se han demostrado. □

Con ayuda de dicho teorema pueden enunciarse dos criterios de integrabilidad de una función acotada.

Teorema 12 (criterio de Darboux). *Una función acotada en un conjunto medible según Jordan es integrable según Riemann cuando, y sólo cuando, sus integrales superior e inferior de Darboux son iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Sean I_* e I^* las integrales de Darboux, inferior y superior, respectivamente, de la función f que es acotada en un conjunto medible X. Por consiguiente, para cualquier partición τ del conjunto X se verifican las desigualdades (véase (44.76))

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau. \quad (44.91)$$

NECESIDAD DE LA CONDICIÓN $I_* = I^*$. Si la función f es integrable en el conjunto X, se tiene (véase (44.57))

$$\lim_{\delta_n \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0,$$

y dado que $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$, entonces $I_* = I^*$.

SUFICIENCIA DE LA CONDICIÓN $I_* = I^*$. Si $I_* = I^*$, en virtud del teorema 11, tenemos

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau - \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = I^* - I_* = 0,$$

y, en tal caso, de acuerdo con el teorema 8 del p. 44.4, la función f es integrable. □

Teorema 13 (criterio de Riemann). *Una función f, acotada en el conjunto medible según Jordan X, es integrable según Riemann cuando, y sólo cuando, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal partición τ del conjunto X que*

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon, \quad (44.92)$$

donde s_τ y S_τ son las sumas de Darboux inferior y superior de la función f, correspondientes a la partición τ.

DEMOSTRACIÓN. Si la función f es integrable en el conjunto X, para ella se cumple la condición (44.57) (véase el teorema 8 en el p. 44.4). La validez de (44.92) se deduce de la definición de límite de las sumas de Darboux para $\delta_\tau \to 0$.

Si, en cambio, se cumple la condición (44.92), entonces, en virtud de (44.91), con cualquier $\varepsilon > 0$ es válida la desigualdad $0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon$, y, por eso, $I_* = I^*$. De aquí, de conformidad con el teorema 12, se desprende que la función f es integrable en el conjunto X. □

Así pues, recordando la definición de la integral múltiple, aducida en el p. 44.3, el teorema 8 del p. 44.4 y los teoremas 12 y 13 del punto presente, llegamos a que las cinco afirmaciones que siguen son equivalentes:

1) *la función f es integrable en el conjunto X, es decir, existe el límite* $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int f(x)dX$;

2) $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$;

3) $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sum\limits_{i=1}^{i_0} \omega(f; X_i)\mu X_i = 0$, $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ *es la partición del conjunto X;*

4) *para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal partición del conjunto X que $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$;*

5) $I_* = I^*$.

De este modo, el cumplimiento de cada una de estas condiciones es equivalente a la existencia de la integral $\int f(x)dX$, con la particularidad de que

$$\int f(x)dX = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau.$$

OBSERVACIÓN 1. Los teoremas obtenidos permiten ahora demostrar sin dificultad la aditividad de una integral extendida a los conjuntos medibles para funciones acotadas (véase el p. 44.6) en la forma siguiente: *si una función acotada f es integrable en los conjuntos disjuntos X_1 y X_2, es integrable también en el conjunto $X = X_1 \cup X_2$.*

En efecto si la función f está acotada y es integrable en los conjuntos X_1 y X_2, entonces, en virtud del teorema 13, para todo $\varepsilon > 0$ existen las particiones τ_1 y τ_2 de los conjuntos respectivos X_1 y X_2 de tal índole que

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44.93}$$

Como $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ es una partición del conjunto $X = X_1 \cup X_2$ y las sumas de Darboux, superior S_τ e inferior s_τ, que corresponden a esta partición, se expresan en términos de las sumas análogas de Darboux correspondientes a la particiones τ_1 y τ_2 según las fórmulas $S_\tau = S_{\tau_1} + S_{\tau_2}$, $s_\tau = s_{\tau_1} + s_{\tau_2}$, entonces, restando de la primera de las igualdades dadas la segunda, obtenemos, en vista de (44.93)

$$S_\tau - s_\tau = (S_{\tau_1} - s_{\tau_1}) + (S_{\tau_2} - s_{\tau_2}) < \varepsilon.$$

Del cumplimiento de esta condición se deduce (también conforme al teorema 13) que la función f es integrable en el conjunto X.

OBSERVACIÓN 2. Como ya se ha dicho en el p. 44.3, para las funciones de una variable, definidas en los segmentos, disponemos de dos definiciones de la integral, a

saber, una, dada en el p. 27.1, con ayuda de las particiones de los segmentos en segmentos y sólo segmentos, y la otra definición del p. 44.3, con ayuda de las particiones de los segmentos en cualesquiera conjuntos medibles según Jordan. Estas dos definiciones son equivalentes.

Demostrémoslo. Para ambas definiciones la condición necesaria de integrabilidad consiste en el carácter acotado de la función en consideración: véase el teorema 1 en el p. 27.2 y la observación al teorema 7 en el p. 44.4 (un segmento es la clausura del intervalo, es decir, la clausura de un conjunto abierto). Por ello consideraremos la función f que está acotada en cierto segmento $[a, b]$. Supongamos que para esta función existe la integral $I = \lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu X_i$ en el sentido del p. 44.3, es decir, para cualesquiera particiones $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i_0}$ del segmento $[a, b]$ en conjuntos X_i medibles según Jordan. En este caso si nos limitamos sólo a una parte de particiones τ, para las cuales todos los conjuntos X_i son segmentos, entonces para $\delta_\tau \to 0$, el límite de las sumas integrales $\sum\limits_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\mu X_i$ referente a la parte mencionada de particiones existirá también y será igual al mismo número I. Por consiguiente, si existe una integral en el sentido del p. 44.3, existe la misma también en el sentido del p. 27.1.

Viceversa, supongamos que existe la integral $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ en el sentido del p. 27.1. Entonces, de acuerdo con el teorema 2 del p. 27.4, $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$, donde τ es la partición del segmento $[a, b]$ en segmentos. Por consiguiente, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que para cualquier partición τ del segmento $[a, b]$ en segmentos cuyas longitudes no son superiores a δ, resulta lícita la desigualdad $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Pero ya del único hecho consistente en la existencia por lo menos de una partición τ, para la cual se cumple la desigualdad $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, proviene, de conformidad con el teorema 13 del presente punto, que la función f es integrable en el sentido del p. 44.3.

Así pues, ambas definiciones de la integral referida a un segmento son realmente equivalentes.

OBSERVACIÓN 3. De lo demostrado se desprende también el siguiente reforzamiento de las condiciones suficientes de integrabilidad de las funciones, demostradas en el teorema 2 del p. 24.4: para que una función f sea integrable en el segmento $[a, b]$ en el sentido de la definición de integral en el p. 27.1, es suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ exista por lo menos tal partición τ del segmento $[a, b]$ en segmentos que para las sumas inferiores y superiores de Darboux, correspondientes a dicha partición, se verifique la desigualdad $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

En efecto, en tal caso la función f es integrable en el segmento $[a, b]$ en el sentido del p. 44.3, por lo cual, de acuerdo con lo demostrado, también en el sentido del p. 27.1.

OBSERVACIÓN 4. De la observación antecedente se infiere directamente que la función f, acotada en cierto segmento $[a, b]$ e integrable según Riemann en cualquier segmento $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, es integrable también en todo el segmento $[a, b]$ (este hecho se ha indicado sin demostración en el p. 33.1). Efectivamente, si $|f(x)| \leqslant M$, $x \in [a, b]$, y se ha dado $\varepsilon > 0$, entonces elijamos δ, $0 < \delta < b - a$, de modo tal que sea $\delta < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. Por ser la función f integrable en el segmento $[a, b - \delta]$, existe tal partición τ de éste, que si s_τ y S_τ son las sumas inferior y superior de Darboux de la función f para esta partición, se tiene

$$S_\tau - s_\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Designemos con τ_0 la partición del segmento $[a, b]$ que se obtiene de la partición τ_0 del segmento $[a, b - \delta]$ por adición del punto b: $\tau_0 = \tau \cup \{b\}$ y sea $m_0 = \inf\limits_{[b-\delta, b]} f(x)$, $M_0 = \sup\limits_{[b-\delta, b]} f(x)$. Si s_{τ_0} y S_{τ_0} son las sumas inferior y superior de Darboux de la función f para la partición τ_0, entonces

$$S_{\tau_0} = S_\tau + M_0\delta, \quad s_{\tau_0} = s_\tau + m_0\delta.$$

Por esta razón

$$S_{\tau_0} - s_{\tau_0} = S_\tau - s_\tau + (M_0 - m_0)\delta < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\delta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y, por lo tanto, de acuerdo con la observación 3, la función f es integrable según Riemann en el segmento $[a, b]$.

§ 45. REDUCCIÓN DE LA INTEGRAL MÚLTIPLE A UNA REITERADA

Pasemos ahora a las propiedades de la integral múltiple relacionadas con los rasgos específicos que distinguen el caso multidimensional del unidimensional. El empleo de estas propiedades facilita considerablemente con frecuencia el cálculo de las integrales múltiples concretas. Las demostraciones completas se darán sólo para el caso de las funciones de dos variables. El caso general n-dimensional no difiere, teóricamente, del caso plano, no obstante los razonamientos en el caso n-dimensional adoptan una forma más engorrosa y, por lo tanto, difícilmente contemplada.

45.1. REDUCCIÓN DE LA INTEGRAL DOBLE A UNA REITERADA

En el presente párrafo se mostrará que la integración de las funciones de varias variables puede reducirse a la integración sucesiva de las funciones de una sola variable. Comenzaremos por definir el concepto de integral reiterada.

Supongamos que en el segmento $[a, b]$ se han dado las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ tales que $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, y que en el conjunto (fig. 185)

$$X = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\} \tag{45.1}$$

está definida la función $f(x, y)$.

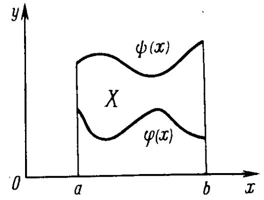


Fig. 185

Si la función $f(x, y)$, como función de la variable y, es integrable en el segmento $[\varphi(x), \psi(x)]$ para todo $x \in [a, b]$ fijo, es decir, si para todo $x \in [a, b]$ existe la integral $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dx$ y la función

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \tag{45.2}$$

es integrable en el segmento $[a, b]$, entonces la integral

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy\right] dx \tag{45.3}$$

se llama *reiterada* y se designa mediante

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy. \tag{45.4}$$

La función $F(x)$, definida por la igualdad (45.2), se denomina *integral dependiente del parámetro* x. De este modo, la integral reiterada (45.4) es una integral de la integral dependiente de parámetro (véanse también §§ 53, 54).

Observemos que el conjunto X, que se define por la fórmula (45.1), es medible en el sentido de la medida plana de Jordan y cerrado. En efecto, de la continuidad de las funciones φ y ψ en el segmento $[a, b]$ proviene su carácter acotado, por lo cual el conjunto X está acotado. Luego, su frontera ∂X se compone de las gráficas de las funciones citadas φ, ψ y también, quizás, de los segmentos de las rectas $x = a$ y $x = b$. Cada uno de los conjuntos mencionados tiene medida cero (véase el teorema 3 en el p. 44.2), razón por la cual la frontera ∂X del conjunto X tiene también medida cero. En fin, el conjunto X se da con ayuda de las desigualdades no estrictas $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, donde las funciones φ y ψ son continuas, a consecuencia de lo cual dichas desigualdades quedan vigentes también al pasar al límite, de lo que precisamente proviene el carácter cerrado del conjunto X. De este modo, X es un compacto medible.

Las condiciones suficientes para que haya la posibilidad de reducir la integral doble a una reiterada se proporcionan por el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea $f(x, y)$ una función continua en el conjunto X dado mediante la fórmula* (45.1). *En este caso*

$$\iint\limits_X f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy. \tag{45.5}$$

A la demostración del teorema antepongamos el lema siguiente.

Lema 1. *En las suposiciones del teorema 1 la función* (45.2) *es continua en el segmento* $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Señalemos ante todo que la integral (45.2) existe para todo $x \in [a, b]$. Efectivamente, la función $f(x, y)$, siendo continua por totalidad de las variables x e y, es continua respecto de cada una de ellas. Por esto, la integral citada existe como integral de una función continua respecto de y en el segmento $[\varphi(x), \psi(x)]$.

Al sustituir en esta integral la variable y por t, rigiéndose por la fórmula

$$y = \varphi(x) + [\psi(x) - \varphi(x)]\,t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{45.6}$$

obtendremos

$$F(x) = \int_0^1 f[x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t]\,(\psi(x) - \varphi(x))dt. \tag{45.7}$$

Pongamos

$$g(x, t) = f[x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t]\,(\psi(x) - \varphi(x)).$$

Como la función $g(x, t)$ se obtiene con ayuda de una operación aritmética y una composición de las funciones continuas f, φ, ψ y (45.6), entonces, en virtud del teorema sobre funciones continuas (véase el p. 19.5), $g(x, t)$ es continua por totalidad de las variables x, t en el rectángulo

$$\Delta = \{(x, t) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

De este modo, para la función $F(x)$ (véase (45.2)) tiene lugar, debido a (45.7), una representación más simple

$$F(x) = \int_0^1 g(x, t)\,dt$$

(más simple porque los límites de integración en ella son constantes).

Sea ahora $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$.

Designemos mediante $\omega(\delta; g)$ el módulo de continuidad (véase el p. 19.7) de la función $g(x, t)$. En este caso

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| = \left| \int_0^1 g(x + \Delta x, t)dt - \int_0^1 g(x, t)dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 |g(x + \Delta x, t) - g(x, t)|\,dt \leqslant \omega(|\Delta x|; g). \tag{45.8}$$

La función $g(x, t)$, siendo continua en el conjunto acotado cerrado Δ, es en éste uniformemente continua, por lo cual (véase el p. 19.7), $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta; g) = 0$. De aquí, en virtud de la desigualdad (45.8), tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] = 0,$$

lo que precisamente implica la continuidad de la función $F(x)$, definida por la fórmula (45.2). □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Ha de notarse ante todo que la integral en el segundo miembro de la igualdad (45.5), es decir,

$$\int_b^a F(x)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy$$

es la integral de una función continua (véase el lema) y por esta razón existe.

Partiremos ahora el conjunto X en las partes X_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, de la manera siguiente. Consideraremos la partición $\tau_k = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ del segmento $[a, b]$ en k segmentos iguales:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b,$$
$$x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{k},\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

y sea

$$\varphi_0(x) = \varphi(x),$$
$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{1}{k}[\psi(x) - \varphi(x)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{j}{k}[\psi(x) - \varphi(x)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_k(x) = \varphi(x) + \frac{k}{k}[\psi(x) - \varphi(x)] = \psi(x).$$

Pongamos $X_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \varphi_{j-1}(x) \leqslant y \leqslant \varphi_j(x)\}$, y sea $\tau_k^* = \{X_{ij}\}$, i, $j = 1, 2, \ldots, k$. Evidentemente, τ_k^* es la partición del conjunto X (fig. 186). Ahora tenemos

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy =$$
$$= \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \sum_{j=1}^k \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)dy =$$

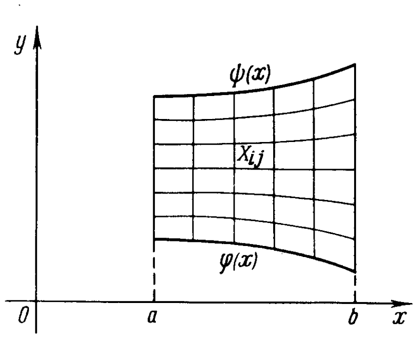


Fig. 186

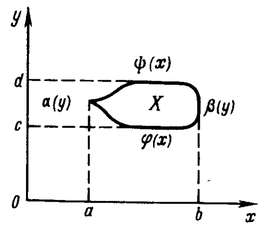


Fig. 187

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)dy. \quad (45.9)$$

Pongamos

$$m_{ij} = \inf_{X_{ij}} f(x, y) \text{ y } M_{ij} = \sup_{X_{ij}} f(x, y),\ i, j = 1, 2, \dots, k.$$

Observando que

$$\mu X_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\, dx,$$

obtendremos

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)dy \leqslant M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} dy =$$

$$= M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\, dx = M_{ij}\, \mu X_{ij}, \quad (45.10)$$

y, por analogía,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)dy \geqslant m_{ij}\, \mu X_{ij}. \quad (45.11)$$

Con ayuda de las desigualdades (45.10) y (45.11) para la integral reiterada (45.9) obtenemos la siguiente estimación en términos de las sumas inferiores y superiores de Darboux $s_{\tau_k^*}$ y $S_{\tau_k^*}$ de la función $f(x, y)$:

$$s_{\tau_k^*} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} m_{ij}\, \mu X_{ij} \leqslant \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} M_{ij}\, \mu X_{ij} = S_{\tau_k^*}. \quad (45.12)$$

Para la finura $\delta_{\tau_k^*}$ de la partición τ_k^* de la región G tenemos $\lim\limits_{k \to \infty} \delta_{\tau_k^*} = 0$. En efecto, como ya se ha indicado, las funciones φ y ψ están acotadas en el segmento $[a, b]$ debido a su continuidad, es decir, existe tal constante $M > 0$ que $|\varphi(x)| \leqslant M$ y $|\psi(x)| \leqslant M$, cualesquiera que sean $x \in [a, b]$. Por ello, para el diámetro $d(X_{ij})$ de cada conjunto $X_{ij} \in \tau_k^*$ tenemos

$$dX_{ij} \leqslant \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + [\max_{\substack{x' \in [x_{i-1}, x_i] \\ x'' \in [x_{i-1}, x_i]}} |\varphi_j(x'') - \varphi_{j-1}(x')|]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \max_{\substack{x' \in [x_{i-1}, x_i] \\ x'' \in [x_{i-1}, x_i]}} |[\varphi_j(x'') - \varphi_j(x')] + [\varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x')]|^2}.$$

Observando que para $x' \in [x_{i-1}, x_i]$, $x'' \in [x_{i-1}, x_i]$, en virtud de la definición de las funciones φ_j, se cumplen las desigualdades

$$|\varphi_j(x'') - \varphi_j(x')| \leqslant |\varphi(x'') - \varphi(x')| + \frac{j}{k} |\varphi(x'') - \varphi(x')| +$$

$$+ \frac{j}{k} |\psi(x'') - \psi(x')| \leqslant 2\omega\left(\frac{b-a}{k}, \varphi\right) + \omega\left(\frac{b-a}{k}, \psi\right),$$

$$j = 0, 1, \dots, k,$$

donde $\omega(\delta, \varphi)$ y $\omega(\delta, \psi)$ son los módulos de continuidad de las funciones φ y ψ, respectivamente, así como para todos $x \in [a, b]$ las desigualdades

$$|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| = \left|\frac{j}{k} [\psi(x) - \varphi(x)] - \frac{j-1}{k} [\psi(x) - \varphi(x)]\right| =$$

$$= \frac{|\psi(x) - \varphi(x)|}{k} \leqslant \frac{|\psi(x)| + |\varphi(x)|}{k} \leqslant \frac{2M}{k},\ j = 1, 2, \dots, k,$$

obtendremos

$$d(X_{ij}) \leqslant \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \max_{[x_{j-1}, x_j]} [\varphi_j(x'') - \varphi_{j-1}(x')]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + \left[\omega\left(\frac{b-a}{k}, \psi\right) + 2\omega\left(\frac{b-a}{k}, \varphi\right) + \frac{2M}{k}\right]^2}.$$

Por consiguiente, $\delta_{\tau_k^*} = \max\limits_{i, j} d(X_{ij}) \to 0$ cuando $k \to +\infty$. Por esta razón, siendo la función $f(x, y)$ integrable en X (véase el p. 44.4), tenemos

$$\lim_{k \to \infty} s_{\tau_k^*} = \lim_{k \to \infty} S_{\tau_k^*} = \iint_G f(x, y)dx\, dy.$$

Pasando ahora al límite en la desigualdad (45.12) para $k \to \infty$, obtendremos la fórmula (45.5). □

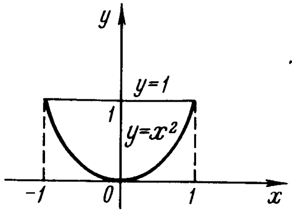


Fig. 188

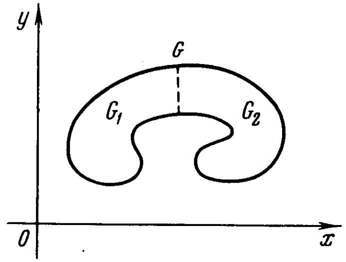


Fig. 189

Si el conjunto X es de tal género que existen las funciones continuas $\alpha(y)$ y $\beta(y)$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ tales que

$$X = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d, \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\}, \tag{45.13}$$

mientras que la función $f(x, y)$ es, como hasta ahora, continua en $\bar{X}$, entonces, en virtud de que la variable x no tiene ventaja alguna ante la variable y, del teorema 1 proviene que

$$\iint\limits_X f(x, y) dx\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \tag{45.14}$$

En cambio, si para el conjunto X son justas tanto la igualdad (45.1), como también (45.13) (fig. 187), entonces igualando entre sí los segundos miembros de las igualdades (45.5) y (45.14), para la función $f(x, y)$, continua en el conjunto $\bar{X}$, obtendremos la fórmula

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx, \tag{45.15}$$

que expresa la regla de cambio del orden de integración en las integrales reiteradas.

Se debe decir que las condiciones, bajo las cuales se han demostrado las fórmulas (45.5), (45.14) y (45.15), pueden ser debilitadas.

Ejemplo. Calculemos la integral de la función $z = x^2y$, extendida a la región finita G que está limitada por una parte de la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ (fig. 188). Tenemos

$$\iint\limits_G x^2y\, dx\, dy = \int\limits_{-1}^1 x^2dx \int\limits_{x^2}^1 y\, dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^1 \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^1 x^2dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^1 (1 - x^4)x^2dx = \frac{4}{21}.$$

Si se requiere calcular una integral doble referida a un conjunto que no puede darse en la forma (45.1) ó (45.13), entonces con el fin de emplear las fórmulas obtenidas se debe tratar de dividir el conjunto dado en unas partes, cada una de las cuales ya tendrá la forma (45.1) ó (45.13) (fig. 189). Si se logra alcanzarlo, entonces, por ser aditiva la integral en los conjuntos (véase el p. 44.6), el cálculo de la integral dada se reducirá al cálculo de las integrales extendidas a las partes mencionadas; las

últimas integrales pueden ser reducidas, con ayuda de las fórmulas (45.5) y (45.14), a las de multiplicidad unitaria.

Ejercicios. Calcúlense las integrales:

1. $\iint\limits_X \frac{dx\, dy}{y}$, $X = \{(x, y) : x^2 - 6x + 5 < 0; y > 1; 3x - y - 2 > 0, x^2 - y > 0\}$.

2. $\iint\limits_X x^2y^2dx\, dy$, $X = \{(x, y) : y > 0; xy < 1; x^2 - 3xy + 2y^2 < 0\}$.

3. $\iint\limits_X x\, dx\, dy$, $X = \{(x, y) : x < 20; y < 20; x - y + 5 > 0, xy > 6\}$.

4. $\iint\limits_X x\sqrt{1 + xy}\, dx\, dy$, $X = \left\{(x, y) : xy < 1, x - 1 < \frac{xy}{x + 1}\right\}$.

5. $\int\limits_0^1 \int\limits_y^1 e^{x^2}dx\, dy$.

6. $\int\limits_0^{1/2} \int\limits_{2y}^1 \cos(x^2 + 1)dx\, dy$.

7. $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 \operatorname{sen}(x^3 - 1)dx\, dy$.

8. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-y} e^{-x^2 + 2x}dx\, dy$.

9. $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3/3}dx\, dy$.

10. $\int\limits_0^1 \int\limits_{(y-1)/2}^1 \operatorname{tg}(x^2 + x)dx\, dy$.

Simplifíquense las expresiones por cambio del orden de integración (la función f es continua en toda la región de integración):

11. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2/9}^y f(x, y)dx + \int\limits_1^3 dx \int\limits_{y^2/9}^1 f(x, y)dy$.

12. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{1/x} f(x, y)\, dy$.

13. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y) + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{(3-x)/2} f(x, y)\, dy$.

14. Demuéstrese la fórmula de Dirichlet

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^x f(x, y)dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_y^b f(x, y)dx.$$

45.2. GENERALIZACIÓN PARA EL CASO n-DIMENSIONAL

Consideraremos primero el caso tridimensional. Supongamos que $X \subset R^3$ y la función $f(x, y, z)$ está definida en X. Designemos mediante X_{xy} la proyección del conjunto X sobre el plano coordenado de las variables x e y (fig. 190):

$$X_{xy} = \{(x, y, 0): \text{existe tal } z \text{ que } (x, y, z) \in X\}.$$

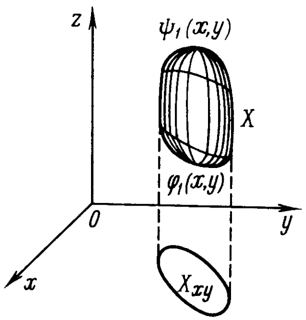


Fig. 190

Si el conjunto X es de la forma

$$X = \{(x, y, z) : (x, y) \in X_{xy}, \quad \varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \psi_1(x, y)\},$$

donde las funciones $\varphi_1(x, y)$ y $\psi_1(x, y)$ son continuas en el conjunto X_{xy}, el cual es representable, a su vez, en la forma (45.1), y la función $f(x, y, z)$ es continua en el conjunto de partida X, entonces resulta válida la fórmula, análoga a la (45.5),

$$\iiint\limits_X f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{45.16}$$

Al reunir en el segundo miembro dos integrales exteriores, podemos escribir (45.16) en la forma

$$\iiint\limits_X f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{X_{xy}} dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{45.17}$$

Designemos ahora con $X(x)$ las secciones del conjunto X mediante los planos perpendiculares al eje de coordenadas Ox

$$X(x_0) = X \cap \{(x, y, z) : x = x_0\}.$$

Al reunir en el segundo miembro de la fórmula (45.16) dos integrales interiores, obtendremos:

$$\iiint\limits_X f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{X(x)} f(x, y, z)dydz. \tag{45.18}$$

De este modo, las fórmulas (45.17) y (45.18) muestran que en el caso tridimensional existen dos métodos de reducción de la integral tridimensional a una reiterada que contiene integrales de menor multiplicidad.

En el caso particular, cuando $f(x, y, z) \equiv 1$, tenemos (véase la propiedad 1° de las integrales múltiples en el p. 44.6) $\iiint dxdydz = \mu X$, (μX es el volumen del conjunto X), $\iint\limits_{X(x)} dydz = \mu X(x)$, ($\mu X(x)$ es el área de la sección $X(x)$).

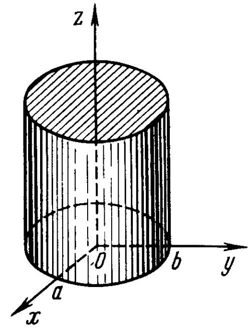


Fig. 191

De este modo

$$\mu X = \int\limits_a^b \mu X(x)dx, \tag{45.19}$$

es decir, el volumen de un cuerpo es igual a la integral del área variable de la sección $X(x)$.

Ejemplo. Hallemos el volumen de un cilindro elíptico de altura h, de cuya base sirve una elipse de semiejes a y b. Al tomar como plano de coordenadas xy el plano de una de las bases del cilindro y como eje z, el eje de simetría del cilindro, perpendicular a las bases (fig. 191), obtendremos, de acuerdo con la fórmula (45.19), $\mu X = \int\limits_0^h \mu X(z)dz$. Mas $X(z)$ es una elipse cuyos ejes son a y b, por lo cual (véase el ejemplo 4 en el p. 32.1) $\mu X(z) = \pi ab$, y, por consiguiente, $\mu X = \pi ab \int\limits_0^h dz = \pi abh$.

Por analogía con el caso tridimensional, las integrales múltiples de una función de cualquier número de variables $n > 3$ pueden reducirse a las integrales reiteradas. Supongamos que R^n es un espacio n-dimensional, R^{n-1} un hiperplano $x_n = 0$, $X \subset R^n$ y $X_{x_1 \dots x_{n-1}}$, la proyección del conjunto X sobre el hiperplano de las variables $x_1, \dots, x_{n-1}$, es decir, sobre R^{n-1}.

$$X_{x_1 \dots x_{n-1}} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\text{: existe tal } x_n \quad \text{que } (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in X\}.$$

Supongamos, además, que existen tales funciones $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ y $\psi(x_1, \dots, x_{n-1})$, continuas en $X_{x_1 \dots x_{n-1}}$, que el conjunto X se compone de los puntos $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, para los cuales

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in X_{x_1, \dots, x_{n-1}}, \qquad \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Sea el conjunto $X_{x_1 \dots x_{n-1}}$ medible, en el sentido de la medida $(n - 1)$-dimensional de Jordan, y cerrado. Entonces, por analogía con el caso bidimensional (véase el p. 45.1), se demuestra que X es también medible, pero ya en el sentido de la medida n-dimensional, y está cerrado, razón por la cual es un compacto.

Si la función $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ es continua en el compacto X, es lícita la fórmula

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n\text{ veces}}_{X} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1\text{ veces}}_{X_{x_1\dots x_{n-1}}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_{n-1})dx_n, \qquad (45.20)$$

la cual reduce la integración de la función de n variables a la integración sucesiva de la función de una sola variable y de otra función de $n - 1$ variables.

Si la proyección $X_{x_1 \dots x_{n-1}}$ del conjunto X sobre el hiperplano R^{h-1} puede, a su vez, representarse en una forma análoga a la del conjunto X, entonces la integral $(n - 1)$-múltiple, obtenida en el segundo miembro de la igualdad (45.20), puede ser reducida a una integral $(n - 2)$-múltiple. Continuando este proceso, si esto es, por supuesto, posible, llegaremos a continuación a una fórmula del tipo

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n\text{ veces}}_{X} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \int\limits_{\varphi_2(x_1, x_2)}^{\psi_2(x_1, x_2)} dx_3 \dots$$

$$\int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)dx_n. \qquad (45.21)$$

De este modo, en el caso que se considera la integración de la función de n variables se reduce a la integración sucesiva n veces de las funciones de una variable.

Designemos ahora con $X_{x_1 \dots x_m}$ la proyección del conjunto X al espacio $R^m_{x_1 \dots x_m}$, y con $X(x_1, \dots, x_m)$, la sección del conjunto X mediante los hiperplanos de dimensión $n - m$ que pasan por el punto $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ y son ortogonales al subespacio $R^m_{x_1 \dots x_m}$. Al reunir en la fórmula (45.21) las m primeras y $n - m$ últimas integraciones, obtendremos

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n\text{ veces}}_{X} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \overbrace{\int\cdots\int}^{m\text{ veces}}_{X_{x_1 \dots x_m}} dx_1 \dots dx_m \overbrace{\int\cdots\int}^{n-m\text{ veces}}_{X_{(x_1 \dots x_m)}} f(x_1, \dots$$

$$\dots, x_n)dx_{m+1} \dots dx_n. \qquad (45.22)$$

Si $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$ en X, entonces, de esta fórmula obtenemos por analogía con (45.19)

$$\mu X = \int\cdots\int_{X_{x_1 \dots x_m}} \mu X(x_1, \dots, x_m)dx_1 \dots dx_m. \qquad (45.23)$$

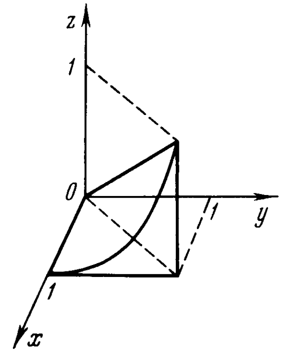


Fig. 192

Ejemplo. Calculemos la integral de la función $f(x, y, z) = xy^2z^3$, extendida a una región finita G, limitada por las superficies $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ y $z = 0$ (fig. 192). Al aplicar la fórmula (45.16), tendremos

$$\iiint_G xy^2z^3dxdydz = \int_0^1 xdx \int_0^x y^2dy \int_0^{xy} z^3dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx \int_0^x y^6 dy = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{364}.$$

Ejercicios. Calcúlense las integrales:

15. $\iiint_X zdxdydz$, $X = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, x^2 + y^2 \leqslant z^2\}$.

16. $\iiint_X (x + y + z)x^2y^2z^2dxdydz$, $X = \{(x, y, z): x \geqslant 0; y \geqslant 0; z \geqslant 0; x + y + z \leqslant 1\}$.

17. $\iiint_X (4x - y + z)dxdydz$; la región X está acotada por las partes de las superficies $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1, z = 2 - x^2$.

18. $\iiint_X z^2dxdydz$; la región X es la parte común de las bolas $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$.

45.3*. DESIGUALDAD INTEGRAL GENERALIZADA DE MINKOWSKI

Como otro ejemplo de aplicación de la regla de cambio del orden de integración, demostremos una desigualdad integral de uso frecuente.

Supongamos que la función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo $\Delta = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$. Evidentemente, para cualquier $y \in [c, d]$ fijo es continua respecto de x en el segmento $[a, b]$, y para cualquier $x \in [a, b]$ fijo es continua respecto de y en el segmento $[c, d]$.

Para todo $p > 1$ resulta válida la *desigualdad generalizada de Minkowski*

$$\left\{\int_c^d\left[\int_a^b|f(x, y)|\,dx\right]^p dy\right\}^{1/p} \leqslant \int_a^b dx\left[\int_c^d|f(x, y)|^p\,dy\right]^{1/p}. \tag{45.24}$$

Pongamos

$$F(y) = \int_a^b |f(x, y)|\,dx. \tag{45.25}$$

La función F es continua (véase el lema 1 en el p. 45.1) y no negativa en el segmento $[c, d]$. Por ello, su p-ésima potencia es también integrable y no negativa en este segmento, y $0 \leqslant \int_c^d F^p(y)dy < +\infty$.

Si $\int_c^d F^p(y)dy = 0$, entonces, en virtud de la continuidad de la función F, tendremos (véase la propiedad 9 en el p. 28.1): $F(y) \equiv 0$ en $[c, d]$. Por eso de la fórmula (45.25), debido a la misma propiedad, se deduce que para cualquier $y \in [c, d]$ tiene lugar $f(x, y) \equiv 0$ en $[a, b]$, es decir, $f(x, y) \equiv 0$ en Δ. En este caso la desigualdad (45.24) es, evidentemente, válida.

Sea $\int_c^d F^p(y)dy > 0$. Al cambiar el orden de integración y al aplicar la desigualdad de Hölder (28.48), obtendremos, en virtud de (45.25),

$$\int_c^d F^p(y)dy = \int_c^d F^{p-1}(y)\left[\int_a^b |f(x, y)|\,dx\right]dy =$$

$$= \int_a^b dx\int_c^d |f(x, y)|F^{p-1}(y)dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left[\int_c^d |f(x, y)|^p dy\right]^{1/p}\left[\int_c^d F^{q(p-1)}(y)dy\right]^{1/q}dx, \tag{45.26}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y, por lo tanto, $q(p - 1) = p$. Al reducir ambos miembros de la igualdad (45.26) por el factor $\left(\int_c^d F^p(y)\,dy\right)^{1/q} \neq 0$, tendremos

$$\left(\int_c^d F^p(y)dy\right)^{1/p} \leqslant \int_a^b \left[\int_c^d |f(x, y)|^p dy\right]^{1/p} dx.$$

Sustituyendo aquí (45.25), obtenemos la desigualdad (45.24). □

La condición de continuidad de la función f no es esencial para que la desigualdad (45.24) sea válida y puede ser debilitada. Con el fin de simplificar la demostración, a título de dominio de definición de la función f se ha empleado un rectángulo. Para las suposiciones más generales, la demostración de la desigualdad de Minkowski, basada sobre la misma idea, puede encontrarse en la monografía "Desigualdades" por Hardy G. H.; Littlewood D. E., Polya G. (Hardy G. H., Littlewood D. E., Polya, Inequalities, 1934).

§ 46. CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL MÚLTIPLE

46.1. SENTIDO GEOMÉTRICO DEL MÓDULO DE JACOBIANO EN EL CASO BIDIMENSIONAL

Supongamos que G es un conjunto abierto en el plano R^2_{uv} y G^*, un conjunto abierto en el plano R^2_{xy}, F es la aplicación de G sobre G^* y

$$M = (u, v) \in G, \quad M^* = (x, y) \in G^*, \quad F(M) = M^*.$$

La aplicación F se da mediante un par de funciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{46.1}$$

Supondremos que F satisface las siguientes condiciones:

1) aplica biunívocamente G sobre G^*;

2) es continuamente derivable en G;

3) el jacobiano $J(u, v) = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ no se reduce a cero en G.

Observemos que la aplicación F^{-1}, inversa de F, es también una aplicación biunívoca continuamente derivable provista de un jacobiano distinto de cero en G^* (véase el p. 41.7). Es por eso, en particular, que F es una aplicación difeomorfa del conjunto abierto G (véase la definición 11 en el p. 41.7) sobre G^*.

Si γ es un contorno sencillo cerrado dispuesto en G, entonces, en vista de que la aplicación F es biunívoca, su imagen $\gamma^* = F(\gamma)$ es también un contorno sencillo cerrado.

Lema 1. *Sea Γ un conjunto acotado abierto y $\overline{\Gamma} \subset G$. En este caso $\Gamma^* = F(\Gamma)$ es también un conjunto acotado abierto y*

$$\partial F(\Gamma) = F(\partial\Gamma). \tag{46.2}$$

DEMOSTRACIÓN. Como F y F^{-1} son aplicaciones homeomorfas, los conjuntos abiertos en estas mismas se aplican en conjuntos abiertos. Por consiguiente, los puntos interiores de un conjunto cualquiera, Γ, por ejemplo, o Γ^*, respectivamente, pasan a los puntos interiores de su imagen y los puntos de frontera, a los de frontera.

En efecto, sea, por ejemplo, M un punto interior del conjunto Γ, es decir, existe un entorno del punto $U = U(M)$ dispuesto en Γ: $U \subset \Gamma$. Entonces, el entorno

$U^* = F(U)$ del punto $M^* = F(M)$ se dispone en Γ^*: $U^* \subset \Gamma^*$, es decir, M^* es un punto interior del conjunto Γ^*[1].

Sea ahora M un punto de frontera del conjunto Γ, $M^* = F(M)$ y U^* es un entorno del punto M^*. Por ser homeomorfa la aplicación F, el conjunto $U = F^{-1}(F^*)$ es el entorno del punto M, y como $M \in \partial\Gamma$, entonces en el entorno U se tienen tanto los puntos que pertenecen al conjunto Γ, como los que no le pertenecen. Por consiguiente, en el entorno U^* del punto $M^* = F(M)$ (teniendo en cuenta que este entorno es la imagen del entorno $U = U(M)$ del punto M cuando se realiza la aplicación F) hay también tanto puntos pertenecientes al conjunto Γ^* como aquellos que no le pertenecen, es decir, los puntos de frontera realmente se aplican en puntos de frontera:

$$F(\partial\Gamma) \subset \partial\Gamma^*. \tag{46.3}$$

Ya que los razonamientos análogos son lícitos también para la aplicación inversa, en la fórmula (46.3) podemos sustituir el signo de inclusión por el de igualdad, es decir, se cumple la condición (46.2). Además, de lo que el conjunto Γ es abierto se deduce, en virtud de lo demostrado, el carácter abierto del conjunto Γ^*. Luego, dado que Γ es un conjunto acotado, lo será también el conjunto cerrado $\bar{\Gamma}$. Por ello, de acuerdo con el lema 3 del p. 41.4., el conjunto $F(\bar{\Gamma})$ está acotado. Del carácter acotado del conjunto $F(\bar{\Gamma})$ se desprende que el conjunto $\Gamma^* = F(\Gamma)$ es también acotado, pues $F(\Gamma) \subset F(\bar{\Gamma})$. □

Corolario. *Si la frontera $\partial\Gamma$ en las suposiciones del lema 1 se compone de un número finito de las curvas derivables continuamente a trozos, los conjuntos abiertos Γ y Γ^* son cuadrables.*

DEMOSTRACIÓN. Si γ es una curva continuamente derivable dispuesta en G y $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es una representación de dicha curva, las funciones $u(t)$ y $v(t)$ son continuamente derivables en el segmento $[a, b]$. En la aplicación F la curva γ pasará en la curva $\gamma^* = F(\gamma)$ cuya representación será

$$x(t) = x(u(t), v(t)), \quad y(t) = y(u(t), v(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

donde, en virtud de las fórmulas de derivación de una función compuesta (véase el p. 20.3) y del teorema sobre la continuidad de la composición de funciones continuas (véase el p. 19.5), las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen también derivadas continuas en el segmento $[a, b]$. Por consiguiente, la curva γ^* es también continuamente derivable. De aquí se infiere inmediatamente que si γ es una curva derivable continuamente a trozos, es decir, es una reunión de un número finito de curvas continuamente derivables (véase el p. 16.3), entonces γ^* es también una curva derivable continuamente a trozos.

Ahora, si la frontera $\partial\Gamma$ de un conjunto abierto $\Gamma \subset G$ se compone de un número finito de las curvas derivables continuamente a trozos, la frontera $\partial\Gamma^*$ del conjunto abierto $\Gamma^* \subset G^*$ consta también, en virtud de lo dicho anteriormente, de un

[1] Hemos obtenido esta afirmación sólo como una consecuencia directa del homeomorfismo de la aplicación F. Desde luego, en el caso dado esto se deduce directamente de las suposiciones más fuertes admitidas más arriba (véase el corolario del teorema 7 en el p. 41.8).

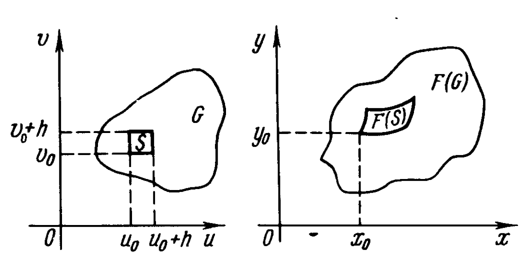


Fig. 193

número finito de curvas derivables continuamente a trozos. Por consiguiente, tanto $\partial\Gamma$, como $\partial\Gamma^*$ son rectificables (véase el teorema 1 en el p. 16.5), a consecuencia de lo cual tienen medida cero (véase el teorema 4 en el p. 44.2). Por ello, en el caso considerado los conjuntos abiertos Γ y Γ^* son cuadrables, pues tienen las fronteras de medida cero. □

Supongamos ahora que $(u_0, v_0) \in G$ y h es cierto número. Examinemos un cuadrado cerrado S (fig. 193) cuyos vértices están dispuestos en los puntos

$$(u_0, v_0), (u_0 + h, v_0), (u_0 + h, v_0 + h), (u_0, v_0 + h). \tag{46.4}$$

Sea $S \subset G$ (para h suficientemente pequeño esta inclusión siempre se cumple; ¿por qué?). La frontera ∂S del cuadrado S compuesta de sus cuatro lados es, obviamente, un contorno cerrado sencillo suave a trozos. En virtud del corolario del lema 2, el conjunto $S^* = F(S)$ (véase fig. 193) representa una *región* cuadrable cerrada (que S^* es una región cerrada se desprende del principio de conservación de la región, véase el p. 41.8).

Veamos cómo se porta la razón

$$\mu F(S)/\mu S^{*)} \tag{46.5}$$

cuando h tiende a cero.

Introduzcamos las designaciones:

$$x(u_0, v_0) = x_0, \quad y(u_0, v_0) = y_0,$$

$$\frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u} = a_{11}, \quad \frac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v} = a_{12}, \quad \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u} = a_{21}, \quad \frac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v} = a_{22},$$

$$u - u_0 = \Delta u, \quad v - v_0 = \Delta v, \quad r = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}.$$

Por ser derivables las funciones (46.1), son válidas las siguientes fórmulas

$$x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \varepsilon_1 r,$$
$$y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0)\varepsilon_2 r, \tag{46.6}$$

donde las funciones $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$, $i = 1, 2$ tienden a cero cuando $r \to 0$.

*) Aquí, como siempre, μX denota la medida (el área, en el caso dado) del conjunto X.

A la par con la aplicación F, consideraremos una aplicación lineal $\tilde{F}$ del plano R^2_{uv} sobre el plano R^2_{xy}, definida por las fórmulas

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0),\\ \tilde{y} &= y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0).\end{aligned} \tag{46.7}$$

Por el curso de geometría analítica se sabe que, realizándose una aplicación lineal, la imagen de todo paralelogramo y, en particular, de un cuadrado es un paralelogramo, con la particularidad de que la razón entre el área del último y el área del paralelogramo que se aplica es igual al valor absoluto del determinante de la aplicación el cual, en el caso de la aplicación $\tilde{F}$, coincide con el jacobiano $J(u, v)$ de la aplicación F en el punto (u_0, v_0). De este modo, en el caso dado, para la aplicación (46.7) tenemos

$$\frac{\mu\tilde{F}(S)}{\mu S} = \left| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right| = |J(u_0, v_0)|. \tag{46.8}$$

La aplicación continuamente derivable F en el entorno del punto (u_0, v_0) difiere de la aplicación lineal $\tilde{F}$ en una función infinitamente pequeña de orden superior que el incremento de los argumentos (véase (46.6)). Probemos que de aquí se infiere la validez de la igualdad

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(u_0, v_0)|. \tag{46.9}$$

Más aún, mostremos que la razón en esta igualdad tiende a su límite uniformemente en cualquier compacto dispuesto en el conjunto abierto G. Enunciemos este resultado como un teorema.

Teorema 1. *Supongamos que la aplicación F de un conjunto abierto $G \subset R^2_{uv}$ sobre otro conjunto abierto $G^* \subset R^2_{xy}$ es biunívoca y continuamente derivable en G y supongamos también que el jacobiano $J(u, v)$ no se reduce a cero en G. Entonces, si S es un cuadrado cuyos vértices coinciden con los puntos* (46.4), *se tiene*

$$\frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(u_0, v_0)| + \varepsilon(u_0, v_0, h), \tag{46.10}$$

donde la función $\varepsilon = \varepsilon(u_0, v_0, h)$, para $h \to 0$, tiende a cero uniformemente respecto a (u_0, v_0) en cualquier compacto $A \subset G$ *).

Corolario. *Para todo punto (u_0, v_0) de un conjunto abierto G se verifica la igualdad* (46.9).

DEMOSTRACIÓN. Probemos que el área de la imagen del cuadrado S, realizándose la aplicación F, se diferencia del área de la imagen de este cuadrado, cuando se realiza la aplicación $\tilde{F}$, en un infinitésimo de orden más elevado que el área h^2 del mismo cuadrado S y esta estimación es uniforme en cualquier compacto $A \subset G$, es decir, que

$$\mu F(S) = \mu\tilde{F}(S) + \varepsilon h^2, \tag{46.11}$$

*) De este modo, $A \ni (u_0, v_0)$.

donde ε tiende a cero uniformemente en el conjunto A, cuando la longitud h del lado del cuadrado S tiende a cero (véase en el p. 39.4. la definición que muestra cómo una función tiende al límite). Por cuanto (véase (46.8))

$$\mu\tilde{F}(S) = |J(u_0, v_0)|\mu S \tag{46.12}$$

y

$$\mu(S) = h^2,$$

de (46.11) se desprende directamente la afirmación del teorema, es decir, la fórmula (46.10).

Pasando a la demostración de la fórmula (46.11), fijemos, ante todo, el conjunto A. Ya que A es un compacto y $A \subset G$, las funciones $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v)$, $i = 1, 2$, (véase (46.6)) tienden uniformemente hacia cero en el conjunto A para $r \to 0$ (véase la observación al teorema 4 en el p. 20.2, como también el p. 39.4). Los conjuntos A y $X^2_{uv} \setminus G$ no se intersecan y son cerrados, siendo A, además, acotado, a consecuencia de lo cual (véase el lema 7 en el p. 18.2) $\eta = \rho(A, X^2_{uv} \setminus G) > 0$.

En adelante escogeremos h de modo tal que sea $|h| < \frac{\eta}{\sqrt{2}}$. En este caso de lo que $(u_0, v_0) \in A$ proviene que $S \subset G$.

Estimemos la distancia entre las imágenes de un mismo punto del cuadrado S en las aplicaciones F y $\tilde{F}$. Sea

$$M = (u, v) \in S, \; F(M) = (x, y) \quad \text{y} \quad \tilde{F}(M) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

De (46.6) y (46.7) obtenemos $x = \tilde{x} + \varepsilon_1 r$, $y = \tilde{y} + \varepsilon_2 r$, y por ende,

$$\rho(F(M), \tilde{F}(M)) = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2} = r\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

Como r es la distancia entre el vértice (u_0, v_0) del cuadrado S y el punto $M \in S$, y $|h|\sqrt{2}$ es la longitud de la diagonal del cuadrado S, entonces, evidentemente, se verifica la desigualdad $r \leqslant |h|\sqrt{2}$ y por esta razón se tiene

$$d = \sup_{M\in S} \rho(F(M), \tilde{F}(M)) \leqslant |h|\varepsilon_3(u_0, v_0, h), \tag{46.13}$$

donde $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(u_0, v_0, h) = \sup\limits_{M\in S} \sqrt{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}$ tiende a cero uniformemente en el conjunto A, para $h \to 0$.

Construyamos los paralelogramos cerrado $\tilde{S}_e$ *) y abierto $\tilde{S}_i$ **) cuyos lados sean paralelos a los del paralelogramo $\tilde{S} = \tilde{F}(S)$ y disten a la magnitud d de los lados correspondientes suyos (fig. 194) de modo tal que sea

$$\tilde{S}_i \subset \tilde{S} = \tilde{F}(S) \subset \tilde{S}_e. \tag{46.14}$$

Probemos ante todo que, siendo h suficientemente pequeños, el conjunto $\tilde{S}_i$ no es vacío. Más aún, mostremos que el paralelogramo $\tilde{S}_i$ contiene en sí un círculo abierto de radio d cuyo centro se ubica en el centro del paralelogramo S.

*) "e" es la letra inicial de la palabra exterior.

**) "i" es la letra inicial de la palabra interior.

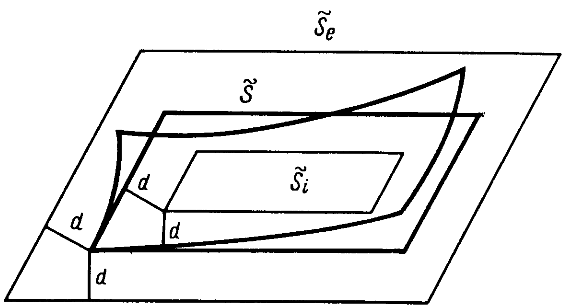


Fig. 194

Designemos mediante a y b las longitudes de los lados del paralelogramo $\tilde{S}$ y mediante H_a y H_b, las longitudes de sus alturas tiradas en los lados de longitud a y b, respectivamente (fig. 195). Para demostrar que, siendo h suficientemente pequeños, el círculo de radio d y centro ubicado en el centro del paralelogramo $\tilde{S}$ está contenido en $\tilde{S}_i$, basta, obviamente, establecer la validez, para h suficientemente pequeños, de las desigualdades

$$4d < H_a, \quad 4d < H_b. \tag{46.15}$$

Demostrémoslo. Supongamos, para concretar, que el lado del paralelogramo $\tilde{S}$ de longitud a une los vértices que en la aplicación $\tilde{F}$ constituyen las imágenes de los vértices (u_0, v_0) y $(u_0 + h, v_0)$ del cuadrado S, es decir, une los puntos (x_0, y_0) y $(x_0 + a_{11}h, y_0 + a_{21}h)$. En este caso

$$a = \sqrt{a_{11}^2 h^2 + a_{21}^2 h^2} = |h| \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}. \tag{46.16}$$

Análogamente,

$$b = |h| \sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}. \tag{46.17}$$

Las funciones $a_{ij} = a_{ij}(u_0, v_0)$, $i, j = 1, 2$, son valores de las derivadas parciales correspondientes de las funciones $x(u, v)$ e $y(u, v)$ en los puntos (u_0, v_0) del compacto A. En virtud de la continuidad supuesta de estas derivadas parciales, ellas

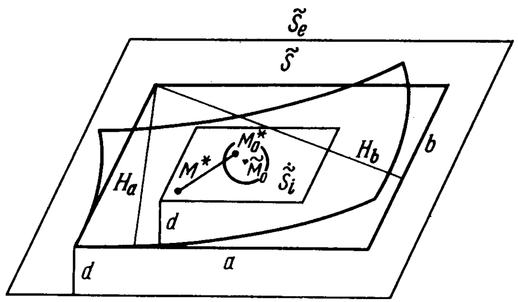


Fig. 195

están acotadas en el conjunto A, es decir, existe tal constante $c_1 > 0$, que en A se verifican las desigualdades $|a_{ij}| \leqslant c_1$, $i, j = 1, 2$.

De aquí y de las fórmulas (46.16) y (46.17) se deduce que

$$|a| \leqslant c_1\sqrt{2}|h|, \tag{46.18}$$

$$|b| \leqslant c_1\sqrt{2}|h|. \tag{46.19}$$

Luego, por hipótesis, el jacobiano $J(u, v)$ de la aplicación F, que representa una función continua, no se reduce a cero en el conjunto G y, por consiguiente, tampoco en el compacto A. Por esta razón existe (¿por qué?) una constante $c_2 > 0$ tal que en el conjunto A se verifica la desigualdad

$$|J(u, v)| \geqslant c_2. \tag{46.20}$$

Al notar que $\mu\tilde{S} = aH_a = bH_b = |J(u_0, v_0)| h^2$, obtendremos (véanse (46.18), (46.19) y (46.20)):

$$h^2 = \frac{aH_a}{|J(u_0, v_0)|} \leqslant \frac{1}{c_2} c_1 \sqrt{2}|h| H_a,$$

$$h^2 = \frac{bH_b}{|J(u_0, v_0)|} \leqslant \frac{1}{c_2} c_1 \sqrt{2}|h| H_b,$$

es decir,

$$|h| \leqslant \frac{c_1\sqrt{2}}{c_2} H_a, \tag{46.21}$$

$$|h| \leqslant \frac{c_1\sqrt{2}}{c_2} H_b. \tag{46.22}$$

Disponiendo de estas estimaciones, es fácil demostrar la validez de las desigualdades (46.15). En efecto, al hacer uso de las desigualdades (46.13), (46.21) y (46.22), obtendremos

$$4d \leqslant 4\varepsilon_3|h| \leqslant \frac{4\sqrt{2}c_1\varepsilon_3}{c_2} H_a, \tag{46.23}$$

$$4d \leqslant \frac{4\sqrt{2}c_1\varepsilon_3}{c_2} H_b. \tag{46.24}$$

Elijamos ahora tal $\delta > 0$ que para $|h| < \delta$ y $(u_0, v_0) \in A$ se cumpla la condición

$$\frac{4\sqrt{2}c_1\varepsilon_3}{c_2} < 1. \tag{46.25}$$

Esto es siempre factible debido a que la función $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(u_0, v_0, h)$ (véase (46.13)) tiende a cero uniformemente en el compacto A cuando $h \to 0$. De (46.23), (46.24) y (46.25) se desprende que para $|h| < \delta$ se verifican las desigualdades (46.15), de donde, en particular, se deduce que el conjunto $\tilde{S}_i$ no es vacío. En lo que sigue supondremos siempre, durante la demostración, que $|h| < \delta$.

El conjunto $\tilde{S}_e \setminus \tilde{S}_i$ se denominará *cuadro* y se denotará con $\tilde{R}$:

$$\tilde{R} = \tilde{S}_e \setminus \tilde{S}_i.$$

El cuadro $\tilde{R}$ es un conjunto cerrado, pues $\tilde{S}_e$ es un paralelogramo cerrado y $\tilde{S}_i$, abierto. Representa una reunión de cuatro trapecios, privados de puntos interiores comunes, cuyas alturas miden $2d$ y las líneas medias coinciden con los lados correspondientes del paralelogramo S. Por ello, $\mu\tilde{R} = 4d(a + b)$.

Observemos que si el conjunto $\tilde{S}_i$ fuera vacío, el cálculo del área del cuadro $\tilde{R}$ se realizaría de otro modo: los trapecios mencionados se transformarían en unos triángulos en los cuales los lados del paralelogramo ya no serían, por regla general, las líneas medias.

De la expresión obtenida para el área $\mu\tilde{R}$ del cuadro $\tilde{R}$ se deduce, en virtud de las desigualdades (46.13), (46.18) y (46.19), que $\mu\tilde{R} \leqslant 8\sqrt{2}c_1\varepsilon_3h^2$. Al poner $\varepsilon_4 = 8\sqrt{2}c_1\varepsilon_3$, tendremos en definitiva

$$\mu\tilde{R} \leqslant \varepsilon_4 h^2, \tag{46.26}$$

donde la función ε_4 tiende uniformemente hacia cero en el compacto A cuando $h \to 0$.

Mostremos ahora que el área del conjunto $F(S)$ se diferencia del área del paralelogramo $\tilde{S} = \tilde{F}(S)$ en una magnitud no superior al área del cuadro $\tilde{R}$. Para ello establezcamos ante todo que

$$\tilde{S}_i \subset F(S) \subset \tilde{S}_e. \tag{46.27}$$

En efecto, si $M \in S$, entonces $\tilde{F}(M) \in \tilde{S}$ y, de conformidad con (46.13), $\rho(F(M), \tilde{F}(M)) \leqslant d$.

Luego, el conjunto $\tilde{S}_e$ contiene, por construcción, todos los puntos del plano que distan del paralelogramo $\tilde{S}$ a una magnitud no superior a d. Por esta razón $F(M) \in \tilde{S}_e$ y la inclusión $F(S) \subset \tilde{S}_e$ queda demostrada. Resta demostrar que $\tilde{S}_i \subset F(S)$. Hemos de notar, ante todo, que

$$F(\partial S) \subset \tilde{R}. \tag{46.28}$$

En efecto, si $M \in \partial S$, se tiene $F(M) \in \partial S$ y, de acuerdo con (46.13), $\rho(F(M), \tilde{F}(M)) \leqslant d$. Pero el cuadro $\tilde{R}$ contiene, por construcción, todos los puntos del plano que distan de la frontera $\partial\tilde{S}$ del paralelogramo $\tilde{S}$ a una magnitud no superior a d, por lo cual $F(M) \in \tilde{R}$ y la inclusión (46.28) queda demostrada. Como, bajo las suposiciones asumidas, la frontera $\partial F(S)$ de la imagen $F(S)$ del cuadrado S coincide con la imagen $F(\partial S)$ de la frontera ∂S del cuadrado S (véase el lema 1), la inclusión (46.28) puede escribirse en la forma

$$\partial F(S) \subset \tilde{R}. \tag{46.29}$$

Sea ahora M_0 el centro del cuadrado S. En la aplicación $\tilde{F}$ éste pasa al centro $\tilde{M}_0 = \tilde{F}(M_0)$ del paralelogramo $\tilde{S}$. Sea Q un círculo cerrado de radio d con centro en el punto $\tilde{M}_0$ (la magnitud d se determina por la fórmula (46.13)). Hemos demostrado anteriormente que $Q \subset \tilde{S}_i$. Si $M_0^* = F(M_0)$, entonces, de acuerdo con (46.13), $\rho(M_0^*, \tilde{M}_0) \leqslant d$, y, por lo tanto, $M_0^* \in Q$, por lo cual también $M_0^* \in \tilde{S}_i$. De este modo, la clausura $\tilde{S}_i$ contiene, a ciencia cierta, un punto de $F(S)$, a saber, la imagen M_0^* del centro M_0 del cuadrado S en la aplicación F.

Probemos ahora que todos los puntos $\tilde{S}_i$ también pertenecen a $F(S)$. Admitamos lo contrario; supongamos que existe un punto $M^* \in \tilde{S}_i$ tal que $M^* \notin F(S)$ (véase la fig. 195). Todo segmento es, obviamente, un conjunto linealmente conexo, por lo cual, de acuerdo con el lema 9 del p. 18.2, en el segmento $M_0^*M^*$ con sus extremos en los puntos M_0^* y M^* hay un punto de la frontera $\partial F(S)$ del conjunto $F(S)$. De este punto no puede servir M_0^*, puesto que M_0 es un punto interior del conjunto S y para la aplicación F los puntos interiores pasan a interiores, por eso el punto $M_0^* = F(M_0)$ es interior y no de frontera del conjunto $F(S)$. Debido a esto el punto de intersección del conjunto $\partial F(S)$ con el segmento $M_0^*M^*$ es un punto del paralelogramo abierto $\tilde{S}_i$, lo que contradice la inclusión (46.29).

De este modo, no existe un punto $M^* \in \tilde{S}_i$, para el cual sea, a la vez, $M^* \notin F(S)$, por lo cual $\tilde{S}_i \subset F(S)$. La fórmula (46.27) se ha demostrado.

De (46.14) y (46.27) proviene que

$$\mu\tilde{S}_i \leqslant \mu\tilde{F}(S) \leqslant \mu\tilde{S}_e, \quad \mu\tilde{S}_i \leqslant \mu F(S) \leqslant \mu\tilde{S}_e,$$

y, por lo tanto,

$$|\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)| \leqslant \mu\tilde{S}_e - \mu\tilde{S}_i = \mu\tilde{R}.$$

Por esta razón, en vista de (46.26)

$$|\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)| \leqslant \varepsilon_4 h^2, \tag{46.30}$$

donde ε_4 tiende hacia cero uniformemente en el compacto A cuando $h \to 0$.

Pongamos

$$\varepsilon(u_0, v_0, h) = \frac{\mu F(S) - \mu\tilde{F}(S)}{h^2}, \tag{46.31}$$

entonces de (46.30) se infiere que $|\varepsilon| \leqslant |\varepsilon_4|$ y, por ende, en el conjunto A ε tiende a cero uniformemente cuando $h \to 0$. De (46.31) tenemos

$$\mu F(S) = \mu\tilde{F}(S) + \varepsilon h^2,$$

es decir, se ha obtenido, la fórmula (46.11), de donde, como ya se ha señalado, se deduce directamente (46.10). □

46.2. CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL DOBLE

Dejamos intactas al principio las designaciones y suposiciones asumidas en el punto antecedente, en particular, supondremos que F es una aplicación biunívoca continuamente derivable del conjunto abierto $G \subset R^2_{uv}$ sobre otro conjunto abierto $G^* \subset R^2_{xy}$, provisto de un jacobiano distinto de cero en G. Sean Γ y Γ^* unos conjuntos abiertos cuadrables (y por eso acotados), $\overline{\Gamma} \subset G$, $\overline{\Gamma}^* \subset G^*$, y supongamos que, al realizarse la aplicación F, el conjunto $\overline{\Gamma}$ se aplica sobre $\overline{\Gamma}^*$. En este caso $\overline{\Gamma}$ y $\overline{\Gamma}^*$ son unos compactos, los puntos interiores de Γ pasan a puntos interiores, $\overline{\Gamma}^*$ son unos compactos, mientras que la frontera de Γ se aplica sobre la de Γ^*.

Teorema 2 (fórmula de cambio de las variables en una integral doble). *Sea $f(x, y)$ una función definida y continua en $\overline{\Gamma}^*$. En este caso*

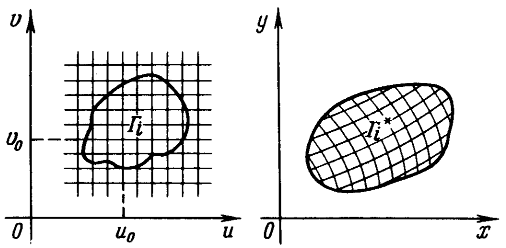


Fig. 196

$$\iint\limits_{\Gamma^*} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{\Gamma} f[(x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| dudv. \quad (46.32)$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que las integrales que figuran en (46.32) existen como integrales de las funciones continuas en la clausura de las regiones cuadrables. Efectivamente, por hipótesis, la función $f(x, y)$ es continua en $\overline{\Gamma}^*$ y el jacobiano $\dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}$, en $\overline{\Gamma}$, mientras que la función $f\,[x(u, v), y(u, v)]$ es continua en $\overline{\Gamma}$ como composición de las funciones continuas.

Tomemos una partición de rango k del plano R_{uv} en cuadrados. Elijamos el rango k tan grande que todo cuadrado de este rango que se interseca con $\overline{\Gamma}$ se contenga íntegramente en G (¿por qué tal rango existe?). Designemos con Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, i_k$ toda clase de intersecciones no vacías de los interiores (los conjuntos de puntos interiores) de los cuadrados de rango k con el conjunto Γ. Los conjuntos Γ_i son cuadrables y abiertos, pues sus fronteras tienen medida cero, puesto que se componen, en el caso general, de una parte de la frontera del cuadrado correspondiente de rango k y una parte de la frontera del conjunto Γ. La totalidad $\tau_k = \{\Gamma_i\}_{i=1}^{i=i_k}$ forma la partición del conjunto Γ, con la particularidad de que, evidentemente,

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{\tau_k} = 0. \quad (46.33)$$

Sea ahora $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$; la frontera de Γ_i se aplica sobre la frontera de Γ_i^*, razón por la cual la frontera de Γ_i^* se compone, en el caso general, de una parte de la frontera del conjunto Γ^* (al admitir que el conjunto Γ^* es cuadrable, convenimos en que esta frontera tiene medida cero) y una parte de una curva suave a trozos que es la imagen de la frontera del cuadrado correspondiente y tiene también, debido a esta circunstancia, medida cero. De lo dicho proviene que Γ_i^* es un conjunto abierto cuadrable. De lo que la aplicación F es biunívoca se deduce que la totalidad $\tau_k^* = \{\Gamma_i^*\}_{i=1}^{i=i_k}$ forma la partición del conjunto Γ^* (fig. 196).

Estimemos la finura de la partición τ_k^*. Sea δ_k el diámetro del cuadrado de rango k $\left(\text{evidentemente, } \delta_k = \dfrac{\sqrt{2}}{10^k}\right)$ y $M_1^* = (x_1, y_1) \in \Gamma_i^*$, $M_2^* = (x_2, y_2) \in \Gamma_i^*$. En este caso

existen tales $M_1 \in \Gamma_i$ y $M_2 \in \Gamma_i$ que $F(M_1) = M_1^*$, $F(M_2) = M_2^*$, con la particularidad de que $\rho(M_1, M_2) < \delta_k$. Por consiguiente,

$$\rho(M_1^*, M_2^*) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)}, \quad (46.34)$$

donde $\omega(\delta; x)$ y $\omega(\delta; y)$ son los módulos de continuidad de las funciones $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ en el compacto $\overline{\Gamma}$. Siendo estas funciones continuas en $\overline{\Gamma}$, son uniformemente continuas, por lo cual (véase el p. 19.7)

$$\lim_{k\to\infty} \omega(\delta_k; x) = \lim_{k\to\infty} \omega(\delta_k; y) = 0. \quad (46.35)$$

De (46.34) para el diámetro $d(\Gamma_i^*)$ obtenemos

$$d(\Gamma_i^*) = \sup_{\substack{M_1^* \in \Gamma_i^* \\ M_2^* \in \Gamma_i^*}} \rho(M_1^*, M_2^*) \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)}.$$

y, por consiguiente,

$$\delta_{\tau_k^*} = \sup_{\Gamma_i^* \in \tau_k^*} d(\Gamma_i^*) \leqslant \sqrt{\omega^2(\delta_k; x) + \omega^2(\delta_k; y)},$$

por lo cual, en virtud de (46.35),

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{\tau_k^*} = 0^{*)}. \quad (46.36)$$

Tomemos ahora sólo aquellos elementos de las particiones τ_k y τ_k^*, cuyas clausuras no se intersecan con las fronteras $\partial\Gamma$ y $\partial\Gamma^*$ de los conjuntos Γ y Γ^*. Designémoslos mediante $\tau_k(\partial\Gamma)$ y $\tau_k^*(\partial\Gamma^*)$, respectivamente:

$$\tau_k(\partial\Gamma) = \{\Gamma_i : \Gamma_i \in \tau_k, \overline{\Gamma}_i \cap \partial\Gamma = \varnothing\},$$
$$\tau^*_k(\partial\Gamma^*) = \{\Gamma_i^* : \Gamma_i^* \in \tau_k^*, \overline{\Gamma}_i^* \cap \partial\Gamma^* = \varnothing\}.$$

En virtud de las suposiciones asumidas, $\Gamma_i^* \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)$ cuando, y sólo cuando, $\Gamma_i \in \tau_k(\partial\Gamma)$; en este caso $\tau_k(\partial\Gamma)$ consta de aquellos, y sólo aquellos elementos $\Gamma_i \in \tau_k$ que representan los cuadrados íntegros contenidos junto con sus fronteras en el conjunto Γ.

Formemos las sumas integrales incompletas $\sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma^*)}$ (véase el p. 44.3) para la función $f(x, y)$, tomando a título de puntos $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{\Gamma}_i \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)$ las imágenes de los vértices cualesquiera (u_i, v_i) de los cuadrados correspondientes Γ_i:

$$\xi_i = x(u_i, v_i) \quad \eta_i = y(u_i, v_i). \quad (46.37)$$

En otras palabras, consideraremos las sumas de la forma

$$\sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma^*)} = \sum_{\Gamma_i^* \in \tau_k^*(\partial\Gamma^*)} f(\xi_i, \eta_i)\mu\Gamma_i^*. \quad (46.38)$$

*) No es difícil convencerse de que la igualdad (46.36) puede obtenerse inmediatamente de la continuidad uniforme de la aplicación continua del compacto (véase el lema 4 en el p. 41.4).

Como se sabe (véase el teorema 5 en el p. 44.3), debido a que la condición (46.36) se cumple, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma^*)} = \iint_{\Gamma^*} f(x, y)dxdy. \tag{46.39}$$

Por otra parte, para $\Gamma_i^* = F(\Gamma_i)$, para los cuales Γ_i es un cuadrado, y, por lo tanto, para $\Gamma_{i\in\tau_k}(\partial\Gamma)$, de acuerdo con el teorema 1 del punto anterior, tenemos

$$\mu\Gamma_i^* = |J(u_i, v_i)|\mu\Gamma_i + \varepsilon\mu\Gamma_i, \tag{46.40}$$

donde $\varepsilon = \varepsilon(u_i, v_i, \delta_{\tau_k})$ tiende uniformemente en el compacto $\overline{\Gamma}$ hacia cero cuando $k \to 0$. Sustituyendo (46.37) y (46.40) en (46.38), obtendremos

$$\sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma^*)} = \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(\partial\Gamma)} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\, |J(u_i, v_i)|\mu\Gamma_i + \\ + \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(\partial\Gamma)} \varepsilon f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\mu\Gamma_i. \tag{46.41}$$

La sumación en estas sumas está extendida a todos los índices i, para los cuales $\overline{\Gamma}_i$ no se interseca con la frontera de Γ. Para la primera suma que figura en el segundo miembro de la igualdad (46.41), se tiene, en virtud de la condicíon (46.33) (véase el teorema 5 en el p. 44.3)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(\partial\Gamma)} f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\, |J(u_i, v_i)|\mu\Gamma_i = \\ = \iint_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)]\, |J(u, v)|\, dudv.$$

En cuanto a la segunda suma en la igualdad (46.41), ésta tiende a cero cuando $k \to \infty$. En efecto, por ser continua la función $f[x(u, v), y(u, v)]$ en el compacto $\overline{\Gamma}$, es acotada en él, es decir, existe tal constante $C > 0$, que

$$|f[x(u, v), y(u, v)]| \leqslant C, \quad (u, v) \in \overline{\Gamma}.$$

Siendo fijado $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario, en virtud de que en $\overline{\Gamma}$ ε tiende a cero uniformemente para $k \to \infty$, podemos escoger k_0 de modo tal que para $k \geqslant k_0$ se verifique la desigualdad $|\varepsilon| < \dfrac{\varepsilon_0}{c\mu\Gamma}$, cualesquiera que sean $(u_i, v_i) \in \overline{\Gamma}_i$, $\overline{\Gamma}_i \subset \overline{\Gamma}$; entonces

$$\left|\sum_{\Gamma_i\in\tau_k(\partial\Gamma)} \varepsilon f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]\mu\Gamma_i\right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{\Gamma_i\in\tau_k(\partial\Gamma)} |\varepsilon|\, |f[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)]|\, \mu\Gamma_i < \frac{\varepsilon_0}{\mu\Gamma} \sum_i \mu\Gamma_i \leqslant \varepsilon_0.$$

Así pues,

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k^*(\partial\Gamma)} = \iint_{\Gamma} f[x(u, v), y(u, v)]\, |J(u, v)|\, dudv. \tag{46.42}$$

Precisamente de (46.39) y (46.42) proviene directamente la fórmula (46.32). □

El teorema demostrado se generaliza con facilidad también a un caso algo más general, cuando el jacobiano de la aplicación (46.1) puede reducirse a cero en la frontera de la región de integración, mientras que la propia aplicación falla de ser biunívoca en esta frontera. Con más precisión, es válido el siguiente teorema.

Teorema 2′. *Sean G y G^* unos conjuntos cuadrables abiertos: $G \subset R^2_{uv}$, $G^* \subset R^2_{xy}$, y supongamos que*

$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v),$$

es una aplicación continua de $\overline{G}$ sobre $\overline{G}^*$ que aplica G sobre G^* de manera biunívoca y continuamente derivable, con la particularidad de que el jacobiano $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ de dicha aplicación no se reduce a cero en G y es continuamente prolongable a G. En este caso, si la función $f(x, y)$ es continua en el conjunto G^*, se tiene

$$\iint_{G^*} f(x, y)dxdy = \iint_G f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Γ_k, $k = 1, 2, \ldots$ una sucesión de conjuntos abiertos cuadrables acotados cuya frontera se compone de un número finito de curvas suaves a trozos, y

$$\overline{\Gamma}_k \subset G, \quad \Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = G.$$

En calidad de Γ_k puede tomarse, por ejemplo, una totalidad de todos los puntos interiores del conjunto $S_k(G)$ (véase el p. 44.1). Supongamos que $\Gamma_k^* = F(\Gamma_k)$; entonces Γ_k^* será también un conjunto cuadrable abierto acotado y

$$\overline{\Gamma}_k^* = F(\overline{\Gamma}_k)' \subset G^*, \quad \Gamma_k^* \subset \Gamma_{k+1}^*, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^* = G^*.$$

Del cumplimiento de estas condiciones se deduce que (véase el teorema 2, p. 31.2)

$$\lim_{k\to\infty} \mu\Gamma_k = \mu G, \quad \lim_{k\to\infty} \mu\Gamma_k^* = \mu G^*. \tag{46.43}$$

Para cada uno de los conjuntos Γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, se cumplen todas las condiciones del teorema 2, razón por la cual

$$\iint_{\Gamma_k^*} f(x, y)dxdy = \iint_{\Gamma_k} f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv. \tag{46.44}$$

La función $f(x, y)$ es continua en $\overline{G}^*$ y por esta razón es integrable en G^*, mientras que la función $f[x(u, v), y(u, v)]\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ es integrable por la misma razón *) en G. Por ello, como las condiciones (46.43) quedan cumplidas, obtenemos (véase la propiedad 10° en el p. 44.6):

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{\Gamma_k^*} f(x, y)dxdy = \iint_{G^*} f(x, y)dxdy,$$

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{\Gamma_k} f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|dudv =$$

$$= \iint_{G} f[x(u, v), y(u, v)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|dudv. \quad (46.45)$$

Pasando al límite para $k \to \infty$, en la igualdad (46.44) obtendremos, en virtud de la fórmula (46.45), la fórmula buscada para el cambio de las variables en la integral. □

El cambio de las variables en una integral múltiple simplifica a menudo considerablemente la investigación y el cálculo de la integral. Además, a diferencia de una integral sencilla, el objetivo del cambio de variable consiste frecuentemente no en la simplificación de la función subintegral, sino en el paso a una región de integración más simple, incluso a cuenta de la complicación determinada de la función subintegral.

Ejemplo. Calculemos la integral $\iint_{x^2+y^2<1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

Con este fin introduzcamos las coordenadas nuevas r, φ (coordenadas polares), rigiéndonos por las fórmulas

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi. \quad (46.46)$$

En este caso $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$. La aplicación (46.46) aplica el rectángulo $G = \{(r, \varphi) : 0 < r < 1, -\pi < \varphi < \pi\}$ (aquí r y φ se consideran como las coordenadas cartesianas en el plano r, φ), de manera biunívoca, continuamente derivable y con el jacobiano distinto de cero, sobre el círculo $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, del cual se ha excluido el radio dispuesto en la parte negativa del eje Ox, es decir, sobre el conjunto (fig. 197) $G^* = K \setminus \{(x, y) : x \leqslant 0, y = 0\}$.

Entre tanto, el rectángulo cerrado $\overline{G}$ pasa, realizándose la aplicación (46.46), a un círculo cerrado $\overline{G}^* = \overline{K}$, con la particularidad de que en la frontera de $\overline{G}$ esta aplicación ya no es biunívoca. El jacobiano de la aplicación (46.46) es continuo en $\overline{G}$ y, además, en un punto de la frontera, a saber, en el origen de coordenadas, se reduce a cero. Todas las condiciones que se imponen sobre la aplicación (46.1) en el teorema 2´ de este punto se cumplen para la aplicacion (46.46), por lo cual puede aplicarse la fórmula del cambio de variable en la integral

*) Recordemos que, en virtud de las condiciones del teorema, dicha función es continuamente prolongable del conjunto G a $\overline{G}$, con la particularidad de que los valores de la función prolongada en la frontera del conjunto G no influyen en los valores de la integral (véase el p. 44.3).

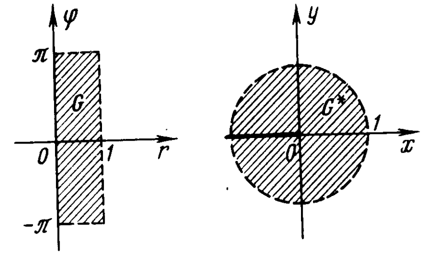


Fig. 197

$$\iint_{x^2+y^2<1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_{\substack{0<r<1 \\ -\pi<\varphi<\pi}} r\cos\pi r dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\cos\pi r dr = 2\pi\left[\left.\frac{r\operatorname{sen}\pi r}{\pi}\right|_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}\pi r dr\right] = -\frac{4}{\pi}.$$

La fórmula (46.32) de cambio de variables en la integral doble puede ser demostrada también para el caso más general, en particular, cuando el jacobiano de la aplicación se reduce a cero en la región de integración, mientras que la función subintegral tiene discontinuidades. Si los conjuntos de los puntos indicados tienen medida cero y se aplican también en los conjuntos de medida cero, con la particularidad de que los conjuntos citados dividen las regiones de integración G y G^* en un número finito de conjuntos abiertos, en cada uno de los cuales la función subintegral resulta prolongable de modo que se obtenga una función continua hasta la misma frontera, entonces la fórmula (46.32) se deduce directamente de lo demostrado más arriba.

Ejercicios. Sea $f(x, y) = 2\pi(x^2 - y^2)\operatorname{sen}\pi(x - y)^2$ y sea X un cuadrado cuyos vértices son $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Calcúlese la integral $\iint_X f(x, y)dxdy$, sirviéndose del cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

2. Pasando a las coordenadas polares, calcúlese la integral $\iint_X f(x, y)dxdy$, donde

a) $f(x, y) = y$, $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2x, 0 < x < y\}$;

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x < y < \sqrt{3}x\}$.

46.3. COORDENADAS CURVILÍNEAS

Las fórmulas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (46.47)$$

pueden considerarse no sólo como aplicación, sino también como el paso de un sistema de coordenadas al otro, en el caso general, curvilíneo. Aclaremos, ante todo, la nocíon de sistema de coordenadas curvilíneas.

Sea G un conjunto abierto en el plano R^2_{xy} y a todo punto $M = (x, y) \in G$, y, por consiguiente, a todo par ordenado de números (x, y), que representan las coordenadas del punto M en el sistema elegido de coordenadas rectangulares, se le ha puesto en correspondencia un par de números (u, v) de un modo tal que a los puntos diferentes M_1 y M_2 corresponden diferentes pares (u_1, v_1) y (u_2, v_2). En este caso suele decirse que en el conjunto G se ha dado el sistema de coordenadas u, v. Si al punto M le corresponde el par (u, v) se escribe $M = (u, v)$. Cualquier par (u, v) es una función del punto $M \in G$, razón por la cual cada uno de sus elementos, u y v, es también una función del punto $M : u = u(M)$, $v = v(M)$, o bien, que es lo mismo, de sus coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y). \end{aligned} \tag{46.48}$$

Viceversa, a todo par (u, v) del conjunto de pares en consideración corresponde un punto $M \in G$, es decir, dicho punto M es una función de los pares $(u, v) : M = M(u, v)$, por lo cual sus coordenadas cartesianas x e y son también funciones de los pares citados (u, v). En otras palabras, resultan válidas las fórmulas (46.47) que predeterminan una aplicación, inversa de la aplicación (46.48).

Los conjuntos de puntos $(x, y) \in G$ que satisfacen la condición $u(x, y) = u_0$, y, por consiguiente, $v(x, y) = v_0$, donde u_0 y v_0 son ciertas constantes fijadas, se llaman *líneas coordenadas* en el sistema de coordenadas u, v.

Haciendo uso de la fórmula (46.47), las líneas coordenadas pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} x &= x(u_0, v), \\ y &= y(u_0, v), \end{aligned} \tag{46.49}$$

y, correspondientemente, en la forma

$$\begin{aligned} x &= x(u, v_0), \\ y &= y(u, v_0). \end{aligned} \tag{46.50}$$

En el caso de las coordenadas cartesianas las líneas coordenadas son rectas; en el caso general, ciertas curvas que se definen por las representaciones (46.49) y (46.50). A esto precisamente se debe la denominaciíon "coordenadas curvilíneas" (fig. 198).

Supondremos que las funciones (46.47) satisfacen en G todas las condiciones, bajo las cuales se ha deducido la fórmula (46.32) de cambio de variable en la integral, en particular, dichas funciones son continuamente derivables y el jacobiano $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ es distinto de cero en G. Debido a esto, las líneas coordenadas en el entorno de todo punto perteneciente a G son unas curvas continuamente derivables.

Investiguemos qué sentido tendrá en este caso el módulo del jacobiano. Fijemos algunos valores $u_0, \Delta u, v_0, \Delta v$. Supongamos que $M_0 = (u_0, v_0)$, Γ es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas curvilíneas u, v satisfacen las desigualdades $u_0 < u < u_0 + \Delta u$, $v_0 < v < v_0 + \Delta v$, y sea $\overline{\Gamma} \subset G$. El conjunto Γ se denomina

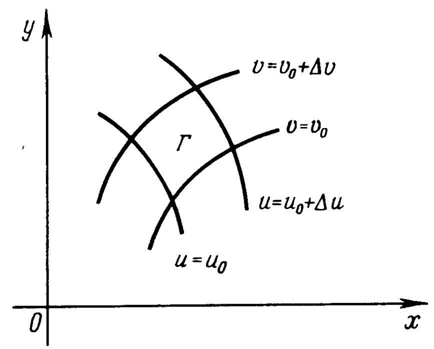


Fig. 198

paralelogramo coordenado (*curvilíneo*). El conjunto Γ está abierto (¿por qué?) y su frontera representa un contorno suave a trozos (se compone de las curvas del tipo $x = x(u_0, v)$, $y = y(u_0, v)$, donde $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \Delta v$, etc.) y por eso Γ es una región cuadrable. Calculemos su área (véase la fig. 198). Al aplicar la fórmula de cambio de variable en la integral y el teorema integral del valor medio (véase el p. 44.6), obtendremos

$$\mu\Gamma = \iint\limits_{\Gamma} dx\,dy = \iint\limits_{\substack{u_0 < u < u_0 + \Delta u \\ v_0 < v < v_0 + \Delta v}} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv =$$

$$= \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M \int\limits_{u_0}^{u_0 + \Delta u} du \int\limits_{v_0}^{v_0 + \Delta v} dv = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M \Delta u \Delta v, \quad M \in \overline{\Gamma}.$$

Por ser continuamente derivables las funciones (46.47),

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0} + \varepsilon,$$

donde $\lim\limits_{\Delta u^2 + \Delta v^2 \to 0} \varepsilon = 0$. De este modo

$$\mu\Gamma = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0} \Delta u \Delta v + \varepsilon \Delta u \Delta v. \tag{46.51}$$

La fórmula (46.51) señala que el módulo del jacobiano en el punto (u_0, v_0) representa el coeficiente de la parte principal del área del paralelogramo coordenado con vértice en el punto (u_0, v_0) respecto del producto $\Delta u \Delta v$ para $\Delta u^2 + \Delta v^2 \to 0$. Esta observación se utiliza a menudo en la práctica al calcular el jacobiano de la transformación de las coordenadas curvilíneas en las cartesianas. Mostrémoslo en el ejemplo de las coordenadas polares r, φ. Fijemos ciertos valores r, $r + \Delta r$, φ y

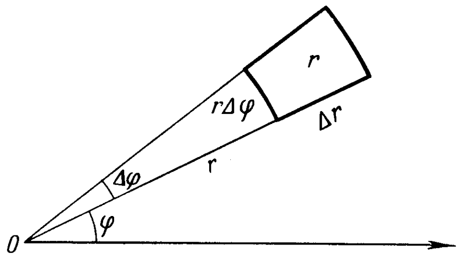


Fig. 199

$\varphi + \Delta\varphi$, y examinemos un paralelogramo coordenado Γ (fig. 199), formado por las líneas coordenadas r, $r + \Delta r$, φ y $\varphi + \Delta\varphi$. Las longitudes de sus dos lados son iguales a Δr, y $r\Delta\varphi$, respectivamente. Al calcular el área de este paralelogramo, como si fuera éste un rectángulo ordinario, tendremos

$$\mu\Gamma \approx r\Delta r\Delta\varphi.$$

De este modo, el coeficiente del producto $\Delta r\Delta\varphi$ resultó ser igual a r, de donde es natural esperar que $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = r$. Efectivamente, es así (véase el ejemplo en el p. 46.2), lo que se debe a que en nuestros cálculos inexactos del área de Γ se ha admitido un error cuyo orden de infinitud es superior que el producto $\Delta r\Delta\varphi$ para $\Delta r^2 + \Delta\varphi^2 \to 0$. Efectivamente, al calcular $\mu\Gamma$ como una diferencia de las áreas de dos sectores, obtendremos

$$\mu\Gamma = \frac{\Delta\varphi}{2n}\pi(r + \Delta r)^2 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\pi r^2 = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}\Delta r^2\Delta\varphi.$$

46.4. CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL n-MÚLTIPLE

Todo lo expuesto en los puntos anteriores de este párrafo, junto con la demostración, se extiende al caso n-dimensional, por lo cual nos limitaremos sólo a la enunciación de los teoremas correspondientes.

Teorema 3. *Supongamos que $G_x \subset R^n_x$ y $G_t \subset R^n_t$ son unos conjuntos abiertos, $x = F(t) = \{x_i = x_i(t_1, \dots, t_n), i = 1, 2, \dots, n\}$ es la aplicación biunívoca continuamente derivable de G_t sobre G_x, cuyo jacobiano $J(t) = \dfrac{\partial(x_i, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}$ es distinto de cero en G_t. Sea, además, S un cubo n-dimensional:*

$$S = \{t : t_i^{(0)} \leqslant t_i \leqslant t_i^{(0)} + h,\ i = 1, 2, \dots, n\} \subset G_t,\ t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_n^{(0)}).$$

Entonces $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(t^{(0)})|$; *con lo cual, si*

$$\frac{\mu F(S)}{\mu S} = |J(t^{(0)})| + \varepsilon(t^{(0)}, h),$$

para cualquier compacto $A \subset G_t$ la función $\varepsilon(t^{(0)}, h)$, $t^{(0)} \in A$, tiende uniformemente hacia cero en A, cuando $h \to 0$.

Teorema 4. *Sean:*

1) *G_x y G_t unos conjuntos abiertos medibles $G_x \subset R^n_x$, $G_t \subset R^n_t$;*

2) *$x = F(t)$, la aplicación continua de $\bar G_t$ sobre $\bar G_x$ que aplica G_t sobre G_x de una manera biunívoca y continuamente derivable;*

3) *el jacobiano $J(t) = \dfrac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}$ de esta aplicación no se reduce a cero en G_t y es continuamente prolongable a $\bar G_t$.*

En este caso, si la función $f(x)$ es continua en $\bar G_x$, se tiene

$$\int f(x)\,dG_x = \int f(x(t))|J(t)|\,dG_t.$$

Ejercicios. Escríbanse las fórmulas del cambio de variables en las integrales triples para la transformación de coordenadas:

3. $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = \cos\psi\operatorname{sen}\varphi$, $z = r\operatorname{sen}\psi$, $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ (coordenadas esféricas).

4. $x = r\cos\psi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$, $z = z$, $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ (coordenadas cilíndricas).

OBSERVACIÓN. Siendo vigente la fórmula del cambio de variable para cualquier conjunto medible $G \subset R^n$ y cualesquiera coordenadas curvilíneas $u_1, \dots, u_n$, resulta lícita la siguiente fórmula

$$\int\limits_G \cdots \int dx_1 \dots dx_n = \int\limits_G \cdots \int \left|\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)}\right| du_1 \dots du_n.$$

En particular, si

$$\left|\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)}\right| = 1, \tag{46.52}$$

entonces

$$\int\limits_G \cdots \int dx_1 \dots dx_n = \int\limits_G \cdots \int du_1 \dots du_n. \tag{46.53}$$

La condición (46.52) se cumple a ciencia cierta, si $u_1, \dots, u_n$ son también las coordenadas cartesianas en el espacio R^n y, por tanto, se expresan mediante $x_1, \dots, x_n$ con ayuda de una transformación lineal cuyo determinante es igual a $\pm$ 1;

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}u_j,\quad i = 1, 2, \dots, n,\quad \det\|c_{ij}\| = \pm 1.$$

El primer miembro de la fórmula (46.53) es igual a la medida μG del conjunto G "en las coordenadas $x_1, \dots, x_n$" (véase la propiedad 1° de la integral múltiple en el p. 44.6) y el segundo miembro de la misma, cuando $u_1, \dots, u_n$ son las coordenadas cartesianas, es igual, correspondientemente, a la medida del conjnto G "en las coordenadas $u_1, \dots, u_n$". De este modo, la fórmula (46.53) indica que la medida de un conjunto abierto medible no depende de cómo se elige el sistema de coordenadas cartesianas.

A decir verdad, debemos observar que al demostrar la fórmula del cambio de variables en la integral múltiple, nos hemos servido de aquel hecho demostrado en la geomertía que, realizándose las aplicaciones afines (es decir, aplicaciones lineales regulares), el valor absoluto del determinante de la transformación, es igual a la razón entre el volumen del paralelepípedo, que es la imagen de cierto cubo, y el volumen del último.

Ejercicios. 5. Sea $G = \{(x, y, z) : 1 < x < 2;\ 1 < x + y < 3;$ $1 < x + y + y + z < 5\}$. Calcúlese la integral $\iiint\limits_G \dfrac{dxdydz}{(x + y)(x + y + z)}$, pasando a las variables u, v, w que están ligadas con x, y, z mediante las correlaciones $x + y + z = u, x + y = uv, x = uvw$.

6. Sea $G = \{(x, y, z) : x < yz < 2x;\ y < zx < 2y;\ z < xy < 2z\}$. Calcúlese la integral $\iiint\limits_G xyz\,dxdydz$, pasando a las variables u, v, w que están ligadas con x, y, z por las correlaciones $ux = yz,\ vy = zx,\ wz = xy$.

§ 47. INTEGRALES CURVILÍNEAS

47.1. INTEGRALES CURVILÍNEAS DE PRIMERA ESPECIE

Sea dada en el espacio tridimensional R^3 una curva $\gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ (véase § 16). Consideraremos las funciones unívocas F definidas en los puntos $r(t)$ de esta curva: $F = F(r(t))$. Si $\rho(t)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, es alguna otra representación de la misma curva γ y si $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, es la aplicación del segmento $[\alpha, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$ que realiza la equivalencia de dichas representaciones (es decir, si $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, es la transformación admisible del parámetro, véase el p. 16.1), entonces, como el valor de la función F se determina sólo por un punto de la curva, tendremos

$$F(\rho(\tau)) = F(r(t)), \quad t = (\tau), \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta.$$

Las funciones en consideración F admiten, en el caso general, diferentes valores en los puntos de la curva, correspondientes a los valores distintos del parámetro, pero coincidentes como puntos de un espacio (véanse los puntos múltiples en el p. 16.1). Este punto de vista corresponde a la interpretación física de la curva γ, por ejemlo, cuando ésta representa una trayectoria que sigue un punto material en movimiento, y a la de la función F, cuando F interviene como una fuerza que actúa contra dicho punto y que depende no sólo de la posición del punto en el espacio, sino también del instante en que este punto se encuentra en el lugar dado. Además, semejante enfoque proporciona también algunas ventajas matemáticas que se pondrán de manifiesto en lo que sigue.

De lo expuesto se desprende que las funciones citadas, definidas en una curva, no pueden considerarse como funciones prefijadas en cierto conjunto del espacio R^3, por lo cual, en palabras estrictas, no pueden designarse mediante $F(x, y, z)$, donde x, y, z son las coordenadas cartesianas de los puntos espaciales. No obstante

en los problemas que se considerarán abajo tal designación lleva un carácter tradicional y por esta razón se empleará en nuestros razonamientos. Si se recuerda siempre que en dichos problemas se trata de las funciones, definidas en los puntos de las curvas, la designación citada no nos llevará a las equivocaciones.

Supongamos ahora que está dada una curva orientada rectificable γ, con la particularidad de que $r(s) = \{x(s), y(s), z(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ es su representación en la cual a título de parámetro interviene la longitud variable del arco s, y sean $A = r(0)$ y $B = r(S)$ los puntos inicial y final de esta curva. En este caso escribiremos $\gamma = \overset{\frown}{AB}$. La curva de orientación opuesta se designará con $\overset{\frown}{BA}$.

Definición 1. *Supongamos que en los puntos $r(s)$ de la curva γ se ha dado cierta función F. La expresión $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)ds$ que se determina según la fórmula*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\mathrm{d}s = \int\limits_0^S F(x(s), y(s), z(s))ds, \tag{47.1}$$

se denomina integral curvilínea de primera especie de la función F a lo largo de la curva $\overset{\frown}{AB}$.

Dicha integral se designa también mediante los símbolos

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F[r(s)ds \quad \text{y} \quad \int\limits_\gamma F[r(s)]ds, \text{ o bien, más brevemente, } \int\limits_\gamma Fds.$$

De este modo, aunque la definición de integral curvilínea de primera especie está relacionada con el concepto de curva, es decir, con una imagen geométrica, ella se reduce a una integral ordinaria por un segmento, por lo cual a la integral curvilínea se extienden todas las propiedades de la integral ordinaria.

Demos a conocer algunas propiedades específicas de la integral (47.1).

1°. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds = S.$

Esto es obvio.

2°. *Si la función F es continua en los puntos de la curva γ como función del parámetro s, es decir, si es continua la función $F[r(s)]$, $0 \leqslant s \leqslant S$, enconces $\int\limits_\gamma Fds$ existe.*

En efecto, de acuerdo con la definición (47.1), la integral $\int\limits_\gamma Fds$ se reduce a la integral $\int\limits_0^S F[x(s), y(s), z(s)]ds$ de una función continua por un segmento que, como se sabe, existe.

3°. *Una integral curvilínea de primera especie no depende de la orientación de la curva:*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)ds.$$

Efectivamente, supongamos que $M = r(s)$ es un punto de la curva $\overset{\frown}{AB}$, y s es la longitud del arco $\overset{\frown}{AM}$. Si $\sigma = S - s$, entonces σ es igual a la longitud del arco $\overset{\frown}{BM}$

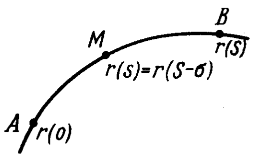


Fig. 200

(fig. 200). La función $r = r(S - \sigma)$; $0 \leqslant \sigma \leqslant S$, es la representación de la curva $\widehat{BA}$, por lo cual, al realizar en la integral (47.1) el cambio de variable $s = S - \sigma$, y al notar que $ds = -d\sigma$, obtenemos

$$\int_{\widehat{AB}} F(x, y, z)ds = \int_0^S F[x(s), y(s), z(s)]ds =$$

$$= -\int_S^0 F[x(S - \sigma), y(S - \sigma), z(S - \sigma)]d\sigma =$$

$$= \int_0^S F[x(S - \sigma), y(S - \sigma), z(S - \sigma)]d\sigma = \int_{\widehat{BA}} F(x, y, z)d\sigma.$$

Esta propiedad de la integral curvilínea de primera especie se debe a que la longitud del arco de una curva, de acuerdo con la definición, se considera positiva, independientemente del extremo a partir del cual dicha longitud se calcula.

Antes de pasar a la siguiente propiedad, hemos de notar que $\int_\gamma Fds$, al igual que cualquier otra integral, es un límite de las sumas integrales correspondientes; la peculiaridad del caso dado consiste sólo en que estas sumas pueden ser descritas en términos geométricos ligados con la curva γ, a lo largo de la cual se realiza la integración. He aquí una formulación más precisa.

4°. *Sea* $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ *la partición del segmento* $[0, S]$, $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$; $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, *la longitud del arco de la curva* γ *entre los puntos* $r(s_{i-1})$ y $r(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, *mientras que* $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\Delta s_i$. *Entonces, si la función* $F[r(s)]$ *es integrable según Riemann en el segmento* $[0, S]$, *se tiene*

$$\lim_{\sigma_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_\gamma Fds. \tag{47.2}$$

Efectivamente, σ_τ es, evidentemente, la suma integral de Riemann de la integral $\int_0^S F[r(s)]ds$, y, por ende, la fórmula (47.2) proviene directamente de la (47.1).

La fórmula (47.1) es muy cómoda en el estudio de las propiedades de la integral $\int_\gamma Fds$, no obstante, no es así ni mucho menos en el cálculo de la misma, puesto

que suele ser muy difícil o incluso prácticamente imposible encontrar una representación de la curva dada, en la que por parámetro se toma la longitud variable del arco. Por esta razón indiquemos la fórmula de la integral $\int_\gamma Fds$ para cualquier representación paramétrica de la curva γ.

5°. *Supongamos que* γ *es una curva suave* (véase la definición 16 en el p. 16.4), $r(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \chi(t); a \leqslant t \leqslant b\}$ *es su representación continuamente derivable y, por consiguiente,* $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0$, $a \leqslant t \leqslant b$*).

Sea la función F continua en la curva γ *(en aquel sentido que la función* $F[r(t)]$ *es continua en el segmento* $[a, b]$*). En este caso*

$$\int_\gamma F(x, y, z)ds = \int_a^b F[\varphi(t), \psi(t)\, \chi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt. \tag{47.3}$$

En efecto, bajo las suposiciones asumidas, la curva γ es rectificable y la longitud variable del arco $s = s(t)$ puede tomarse como parámetro (véase el corolario 2 del teorema 2 en el p. 16.5), a consecuencia de lo cual la integral $\int_\gamma Fds$ tiene sentido. Al realizar el cambio de variable $s = s(t)$ en el segundo miembro de la igualdad (47.1) y recordar que (véase el p. 16.5),

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t},$$

obtendremos la fórmula (47.3).

De (47.3) se infiere que para la curva dada el valor de la integral que figura en el segundo miembro de la igualdad (47.3) no depende de cómo se elige el parámetro en la curva, pues, cualquiera que sea la elección del parámetro, dicha integral es igual a la integral que figura en el primer miembro de esta igualdad.

47.2. INTEGRALES CURVILÍNEAS DE SEGUNDA ESPECIE

Existe una serie de problemas matemáticos y aplicados que conducen a las integrales curvilíneas de otro género. Por ejemplo, si $r = r(t)$ es el radio vector de un punto material en movimiento y $F = F(t)$ es la fuerza que actúa contra este punto, entonces sería natural determinar el trabajo de la fuerza F a lo largo de la trayectoria Γ del punto como una integral $\int_\Gamma Fdr$, o bien, siempre que $F = (P, Q, R)$, y $dr = (dx, dy, dz)$, en la inscripción de coordenadas como una integral

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz. \tag{47.4}$$

---

*) Recordemos que esta condición es indicio de que la curva está privada de puntos singulares (véase la definición 15 en el p. 16.4).

Recordando que (véase el p. 16.5)

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma, \tag{47.5}$$

donde $t = (\cos\varphi, \cos\beta, \cos\gamma)$ es el vector unidad tangente, la integral (47.4) puede ser representada formalmente en la forma

$$\int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds.$$

Enunciemos ahora la definición estricta de las integrales del tipo (47.4). Sea $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ una curva orientada suave, es decir, una curva orientada continuamente derivable, privada de puntos singulares. En este caso existe su representación continuamente derivable

$$r(t) = \{x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}, \quad A = r(a), \quad B = r(b),$$

tal que

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Sea $s = s(t)$ la longitud variable del arco, $0 \leqslant s \leqslant S$, S es la longitud de toda la curva γ, calculada a partir del extremo A, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ es el vector unidad tangente a la curva, $\alpha = \alpha(s)$, $\beta = \beta(s)$, $\gamma = \gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, y supongamos que la función F, al igual que en el punto anterior, está definida en el conjunto $\{r(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ de todos los puntos de la curva γ.

Definición 2. *La integral* $\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx$ *se determina según la fórmula*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx = \int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\cos\alpha ds. \tag{47.6}$$

Análogamente, según la definición, debe ser

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dy = \int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\cos\beta ds,$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\cos\gamma ds, \tag{47.7}$$

Las integrales del tipo (47.6) *y* (47.7) *se llaman integrales curvilíneas de segunda especie de la función F a lo largo de la curva* $\overset{\frown}{AB}$.

El carácter natural de estas definiciones se ve de las fórmulas (47.5).

Demos a conocer algunas propiedades de las integrales curvilíneas de segunda especie, limitándonos, para brevedad, sólo al caso de la integral (47.6).

1°. *Si la función F es continua en la curva* γ, *es decir, si es continua la función* $F[r(t)]$, $a \leqslant t \leqslant b$, *la integral (47.6) existe.*

En efecto, admitidas las suposiciones respecto de la curva γ, la función $t = t(s)$ (t es el parámetro en la curva γ, y s es la longitud variable del arco) es continuamente derivable en el segmento $[0, S]$, por lo cual la función $\cos\alpha = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}$ es continua

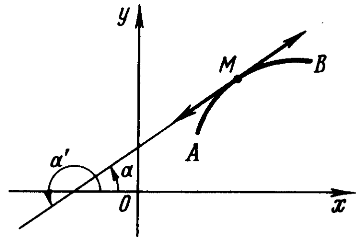


Fig. 201

en este segmento y, por lo tanto, en virtud de la propiedad 2° de las integrales curvilíneas de primera especie (véase el p. 47.1), la integral (47.6) existe. □

En lo que sigue en este punto supondremos, para simplificar, que la función F es continua en la curva γ. En este caso todas las integrales que van abajo existen a ciencia cierta.

2°. *Una integral curvilínea de segunda especie cambia de signo cuando la curva varía su orientación, es decir,*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx = -\int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)dx.$$

En efecto, si α es el ángulo formado por el sentido positivo de una tangente a la curva $\overset{\frown}{AB}$ y el eje Ox, y α', el ángulo formado por el sentido positivo de la tangente a la curva $\overset{\frown}{BA}$ y el eje Ox, entonces para los puntos correspondientes tendremos $\alpha' = \alpha + \pi$ (fig. 201), y, por lo tanto, $\cos\alpha' = -\cos\alpha$.

Ahora, haciendo uso de la propiedad de independencia de una integral curvilínea de primera especie de la orientación de la curva (véase el p. 47.1), obtendremos

$$\int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)dx = \int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\cos\alpha' ds = -\int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\cos\alpha ds =$$

$$= -\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\cos\alpha ds = -\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx.$$

De este modo, dicha propiedad que posee la integral curvilínea de segunda especie se desprende del hecho de que las integrales curvilíneas

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx \quad \text{y} \quad \int_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)dx$$

son iguales a las integrales curvilíneas correspondientes de primera especie, cuyas expresiones subintegrales se diferencian sólo en signo. □

3°. *Si F es una función continua en la curva* γ, *para la integral (47.6) será válida la fórmula*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx = \int_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{47.8}$$

En efecto, de acuerdo con la definición (47.6),

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)ds = \int_0^S F[x(s), y(s), z(s)]\cos\alpha(s)ds.$$

Al realizar el cambio de la variable $s=s(t)$ en la integral que figura en el segundo miembro de esta igualdad y notar que (véase (47.5)) $\cos\alpha=\frac{dx}{ds}=\frac{x_t'}{s_t'}$, obtendremos

$$\int_0^S F[x(s), y(s), z(s)]\cos\alpha(s)ds = \int_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\frac{x_t'}{s_t'}s_t'dt = \int_a^b F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\varphi_t'(t)dt. \quad \square$$

Ha de notarse que hemos demostrado a la vez que la integral en el segundo miembro de esta fórmula no depende de la elección del parámetro en la curva el que conserva la orientación de ésta.

En el caso particular cuando como parámetro t puede tomarse la variable x, es decir, cuando la curva γ posee la representación $y = y(x)$, $z = z(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, y, por lo tanto, está privada de puntos múltiples, la función F será función unívoca no sólo de los puntos de la curva, sino también de los puntos correspondientes del espacio (en este caso a diferentes puntos de la curva les corresponden puntos distintos del espacio y viceversa).

La fórmula (47.8) admite en este caso la siguiente forma

$$\int_\gamma F[x, y, z)dx = \int_a^b F[(x, y(x), z(x)]dx. \tag{47.9}$$

4°. *La integral* $\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx$ *es el límite de las sumas integrales correspondientes que se describen en los términos ligados con la curva* γ, *con más precisión: sea* $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ *la partición del segmento* $[a, b]$, *y* δ_τ, *su finura,* $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, i_0$, *y*

$$\tilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\Delta x_i,$$

donde $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$, *entonces*

$$\lim_{\sigma_\tau\to 0}\tilde{\sigma}_\tau = \int_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)dx. \tag{47.10}$$

En efecto, según la fórmula de los incrementos finitos de Lagrange, $\Delta x_i = \varphi'(\eta_i)\Delta t_i$, donde

$$\eta_i \in [t_{i-1}, t_i], \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, i_0,$$

por lo cual

$$\tilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\varphi'(\eta_i)\Delta t_i.$$

Pongamos

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} F[r(\xi_i)]\varphi'(\xi_i)\Delta t_i.$$

La suma σ_τ es, para la función $F[r(t)]\varphi(t)$, una suma integral de Riemann, razón por la cual

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau = \int_a^b F[r(t)]\varphi'(t)dt. \tag{47.11}$$

Por otra parte,

$$|\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau| \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} |F[r(\xi_i)]|\,|\varphi'(\eta_i) - \varphi'(\xi_i)|\Delta t_i \leqslant \omega(\delta_\tau; \varphi')(b-a)\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|F[r(t)]|,$$

donde $\omega(\delta; \varphi')$ es el módulo de continuidad de la función φ'. Se sabe que de la continuidad de la función $F[r(t)]$ en el segmento $[a, b]$ proviene que $\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|F[r(t)]| < \infty$, y de la continuidad de la función φ' en el mismo segmento se deduce que $\lim_{\delta_\tau\to 0}\omega(\delta_\tau; \varphi') = 0$, por esta razón se tiene $\lim_{\delta_\tau\to 0}(\tilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau) = 0$. Teniéndolo en cuenta, en virtud de (47.11), obtenemos

$$\lim_{\delta_\tau\to 0}\tilde{\sigma}_\tau = \int_a^b F[r(t)]\varphi'(t)dt.$$

De aquí, de acuerdo con la propiedad 3°, se deduce la fórmula (47.10). $\square$

Hemos indicado sólo aquellas propiedades de las integrales curvilíneas que están ligadas con el carácter específico de su definición y con la curva a lo largo de la cual se realiza la integración. Es natural, pues, que, por cuanto las integrales en consideración se reducen a las integrales ordinarias en un segmento, a las primeras se extienden también las diversas propiedades propias para las segundas (linealidad respecto de las funciones a integrar, teorema integral del valor medio, etc.).

47.3. AMPLIACIÓN DE LA CLASE DE TRANSFORMACIONES ADMISIBLES DEL PARÁMETRO DE UNA CURVA

Una curva orientada continuamente derivable y privada de puntos singulares se ha definido (véase el p. 16.1 y 16.2*) como aquella que dispone de tales representaciones vectoriales continuamente derivables $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ que $r'(t) \neq 0$ en el segmento $[a, b]$. A título de transformaciones admisibles del parámetro se consideraban las funciones siguientes

$$t = t(\tau), \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta, \quad t(\alpha) = a, \quad t(\beta) = b,$$

que eran continuamente derivables y tenían derivada positiva en el segmento $[a, b]$. No obstante, este requisito resulta, a veces, demasiado pesado. Por ejemplo, para un arco γ de la circunferencia unidad con centro en el origen de coordenadas las representaciones

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \text{y} \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

resultan ser no equivalentes en este sentido. Además, la misma representación $y = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, no determina en nuestro sentido la curva continuamente derivable, puesto que para $x = 1$ ella no tiene derivada. Es por eso que sería natural ampliar la clase de transformaciones admisibles de los parámetros y de representaciones admisibles de las curvas continuamente derivables. Podemos hacerlo del modo siguiente.

Consideraremos una totalidad de las representaciones vectoriales $r = r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, continuas en el segmento $[a, b]$ y continuamente derivables en el intervalo (a, b). Se llamará *transformación admisible del parámetro* toda función $t = t(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$, continua en el segmento $[\alpha, \beta]$, continuamente derivable y que tiene en el intervalo (α, β) una derivada positiva. Como hasta ahora, dos representaciones se llamarán *equivalentes*, si se puede pasar de una a la otra con ayuda de una transformación admisible del parámetro.

Definición 3. *Una clase de representaciones equivalentes del tipo indicado prefija una curva continuamente derivable, si en la clase citada existe por lo menos una representación $r = r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, que es continuamente derivable en todo el segmento $[a, b]$.*

Definición 4. *Una curva continuamente derivable lleva el nombre de curva sin puntos singulares o, en la forma más breve, curva suave, si para cierta representación suya $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ (y, por lo tanto, para todas las representaciones suyas) se cumple la condición $r'(t) \neq 0$, $a < t < b$.*

En el sentido de esta definición dos representaciones citadas del arco de una circunferencia resultan ser equivalentes y definen una curva suave.

Quedan en vigor también todas las definiciones aducidas anteriormente de las integrales curvilíneas y sus propiedades, si se toma, por supuesto, en consideración el hecho de que para ciertas representaciones de las curvas puede obtenerse una integral impropia.

Cabe subrayar que la ampliación de la clase de representaciones de una curva permite *calcular* la integral curvilínea para las más diversas representaciones de la curva. Por ejemplo, la integral $\int_\gamma P(x, y)dy$, donde γ es el arco de la circunferencia unidad considerado más arriba y P, una función continua en γ, puede calcularse sirviéndose de ambas representaciones mencionadas:

$$\int_\gamma P(x, y)dy = -\int_0^1 P(x, \sqrt{1 - x^2})\frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\int_\gamma P(x, y)dy = -\int_0^{\pi/2} P(\operatorname{sen} t, \cos t)\operatorname{sen} t\,dt.$$

En el primer caso aquí puede obtenerse una integral impropia.

Además de esto, *al demostrar* los teoremas pueden elegirse las "representaciones buenas", es decir, aquellas que son continuamente derivables hasta los extremos del segmento, y los razonamientos realizados resultarán válidos también para el concepto ampliado de curva.

Ejercicio 1. Demuéstrese que para la nueva definición de la curva continuamente derivable $\gamma = \{x(t), y(t), z(t)\}$ su longitud se expresa mediante la fórmula $\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$, donde la integral escrita es, en el caso general, impropia.

47.4. INTEGRALES CURVILÍNEAS A LO LARGO DE LAS CURVAS SUAVES A TROZOS

Definición 5. *Si la curva γ es suave a trozos, es decir, puede ser representada como reunión de un número finito de las curvas suaves $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, y la función $F(x, y, z)$ está definida, como antes, en los puntos de la curva γ, entonces, por definición, pongamos*

$$\int_\gamma F(x, y, z)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} F(x, y, z)dx.$$

Si γ es una curva suave a trozos y $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es su representación suave a trozos, se escribirá también

$$\int_\gamma F(x, y, z)dx = \int_a^b F[x(t), y(t), z(t)]x'(t)dt$$

(aquí la derivada $x'(t)$ puede ser no definida en el número finito de los puntos del segmento $[a, b]$), con la particularidad de que la integral que figura en el segundo miembro de la igualdad se entiende, por regla general, en el sentido impropio.

Las definiciones análogas tienen lugar también para las integrales del tipo (47.7). En adelante tropezaremos con las sumas de las integrales del tipo (47.6) y (47.7), es decir, con las integrales del tipo (47.4), donde P, Q y R son ciertas funciones definidas en los puntos de la curva γ. De acuerdo con las definiciones (47.6) y (47.7), es lícita la fórmula

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds.$$

OBSERVACIÓN 1. Si Γ denota una totalidad finita de curvas orientadas suaves a trozos γ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces, según la definición,

$$\int_{\Gamma} F ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} F ds, \quad \int_{\Gamma} F dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} F dx, \text{ etc.}$$

OBSERVACIÓN 2. Hemos definido las integrales curvilíneas para las curvas dispuestas en el espacio tridimensional R^3. De un modo enteramente análogo se definen dichas integrales también para las curvas que se disponen en cualquier espacio n-dimensional R^n, $n = 2, 3, 4, \dots$, . Las integrales curvilíneas en un espacio n-dimensional poseen las propiedades que son análogas a las consideradas en el caso tridimensional y sus demostraciones son también las mismas que se han realizado anteriormente. Por eso no nos detendremos en las formulaciones ni tampoco en las demostraciones de las afirmaciones correspondientes.

Ejercicio 2. Demuéstrese que las definiciones, aducidas en el presente punto, de las integrales cirvilíneas a lo largo de las curvas suaves a trozos no dependen de cómo se dividen dichas curvas en arcos suaves.

3. Calcúlese la integral curvilínea $\int_{\Gamma} \sqrt{x+2y}\,dx + \sqrt{x+y}\,dy$, donde Γ es un contorno triangular cuyos vértices son $O(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(2; 4)$.

4. Calcúlese la integral curvilínea $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, donde Γ es el arco de una astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3 t$, limitada con los puntos $(a, 0)$ y $(0, a)$.

47.5. FÓRMULA DE GREEN

Definición 6. *Supongamos que un contorno sencillo cerrado γ es la frontera de la región plana y acotada G. Si la orientación del contorno es tal que durante el recorrido del contorno γ, correspondiente al crecimiento del parámetro, la región G queda a la izquierda (tal recorrido se llama corrientemente recorrido del contorno en dirección contraria al movimiento de las agujas de un reloj), dicha orientación se denomina positiva; en el caso contrario (es decir, cuando el recorrido del contorno se realiza en el sentido de las agujas de un reloj), se denomina negativa* (fig. 202).

Un contorno orientado positivo se designará γ^+, y un contorno orientado negativo, γ^-. Estas nociones están definidas no de modo estricto y no en términos matemáticos exactos. No obstante, nos abstengamos de dar aquí las definiciones precisas, ya que, por una parte, esto no podría hacerse sucintamente y, por otra parte, en lo que sigue la orientación se indicará cada vez concretamente. De este modo, nuestra definición "general" de la orientación positiva y negativa de un contorno sencillo cerrado nos servirá sólo para los fines de la claridad geométrica de los problemas que se considerarán más abajo.

En adelante la región plana G, cuya clausura puede representarse en la forma (45.1) y (45.13) simultáneamente (véase la fig. 168), se llamará, para abreviar, *región elemental.*

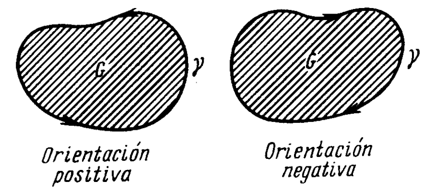


Fig. 202

Teorema 1 (formula de Green *)**.** *Sea G una región plana y supongamos que su frontera γ es un contorno suave a trozos. Supongamos también que la región G puede ser partida en un número finito de las regiones elementales G_i***) *que tienen fronteras suaves a trozos γ_i, $i = 1, 2, \dots , k$. Luego, sean dadas en la región cerrada $\overline{G}$ las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ que son continuas en $\overline{G}$ junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$.* ***) *Bajo las condiciones mencionadas resulta válida la fórmula*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\gamma^+} Pdx + Qdy. \tag{47.12}$$

DEMOSTRACIÓN. Al principio supongamos que la región G es elemental de por sí y, por consiguiente, su frontera puede ser representada como reunión de las gráficas de dos funciones continuamente derivables a trozos $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, y, quizás, de los segmentos de las rectas $x = a$ y $x = b$, y también como reunión de dos gráficas de las funciones continuamente derivables a trozos $\alpha(y)$ y $\beta(y)$, $\alpha(y) \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, y, quizás, de los segmentos de las rectas $y = c$ e $y = d$ (fig. 203).

En este caso, al aplicar la regla de reducción de la integral doble a una reiterada, el teorema de Newton — Leibniz (p. 29.3) y la fórmula (47.9), tenemos

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right] dx = \int_a^b \{P[x, \psi(x)] - P(x, \varphi(x))]\} dx =$$

$$= \int_a^b P[x, \psi(x)]dx - \int_a^b P[x, \varphi(x)]dx = \int_{\overset{\frown}{DC}} P(x, y)dx -$$

$$- \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx = - \int_{\overset{\frown}{CD}} P(x, y)dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx. \tag{47.13}$$

---

*) G. Green (1793 — 1841), matemático inglés.

**) Esto significa que $\{\overline{G}_i\}_{i=1}^{i=k}$ es la partición de la región cerrada $\overline{G}$ (véase el p. 44.3).

***) La continuidad de las derivadas parciales en $\overline{G}$ se entiende como su continuidad en el conjunto abierto G y su proiongabilidad continua a la frontera de G (véase el p. 39.3).

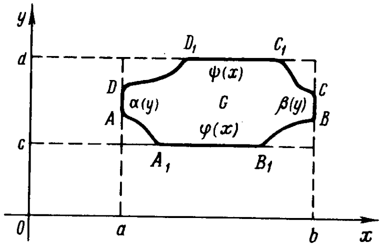


Fig. 203

Al notar que para los segmentos BC y DA

$$\int_{BC} P(x, y)dx = \int_{DA} P(x, y)dx = 0 \tag{47.14}$$

(esto proviene en seguida, por ejemplo, de la fórmula (47.6), pues aquí $x = \text{const}$ y, por ello, $\cos\alpha = 0$) y al sumar las igualdades (47.13) y (47.14), obtendremos

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx - \int_{\overset{\frown}{BC}} Pdx - \int_{\overset{\frown}{CD}} Pdx - \int_{DA} Pdx = -\int_{\gamma^+} Pdx. \tag{47.15}$$

Se ha obtenido tal orientación del contorno de frontera γ que los puntos A, B, C, D siguen uno tras otro sucesivamente. Esta orientación es positiva (véase la definición 6) y se designa mediante γ^+

De modo análogo, a partir de que la región G es elemental, se deduce la fórmula

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\gamma^+} Qdy. \tag{47.16}$$

Al sumar (47.15) y (47.16), obtendremos la fórmula de Green (47.12) para el caso que se considera.

Examinemos el caso general. Supongamos que la región G está dividida en las regiones G_i, $i = 1, 2, \dots, k$, del tipo citado en las condiciones del teorema. En virtud de lo demostrado, para todo $i = 1, 2, \dots, k$

$$\iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\gamma_i^+} Pdx + Qdy.$$

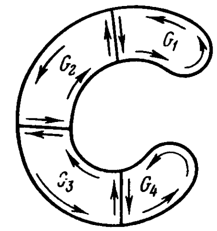


Fig. 204

Al sumar estas igualdades, obtendremos

$$\sum_{i=1}^{k} \iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i^+} Pdx + Qdy. \tag{47.17}$$

Ya que la integral doble es aditiva respecto de los conjuntos (véase el p. 44.6), tendremos

$$\sum_{i=1}^{k} \iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{47.18}$$

En la suma que figura en el segundo miembro de la igualdad (47.17) las integrales curvilíneas se toman dos veces a lo largo de todas las partes interiores de las fronteras γ_i de las regiones G_i, es decir, a lo largo de tales arcos de las curvas γ_i que forman parte de las fronteras de dos regiones G_i, $i = 1, 2, \dots, k$, y, por consiguiente, no integran la frontera de la región G; además, las orientaciones de estos arcos de las curvas γ_i son opuestas (fig. 204). Puesto que una integral curvilínea de segunda especie cambia de signo cuando varía la orientación de la curva, la suma de dos integrales curvilíneas a lo largo de las partes indicadas de las curvas γ_i es nula. Por eso, en la suma derecha de la fórmula (47.17) quedarán sólo las integrales a lo largo de las partes orientadas positivas de la frontera γ de la región G, que dan en suma $\int_{\gamma^+} Pdx + Qdy$. De este modo,

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i^+} Pdx + Qdy = \int_{\gamma^+} Pdx + Qdy. \tag{47.18'}$$

De (47.17), (47.18) y (47.18′) se deduce la fórmuia (47.12) para el caso general. □

Sea G una región acotada en el plano R^2 y supongamos que su frontera consta de un número finito de contornos sencillos que se llamarán *contornos de frontera*. Si un contorno de frontera es, a la vez, la frontera de una región no acotada dispuesta en $R^2 \setminus \overline{G}$, se denominará *exterior*; en cambio, si es, a la vez, la frontera de

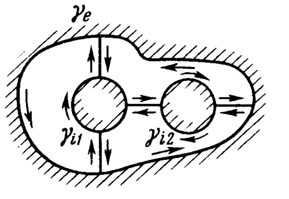


Fig. 205

una región acotada dispuesta en $R^2 \setminus \bar{G}$, se llamará *interior*. En la figura 205, γ_e es el contorno exterior, mientras que γ_{i1} y γ_{i2} son contornos interiores.

Si la frontera de la región G se compone del contorno exterior γ_e y los contornos interiores $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{im}$ y si la región G puede ser dividida en un número finito de regiones, elementales respecto de ambos ejes de coordenadas, que tengan fronteras suaves a trozos, entonces resulta válida la fórmula

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\gamma_e^+} Pdx + Qdy + \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_{ij}} Pdx + Qdy. \quad (47.19)$$

Como hasta ahora, las funciones P y Q se suponen continuas, junto con sus derivadas $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$, en la región cerrada $\bar{G}$.

Esta fórmula se demuestra igual que la (47.12), siempre que se toma en consideración que en la suma que figura en el segundo miembro de la igualdad (47.17) quedarán las integrales curvilíneas a lo largo de las partes orientadas positivas del contorno exterior y a lo largo de las partes orientadas negativas de los contornos interiores (véase la fig. 205).

Indiquemos, además, que en la fórmula (47.19) todos los contornos (tanto exteriores, como interiores) están orientados de una manera tal que durante su recorrido la región de integración queda a la izquierda.

Definición 7. *Supongamos que la frontera ∂G de una región plana acotada G se compone de un número finito de contornos sencillos suaves a trozos. La totalidad de estos contornos orientados de manera tal que, al recorrer cada uno de ellos, la región G queda a la izquierda (a la derecha), se llama orientación positiva (negativa) de la frontera de G y se designa ∂G $(-\partial G$, respectivamente).*

La fórmula de Green puede ser extendida a una clase de regiones más amplia. Con este fin diremos que en virtud de lo demostrado, la fórmula de Green es válida para un triángulo y, por ende, para cualquier polígono. Por eso, mediante un paso límite, aproximando la frontera de la región con unas quebradas compuestas de un número finito de lados, podemos obtener la fórmula de Green para cualquier región (e, incluso, para un conjunto abierto), cuya frontera se compone de un número finito de curvas suaves a trozos. Sin embargo, no nos detendremos en la demostración de este hecho y sólo nos limitaremos a su enunciación. Con ello, haciendo uso de la definición 7, escribiremos la fórmula (47.19) en una forma más compacta.

Teorema 1. *Supongamos que la frontera de una región plana acotada G se compone de un número finito de curvas suaves a trozos. Si las funciones P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ son continuas en $\bar{G}$, entonces*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial G} Pdx + Qdy,$$

donde ∂G es la frontera orientada positiva de la región G.

La fórmula de Green para las integrales múltiples sirve como análogo de la fórmula de Newton — Leibniz para integrales de multiplicidad unitaria: en ambas fórmulas las integrales de las derivadas extendidas a una región da integración se expresan a través de los valores de la función en la frontera de la región mencionada (en el caso de la fórmula de Green dichos valores se siguen integrando).

Ejercicios. Sirviéndose de la fórmula de Green, calcúlense las siguientes integrales curvilíneas, donde Γ es un contorno sencillo cerrado compuesto de las partes de las curvas cuyas ecuaciones están indicadas para cada integral (el sentido del recorrido del contorno es positivo).

5. $\int_\Gamma (x^2y + x - y)dx + (y^2 + 2x)dy; \; y = 2, y = x^2 + 1.$

6. $\int_\Gamma \frac{y}{x} dx + 2\ln x dy; \; 2x + y = 4, x = 1, y = 0.$

7. $\int \frac{dx}{y^2} - \frac{dy}{x}; \; y = x, x = 2, y = 1.$

47.6. CÁLCULO DE LAS ÁREAS MEDIANTE INTEGRALES CURVILÍNEAS

Al poner en la fórmula de Green $Q = x$, $P = 0$, obtendremos $\iint_G dxdy = \int_{\gamma^+} xdy$, y, por lo tanto,

$$\mu G = \int_{\gamma^+} xdy. \quad (47.20)$$

Por analogía, al poner $P = -y$, $Q = 0$, obtendremos

$$\mu G = -\int_{\gamma^+} ydx. \quad (47.21)$$

Sumando las fórmulas (47.20) y (47.21), tendremos

$$\mu G = \frac{1}{2} \int_{\gamma^+} xdy - ydx. \quad (47.22)$$

Ejemplos. 1. Hallemos, con ayuda de la fórmula (47.22), el área limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hagamos uso de su representación paramétrica: $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$. Al aplicar la fórmula (47.22), obtendremos el área buscada:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)dt = \pi ab.$$

Comparando este método de cálculo del área limitada por una elipse con el citado anteriormente (véase el ejemplo 4 en el p. 32.1), podemos cerciorarnos con facilidad cuán menos es aquí el volumen de cálculos.

2. Hallemos el área limitada por la astroide (véase en el tomo 1, fig. 84) $x = a\cos^3 t, y = a\,\text{sen}^3 t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Teniendo en cuenta que en este caso el crecimiento del parámetro t corresponde a la orientación positiva del contorno, tenemos:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} x\,dy - y\,dx = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\,\text{sen}^2 t + \text{sen}^4 t\cos^2 t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\text{sen}^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 4t)dt = \frac{3\pi a^2}{8}$$

Ejercicios. Calcúlese, con ayuda de la integral curvilínea, el área de una figura limitada por las líneas:

8. $x = t^2, y = t^3, x = 1, y = 0$.
9. $y^2 = 4 - x, x = 1, y = 1$ (en el primer cuadrante).

47.7. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL SIGNO DEL JACOBIANO DE LA APLICACIÓN DE UNA REGIÓN PLANA

Sea F una aplicación biunívoca y continuamente derivable de la región plana $G \subset R^2_{uv}$ en el plano R^2_{xy} con un jacobiano distinto de cero en todo punto de G. En este caso, en virtud del principio de conservación de la región, el conjunto $G^* = F(G)$ es también una región (véase el p. 41.8), mientras que el jacobiano, siendo continuo, mantiene invariable su signo en G (véase el teorema 4 en el p. 19.6), es decir, o bien es G positivo en todo punto, o bien es negativo en todo punto.

Supongamos que en la inscripción de coordenadas la aplicación F se da mediante las fórmulas

$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v). \tag{47.23}$$

Lema 1. *Si γ es una curva suave a trozos dispuesta en G, su imagen $\gamma^* = F(\gamma)$ será, realizándose la aplicación F, también una curva suave a trozos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos al principio que γ es una curva suave, es decir, una curva continuamente derivable privada de puntos singulares (véase las definiciones 15 y 16 en el p. 16.4) y sea

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

una representación suya. Entonces, en el segmento $[a, b]$ las funciones $u(t)$ y $v(t)$ son continuamente derivables y

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0.$$

Como representación de la curva $\gamma^* = F(\gamma)$ servirá un par de funciones

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

las cuales, en virtud de las propiedades de la composición de funciones continuamente derivables (véanse los pp. 19.3 y 20.3), serán también continuamente derivables. Mostremos que la curva γ^* no tendrá puntos singulares. Efectivamente, como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

entonces, tomando estas igualdades por un sistema de ecuaciones lineales respecto de $\frac{du}{dt}$ y $\frac{dv}{dt}$, vemos que si en cierto punto $t \in [a, b]$ se cumplieran las igualdades $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, entonces, debido a que el jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

no se reduce a cero, el sistema citado tendría la única solución, a saber, la solución nula, es decir, en el mismo punto t se verificarían las igualdades $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$, y, de este modo, el punto correspondiente de la curva γ sería singular lo que, por hipótesis, no es posible.

Así pues, si la curva γ es suave, la curva $\gamma^* = F(\gamma)$ es también suave. De aquí proviene en seguida que la imagen de una curva suave a trozos en la aplicación que se considera es también una curva suave a trozos, pues tal curva suave a trozos (véase la definición 16 en el p. 16.4) representa una reunión de un número finito de curvas suaves. □

Sea, ahora, $\Gamma \subset G$, donde Γ es una región limitada y su frontera $\partial\Gamma$ está constituida por el contorno sencillo suave a trozos (las fronteras de este tipo se llaman *suaves a trozos*). Supongamos, además, $\Gamma^* = F(\Gamma)$. Entonces, en virtud del principio de conservación de región, el conjunto Γ^* será también una región y, más aún, su frontera $\partial\Gamma^*$ es la imagen de la frontera $\partial\Gamma$ de la región Γ (véase el lema 1 en el p. 46.1), es decir, $\partial\Gamma^* = F(\partial\Gamma)$. Por eso la frontera $\partial\Gamma^*$ es también el contorno γ^* sencillo (debido al carácter biunívoco de la aplicación F) y suave a trozos (de acuerdo con el lema 1 de este punto). Por consiguiente, a lo largo de los contornos $\gamma = \partial\Gamma$ y $\gamma^* = \partial\Gamma^*$ pueden calcularse integrales curvilíneas. Supongamos que las regiones Γ y Γ^* son de tal índole que admiten el uso de la fórmula de Green, por ejemplo, satisfacen las condiciones que se imponen sobre la región en el teorema 1 del p. 47.5. (Según se ha señalado, la fórmula de Green, en realidad, es siempre aplicable bajo las suposiciones admitidas, pero esto no fue demostrado).

Designemos, como siempre, por γ^+ el contorno γ orientado positivo (véase el p. 47.5). Sea

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

la representación del contorno γ^+ y, por lo tanto,

$$x = x[u(t), v(t)], \quad y = y[u(t), v(t)], \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{47.24}$$

es una representación del contorno γ^*.

Supondremos, además, que existen derivadas mixtas $\dfrac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$ y $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ y que éstas son continuas, por lo cual son iguales entre sí en todos los puntos de la región G.

De acuerdo con la fórmula (47.20),

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_{\gamma^*} x\,dy, \tag{47.25}$$

donde $\varepsilon = +1$, si la orientación del contorno γ^* es positiva y $\varepsilon = -1$, en el caso contrario. En otras palabras, $\varepsilon = +1$ ($\varepsilon = -1$, respectivamente), siempre que al recorrido positivo del contorno dado γ corresponde en la aplicación (47.23) el recorrido también positivo (negativo, respectivamente) del contorno $\gamma^* = F(\gamma)$.

Al transformar la integral (47.25) según la fórmula (47.8) y hacer uso de la representación (47.24) del contorno γ^*, tendremos

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_a^b x y_t'\,dt = \varepsilon \int\limits_a^b x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt = \varepsilon \int\limits_{\gamma^+} x\frac{\partial y}{\partial u}du + x\frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Apliquemos a la integral obtenida la fórmula de Green (véase el teorema 1 en el p. 47.5). Al poner $P = x\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $Q = x\dfrac{\partial y}{\partial v}$ y observar que en este caso

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + x\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial v}$$

(aquí se utiliza la condición de existencia de las segundas derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$ y $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, requerida anteriormente), obtendremos

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

de donde

$$\mu\Gamma^* = \varepsilon \int\limits_{\gamma^+} P\,du + Q\,dv = \varepsilon \iint\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)du\,dv = \varepsilon \iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}du\,dv.$$

El primer miembro de esta igualdad es superior a cero, por lo tanto, el segundo miembro es también positivo y, como el jacobiano de la aplicación (47.23) no cambia de signo, esto es posible sólo en el caso en que $\varepsilon\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$, es decir, cuando el número ε es del mismo signo que el jacobiano $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ y, en este caso, $\varepsilon\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$. De este modo, el signo de ε no depende de la elección del contorno γ, sino que se determina por el signo del jacobiano el cual es el mismo en todos los puntos de la región G.

Queda demostrado, pues, el siguiente teorema.

Teorema 2. *Si las suposiciones asumidas anteriormente están cumplidas, resulta válida la fórmula*

$$\mu\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{47.26}$$

Además, si $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$ *en* Γ, *entonces* $\varepsilon = +1$; *en otras palabras, si el jacobiano de la aplicación F es positivo, entonces al recorrido positivo de todo contorno $\gamma \subset G$, que sirve de frontera para la región limitada $\Gamma \subset G$, le corresponde, en la aplicación F, el recorrido positivo del contorno $\gamma^* = F(\gamma)$ que sirve de frontera de la región limitada $\Gamma^* = F(\Gamma)$. En cambio, si el jacobiano* $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} < 0$ *en* Γ, *entonces* $\varepsilon = -1$, *es decir, al recorrido positivo de todo contorno γ del tipo indicado le corresponde, en la aplicación F, un recorrido negativo del contorno $\gamma^* = F(\gamma)$.*

De este modo, *el significado geométrico del signo de un jacobiano consiste en que, siendo positivo el jacobiano, la orientación del contorno se mantiene invariable durante la aplicación y sí cambia, cuando el jacobiano es negativo.*

Con ayuda de la fórmula de Green (47.19) la fórmula (47.26) se generaliza fácilmente para el caso cuando la frontera de la región Γ se compone de un número finito de contornos cerrados suaves a trozos.

Diremos, además, que mediante la fórmula (47.26) puede obtenerse sin dificultad alguna la demostración más fácil del teorema 1, citado en el p. 46.1, sobre el significado geométrico del módulo del jacobiano. En efecto, sea $M_0 \in \Gamma$, $d(\Gamma)$ es el diámetro de la región Γ, y supongamos que la región Γ se contrae de tal o cual modo hacia el punto M_0, y, por consiguiente, $d(\Gamma) \to 0$. Según el teorema del valor medio (véase el p. 44.6),

$$\mu\Gamma^* = \iint\limits_{\Gamma} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du dv = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M \mu\Gamma, \quad M \in \Gamma,$$

por lo cual

$$\frac{\mu\Gamma^*}{\mu\Gamma} = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M.$$

Ya que el jacobiano es continuo, tenemos

$$\lim_{d(\Gamma)\to 0} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_M = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{d(\Gamma)\to 0} \frac{\mu\Gamma^*}{\mu\Gamma} = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}, \tag{47.27}$$

es decir, hemos demostrado la fórmula (46.9) y lo hicimos, en cierto sentido, de modo más general; así, por ejemplo, aquí Γ no es necesariamente un cuadrado (aunque, hemos impuesto sobre la aplicación F las condiciones un tanto más fuertes, al exigir que sean continuas las derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ y $\dfrac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$, y, además, que se pueda aplicar la fórmula de Green para la región Γ^*). No es difícil convencerse de que la razón en el primer miembro de la fórmula (47.27) tiende a su límite uniformemente en el sentido indicado en el teorema 1 del p. 46.1.

Pese a que la deducción de la fórmula (47.27) resulta más fácil, lo que se ha conseguido a cuenta de las suposiciones más fuertes, cabe señalar que la demostración del teorema 1, aducida en el p. 46.1, es preferible desde el punto de vista del sentido matemático, puesto que revela mejor la misma esencia del problema vinculada con el hecho de que una aplicación derivable localmente se aproxima bastante bien por la aplicación lineal.

47.8. CONDICIONES DE INDEPENDENCIA DE UNA INTEGRAL CURVILÍNEA DEL CAMINO DE INTEGRACIÓN

Todas las curvas (los contornos) que se consideran en este punto se supondrán suaves a trozos lo que, para abreviar, no se especificará cada vez especialmente. Indiquemos, además, que en toda región G dos de sus puntos cualesquiera se pueden siempre unir con una curva suave a trozos, por ejemplo, con una quebrada (véase el lema 5 en el p. 41.4) dispuesta íntegramente en G.

Sea dada una región G y sean definidas en ésta las funciones continuas $P = P(x, y)$ y $Q = Q(x, y)$. Examinemos la cuestión concerniente a las condiciones que deben cumplirse para que la integral curvilínea $\int\limits_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$ (los puntos

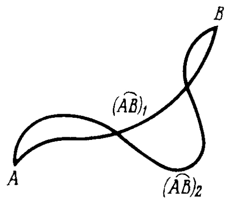


Fig. 206

$A \in G$ y $B \in G$ son arbitrariamente fijados) no dependa de la elección de la curva $\widehat{AB}$ que une A y B y que se dispone en G.

Lema 2. *La condición de independencia de la integral curvilínea en consideración del camino indicado de integración es equivalente a que sea nula la integral a lo largo de cualquier contorno cerrado dispuesto en la región G.*

DEMOSTRACIÓN. 1. En efecto, supongamos que para cualquier contorno cerrado $\gamma \subset G$ tiene lugar la igualdad

$$\int\limits_{\gamma} P dx + Q dy = 0$$

y sean dadas dos curvas $(\widehat{AB})_1$ y $(\widehat{AB})_2$ que unen en G los puntos A y B (véase la fig. 206). Designemos mediante $(\widehat{BA})_2$ una curva que se obtiene de $(\widehat{AB})_2$ al cambiar en ésta su orientación por la opuesta. La reunión $(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2$ de las curvas $(\widehat{AB})_1$ y $(\widehat{BA})_2$ es un contorno cerrado, razón por la cual

$$\int\limits_{(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2} P dx + Q dy = 0; \tag{47.28}$$

pero

$$\int\limits_{(\widehat{AB})_1 \cup (\widehat{BA})_2} P dx + Q dy = \int\limits_{(\widehat{AB})_1} P dx + Q dy + $$

$$+ \int\limits_{(\widehat{BA})_1} P dx + Q dy = \int\limits_{(\widehat{AB})_1} P dx + Q dy - \int\limits_{(\widehat{AB})_2} P dx + Q dy. \tag{47.29}$$

De (47.28) y (47.29) proviene que

$$\int\limits_{(\widehat{AB})_1} P dx + Q dy = \int\limits_{(\widehat{AB})_2} P dx + Q dy,$$

es decir, la integral curvilínea $\int\limits_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$ no depende del camino de integración $\widehat{AB} \subset G$, cuando $A \in G$ y $B \in G$ están fijados.

2. Viceversa, supongamos que la integral $\int P dx + Q dy$ no depende del camino de integración en el sentido mencionado y sea dado un contorno cerrado γ dis-

puesto en G. Elijamos en éste dos puntos A y $B \neq A$; entonces $\gamma = \overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BA}$ y

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{AB}} + \int_{\overset{\frown}{BA}} = \int_{\overset{\frown}{AB}} - \int_{(\overset{\frown}{AB})_1} = 0,$$

donde $(\overset{\frown}{AB})_1$ denota la curva que se obtiene de la curva $\overset{\frown}{BA}$, al cambiar en ésta su orientación por la opuesta. □

Enunciemos el criterio de independencia de una integral del camino de integración.

Teorema 3. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas en la región plana G. Para que la integral curvilínea $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$, con los puntos fijados $A \in G$ y $B \in G$, no dependa del camino de integración $AB \subset G$, es necesario y suficiente que la expresión $Pdx + Qdy$ sea la diferencial total de cierta función $u = u(x, y)$, definida en la región G:*

$$du = Pdx + Qdy \tag{47.30}$$

(esto es equivalente a que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$, $(x, y) \in G$).

Si esta condición se cumple para cualesquiera dos puntos $A = (x_0, y_0) \in G$ y $B = (x_1, y_1) \in G$ y toda curva $\overset{\frown}{AB}$ que une dichos puntos en G: $\overset{\frown}{AB} \subset G$, se verifica la identidad

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \tag{47.31}$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD DE LA CONDICIÓN (47.30). Admitamos que la integral en consideración no depende del camino de integración dispuesto en la región G, sino que sólo depende de los puntos inicial y final del camino. Supongamos que $M_0 = (x_0, y_0) \in G$, $M = (x, y) \in G$ y $\overset{\frown}{M_0M}$ es una curva suave a trozos que une en G los puntos M_0 y M (una curva de tal género, incluso una quebrada, siempre existe, véase el lema 5 del p. 41.4). Pongamos

$$u(M) = u(x, y) \overset{\text{def}}{=} \int_{\overset{\frown}{M_0M}} Pdx + Qdy.$$

La función $u(x, y)$ es unívoca, puesto que el valor $u(M) = u(x, y)$ no depende de la elección de la curva que une en G los puntos M_0 y M. Probemos que

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Fijemos el punto $M = (x, y)$ y elijamos el punto $M_h = (x + h, y) \in G$, $h \neq 0$, de una manera tal que el segmento MM_h que une M y M_h (el cual, evidentemente,

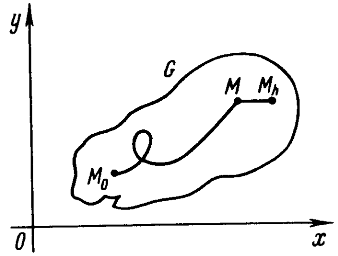


Fig. 207

es paralelo al eje Ox y tiene la longitud igual a $|h|$), se contenga en G (fig. 207). Para todos los números h, suficientemente pequeños, tal elección es siempre posible (¿por qué?). En este caso tenemos

$$u = (x + h, y) - u(x, y) =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{M_0M_h}} Pdx + Qdy - \int_{\overset{\frown}{M_0M}} Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{MM_h}} Pdx + Qdy.$$

A lo largo del segmento MM_h la coordenada y se mantiene constante, por lo cual $\int_{MM_h} Qdy = 0$, y, por consiguiente, $u(x + h, y) - u(x, y) = \int_{MM_h} Pdx = \int_x^{x+h} P(t, y)dt$. Al aplicar el teorema integral del valor medio, obtendremos

$$u(x + h, y) - u(x, y) = P(x + \theta h, y)h, \quad 0 < \theta < 1,$$

de donde

$$\frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} = P(x + \theta h, y), \quad 0 < \theta < 1. \tag{47.32}$$

El segundo miembro de esta igualdad tiene un límite para $h \to 0$, puesto que la función $P(x, y)$ es continua, y por consiguiente el primer miembro también tiene un límite cuando $h \to 0$. Pasando al límite en (47.32), tendremos $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$.

De un modo completamente análogo se demuestra también la igualdad $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$.

Así pues, la existencia de la función $u(x, y)$, para la cual se verifica la correlación (47.30), queda demostrada.

Supongamos ahora que $A \in G$, $B \in G$, $\overset{\frown}{AB}$ es una curva que une en G los puntos A y B, y sea $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, una representación suya y, por lo tanto, $A = (x(a), y(a))$, $B = (x(b), y(b))$. En este caso

$$\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{\partial u(x(t), y(t))}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u(x(t), y(t))dy}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right]dt =$$

$$= \int\limits_a^b u_t(x(t), y(t))dt = u[x(b), y(b)] - u[x(a), y(a)] = u(B) - u(A),$$

es decir, la fórmula (47.31) queda también demostrada.

LA DEMOSTRACIÓN DE SUFICIENCIA de la condición (47.30) referente a la independencia de una integral curvilínea del camino de integración se deduce directamente de la fórmula (47.31). Efectivamente, el punto inicial de cualquier contorno cerrado γ coincide con el final, por lo cual, en virtud de (47.31), se tiene

$$\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = u(A) - u(A) = 0.$$

De conformidad con el lema 2, esto precisamente significa que la integral curvilínea correspondiente no depende del trayecto de integración. □

Observemos que, aunque el teorema demostrado nos proporciona las condiciones necesarias y suficientes referentes a la independencia de una integral curvilínea del camino de integración, dichas condiciones se comprueban con dificultad.

Al hacer más estrecha la clase de las regiones en consideración podemos obtener un criterio considerablemente más simple y efectivo. Introduzcamos la siguiente definición.

Definición 8. *Una región plana G se llama simplemente conexa, si, cualquiera que sea el contorno sencillo $\gamma \subset G$, la región limitada Γ, cuya frontera está constituida por γ, se contiene en G.*

Hablando metafóricamente, el hecho de que una región es simplemente conexa significa que ella no tiene "agujeros". Un círculo nos da el ejemplo de una región simplemente conexa, un anillo circular representa una región no simplemente conexa (fig. 208).

Antes de enunciar el otro criterio que caracteriza la independencia de la integral curvilínea del camino de integración, demostremos un lema que nos hará falta al demostrar dicho criterio.

Lema 3. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas en la región G; γ es una curva suave dispuesta en G; $x = x(t), y = y(t), a \leqslant t \leqslant b$, es su representación, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ es la partición del segmento $[a, b]$, y λ_τ, una quebrada cuyos vértices se ubican en los puntos $(x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, 1,, \ldots, i_0$* (véase el p. 16.5). *En este caso*

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int\limits_{\lambda_\tau} Pdx + Qdy = \int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy. \quad (47.33)$$

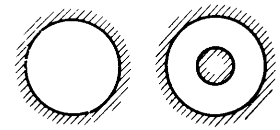


Fig. 208

Cabe señalar que como las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son uniformemente continuas en el segmento $[a, b]$, las longitudes de los lados de la quebrada λ_τ, es decir, las de los segmentos cuyos vértices se encuentran en los puntos $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ y $(x(t_i), y(t_i))$ tienden también a cero cuando $\delta_\tau \to 0$.

DEMOSTRACIÓN. La curva γ es un compacto; ya que este compacto no se interseca con el conjunto cerrado $R^2_{xy} \setminus G$, la distancia entre ellos es superior a cero (véase el lema 7 del p. 18.2). Sea η un número cualquiera tal que $\rho(\gamma, R^2_{xy} \setminus G) > > \eta > 0$. Designemos mediante γ_η la totalidad de todos los puntos del plano que distan de γ a una magnitud no superior a η. El conjunto γ_η está acotado, cerrado (véase el p. 18.3, lema 11) y $\gamma_\eta \subset G$.

Dado que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son uniformemente continuas en el segmento $[a, b]$, existe tal número $\delta_0 > 0$, que para cualesquiera dos puntos $t' \in [a, b]$ y $t'' \in [a, b]$, que satisfacen la condición $|t' - t'| < \delta_0$, se cumple la desigualdad

$$\rho(M', M'') = \sqrt{[x(t'') - x(t')]^2 + [y(t'') - y(t')]^2} < \eta,$$

donde $M' = (x(t'), y(t'))$, $M'' = (x(t''), y(t''))$ (compárese con el lema 4 en el p. 41.4). Es evidente que todos los puntos del segmento cuyos extremos se ubican en los puntos M' y M'' se hallan alejados del punto M' a una distancia no superior a η, razón por la cual se disponen en el conjunto γ_η, y, por consiguiente, en G. Esto significa que si la finura δ_τ de la partición τ del segmento $[a, b]$ es tal que $\delta_\tau < \delta_0$, todos los puntos de la quebrada λ_τ se disponen en G y para las particiones de este género τ tiene sentido la integral $\int\limits_{\lambda_\tau} Pdx + Qdy$.

Examinemos las integrales $\int\limits_{\gamma} Pdx$ y $\int\limits_{\lambda_\tau} Pdx$. Pongamos

$$x_i = x(t_i), \quad y_i = y(t_i), \quad P_i = P(x_i, y_i),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \; i = 1, 2, \ldots, i_0, \; \sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_0} P_i \Delta x_i.$$

Según se sabe (véase el p. 47.2, la propiedad 4°),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int\limits_{\gamma} Pdx. \quad (47.34)$$

Sean, luego, $M_i = (x_i, y_i)$ los vértices de la quebrada λ_τ; en este caso

$$\int\limits_{\lambda_\tau} Pdx = \sum_{i=1}^{i_0} \int\limits_{M_{i-1}M_i} Pdx. \quad (47.35)$$

Por otra parte, indiquemos que (haciendo uso de las designaciones adoptadas en el p. 47.2)

$$\int_{M_{i-1}M_i} dx = \int_{M_{i-1}M_i} \cos\alpha ds = |M_{i-1}M_i| \cos\alpha = \Delta x_i,$$

por lo cual

$$\sigma_\tau = \sum_i P_i \Delta x_i = \sum_i P_i \int_{M_{i-1}M_i} dx = \sum_i \int_{M_{i-1}M_i} P_i dx. \tag{47.36}$$

Al designar con L_τ la longitud de la quebrada λ_τ; con S, la longitud de la curva γ y con $\omega(\delta; P)$, el módulo de continuidad de la función $P(x, y)$ en el compacto γ_η, y teniendo presente que en virtud de la definición de la curva: $L_\tau \leqslant S$, obtendremos, a partir de (47.35) y (47.36):

$$\left| \int_{\lambda_\tau} P dx - \sigma_\tau \right| \leqslant \sum \left| \int_{M_{i-1}M_i} |P - P_i| dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_\tau; P) \sum_i |\Delta x_i| \leqslant \omega(\delta_\tau; P) L_\tau \leqslant \omega(\delta_\tau; P) S.$$

De aquí, en virtud de que la función $P(x, y)$ es uniformemente continua en el conjunto γ_η, tenemos $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \left(\int_{\lambda_\tau} P dx - \sigma_\tau \right) = 0$, y, por ende, de conformidad con (47.34),

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} P dx = \int_\gamma P dx. \tag{47.37}$$

Análogamente se demuestra también la igualdad

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_\tau} Q dy = \int_\gamma Q dy. \tag{47.38}$$

De (47.37) y (47.38) se deduce directamente la afirmación del lema, es decir, la fórmula (47.33). □

OBSERVACIÓN. Una afirmación, análoga al lema, es lícita también para las integrales curvilíneas en un espacio, con la particularidad de que la demostración del caso espacial se realiza siguiendo el mismo esquema que se usa en el caso plano.

Teorema 4. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas junto con sus derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ en una región plana G. Para que la integral curvilínea $\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$ no dependa del camino de integración $\widehat{AB} \subset G$, siendo fijados arbitrariamente los puntos $A \in G$ y $B \in G$, es necesario y suficiente (siempre que la región G es simplemente conexa) que en todos los puntos de las región G se cumpla la igualdad $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que la integral en consideración no depende del camino de integración dispuesto en la región G, sino sólo de la posición de los puntos inicial y final. De acuerdo con el teorema 3, existe una función $u = u(x, y)$ tal que $du = P dx + Q dy$, es decir, tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ y, por hipótesis del teorema, las derivadas $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y, por lo tanto, las derivadas mixtas $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ son continuas, entonces (véase el p. 21.1), son, además, iguales, es decir, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos ahora que la región G es simplemente conexa y en todos los puntos suyos se verifica $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Si γ es un contorno cerrado sencillo y suave a trozos, dispuesto en G, y si D es una región limitada cuya frontera es γ, entonces, al aplicar la fórmula de Green (utilizamos aquí el hecho de que la región G es simplemente conexa), obtendremos

$$\int_{\gamma^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Si la curva γ, dispuesta en G, tiene un número finito de puntos múltiples, entonces para cada uno de sus "bucles" γ_k, $k = 1, 2, \ldots, k_0$, que representa ya un contorno cerrado sencillo, tenemos sucesivamente, en virtud de lo demostrado, $\int_{\gamma_k} P dx + Q dy = 0$, de donde se infiere que para toda la curva γ también

$$\int_\gamma P dx + Q dy = 0. \tag{47.39}$$

Pasando al caso general, fijemos nuestra atención en que mediante el procedimiento considerado la igualdad (47.39) se demuestra también en el caso cuando γ sea una quebrada cerrada de un número finito de lados. Desde el punto de vista geométrico, la diferencia sólo consiste en que la autointersección de una quebrada de un número finito de lados puede componerse no sólo del número finito de puntos, sino también del número finito de segmentos lo que complica los razonamientos de un modo insignificante. La posibilidad de aplicar la fórmula de Green a una región finita, limitada por una quebrada del número finito de lados, proviene de que la región citada puede ser dividida en triángulos, los cuales son, evidentemente, regiones elementales respecto a ambos ejes de coordenadas. Por consiguiente, en este caso se cumplen las premisas del teorema 1 en el p. 47.3.

Entre tanto, cualquier curva cerrada suave a trozos γ, dispuesta en G, puede ser aproximada, con cualquier grado deseado de precisión, mediante unas quebradas cerradas de un número finito de lados, a consecuencia de lo cual, pasando al límite, podemos obtener la igualdad (47.39) para toda curva cerrada de G. Hagámoslo.

Supongamos que γ es una curva cerrada suave a trozos en la región G; la citada curva está dada mediante la representación $r(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y es una reunión de las curvas suaves $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Inscribamos la quebrada λ_j dentro de toda curva γ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. La reunión de todas las quebradas $\lambda_j, j = 1, 2, \ldots, k$, forma una línea quebrada cerrada λ, correspondiente a cierta partición τ del segmento $[a, b]$. En virtud de lo demostrado, tenemos

$$\int_\lambda P dx + Q dy = 0.$$

Pero, de acuerdo con el lema,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_{\lambda_j} P dx + Q dy = \int_{\gamma_j} P dx + Q dy, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \int_\lambda P dx + Q dy = \int_\gamma P dx + Q dy,$$

por lo cual

$$\int_\gamma P dx + Q dy = 0. \ \square$$

La condición $\dfrac{\partial P}{\partial y}\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ se denomina, a veces, *criterio de la diferencial total en una región simplemente conexa*, puesto que, de acuerdo con los teoremas 3 y 4, dicha condición es necesaria y suficiente para que la expresión $P dx + Q dy$ en la región G sea una diferencial de cierta función $u(x, y)$, $(x, y) \in G$.

Como conclusión de este punto hemos de notar que al demostrar la suficiencia de las condiciones del teorema 4 para que la integral curvilínea sea independiente del camino de integración, resulta muy esencial la exigencia de que la región en consideración sea simplemente conexa y esta exigencia no puede ser menospreciada. Confirmemos esto con un ejemplo.

Ejemplo. Sea $P(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

Es fácil compobar que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{47.40}$$

para todos los puntos del plano, excepto el origen de coordenadas (0, 0). Esto proviene, por ejemplo, de que

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0. \tag{47.41}$$

De este modo, en el caso dado por la región G puede tomarse todo el plano con el origen de coordenadas "punzado": $G = R^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Es evidente que la región G no es simplemente conexa. A título de contorno cerrado elijamos la circunferencia unidad

$$\gamma_0 = \{x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\},$$

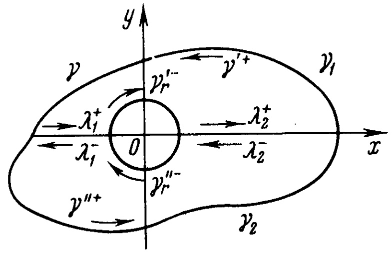


Fig. 209

entonces

$$\int_{\gamma_0} P dx + Q dy = \int_{\gamma_0} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Por consiguiente, en este caso las condiciones (47.40) quedan cumplidas y existe un contorno cerrado γ_0, a lo largo del cual la integral no es nula. No es difícil convencerse de que, en general,

$$\int_{\gamma_r} P dx + Q dy = 2\pi \tag{47.42}$$

a lo largo de cualquier circunferencia γ_r de radio r y con centro en el origen de coordenadas.

Luego, cualquiera que sea el contorno sencillo suave a trozos γ que constituya la frontera de una región limitada en la que está contenido el origen de coordenadas (en este caso suele decirse que el contorno γ contiene en su interior el origen de coordenadas), para este contorno se verifica también

$$\int_\gamma P dx + Q dy = 2\pi. \tag{47.43}$$

Para demostrarlo elijamos una circunferencia γ_r de tal radio r que sea $\gamma_r \subset \Gamma$; en este caso γ y γ_r no se intersecan. Al unir los contornos γ y γ_r por medio de los segmentos λ_1 y λ_2, como lo muestra fig. 209, obtendremos dos contornos cerrados γ_1 y γ_2 que no contienen en su interior el origen de coordenadas y que se componen de los arcos γ_r' y γ_r'' de la circunferencia γ_r, las partes γ' y γ'' del contorno γ y los segmentos λ_1 y λ_2.

En virtud de la condición (47.40), para estos contornos se verifican las igualdades

$$\int_{\gamma_1} P dx + Q dy = 0, \quad \int_{\gamma_2} P dx + Q dy = 0.$$

Al sumar estas igualdades y omitir, para abreviar, las expresiones subintegrales, obtendremos (fig. 209):

$$0 = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma'^+} + \int_{\lambda_1^+} + \int_{\gamma_r'^-} + \int_{\lambda_2^+} + \int_{\gamma''^+} + \int_{\lambda_2^-} + \int_{\gamma_r''^-} + \int_{\lambda_1^-} =$$

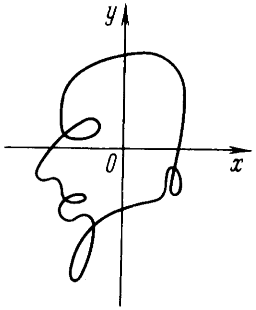


Fig. 210

$$= \int_{\gamma'+} + \int_{\gamma''+} - \int_{\gamma_r'+} - \int_{\gamma_r''+} = \int_{\gamma^+} - \int_{\gamma_r^+}$$

De aquí, debido a (47.42), proviene precisamente (47.43). Más aún, esta igualdad se verifica también en el caso, cuando el contorno γ, al recorrer "una vez" alrededor del origen de coordenadas, forma un número finito de "bucles" que no cercan el origen de coordenadas (fig. 210), pues la integral a lo largo de estos bucles es nula.

Si M_0 es un punto fijo de la región en consideración G, $M_0 \in G$, $M \in G$, y $\widehat{M_0M}$ es una curva que une en G los puntos M_0 y M, entonces $u(M) = \int_{\widehat{M_0M}} Pdx + Qdy$ ya será una función multiforme cuyos valores se determinan por la elección de distintos trayectos que unen los puntos M_0 y M. Si γ_0 es una curva fija cualquiera que une M_0 y M, entonces todos los valores de la función u en el punto M se dan mediante la fórmula

$$u(M) = \int_{\gamma_0} Pdx + Qdy + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

esto es, cada recorrido en torno al origen de coordenadas cambia el valor de la función $u(M)$ en la magnitud $\pm 2\pi$, según sea el sentido del recorrido.

En el caso dado podemos convencernos de esto inmediatamente: de la fórmula (47.41) se deduce que

$$\int_{\gamma_0} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_0} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)_0,$$

donde $\left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right)_0$ es un cierto valor fijo de $\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$; por esto

$$u(M) = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}.$$

Un lector reflexivo se dará cuenta de que muchos razonamientos aducidos en este ejemplo no dependen de la forma concreta de las funciones P y Q y son veríficos siempre cuando nos enfrentemos con un "punto singular" aislado, es decir, un punto en el que se perturba la condición (47.40). Por supuesto, "recorrido" tal punto singular una sóla vez, se obtendrá no 2π, sino, en el caso general, algún otro número.

singular una sóla vez, se obtendrá no 2π, sino, en el caso general, algún otro número.

El resultado análogo al teorema 4 tiene lugar también cuando γ es una curva espacial (véase el p. 52.6).

Ejercicios. 10. Demuéstrese la fórmula

$$\iint_G v\Delta u dx dy = -\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy + \int_{\gamma^+} v\frac{\partial u}{\partial \nu} ds,$$

donde G es una región plana, para la cual es válida la fórmula de Green, γ es el contorno que la limita, ν es la normal exterior unidad al contorno γ, y Δ, el operador de Laplace (véase el p. 41.10).

11. Calcúlese la integral $\int_\Gamma 2(x + y^2)dx + (4xy + \cos y)dy$, donde Γ es una curva arbitraria suave a trozos que une los puntos $(1, 0)$ y (ξ, η).

12. Sea Γ un contorno cerrado sencillo suave a trozos, arbitrariamente elegido, que limita una región en la que está contenido el origen de coordenadas. Calcúlese la integral

$$\int_\Gamma \frac{e^x}{x^2 + y^2}[(x\operatorname{sen}y - y\cos y)dx + (x\cos y + y\operatorname{sen}y)dy]$$

para el sentido positivo del recorrido del contorno Γ

§ 48. INTEGRALES MÚLTIPLES IMPROPIAS

48.1. DEFINICIONES FUNDAMENTALES

Al igual que en el caso de integrales ordinarias, introduzcamos el concepto de integral múltiple impropia, es decir, de integral múltiple de las funciones que o bien no están acotadas o bien están definidas en una región no limitada. La definición de la integral múltiple impropia la enunciemos de modo tal que se abarquen ambos casos mencionados (compárese con el p. 33.1).

Definición 1. *Sea G un conjunto abierto (acotado o no acotado) en el espacio n-dimensional R^n. Una sucesión de conjuntos abiertos G_k, $k = 1, 2, \ldots$, se llamará sucesión que agota de modo monótono el conjunto abierto G, si*

1) $\bar{G}_k \subset G_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

Aquí $\bar{G}$ significa, como siempre, la clausura (véase el p. 18.2) del conjunto G.

Definición 2. *Sea dada en un conjunto abierto G la función f (acotada o no acotada) integrable según Riemann en cualquier conjunto abierto D, medible según Jordan, de tal género que $\bar{D} \subset G$. La función f se denomina integrable en el sentido impropio en el conjunto abierto G, siempre que para toda sucesión de conjuntos* *medibles abiertos* G_k, $k = 1, 2, \dots$, *que agota de modo monótono el conjunto* G, *existe el límite* $\lim\limits_{k\to\infty} \int fdG_k$ *que no depende de la elección de la sucesión citada* G_k, $k = 1, 2, \dots$.

Este límite recibe el nombre de integral impropia de la función f extendida al conjunto abierto G y se designa por $\int fdG$, *o, en la forma desarrollada*

$$\iint\limits_G \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1dx_2 \dots dx_n.$$

De este modo,

$$\int fdG = \lim_{k\to\infty} \int fdG_k. \tag{48.1}$$

Si la integral $\int fdG$ *existe, suele decirse que ella converge, de lo contrario, la integral diverge.*

Cabe notar que en el caso de $n = 1$, la definición citada de la integral impropia no es equivalente a la definición de integral impropia de la función de una sola variable, dada en el § 33. Esto se debe a que en el párrafo indicado a título de conjuntos G_k se han tomado sólo los intervalos, es decir, conjuntos abiertos medibles unidimensionales del tipo muy especial. Por esta razón, el concepto de integral impropia (48.1), introducido en este párrafo, lo emplearemos sólo en el caso de $n \geqslant 2$, conservando intacto para el caso de $n = 1$ la noción anterior de la integral impropia.

Si el conjunto abierto G es medible según Jordan y la función f es integrable en G, la integral impropia de la función f coincide con la integral habitual de Riemann, lo que resulta de la aditividad completa de la integral de Riemann (véase el p. 44.6).

La definición (48.1) permite extender a las integrales impropias toda una serie de las propiedades de integrales propias: aditividad de la integral en los conjuntos, linealidad de la integral, integración de las desigualdades, reducción de la integral múltiple a una reiterada, fórmula de cambio de variable, etc.

Por ejemplo, si $x = F(u)$ es una aplicación biunívoca continuamente derivable del conjunto abierto $D \subset R^n_u$ sobre otro conjunto abierto $G \subset R^n_x$, y si el jacobiano $J(u)$ de dicha aplicación nunca se reduce a cero en D, entonces para toda función f, continua en G, queda válida la fórmula del cambio de variable en la integral:

$$\int f(x)dG = \int f[F(u)]|J(u)|dD.$$

La demostración de esta afirmación es la misma que la usada para el teorema 2 en el p. 46.2; conviene sólo usar la definición (48.1) en lugar de la aditividad completa de la integral.

Haciendo uso de la aditividad de la integral múltiple impropia, podemos escribir la definición (48.1) en otra forma equivalente. Teniendo presente que para un conjunto abierto medible $\Gamma \subset G$ es válida la igualdad

$$\int fdG - \int fd\Gamma = \int fd(G \setminus \overline{\Gamma}), \tag{48.2}$$

podemos decir que la integral $\int fdG$ converge cuando, y sólo cuando, para cualquier sucesión de conjuntos abiertos medibles G_k, $k = 1, 2, \dots$, que agota de modo monótono el conjunto G, existan las integrales $\int fd(G \setminus \overline{G}_k)$ y

$$\lim_{k\to\infty} \int fd(G \setminus \overline{G}_k) = 0.$$

Ejercicio 1. Demuéstrese la fórmula (48.2); en particular, pruébese que las integrales $\int fdG$ y $\int fd(G \setminus \overline{\Gamma})$ convergen o divergen simultáneamente.

48.2. INTEGRALES IMPROPIAS DE LAS FUNCIONES NO NEGATIVAS

Teorema 1. *Sea f una función no negativa en el conjunto abierto* $G \subset R^n$. *Cualquiera que sea la sucesión* $\{G_k\}$ *de conjuntos abiertos medibles según Jordan* G_k, *que agota de modo monótono el conjunto* G, *el límite*

$$\lim_{k\to\infty} \int f(x)dG, \tag{48.3}$$

sea finito o igual a $+\infty$, *siempre existe.*

Si dicho límite es finito, *la integral* $\int f(x)dG$ *existe y, por lo tanto, el límite* (48.3) *es igual a esta integral; si, en cambio, el límite* (48.3) *es infinito, la integral* $\int f(x)dG$ *no existe.*

En este último caso se escribe $\int f(x)dG = +\infty$. Esto se justifica por lo que, en virtud del teorema enunciado, para cualquier otra sucesión $\{D_k\}$ de conjuntos abiertos medibles D_k, que agota de modo monótono G, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \int f(x)dD_k = +\infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que el teorema quedará demostrado, si probamos que bajo el supuesto de que en el conjunto abierto G la función f es no negativa, para cualquier sucesión de conjuntos medibles G_k, $k = 1, 2, \dots$, que agota de modo monótono la región G, existe un límite finito o infinito

$$\lim_{k\to\infty} \int fdG_k$$

y este límite no depende de la elección de la sucesión citada.

Sea G_k, $k = 1, 2, \dots$, una sucesión de conjuntos medibles que agota de modo monótono el conjunto abierto G. Entonces conforme a la definición de tal sucesión, $G_k \subset G_{k+1}$, y, como $f \geqslant 0$, se tiene $\int fdG_k \leqslant \int fdG_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, y, por ende, siempre existe un límite finito o infinito

$$\lim_{k\to\infty} \int fdG_k = I_1.$$

Sea ahora D_k, $k = 1, 2, \dots$, alguna otra sucesión de conjuntos medibles que agota de modo monótono el conjunto abierto G. En virtud de lo demostrado más arriba, existe un límite finito o infinito

$$\lim_{k\to\infty} \int fdD_k = I_2.$$

Mostremos que
$$I_1 = I_2. \tag{48.4}$$

Para todo elemento fijado G_k de la primera sucesión existe un número $k_0 = k_0(k)$ tal que
$$\bar{G}_k \subset D_{k_0}. \tag{48.5}$$

Efectivamente, si no se encontrara el número indicado k_0, para todo $m = 1, 2, \ldots$ natural existiría un punto $x^{(m)} \in \bar{G}_k \setminus D_m$. El conjunto abierto G_k, siendo medible según Jordan, es acotado, razón por la cual su clausura $\bar{G}_k$ representa un conjunto acotado cerrado, esto es, un compacto. Por ser acotado el conjunto, la sucesión $\{x^{(m)}\}$ es también acotada y, por ende, de acuerdo con el teorema de Bolzano—Weierstrass (véase el p. 18.1, teorema 2), se puede separar de ella una subsucesión convergente $\{x^{(m_\nu)}\}$. Si $x^{(0)} = \lim\limits_{\nu \to +\infty} x^{(m_\nu)}$, entonces, debido a que el conjunto $\bar{G}_k$ es cerrado, tenemos $x^{(0)} \in \bar{G}_k$, y por eso $x_0 \in G$. Mas, en este caso, debido a la propiedad 2 de las sucesiones que agotan de modo monótono un conjunto (véase la definición 1), se encontrará un número m_0 tal que $D_{m_0} \ni x^{(0)}$. Dado que D_{m_0} es un conjunto abierto, será un entorno del punto $x^{(0)}$ y, por consiguiente, contiene casi todos los puntos de la sucesión $\{x^{(m_\nu)}\}$ que converge hacia $x^{(0)}$. Designemos mediante ν_0 un número cualquiera tal que sea $m_{\nu_0} \geqslant m_0$ y $x^{(m_{\nu_0})} \in D_{m_0}$. En virtud de la propiedad 1 de las sucesiones que agotan de modo monótono un conjunto, $x^{(m_{\nu_0})} \in D_{m_{\nu_0}}$, pero, como $x^{(m_{\nu_0})} \in \bar{G}_k$, esto contradice a la elección de la sucesión $\{x^{(m)}\}$.

De este modo queda demostrada la existencia del número k_0, mencionado anteriormente (véase (48.5)) (además, su existencia proviene también directamente del lema de Heine — Borel, véase el p. 18.3, puesto que el sistema $\{D_k\}$ forma un recubrimiento abierto del compacto $\bar{G}_k$).

Demos a conocer ahora que en virtud de la condición $f \geqslant 0$, de la inclusión (48.5) se desprende que $\int f dG_k \leqslant \int f dD_{k_0}$. Pero, evidentemente, $\int f dD_{k_0} \leqslant I_2$, por lo cual, para todo $k = 1, 2, \ldots$
$$\int f dG_k \leqslant I_2.$$

Pasando al límite en esta igualdad, para $k \to \infty$, obtendremos $I_1 \leqslant I_2$.

Del mismo modo se demuestra también la desigualdad $I_1 \geqslant I_2$. □

Ejemplo. Examinemos la integral $I = \iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Pongamos $G_k = \{(x, y) : x^2 + y^2 < k^2\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Ésta es una sucesión de conjuntos abiertos cuadrables (en el caso dado, simplemente una sucesión de círculos) que agota de modo monótono todo el plano R^2.

Sea $I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Pasemos a las coordenadas polares:
$$I_k = \iint\limits_{G_k} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^k - e^{-r^2} r dr = 2\pi \left. \frac{e^{-r^2}}{2} \right|_0^k = \pi(1 - e^{-k^2}).$$

De aquí, de acuerdo con la definición (48.1),
$$I = \lim_{k \to \infty} I_k = \pi. \tag{48.6}$$

La fórmula (48.6) permite hallar el valor de la integral
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$
llamada *integral de Poisson* [*]) que se encuentra a menudo en diferentes aplicaciones. En efecto, designando con D_k el cuadrado $|x| \leqslant k$, $|y| \leqslant k$, $k = 1, 2, \ldots$, y aplicando a la integral, extendida a D_k, de la función $e^{-x^2-y^2}$ la fórmula de reducción de la integral múltiple a una reiterada (véase el p. 45.1), obtendremos
$$I = \iint\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{k \to \infty} \iint\limits_{D_k} e^{-x^2-y^2} dx dy =$$
$$= \lim_{k \to \infty} \int_{-k}^{k} dx \int_{-k}^{k} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{k \to \infty} \int_{-k}^{k} \left(\int_{-k}^{k} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy =$$
$$= \lim_{k \to \infty} \left(\int_{-k}^{k} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Por esto de (48.6) se infiere inmediatamente que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Teorema 2 (criterio de comparación). *Supongamos que en el conjunto abierto G se verifican las desigualdades $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $x \in G$. En este caso la convergencia de la integral $\int f(x) dG$ se deduce de la convergencia de la integral $\int g(x) dG$, y la divergencia de la integral $\int g(x) dG$ se deduce de la divergencia de la integral $\int f(x) dG$.*

El teorema citado se demuestra por analogía con el teorema semejante para el caso unidimensional (véase el p. 33.3).

A título de ejemplos y patrones para la comparación con otras integrales consideraremos las siguientes
$$\int \ldots \int\limits_{x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2})^\alpha}, \tag{48.7}$$

[*]) S. D. Poisson (1781—1840), matemático y físico francés.

$$\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1}\cdots\int \frac{dx_1\ldots dx_n}{(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2})^\alpha}. \tag{48.8}$$

La primera integral se toma por el exterior de una bola unidad; la segunda, por el interior de la misma.

Con el fin de investigar estas integrales resulta cómodo introducir las *coordenadas esféricas* $\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ en el espacio n-dimensional, sirviéndose de las fórmulas

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots\cos\varphi_2\cos\varphi_1,\\
x_2 &= \rho\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots\cos\varphi_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_1,\\
x_3 &= \rho\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots\cos\varphi_3\,\mathrm{sen}\,\varphi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_i &= \rho\cos\varphi_{n-1}\ldots\cos\varphi_i\,\mathrm{sen}\,\varphi_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi_{n-1},
\end{aligned}\right\} \tag{48.9}$$

donde

$$0 \leqslant \rho < +\infty,\quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi,\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi_i \leqslant \frac{\pi}{2},\quad i = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Con auyda de estas fórmulas a las coordenadas cartesianas $x_1, \ldots, x_n$ de un punto del espacio se las asignan las coordenadas esféricas $\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, y viceversa. Con ello conviene tener en cuenta que, al igual que en el caso de las coordenadas polares en un plano, aquí no existe una correspondencia biunívoca completa entre los conjuntos de n números $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.

Observemos que $\rho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Mediante cálculos elementales, pero un tanto engorrosos (que aquí no se realizan), podemos mostrar que el jacobiano de esta transformación tiene por expresión

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = \rho^{n-1}\cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\ldots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Pongamos, para abreviar,

$$\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) = \cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\ldots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

No es difícil convencerse de que $\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}) \geqslant 0$ y que

$$c \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ldots\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Phi(\varphi_2\ldots\varphi_{n-1})d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} > 0.$$

Esto proviene inmediatamente de la propiedad 9 de las integrales múltiples citada en el p. 44.6.

Investiguemos ahora la convergencia de la integral (48.7). A título de sucesión de conjuntos medibles abiertos G_k, $k = 1, 2, \ldots$, que agota de modo monótono el exterior de la bola unidad Q, tomemos la sucesión de conjuntos

$$G_k = \{x = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) : 1 + \frac{1}{k} < \rho < k\},\quad k = 1, 2, \ldots .$$

Pasemos a las coordenadas esféricas

$$\int\limits_{G_k}\cdots\int\frac{dx_1\ldots dx_n}{(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2})^\alpha} = \int_{1+\frac{1}{k}}^{k}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ldots$$

$$\ldots\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho^{n-1-\alpha}\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})d\rho\, d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} = c\int_{1+\frac{1}{k}}^{k}\rho^{n-1-\alpha}d\rho.$$

De este modo, el problema de convergencia de la integral (48.7) se ha reducido a la convergencia de la integral $\int_1^\infty \rho^{n-1-\alpha}d\rho$, la cual, como se sabe (véase el p. 33.3) converge cuando $n - 1 - \alpha < -1$, es decir, cuando $\alpha > n$, y diverge para $\alpha \leqslant n$. Así pues, queda demostrado el lema.

Lema 1. *La integral* (48.7) *converge, si α es superior a la dimensión del espacio y diverge en el caso contrario.*

Consideraremos ahora la integral (48.8). Al poner

$$G_k = \left\{x = (\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) : \frac{1}{k} < \rho < 1 - \frac{1}{k}\right\},\quad k = 3, 4, \ldots,$$

obtendremos

$$\int\limits_{G_k}\cdots\int\frac{dx_1\ldots dx_n}{(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2})^\alpha} = \int_{\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ldots$$

$$\ldots\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho^{n-1-\alpha}\Phi(\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})d\rho\, d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} = c\int_{\frac{1}{k}}^{1-\frac{1}{k}}\rho^{n-1-\alpha}d\rho.$$

De este modo, el problema de convergencia de la integral (48.8) se ha reducido a la convergencia de la integral $\int_0^1 \rho^{n-1-\alpha}d\rho$. Esta integral, como se sabe, converge, si $n - 1 - \alpha > -1$, es decir, si $\alpha < n$, y diverge en el caso contrario. El resultado obtenido enunciemos nuevamente en forma de un lema.

Lema 2. *La integral* (48.8) *converge, si α es inferior a la dimensión del espacio y diverge en el caso contrario.*

Al igual que en el caso unidimensional (véase el p. 33.3), sirviéndonos de las integrales (48.7) y (48.8), podemos enunciar los criterios de convergencia de las integrales múltiples impropias, sin embargo aquí no nos detendremos en esto detalladamente.

48.3. INTEGRALES IMPROPIAS DE LAS FUNCIONES QUE CAMBIAN DE SIGNO

Definición 3. *La integral impropia* $\int f dG$ *se llama absolutamente convergente, si converge la integral* $\int |f| dG$.

Para estudiar la convergencia absoluta de una integral de la funeión $f(x)$, nos serán útiles las funciones

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) \leqslant 0, \\ 0, & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Es fácil ver que

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f_- = \frac{|f| - f}{2}, \tag{48.10}$$

$$0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|, \quad 0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|, \tag{48.11}$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \tag{48.12}$$

De las fórmulas (48.10) se deduce que si la función f es integrable según Riemann en cierta región medible según Jorgan, las funciones f_+ y f_- serán también integrables según Riemann en dicha región; de la primera fórmula (48.12) proviene la afirmación recíproca. Por ello, de (48.10) — (48.12) se infiere que la *integral* $\int f dG$ *converge absolutamente cuando, y sólo cuando, convergen las integrales*

$$\int f_+ dG \ \ y \ \int f_- dG.$$

Al igual qué en el caso de integrales impropias de la función de una sola variable, de la convergencia absoluta de una integral múltiple proviene la convergencia de la misma (siempre que, por supuesto, se consideran sólo unas funciones que son integrables en cada conjunto medible abierto, contenido junto con su clausura en un conjunto abierto por el cual se realiza la integración). Esto proviene en seguida de las fórmulas (48.11), la primera fórmula (48.12) y del teorema 2 del presente párrafo (véase el p. 48.2). No obstante, para las integrales múltiples propias es válido también el teorema recíproco.

Teorema 3. *Si una integral múltiple* $\int f dG$ $(n \geqslant 2)$ *converge, converge absolutamente.*

Este teorema, algo sorprendente a primera vista, está relacionado con la diferencia en la definición de las integrales impropias de la función de una variable y de n variables ($n > 1$), citadas al principio de este párrafo*).

*) Hemos de notar, sin embargo, que en el caso n-dimensional también podríamos obtener la misma relación entre la convergencia y la convergencia absoluta de una integral que existe en el caso unidimensional, siempre que se introduzca del modo correspondiente la definición de la integral n-múltiple impropia. Por ejemlo, en el caso de las integrales extendidas a todo el espacio, resulta suficiente para ello que en la definición de la integral a título de elementos de la sucesión, que agota de modo monótono un conjunto, se tomen sólo las bolas n-dimensionales con centro en el origen de coordenadas. Por otra parte, aplicando a una integral unidimensional la definición de integral impropia citada en el p. 48.1 y entendiendo la integral unidimensional de Riemann en el sentido del §. 44, el teorema 3 y su demostración tienen lugar también para $n = 1$.

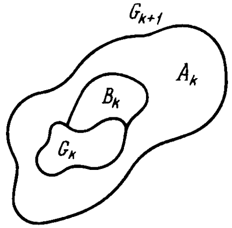


Fig. 211

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Supongamos que la integral $\int f dG$ diverge absolutamente, es decir, para cierta sucesión (y, por lo tanto, para cualquier sucesión, véase el teorema 1 en el p. 48.2) de conjuntos abiertos medibles según Jordan G_k, $k = 1, 2, \ldots$, que agota de modo monótono el conjunto abierto G, se tiene $\lim\limits_{k\to\infty} \int |f| dG_k = +\infty$. Sin restringir la generalidad de razonamientos (pasando, si es necesario, a una subsucesión) podemos suponer que

$$\int |f| dG_{k+1} > 3 \int |f| dG_k + 2k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{48.13}$$

Sea $A_k = G_{k+1} \setminus \bar{G}_k$; en este caso A_k es un conjunto medible abierto y, como $\bar{G}_k \subset G_{k+1}$, entonces (fig. 211) $G_{k+1} = A_k \cup \bar{G}_k$, y, por consiguiente,

$$\int |f| dG_{k+1} = \int |f| dA_k + \int |f| dG_k.$$

De aquí, en vista de la desigualdad (48.13), $\int |f| dA_k > 2 \int |f| dG_k + 2k$. Haciendo uso de la segunda fórmula (48.12), obtendremos

$$\int f_+ dA_k + \int f_- dA_k > 2 \int |f| dG_k + 2k.$$

Sea, para concretar, $\int f_+ dA_k \geqslant \int f_- dA_k$; en este caso

$$2 \int f_+ dA_k \geqslant \int f_+ dA_k + \int f_- dA_k > 2 \int |f| dG_k + 2k,$$

y, por lo tanto,

$$\int f_+ dA_k > \int |f| dG_k + k. \tag{48.14}$$

Nuestro objetivo es obtener una desigualdad del tipo semejante no para la función f_+, sino para la función f. Con este fin parece que podríamos omitir simplemente todos los puntos, donde la función f_+ se anula; entonces en el conjunto que queda tendríamos $f = f_+$. No obstante, el conjunto obtenido puede, en el caso general, resultar no medible, razón por la cual recurriremos al rodeo.

De la desigualdad (48.14) proviene que realizada cualquier partición suficientemente menuda $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ del conjunto A_k (véase el p. 44.3), para cualquier suma integral de Riemann tenemos

$$\sum_{i=1}^{i_0} f_+(\xi_i)\mu X_i > \int |f|\, dG_k + k, \quad \xi_i \in X_i, \quad i = 1, 2, \dots, i_0.$$

Elijamos la partición mencionada τ del conjunto medible abierto A_k de una manera tal que todos los elementos X_i de dicha partición sean también conjuntos abiertos medibles según Jordan, lo que es siempre posible (véase el p. 44.4). Designemos con X_i^* aquellos conjuntos $X_i \in \tau$, para los cuales $f_+(\xi) > 0$ en todos los puntos $\xi \in \bar{X}_i$; en este caso, al elegir $\xi_i \in \bar{X}_i \neq \bar{X}_i^*$ de tal modo que sea $f(\xi_i) = 0$, obtendremos

$$\sum_i{}' f_+(\xi_i)\mu X_i^* > \int |f|\, dG_k + k, \tag{48.15}$$

donde (como también en lo sucesivo) la "virgulilla" de la suma significa que la sumación se extiende sólo a aquellos índices i, para los cuales $X_i = X_i^*$. Pongamos $B_k = \bigcup_i{}' X_i^*$ (véase fig. 211). Es obvio que B_k es un conjunto abierto medible dispuesto dentro del conjunto A_k, y $\tau^* = \{X_i^*\}$ constituye su partición. En la clausura de este conjunto $f_+ > 0$, y, por consiguiente, $f_+ = f$. De la desigualdad (48.15) se deduce que para la suma inferior de Darboux s_{τ^*} de la función f en el conjunto B_k se verifica la desigualdad $s_{\tau^*} \geqslant \int f\, dG_k + k$. De aquí se desprende, evidentemente, que

$$\int f\, dB_k \geqslant \int |f|\, dG_k + k. \tag{48.16}$$

Observemos que $f \geqslant -|f|$, y, por ende,

$$\int f\, dG_k \geqslant -\int |f|\, dG_k. \tag{48.17}$$

Al sumar las desigualdades (48.16) y (48.17), obtendremos:

$$\int f\, dB_k + \int f\, dG_k \geqslant k. \tag{48.18}$$

Sea $D_k = B_k \cup G_k$, $k = 1, 2, \dots$. Es evidente que D_k es un conjunto abierto medible y

$$G_k \subset D_k \subset G_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{48.19}$$

En vista de que los conjuntos B_k y G_k no se intersecan (puesto que no se intersecan los conjuntos A_k y G_k), de (48.18) tenemos

$$\int f\, dD_k \geqslant k,$$

de donde

$$\lim_{k\to\infty} \int f\, dD_k = +\infty. \tag{48.20}$$

De la inclusión (48.19) se infiere que los conjuntos D_k, $k = 1, 2, \dots$, forman una sucesión de conjuntos abiertos medibles, que agota de modo monótono el conjunto abierto G, pues tal era la sucesión dada G_k, $k = 1, 2, \dots$, por lo cual la igualdad (48.20) significa que la integral $\int f\, dG$ diverge. □

Así pues, para las integrales múltiples, la convergencia de la integral impropia $\int f\, dG$ es equivalente a la convergencia absoluta de ésta.

Ejercicio 2. Al sustituir en la definición de la integral múltiple impropia los conjuntos abiertos en todos los puntos por unas regiones (en particular, considerando solamente las sucesiones, compuestas sólo de las regiones medibles, que agotan de modo monótono la región dada) muéstrese que aún para tal definición "más estrecha" de la integral múltiple impropia queda en vigor el teorema 3.

§ 49. ALGUNAS APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

49.1. CÁLCULO DE ÁREAS Y DE VOLÚMENES

Sea X un conjunto medible en R^n. Como se sabe (véase el p. 44.6):

$$\mu X = \int dX. \tag{49.1}$$

De este modo, con ayuda de la integral n-múltiple podemos calcular la medida de los conjuntos medibles en un espacio n-dimensional (un área en el espacio bidimensional, un volumen, en el espacio tridimensional). Si la integral n-múltiple (49.1) puede reducirse a la reiterada (véase § 45), el cálculo de la medida del conjunto medible X de un espacio n-dimensional se reducirá al cálculo de una integral $(n-1)$-múltiple.

Sea, por ejemplo, D un conjunto abierto medible en el espacio $(n-1)$-dimensional $R^{n-1}_{x_1, \dots, x_{n-1}}$, siendo $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$ una función no negativa definida y continua en la clausura $\bar{D}$ del conjunto D, y

$$G = \{x = (x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D, \quad 0 < x_n < f(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

(de este modo, G representa un análogo n-dimensional del trapecio plano curvilíneo examinado en el p. 32.1). En este caso

$$\mu G = \int dG = \int dD \int_0^{f(x_1,\dots,x_{n-1})} dx_n = \int f(x_1, \dots, x_{n-1})\, dD,$$

es decir,

$$\mu G = \overbrace{\int \dots \int_D}^{n-1 \text{ veces}} f(x_1, \dots, x_{n-1})\, dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

La medida de los conjuntos abiertos del espacio R^n, $n \geqslant 2$, arbitrarios (no forzosamente medibles según Jordan) y, en particular, no acotados, si ella se entiende en el sentido de la definición del p. 31.1 y 31.2, es decir, como una medida inferior de

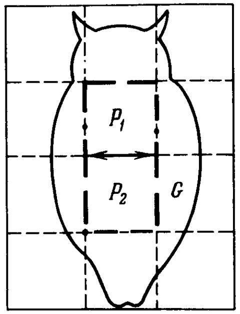


Fig. 212

Jordan, puede ser calculada mediante las integrales impropias. En efecto, sea G un conjunto abierto arbitrario en R^n y sea G_k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de conjuntos abiertos medibles que agota de modo monótono el conjunto G (véase el p. 48.1). Entonces, como se sabe, (véase el p. 31.2), $\lim\limits_{k\to\infty} \mu G_k = \mu G$. Mas, en virtud de (49.1), $\mu G_k = \int dG_k$, por lo cual $\mu G = \lim\limits_{k\to\infty} \int dG_k$.

Según la definición de la integral múltiple impropia, $\lim\limits_{k\to\infty} \int dG_k = \int dG$. De este modo, $\mu G = \int fdG$, donde la integral en el segundo miembro se entiende, en el caso general (a saber, si a ciencia cierta G no es una región medible) como impropia.

Queda sólo mostrar que para cualquier conjunto abierto G existe siempre una sucesión de conjuntos medibles G_k, $k = 1, 2, \ldots$, que agotan de modo monótono el conjunto dado G. Demostrémoslo.

Consideraremos la sucesión T_k, $k = 1, 2, \ldots$, de particiones del espacio R^n en cubos (véase el p. 44.1) y designemos mediante Q_k un cubo abierto n-dimensional, determinado de la manera siguiente.

$$Q_k = \{(x_1, \ldots, x_n) : |x_i| < k, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

El número de los cubos de rango dado k (véase el p. 44.1), contenidos en Q_k, y, por consiguiente, con la mayor razón, en la intersección $G \cap Q_k$, es finito. Designemos estos cubos cerrados $P_1, \ldots, P_{j_k}$:

$$P_j \in T_k; \quad P_j \subset G \cap Q_k, \quad j = 1, 2, \ldots, j_k.$$

Con G_k se designará el conjunto de puntos interiores del conjunto $\bigcup\limits_{j=1}^{j_k} P_j$. Por ejemplo, en el caso que se expone en la fig. 212, el conjunto G_k se compone de los puntos interiores de dos cuadrados, P_1 y P_2, y un intervalo que se obtiene extrayendo los vértices de estos cuadrados de su arista común.

Precisamente los conjuntos G_k, $k = 1, 2, \ldots$, son conjuntos abiertos medibles que forman la sucesión que agota de modo monótono el conjunto abierto dado G.

Recordemos que para calcular los volúmenes de los cuerpos resulta, a menudo, cómodo el método de secciones: véase la fórmula (45.23).

Ejercicio 1. Demuéstrese que la sucesión construida de conjuntos G_k, $k = 1, 2, \ldots$, forma realmente una sucesión de conjuntos medibles que agota de modo monótono el conjunto dado G.

49.2. APLICACIONES FÍSICAS DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

Con ayuda de las integrales múltiples se pueden calcular diferentes magnitudes físicas: masa y carga de un cuerpo, centro de gravedad, momento de inercia, flujo de líquido, potencial de un cuerpo, etc.

Hallemos, como un ejemplo, el centro de gravedad de una figura plana. Supongamos que en una cierta región cuadrable G está distribuida cierta masa cuya densidad superficial $\rho(x, y)$ es, en el caso general, variable, es decir, en la clausura $\overline{G}$ de la región G está definida una función continua y no negativa $\rho(x, y)$. La región G con la masa distribuida en ella se llamará *figura S*, y la magnitud

$$M = \iint\limits_G \rho(x, y)dxdy \tag{49.2}$$

la *masa* de dicha figura. Si $\rho(x, y)$ no es cero idéntico, $M > 0$.

Determinemos y hallemos el centro de gravedad de la figura S. Sea $\tau = \{G_i\}$, $i = 1, 2, \ldots k$, una partición de la región G (véase el p. 44.3). Se denominará figura S_i un conjunto G_i con la masa distribuida en él de densidad $\rho(x, y)$, $(x, y) \in G_i$. Elijamos para cada i el punto correspondiente $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{G}_i$. La magnitud $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i)\mu G_i$ se llamará valor aproximado de la masa de la figura S_i (tal denominación es natural según (49.2)). Entre tanto, las magnitudes $m_i\xi_i$ y $m_i\eta_i$ se denominarán valores aproximados de los momentos estáticos de la figura S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, respecto de los ejes coordenados Oy y Ox, respectivamente (es natural llamarlas así, porque las magnitudes my y mx (véase el p. 32.6) llevan el nombre de momentos estáticos de un punto material de masa m con coordenadas (x, y) respecto de los ejes Ox y Oy). Por fin, las magnitudes

$$\begin{aligned} S_x(\tau) &= \sum_{i=1}^{k} \eta_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i)\mu G_i, \\ S_y(\tau) &= \sum_{i=1}^{k} \xi_i m_i = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i)\mu G_i, \end{aligned} \tag{49.3}$$

se llamarán τ-momentos aproximados de la figura S con respecto a los ejes Ox y Oy, mientras que sus límites, para $\delta_\tau \to 0$,

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_x(\tau) = S_x, \qquad \lim_{\delta_\tau \to 0} S_y(\tau) = S_y,$$

momentos estáticos de la figura S respecto de los ejes Ox y Oy. Bajo las suposiciones asumidas, estos límites existen. Efectivamente, de las fórmulas (49.3) se ve que $S_x(\tau)$ y $S_y(\tau)$ son las sumas integrales de Riemann para las funciones $y\rho(x, y)$ y

$x\rho(x, y)$ y por esta razón

$$S_x = \iint_G y\rho(x,y)dxdy, \quad S_y = \iint_G x\rho(x,y)dxdy. \tag{49.4}$$

Definición 1. *El punto (x_0, y_0) se denomina centro de gravedad (centro de masa, centro de inercia) de la figura S, si los momentos estáticos respecto de los ejes de coordenadas del punto material de masa M, que equivale a la masa de toda la figura S y que se encuentra en el punto (x_0, y_0), son iguales a los momentos estáticos correspondientes de la figura S, es decir, si*

$$Mx_0 = S_y, \quad My_0 = S_x.$$

De las fórmulas (49.2) y (49.3) obtenemos

$$x_0 = \frac{\iint_G x\rho(x,y)dxdy}{\iint_G \rho(x,y)dxdy}, \quad y_0 = \frac{\iint_G y\rho(x,y)dxdy}{\iint_G \rho(x,y)dxdy}.$$

Ejercicio 2. Demuéstrese que el centro de gravedad de una figura no depende de cómo se escoge el sistema de coordenadas.

A título de ejemplo consideraremos un "trapecio curvilíneo" G engendrado por las gráficas de las funciones continuas no negativas $f(x)$ y $g(x)$, $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$:

$$G = \{(x, y) : a < x < b, \quad g(x) < y < f(x)\}.$$

Sea $\rho(x, y) \equiv 1$. Dado que $\iint_G dxdy = \mu G$, se tiene

$$x_0 = \frac{1}{\mu G}\iint_G xdxdy = \frac{1}{\mu G}\int_a^b xdx\int_{g(x)}^{f(x)} dy = \frac{1}{\mu G}\int_a^b [f(x) - g(x)]xdx,$$

$$y_0 = \frac{1}{\mu G}\iint_G ydxdy = \frac{1}{\mu G}\int_a^b dx\int_{g(x)}^{f(x)} ydy = \frac{1}{2\mu G}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx;$$

de aquí

$$2\pi y_0\mu G = \pi\int_a^b f^2(x)dx - \pi\int_a^b g^2(x)dx.$$

Aquí en el segundo miembro interviene el volumen de un cuerpo obtenido por revolución del trapecio curvilíneo G en torno al eje de x, es decir, hemos llegado al *segundo teorema de Guldin.*

Teorema (de Guldin). *El volumen de un cuerpo de revolución de una figura plana alrededor de un eje que no la corta es igual al producto del área de esta figura por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de la misma.*

Ejemplo. Sirviéndose del segundo teorema de Guldin, calcúlese el volumen μQ del toro Q, obtenido por revolución del círculo $(x - a)^2 + y^2 \leqslant r^2$, $0 < r \leqslant a$, alrededor del eje Oy:

$$\mu Q = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 ar^2.$$

Ejercicios. Hállese la masa de una figura plana limitada por las líneas:

3. $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $y \geqslant 1$; $\rho(x, y) = x + y$.
4. $y = 2x$, $y = -2$, $y = 4x - 2$; $\rho(x, y) = 2|x| + |y|$.

Hállense los momentos estáticos respecto de los ejes de coordenadas de la figura plana homogénea ($\rho = \rho_0 =$ const), limitada por las líneas dadas:

5. $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $x = 0$.
6. $y = x^3$, $x + y = 2$, $x = 0$.

Hállense las coordenadas del centro de masas de una figura plana limitada por las líneas indicadas:

7. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$; $\rho = \rho_0 =$ const.
8. $y^2 = 4x$, $y = 2$, $x = 0$; $\rho(x, y) = x$.
9. $r = \sqrt{2}$, $r = 2 \operatorname{sen}\varphi (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, r \geqslant \sqrt{2})$, $\rho = \rho_0 =$ const (r, φ son las coordenadas polares).
10. $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $y = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, $\rho = \rho_0 =$ const.

§ 50. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE SUPERFICIES

50.1. CONCEPTO DE SUPERFICIE

Sea dado en el espacio R^3 un sistema fijo de coordenadas rectangulares cartesianas x, y, z. Las coordenadas cartesianas en los planos, donde se disponen las regiones que se aplican, se designarán con las letras u, v; las propias regiones, con la letra D y las aplicaciones de éstas que han de ser examinadas, con letras f, r, ρ (quizás, acompañadas de tales o cuales índices). Como hasta ahora, con $\bar{D}$ se denotará la clausura de la región D (recordemos que $\bar{D}$ se denomina región cerrada) y mediante ∂D, la frontera de D (véase el p. 18.2). Para las imágenes de los puntos $M = (u, v) \in \bar{D}$ se emplearán, en las aplicaciones mencionadas, tanto la inscripción del tipo $f(M)$, como la del tipo $f(u, v)$.

Se denomina *superficie continua* S todo conjunto de puntos del espacio tridimensional R^3 dado como una imagen continua de cierta región plana cerrada $\bar{D}$. La propia aplicación continua $r(u, v)$ de la región cerrada $\bar{D}$ sobre el conjunto S se llama *representación de la superficie* (o, más detalladamente, *representación paramétrica*) y se escribe

$$S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}.$$

Las variables u, v llevan el nombre de *coordenadas o parámetros* de la superficie continua S.

Para la superficie continua $S = \{r = r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$ el conjunto de puntos del espacio R^3, dado como una imagen de la frontera ∂D de la región D en la aplicación $r(u, v)$, se denomina *borde de la superficie* S y se designa por ∂S:

$$\partial S = \{r(u, v) : (u, v) \in \partial D\}.$$

Por analogía con la definición de una curva podemos introducir el concepto de aplicaciones equivalentes, pero esta vez no de los segmentos, sino de las regiones planas cerradas en el espacio tridimensional R^3 y considerar, según la definición, que dos aplicaciones continuas equivalentes prefijan una misma superficie continua (véase el p. 50.2*). Las aplicaciones que realizan la equivalencia de dos representaciones de una misma superficie se denominan *transformaciones admisibles de los parámetros*.

Dada la representación $r(u, v)$, $(u, v) \in D$, de cierta superficie continua y fijados los valores de los parámetros u, v, resulta natural que mediante $r(u, v)$ se designe un punto de dicha superficie en el que se aplica, para la representación en consideración, el punto $(u, v) \in \bar{D}$.

Subrayemos que la representación de una superficie continua no es forzosamente la aplicación biunívoca. Un punto de la superficie continua $S = \{r(u, v);$ $(u, v) \in \bar{D}\}$, en el que, realizándose la aplicación dada $r(u, v)$, se aplican por lo menos dos puntos diferentes de la región cerrada $\bar{D}$, se llama *punto múltiple* de dicha superficie.

De este modo, si el punto M de una superficie continua es el punto múltiple de la misma, entonces, dada la representación $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, de esta superficie, existen por lo menos dos puntos $(u_1, v_1) \in \bar{D}$ y $(u_2, v_2) \in \bar{D}$ tales que $r(u_1, v_1) = r(u_2, v_2) = M$.

La aplicación $r(u, v)$ puede ser definida en la forma coordenada:

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

y en la vectorial:

$$r = r(u, v),$$

donde $r(u, v)$ es el radio vector con extremo en el punto $r(u, v) \in R^3$.

En lo que sigue se estudiarán, ante todo, las propiedades diferenciales de las superficies de ciertas clases que se componen de superficies "suficientemente suaves", es decir, de aquellas superficies que son derivables (continuamente) un número suficiente de veces. Demos a conocer, por ejemplo, la noción de superficie continuamente derivable.

Se denomina *superficie continuamente derivable* un conjunto S del espacio R^3 dado como una imagen continuamente derivable de cierta región plana cerrada.

La propia aplicación continuamente derivable de la región cerrada $\bar{D}$ sobre el conjunto S se llama, como hasta ahora, representación de esta superficie, con la particularidad de que se considera, según la definición, que dos aplicaciones continuamente derivables de las regiones planas cerradas determinan una misma superficie continuamente derivable, siempre que son equivalentes respecto de las aplicaciones continuamente derivables (véase el p. 50.2*).

Del modo análogo se determinan también otras clases especiales de las superficies continuas: las superficies dos veces continuamente derivables y, en general, las superficies n veces continuamente derivables.

Si en una de las representaciones de una superficie continua podemos escoger como parámetros dos coordenadas cualesquiera del espacio R^3 (por ejemplo, si existen una región cerrada D en el plano xy y una función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$, que es la representación de la superficie continua en consideración), entonces tal representación se llama explícita.

Evidentemente, si una superficie continua admite la representación explícita, está privada de puntos múltiples.

En adelante una superficie continua se llamará simplemente superficie, siempre que esto no nos lleve a una equivocación.

Ejemplo. La superficie determinada por la representación

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad z = r\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

es una esfera con centro en el origen de coordenadas y radio r, todo el meridiano de dicha esfera se compone de puntos múltiples.

En el punto que sigue daremos otra definición de la superficie que será, en cierto sentido, más detallada. Es conveniente, obviamente, omitir dicho punto en el transcurso de la primera lectura y volver a leerlo cuando se sienta la necesidad intrínseca.

50.2*. APLICACIONES EQUIVALENTES. SUPERFICIES DADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

Para definir estríctamente una superficie es preciso, ante todo, introducir la noción de aplicaciones equivalentes de las regiones planas cerradas.

Definición 1. *Una aplicación continua f de la clausura $\bar{D}$ de cierta región plana D en el espacio tridimensional R^3 se denomina equivalente a la aplicación continua f_1 de la clausura $\bar{D}_1$ de la región plana D_1 en el mismo espacio R^3, si existe tal aplicación homeomorfa (véase la definición 5 en el p. 41.4) F de la región cerrada $\bar{D}$ sobre otra región cerrada $\bar{D}_1$ que, cuando se realiza dicha aplicación, los puntos interiores pasan a puntos interiores y los límites, también a puntos límites (es decir, D se aplica soble D_1 y ∂D, sobre ∂D_1) y para todo punto $M \in D$ se verifica la igualdad*

$$f(M) = f_1[F(M)], \tag{50.1}$$

es decir, $f = f_1 \circ F$.

En este caso F recibe el nombre de *aplicación que realiza la equivalencia de las aplicaciones* f y f_1. Si f es equivalente a la aplicación f_1, se escribe $f \sim f_1$.

La definición de las aplicaciones equivalentes puede ser expresada en forma esquemática mediante un diagrama, donde las flechas significan las aplicaciones en consideración y el resultado de las aplicaciones no depende de la elección del trayecto en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & R^3 & \\ D \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "F"'] & & D_1 \arrow[ul, "f_1"'] \end{tikzcd}$$

Es obvio que:

1) toda aplicación es equivalente a sí misma: $f \sim f$ (aquí, la aplicación que realiza la equivalencia es aplicación idéntica).

Es fácil convencerse de que
2) si $f \sim f_1$, entonces $f_1 \sim f$,
3) si $f \sim f_1$ y $f_1 \sim f_2$, entonces $f \sim f_2$.

Si f y f_1 son las aplicaciones continuas equivalentes de las regiones cerradas respectivas $\bar{D}$ y $\bar{D}_1$, entonces de (50.1) proviene que las imágenes de los conjuntos $\bar{D}$ y $\bar{D}_1$ en las aplicaciones f y f_1 coinciden:

$$f(\bar{D}) = f_1(\bar{D}_1). \tag{50.2}$$

Diremos, además, que las condiciones impuestas sobre las aplicaciones equivalentes en la definición 1 son independientes. A saber, de lo que F es una aplicación homeomorfa de la región cerrada D sobre otra región cerrada $\bar{D}_1$ no se infiere que transforma los puntos interiores en interiores. Por ejemplo, si $D = \{(u, v) : : u^2 + v^2 < 1\}$ es un círculo y $D_1 = \{(u, v) : 0 < u^2 + v^2 < 1\}$ es un círculo con centro "punzado", entonces la aplicación idéntica (que es, evidentemente, homeomorfa) de $\bar{D}$ sobre $\bar{D}_1$ hace pasar el punto interior (0, 0) de la región D al punto límite (0, 0) de la región D_1.

Demos ahora la definición de superficie.

Definición 2. *Cualquier conjunto de toda clase de aplicaciones continuas $r(u, v)$, equivalentes entre sí (véase la definición* 1), *de las regiones planas cerradas $\bar{D}$ en el espacio tridimensional R^3 se denomina superficie S dada en forma paramétrica y se designa*

$$S = \{r(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}, \tag{50.3}$$

y cada una de las aplicaciones continuas equivalentes citadas $r(u, v)$ lleva el nombre de representación de la superficie S dada en forma paramétrica.

Si $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, es una representación de la superficie S dada en forma paramétrica y si $r(u, v)$ es el radio vector con extremo en el punto $r(u, v)$, entonces $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, se llama *representación vectorial* de la superficie citada S y se escribe

$$S = \{r(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}. \tag{50.4}$$

Si $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, las funciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = (u, v)$$

llevan el nombre de *representación coordenada* de la superficie S dada en forma paramétrica y se escribe en este caso

$$S = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}. \tag{50.5}$$

Es evidente que una superficie dada en forma paramétrica se determina unívocamente por cada una de sus representaciones. Esto permite concebir (lo que a menudo resulta más conveniente) el segundo miembro de cada una de las igualdades (50.3), (50.4) y (50.5) no como una totalidad de todas las representaciones de tipo determinado de la superficie en consideración S, sino como su representación correspondiente bien determinada.

Definición 3. *Sean $r(M)$, $M \in \bar{D}$, y $\rho(M_1)$, $M_1 \in \bar{D}_1$, dos representaciones de cierta superficie S dada en forma paramétrica y sea F la aplicación de $\bar{D}$ sobre $\bar{D}_1$ que realiza su equivalencia* (*véase la definición* 1).

Si $M_1 = F(M)$, $M \in \bar{D}$, $M_1 \in \bar{D}_1$ (el punto M, y, por ende, el punto M_1 también están fijos) y, por consiguiente, $r(M) = \rho(M_1) = P \in R^3$, entonces los pares (P, M) y (P, M_1) se llaman equivalentes y se escribe en este caso

$$(P, M) \sim (P, M_1).$$

Es fácil comprobar que
1) $(P, M) \sim (P, M)$;
2) si $(P, M) \sim (P, M_1)$, entonces $(P, M_1) \sim (P, M)$;
3) si $(P, M) \sim (P, M_1)$, y $(P, M_1) \sim (P, M_2)$, entonces $(P, M) \sim (P, M_2)$.

Si $(P, M) \sim (P, M_1)$ y M es un punto interior (límite) de la región cerrada $\bar{D}$, entonces, de acuerdo con la definición 1, M_1 será también un punto interior (límite) de la región cerrada $\bar{D}_1$.

Definición 4. *Sea S una superficie dada en forma paramétrica. Cualquier totalidad $\{(P, M)\}$, $M \in \bar{D}$, de todos los pares equivalentes entre sí (P, M) (el punto $P \in R^3$ está fijo) se denomina punto de la superficie dada S y el punto P, su portador.*

Un punto $\{(P, M)\}$, $M \in D$, de la superficie S se llama interior (de contorno), si cada punto M es interior (de frontera) para la región cerrada correspondiente $\bar{D}$.

Todo punto $\{(P, M)\}$, $M \in \bar{D}$, de una superficie $S = \{r(M), M \in \bar{D}\}$, dada paramétricamente se determina unívocamente por cada par $(P, M) \in \{(P, M)\}$, y, como en este par $P = r(M)$, cualquier punto de la superficie S, definida en forma paramétrica, para cierta representación dada $r(M)$, $M \in \bar{D}$, de esta superficie, se determina unívocamente por el punto M, con la particularidad de que el punto $P = r(M)$ es el portador del punto considerado de la superficie. Por esta razón, para abreviar, los puntos de una superficie dada en forma paramétrica se designarán, por regla general, no mediante el símbolo $\{(P, M)\}$, sino simplemente $r(M)$, o bien, lo que es igual, $r(u, v)$, donde $M = (u, v)$. En virtud de lo expuesto, esta designación posee el significado unívoco.

Definición 5. *Una totalidad de todos los portadores de todos los puntos de la superficie S dada en forma paramétrica se denomina portador de dicha superficie.*

En vista de la condición (50.2), el portador de una superficie dada en forma paramétrica (el que representa, evidentemente, cierto conjunto de puntos en el espacio R^3) se determina unívocamente por cualquiera de sus representaciones.

Definición 6. *El punto $P \in R^3$ que sirve de portador de dos puntos distintos de la superficie S dada paramétricamente se llama punto múltiple del portador de la superficie dada en forma paramétrica.*

Volviendo a la definición de superficie, proporcionada en el p. 50.1, vemos que lo que se ha denominado en aquella circunstancia "*superficie continua*" se llama en términos nuevos "*portador de una superficie dada en forma paramétrica*". La tentativa de introducir la noción de "punto de la superficie" para las superficies provistas de puntos múltiples conduce en tal o cual forma a las definiciones 4 y 6. Recalquemos que la noción de superficie dada en forma paramétrica con puntos múltiples resulta muy cómoda para considerar toda una serie de problemas que se analizan en los párrafos que siguen.

En adelante, siempre que no surjan equivocaciones, la "superficie continua" (véase el p. 50.1) o bien, que es lo mismo, el "portador de una superficie dada paramétricamente" (véase la definición 5), como también la "superficie dada paramétricamente" (véase la defición 2) se llamarán simplemente superficie.

Definamos ahora el concepto de una parte de la superficie.

Definición 7. *Supongamos que S representa una superficie dada paramétricamente;* $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, *es cierta representación de dicha superficie;* D', *una región contenida en D:* $D' \subset D$. *La superficie* S' *dada paramétricamente que se determina por la representación* $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, *se denomina parte de la superficie S.*

Como ya se ha indicado (véase el p. 50.1), el concepto de aplicaciones equivalentes de las regiones planas cerradas puede introducirse no sólo para las aplicaciones continuas, sino también para otras clases de aplicaciones, por ejemplo, para aquellas que son continuamente derivables. En el caso de las superficies dadas paramétricamente esto conduce a las superficies continuamente derivables. La definición de las últimas está basada sobre el concepto de aplicaciones equivalentes respecto de las transformaciones continuamente derivables.

Demos a conocer este concepto. Por función continuamente derivable en la clausura de cierta región se entenderá, como antes (véase el p. 39.3), aquella que tiene derivadas continuas en la propia región las cuales pueden ser prolongadas a la frontera de la misma.

Una aplicación de cierta región cerrada se denomina *continuamente derivable*, si toda función coordenada que determinada dicha aplicación (véase el p. 41.4), es continuamente derivable en la región cerrada que se considera. Las funciones prolongadas en estos casos se denotan mediante los mismos símbolos que se usan para designar funciones prolongables de partida.

Si cierta aplicación $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$ es continuamente derivable en la clausura $\bar{D}$ de la región D, entonces, en virtud del convenio adoptado, esto es testimonio de que, en particular, el jacobiano $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ de esta aplicación es continuamente prolongable de la región D a su clausura $\bar{D}$ y la prolongación del jacobiano, que se designa por el mismo símbolo $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$, se llamará también jacobiano.

Ante todo es necesario enunciar qué se entenderá por aplicaciones equivalentes continuamente derivables; con este fin introduzcamos el concepto de aplicaciones regulares.

Definición 8. *Una aplicación homeomorfa F de la clausura* $\bar{D}$ *de una región plana D sobre la clausura* $\bar{D}_1$ *de otra región plana* D_1 *que hace pasar los puntos interiores a los interiores y los puntos de frontera a los de frontera, lleva el nombre de aplicación regular de la región cerrada* $\bar{D}$ *sobre otra región cerrada* $\bar{D}_1$, *si tanto la propia aplicación F, como la aplicación* F^{-1}, *inversa de F, son continuamente derivables en las regiones cerradas* $\bar{D}$ *y* $\bar{D}_1$, *respectivamente*,

Observemos que toda aplicación regular F de una región cerrada $\bar{D}$ tiene en todos los puntos de D un jacobiano distinto de cero. En efecto, de acuerdo con la definición 8, en la aplicación F la imagen de cada punto interior es un punto interior. Por cuanto en estos puntos las aplicaciones directa y, correspondientemente, inversa son continuamente derivables, sus jacobianos no pueden reducirse a cero, pues el producto de éstos es igual a uno (véase el p. 41.7).

De aquí se deduce que el jacobiano de una aplicación regular F tampoco es nulo en la región cerrada $\bar{D}$. Efectivamente, en virtud de que los jacobianos de las aplicaciones, tanto directa, como inversa, son continuamente prolongables a las clausuras respectivas $\bar{D}$ y $\overline{F(D)}$ de las regiones D y $F(D)$, el producto de dichos jacobianos es también igual a uno para todos los puntos de la región cerrada $\bar{D}$.

Ya nos encontramos con las aplicaciones regulares de regiones planas cerradas del tipo especial, por ejemplo, en el p. 46.1.

Definición 9. *Supongamos que f y* f_1 *son las aplicaciones continuas de las clausuras* $\bar{D}$ *y* $\bar{D}_1$ *de las regiones planas D y* D_1 *en el espacio* R^3 *y sean dichas aplicaciones continuamente derivables en las regiones cerradas* $\bar{D}$ *y* $\bar{D}_1$. *Las aplicaciones f y* f_1 *se llaman equivalentes respecto de las aplicaciones continuamente derivables, si existe tal aplicación regular F de la región cerrada* $\bar{D}$ *sobre otra región cerrada* $\bar{D}_1$ *que para todo punto* $M \in \bar{D}$ *se cumple la condición* (50.1).

Ahora podemos definir la superficie continuamente derivable.

Definición 10. *Cualquier conjunto de aplicaciones* $r(u, v)$ *de las regiones planas cerradas* $\bar{D}$ *en el espacio tridimensional* R^3, *siendo dichas aplicaciones continuamente derivables y equivalentes respecto de las transformaciones continuamente derivables, lleva el nombre de superficie continuamente derivable S, dada en forma paramétrica, y cada una de las apicaciones mencionadas* $r(u, v)$ *se denomina representación de esta superficie*

$$S = \{r(u, v);\ (u, v) \in \bar{D}\}.$$

Subrayemos que si la superficie $S = \{r(u, v);\ (u, v) \in D\}$ es continuamente derivable, esto significa, en particular, que cualquier su representación vectorial $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, tiene derivadas parciales r_u y r_v*) que son continuas en la región D y pueden ser continuamente prolongadas a la frontera de ésta. Como, de acuerdo con el convenio adoptado, las funciones prolongadas se designan mediante los mismos símbolos que las prolongables **), se puede considerar que las funciones r_u y r_v son continuas en la región cerrada $\bar{D}$.

De modo semejante podemos definir también otras clases de las superficies dadas paramétricamente, por ejemplo, las superficies dadas en forma paramétrica que

---

*) Los conceptos de tal género como son, por ejemplo, continuidad, límite, derivabilidad se extienden de modo natural a las funciones vectoriales de varias variables. Así, la función $r(u, v)$, definida en la región G, se llama *continua en el punto* $(u_0, v_0) \in G$, si $\lim\limits_{(u,v) \to (u_0,v_0)} r(u, v) = r(u_0, v_0)$. La derivada $\dfrac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0)$ se determina por la igualdad

$$\frac{\partial r(u_0, v_0)}{\partial u} = \left.\frac{dr(u, v_0)}{du}\right|_{u=u_0}$$

**) Con más precisión, este convenio se ha adoptado (véase el p. 39.3) para las funciones escalares y, por lo tanto, para las coordenadas de las funciones vectoriales, razón por la cual es natural adoptarlo para las mismas funciones vectoriales.

son dos veces continuamente derivables o, en general, n veces continuamente derivables, como también el concepto de su punto, portador y su parte.

Al resumir, podemos decir en definitiva que se llama *superficie de tal o cual clase, dada en forma paramétrica, cierta totalidad de aplicaciones* $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, *equivalentes entre sí en determinado sentido, llamadas representaciones de la citada totalidad*.

El concepto de equivalencia se determina en dependencia de la clase que se elige.

Definición 11. *Las transformaciones de los parámetros las cuales realizan el paso de una representación de la superficie a otra, equivalente a la primera, se denominan admisibles.*

De este modo, si $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, y $\rho(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \bar{D}_1$, son dos representaciones de una misma superficie de cierta clase, dada paramétricamente, y la aplicación

$$u_1 = \varphi(u, v),$$
$$v_1 = \psi(u, v)$$

de la región cerrada $\bar{D}$ sobre otra región cerrada $\bar{D}_1$ es la transformación admisible de los parámetros, entonces para todos los puntos $(u, v) \in \bar{D}$ se verifica la correlación (véase (50.1))

$$r(u, v) = \rho[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Una superficie dada en forma paramétrica se determina unívocamente, para la clase prefijada de transformaciones admisibles, por cualquiera de sus representaciones, razón por la cual con el fin de definir tal superficie basta prefijar sólo una de sus representaciones.

50.3. SUPERFICIES DADAS IMPLÍCITAMENTE

Demos a conocer un enfoque más al concepto de superficie. Si $F(x, y, z)$ es una función continua en cierta región tridimensional, la totalidad de los puntos (x, y, z) tales que

$$F(x, y, z) = 0, \tag{50.6}$$

se denomina *superficie dada implícitamente*. Sin detenernos detalladamente en el análisis del enfoque mencionado al concepto de superficie, diremos sólo que en el caso cuando la función F satisfaga en cierto punto (x_0, y_0, z_0) las condiciones del teorema sobre funciones implícitas (véase el p. 41.1), una parte de la superficie (50.6) en cierto entorno del punto citado (es decir, la intersección de este entorno con la superficie dada) admite una representación explícita y podemos decir que en tales condiciones una superficie, dada implícitamente, se reduce localmente a la superficie que se determina mediante una representación explícita (véase el p. 50.1). Precisamente sólo con este tipo de superficies dadas implícitamente se chocará en lo que sigue, por lo cual no nos detendremos especialmente en la explicación de tales o cuales conceptos para las superficies dadas en forma implícita.

A título de ejemplo más sencillo de una superficie dada implícitamente indiquemos la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación forman la superficie de una bola de radio unidad con centro en el origen de coordenadas.

En adelante se estudiarán, principalmente, sólo las superficies continuas, dadas mediante representaciones paramétricas y provistas, en el caso general, de puntos múltiples. Se denominarán, como ya se ha indicado, simplemente "superficies"; si el concepto de superficie debe entenderse en otro sentido, esto se especificará especialmente.

50.4. PLANO TANGENTE Y NORMAL A LA SUPERFICIE

Sea

$$S = \{r(u, v); (u, v) \in \bar{D}\} \tag{50.7}$$

una superficie continuamente derivable. Examinemos cierta representación vectorial suya $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$. Al igual que cualquiera de sus representaciones vectoriales, es una función vectorial continuamente derivable en la región plana cerrada $\bar{D}$.

Convengamos en considerar, para simplificar, que la intersección de cada recta $u = u_0$ o $v = v_0$ con la región cerrada $\bar{D}$ consta de un segmento (que, quizás, se degenera en un punto) o es vacía. Supongamos, por ejemplo, que la intersección de $\bar{D}$ con la recta $v = v_0$ es no vacía, entonces

$$r = r(u, v_0), \quad (u, v_0) \in \bar{D}$$

(v_0 es fijo) es la representación de cierta curva continuamente derivable que se llama *línea coordenada* (*u-línea*). El vector

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u)$$

será su vector tangente. Análogamente se determinan otras líneas coordenadas (*v-líneas*) con ayuda de la representación

$$r = r(u_0, v), \quad (u_0, v) \in \bar{D}$$

(u_0 es fijo) y los vectores, tangentes a ellas,

$$r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v).$$

Definición 12. *Un punto* $r(u, v)$ *de la superficie* (50.7), *para el cual los vectores* r_u *y* r_v *no son colineales (linealmente independientes) se denomina no singular para la representación dada de esta superficie. En el caso contrario, es decir, cuando los vectores* r_u *y* r_v *son colineales en el punto dado, se denomina punto singular de la superficie para la representación dada de ésta.*

Si un punto de la superficie no es singular, en él, en particular, $r_u \neq 0$, $r_v \neq 0$. Evidentemente, un punto de la superficie es no singular, para la representación dada de la misma, cuando, y sólo cuando, en este punto $r_u \times r_v \neq 0$.

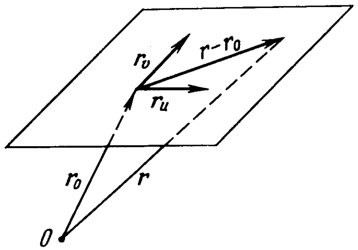


Fig. 213

Ejercicio 1. Demuéstrese que si $r(u_0, v_0)$ es un punto interior no singular de la superficie S, para la representación dada $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, es decir, para este punto $(u_0, v_0) \in D$ y $r_u \times r_v \neq 0$, entonces cierta parte de la superficie S, para la cual el punto $r(u_0, v_0)$ es también interior, cuenta con una representación explícita respecto de uno de los ejes de coordenadas.

Consideraremos una curva en la superficie (50.7). Supongamos que esta curva viene dada por las funciones continuamente derivables

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad (u(t), \quad v(t)) \in D, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

es decir, por la representación

$$r = r[u(t), v(t)], \quad (u(t), v(t)) \in D, \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{50.8}$$

con la particularidad de que $u'^2(t) + v'^2(t) > 0$ en $[a, b]$.

Al derivar la igualdad (50.8), obtendremos

$$dr = r_u du + r_v dv, \tag{50.9}$$

donde $du = u'(t)dt$, $dv = v'(t)dt$. Si el punto de la superficie, en el que se considera la igualdad (50.9), no es singular, el vector dr es tangente a la curva (50.8). La igualdad (50.9) muestra que en el punto dado $r(u_0, v_0)$ de la superficie (50.7) la tangente a cualquier curva (50.8) en dicha superficie que pasa por el punto $r(u_0, v_0)$ se dispone en el plano de los vectores $r_u(u_0, v_0)$ y $r_v(u_0, v_0)$.

Definición 13. *Un plano que contiene el punto $r(u_0, v_0)$ de la superficie (50.7) y en el que se disponen todas las tangentes a las curvas (50.8) que pasan por el punto citado, se denomina plano tangente a la superficie en el punto dado, llamado punto de tangencia.*

Ejercicio 2. Demuéstrese que para todo vector v, dispuesto en el plano tangente a la superficie S en un punto no singular, existe en la superficie S una curva que pasa por el punto dado, y para la cual el vector v es una tangente.

Si el punto dado de la superficie (50.7) no es singular, en él siempre existe un plano tangente y, además, es único: a saber, en virtud de (50.9), de éste último sirve el plano que pasa por $r(u_0, v_0)$ siendo paralelo a los vectores $r_u(u_0, v_0)$ y $r_v(u_0, v_0)$. De aquí resulta fácil escribir su ecuación en la forma vectorial. Al designar con r_0 el radio vector del punto de tangencia y con r, el radio vector corriente de los puntos en el plano tangente, obtendremos (fig. 213):

$$(r - r_0)r_u r_v = 0$$

(en el primer miembro de la igualdad figura un producto mixto de los vectores mencionados).

Si $r = (x, y, z)$, $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $r_u = (x_u, y_u, z_u)$ y $r_v = (x_v, y_v, z_v)$, la ecuación del plano tangente en la forma coordenada se escribirá del modo siguiente:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

En el caso de que la superficie sea dada explícitamente

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \tag{50.10}$$

tendremos $u = x$, $v = y$, por lo cual

$$\begin{gathered} x_u = 1, \quad y_u = 0, \quad z_u = f_x, \\ x_v = 0, \quad y_v = 1, \quad z_v = f_y; \end{gathered} \tag{50.11}$$

por consiguiente, la ecuación del plano tangente en este caso tendrá por expresión

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$z - z_0 = (x - x_0)f_x + (y - y_0)f_y, \tag{50.12}$$

donde con f_x y f_y están designadas, para abreviar, las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ en el punto (x_0, y_0).

De esta fórmula se deduce que las dos definiciones del plano tangente para una superficie representada explícitamente en la forma (50.10), dadas en el presente punto y en el p. 20.5, son equivalentes. En efecto, ambas definiciones conducen a una misma ecuación (50.12).

Definición 14. *Una recta que pasa por el punto de tangencia de una superficie con el plano tangente y que es perpendicular a este plano, se denomina recta normal a la superficie en el punto citado.*

Su ecuación, en el caso general, tiene por expresión en un punto no singular de la superficie

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

En el caso de la representación explícita (50.10) estas ecuaciones asumen la forma

$$\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y} = -(z - z_0). \tag{50.13}$$

Definición 15. *Todo vector no nulo, colineal con una recta normal, que pasa por el punto dado de una superficie, se denomina normal a dicha superficie en el punto citado.*

Como ejemplo de normal en un punto no singular de una superficie sirve el producto escalar

$$n = r_u \times r_v,$$

calculado en el punto mencionado.

De acuerdo con la definición aducida, en todo punto no singular (para la representación dada) $r(u, v)$ de la superficie en consideración existe, siendo fijados los valores de los parámetros u y v, una recta normal y dicha recta es, además, única. Se debe tener en cuenta que si el punto P de un espacio es un punto múltiple de la superficie, es decir, si existen por lo menos dos pares de parámetros (para la representación dada) (u_1, v_1) y (u_2, v_2) tales que $P = r(u_1, v_2) = r(u_2, v_2)$, entonces puede, naturalmente, ocurrir que a estos pares de parámetros les correspondan diferentes rectas normales, a consecuencia de lo cual en el punto citado P la recta normal no será única.

Para una superficie dada implícitamente por la ecuación

$$F(x, y, z) = 0,$$

donde $F(x, y, z)$ es una función continuamente derivable en el entorno del punto (x_0, y_0, z_0), $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, y en este punto $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$, la ecuación del plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) tiene por expresión

$$(x - x_0)F_x + (y - y_0)F_y + (z - z_0)F_z = 0,$$

donde F_x, F_y y F_z representan los valores de las derivadas parciales correspondientes tomadas en el punto (x_0, y_0, z_0).

Al recordar que un vector de coordenadas F_x, F_y, F_z, es decir, el vector $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ lleva el nombre de *gradiente de la función* F (véase el p. 20.6), vemos que el gradiente de la función en el punto dado de la superficie $F(x, y, z) = 0$ es perpendicular al plano tangente en este punto, es decir, es colineal con la recta normal.

Por ello la ecuación de la recta normal a la superficie tiene por expresión

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}.$$

Todas estas fórmulas se infieren inmediatamente de (50.12) y (50.13). En efecto, si, por ejemplo, $F_z \neq 0$ y $z = f(x, y)$ es una función definida por la ecuación $F = 0$ en el entorno del punto (x_0, y_0, z_0), entonces basta notar que $f_x = -\frac{F_x}{F_z}$, $f_y = -\frac{F_y}{F_z}$ (véase el p. 41.1).

Si la función dada $F(x, y, z)$ es continuamente derivable en la región G, para cualquier punto de una superfiicie dada implícitamente por la ecuación $F(x, y, z) = c$ (c es una constante), obtendremos la ecuación del plano tangente y de la recta normal de la misma forma que en el caso $F = 0$, siempre que en dicho punto $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$. Un conjunto de los puntos $(x, y, z) \in G$, para los cuales $F = c$, se denomina, como ya sabemos, superficie de nivel de la función F (véase el p. 19.1).

De este modo, el gradiente $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie de nivel $F(x, y, z) = c$ está orientado a lo largo de la recta normal a dicha superficie en el punto (x_0, y_0, z_0). En otras palabras, el gradiente de la función es ortogonal a la superficie de nivel (es decir, es perpendicular al plano tangente a la superficie de nivel en el punto que se considera).

Hemos demostrado la existencia del plano tangente en un punto no singular perteneciente a una superficie continuamente derivable cuando esté fijada la representación de la misma. Surge una cuestión: ¿qué será, si pasamos a otra representación de esta superficie? Ante todo, ¿seguirá siendo no singular un punto no singular, y, un punto singular, singular? Resulta que sí.

Demostrémoslo. Sean $r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, y $\rho(u_1, v_1)$, $(u_1, v_1) \in \bar{D}_1$, dos representaciones de una misma superficie continuamente derivable. Por cuanto el paso de cualquier representación de una superficie continuamente derivable a otra representación suya se realiza por medio de la aplicación regular, existe tal aplicación regular

$$u_1 = \varphi(u, v), \qquad v_1 = \psi(u, v) \tag{50.14}$$

de la región cerrada $\bar{D}$ sobre otra región cerrada $\bar{D}_1$ que para todos los puntos $(u, v) \in \bar{D}$ resulta ser válida la igualdad

$$r(u, v) = \rho[\varphi(u, v), \psi(u, v)]. \tag{50.15}$$

En este caso según lo demostrado más arriba, el jacobiano de la aplicación (50.14) nunca se reduce a cero en la región cerrada $\bar{D}$:

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in \bar{D}.$$

Al derivar la identidad (50.15), obtendremos

$$r_u = \varphi_u \rho_{u_1} + \psi_u \rho_{v_1}, \qquad r_v = \varphi_v \rho_{u_1} + \psi_v \rho_{v_1}. \tag{50.16}$$

Por consiguiente, un par de vectores ρ_{u_1}, ρ_{v_1} se transforma en otro par de vectores r_u, r_v con ayuda de una matriz regular

$$\begin{Vmatrix} \varphi_u & \psi_v \\ \varphi_u & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Por ello, para el punto dado (u, v) los vectores r_u, r_v serán linealmente independientes, si, y sólo si, son linealmente independientes los vectores ρ_{u_1}, ρ_{v_1} en el punto (u_1, v_1) obtenido del punto (u, v) con ayuda de la aplicación (50.14), con la particularidad de que en el caso de su independencia lineal el plano de los vectores r_u y r_v coincide con el de los vectores ρ_{u_1} y ρ_{v_1}.

Así pues, *un punto (para la representación dada) no singular (singular) de una superficie continuamente derivable será también no singular (singular) para otra representación de la superficie citada, y un plano, tangente a la superficie en un punto no singular para una representación de la superficie, será tangente también para otra representación de la misma.*

Definición 16. *Una superficie continuamente derivable privada de puntos singulares, se llama superficie suave.*

De acuerdo con lo demostrado más arriba, para comprobar que la superficie dada es suave, basta convencerse de que la misma cuenta con una representación continuamente derivable y para esta última no hay puntos singulares.

Conviene fijar la atención en que las funciones vectoriales r_u y r_v de la superficie suave $S = \{r(u, v), (u, v) \in \bar{D}\}$ no sólo son continuas en la clausura de la región D, sino, de conformidad con la definición, no son colineales en esta clausura $\bar{D}$. En otras palabras, para la superficie suave (50.7) en todo punto de la región cerrada $\bar{D}$ se cumple la desigualdad

$$r_u \times r_v \neq 0.$$

OBSERVACIÓN. De las fórmulas (50.16) proviene que

$$r_u \times r_v = (\varphi_u \rho_{u_1} + \psi_u \rho_{v_1}) \times (\varphi_v \rho_{u_1} + \psi_v \rho_{v_1}) =$$
$$= \varphi_u \psi_v (\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}) + \psi_u \varphi_v (\rho_{v_1} \times \rho_{u_1}) =$$
$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} (\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}).$$

Por cuanto, para las transformaciones admisibles de los parámetros (50.14), el jacobiano $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ nunca se reduce a cero en $\bar{D}$, de la fórmula obtenida se deduce que los productos vectoriales $r_u \times r_v$ y $\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}$ en el punto dado de la superficie pueden reducirse a cero, si sólo se reducen simultáneamente. Pero, se ha notado que la condición necesaria y suficiente para que el punto dado de la superficie, para la representación dada de la superficie $r(u, v)$, sea no singular es que el producto vectorial $r_u \times r_v$ en dicho punto sea distinto de cero. De este modo hemos demostrado una vez más que un punto no singular (singular) de la superficie será el mismo tanto para una representación de la superficie, como para la otra.

Ejercicios. 3. Fórmense las ecuaciones de un plano tangente y de una normal a la superficie $x = 2u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3$ en el punto $M(3; 5; 7)$.

4. Trácese a la superficie $xyz = 1$ un plano tangente que sea paralelo al plano $x + y + z - a = 0$ (a = const).

5. Demuéstrese que todos los planos tangentes de la superficie $z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (f es una función derivable arbitraria) pasan por el origen de coordenadas.

6. Demuéstrese que todos los planos tangentes, trazados a la superficie $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v, z = au + f(v)$ (a = const, f es una función derivable arbitraria) en todo punto de su línea coordenada $v = c$ (c = const), pasan a través de la recta fija.

50.5. PRIMERA FORMA CUADRÁTICA DE UNA SUPERFICIE

Fijemos una representación $r = r(u, v), (u, v) \in \bar{D}$, de la superficie suave dada y analicemos un plano tangente a la superficie en alguno de sus puntos. Según hemos visto, los vectores r_u y r_v forman en dicho plano una base. Los vectores, dispuestos en el plano tangente, los designaremos por el símbolo dr, y sus coordenadas respecto de la base r_u y r_v, por du y dv *). De este modo,

$$dr = r_u du + r_v dv.$$

Hallemos el cuadrado de la longitud de un vector, dispuesto en el plano tangente, expresándolo en términos de las coordenadas de la base natural r_u y r_v (en el álgebra lineal esta expresión se denomina, comúnmente, *forma métrica principal* del espacio en consideración, en el caso dado, de un plano)

$$|dr|^2 = (r_u du + r_v dv)^2 = r_u^2 du^2 + 2 r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2.$$

Introduzcamos las designaciones

$$E = r_u^2, \quad F = r_u r_v, \quad G = r_v^2; \tag{50.17}$$

entonces

$$|dr|^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2. \tag{50.18}$$

Definición 17. *Una forma cuadrática $E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$ se denomina primera forma cuadrática de la superficie* **).

Veamos cómo varía pasando a la otra representación de la superficie (véanse las fórmulas (50.14)). Como se sabe (véase (50.16)) en este caso las bases en el plano que se considera se transforman con ayuda de una matriz

$$\begin{Vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

Por consiguiente, las coordenadas de los vectores se transforman con ayuda de una matriz transpuesta, es decir, de la matriz de Jacobi

$$J = \begin{Vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{Vmatrix}.$$

*) Esta designación es bien natural, pues si un vector en el plano tangente es tangente a cierta curva (50.8) en la superficie, entonces, al elegir adecuadamente el parámetro, el vector dr será una diferencial del vector (50.8) y, por lo tanto, para él se verificará la igualdad (50.9).

**) El hecho de que la forma cuadrática en consideración se denomina primera se debe a que existen también otras formas cuadráticas relacionadas con la superficie. El estudio de éstas sale de los márgenes de este libro.

Al designar mediante A la matriz de la primera forma cuadrática (50.18) para la representación de la superficie $r = r(u, v)$, y mediante A_1, para la representación $\rho = \rho(u_1, v_1)$, es decir,

$$A = \begin{Vmatrix} E & F \\ F & G \end{Vmatrix}, \quad E = r_u^2, \quad F = r_u r_u r_v, \quad G = r_v^2,$$

$$A_1 = \begin{Vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{Vmatrix}, \quad E_1 = \rho_{u_1}^2, \quad F_1 = \rho_{u_1}\rho_{v_1}, \quad G_1 = \rho_{v_1}^2,$$

entonces, según se sabe por el curso del álgebra lineal, para la primera forma cuadrática de la superficie, al igual que, en general, para cualquier forma cuadrática,

$$A = J^* A_1 J,$$

donde con J^* está designada la matriz transpuesta respecto de la matriz de Jacobi J.

De aquí, para los determinantes correspondientes

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2,$$

o bien

$$EG - F^2 = (E_1 G_1 - F_1^2) \left| \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} \right|^2. \tag{50.19}$$

Ha de notarse que en virtud de la propia definición, la primera forma cuadrática es definida positiva (en efecto, si $du^2 + dv^2 > 0$, es decir, si $dr \neq 0$, entonces $|dr|^2 > 0$) y por esta razón su discriminante es positivo: $EG - F^2 > 0$. Estando ausentes los puntos singulares, se verifican las desigualdades $r_u \neq 0$, $r_v \neq 0$, por lo cual, de la definición de coeficientes E y G (50.17), proviene inmediatamente que $E > 0$ y $G > 0$.

Si se conoce la primera forma cuadrática de una superficie, podemos resolver (sin disponer de la ecuación de la superficie y sin conocer las formas de la misma), toda una serie de problemas concernientes a ella, por ejemplo, hallar las longitudes de las curvas dispuestas en la superficie, como también los ángulos entre ellas, calcular el área de las partes de la superficie. La variedad de todas las propiedades de la superficie que pueden establecerse, partiendo sólo de la primera forma cuadrática, se denomina *geométría interior* de la superficie. Pasemos precisamente a la consideración de los problemas similares.

Ejercicios. 7. ¿Cuál de las siguientes formas cuadráticas puede servir de primera forma cuadrática de cierta superficie: a) $du^2 + 3du dv + dv^2$; b) $du^2 + 6du dv + 9dv^2$; c) $du^2 - 6du dv + 13dv^2$; d) $du^2 + 2du dv - dv^2$.

8. Hállese la primera forma cuadrática de un *helicoide* (superficie helicoidal) $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = av + f(u)$ (a = const, f es una función derivable arbitraria).

9. Demuéstrese que la primera forma cuadrática de una superficie de revolución es reducible a la forma $du^2 + G(u)dv^2$.

50.6. CURVAS EN UNA SUPERFICIE. CÁLCULO DE SUS LONGITUDES Y DE ÁNGULOS ENTRE ELLAS

Examinemos una curva continuamente derivable (50.8) dispuesta en la superficie dada (50.7). Supongamos que las longitudes de los arcos $s = s(t)$ en la superficie se calculan en el sentido de crecimiento del parámetro, es decir, que $\frac{ds}{dt} > 0$. Según se sabe (véase el p. 16.5), $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dr}{dt}\right|$, de donde $ds = |dr|$, por consiguiente, véase (50.18),

$$ds^2 = |dr|^2 = dr^2 = E\,du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

por eso

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

De este modo, para la longitud L de la curva (50.8) obtenemos la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du dv}{dt\,dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Pasemos ahora al cálculo de los ángulos entre las curvas en una superficie.

Definición 18. *Si dos curvas se cortan en cierto punto, el ángulo entre ellas en el punto citado será aquel que está formado por sus tangentes en el punto mencionado (si es que existen).*

Supongamos que dos curvas suaves, dispuestas en la superficie en consideración, se cortan en cierto punto. Designemos las diferenciales de sus representaciones en dicho punto mediante dr y δr, respectivamente, y los coeficientes de las descomposiciones según los vectores r_u y r_v, mediante du, dv y δu, δv, respectivamente; en este caso

$$dr = r_u du + r_v dv,$$

$$\delta r = r_u \delta u + r_v \delta v.$$

Por eso, si φ es el ángulo buscado entre las curvas, es decir, el formado por los vectores dr y δr, entonces

$$\cos\varphi = \frac{dr\,\delta r}{|dr|\,|\delta r|} = \frac{E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G dv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Ejercicios. 10. Demuéstrese que para que las u-líneas y v-líneas coordenadas en una superficie sean ortogonales, es necesario y suficiente que en todo punto de la superficie se verifique la igualdad $F = 0$.

11. Hállese el ángulo entre las curvas $v = 2u$, $v = -2u$ en una superficie con la primera forma cuadrática $du^2 + dv^2$.

50.7. AREA DE UNA SUPERFICIE

Supongamos que la representación continuamente derivable $r(u, v)$ de la superficie suave en consideración S se ha definido en la clausura $\bar{D}$ de la región cuadrable D. Examinemos la partición T_k del plano de variables u y v en cuadrados de cierto rango k. Por cuanto del carácter cuadrable de la región proviene el carácter acotado de ésta, la región cerrada $\bar{D}$ resultará cubierta por un número finito de cuadrados de rango k. Numeremos de uno u otro modo todas las intersecciones no vacías de estos cuadrados con la región cerrada $\bar{D}$ y designémoslas mediante X_i, $i = 1, 2, \dots, i_0$. Entonces

$$\tau = \{X_i : X_i = Q \cap \bar{D} \neq \phi, Q \in T_k\}$$

forma la partición de la región cerrada $\bar{D}$ (véase la definición de la partición en el p. 44.3).

Examinemos los conjuntos X_i que representan en sí cuadrados cerrados completos dispuestos en la región D (siendo suficientemente menuda la finura de la partición τ, tales conjuntos no vacíos X_i siempre existen; ¿por qué?). Denotemos con $\tau(\partial D)$ la totalidad de todos los conjuntos mencionados X_i (compárese con el p. 44.4).

Elijamos un cuadrado cualquiera $X_i \in \tau(\partial D)$ (fig. 214). Sea h la longitud de su lado y sea P_i uno de sus vértices. Entonces, al pasar del vértice P_i a los vértices vecinos, el radio vector $r(u, v)$ adquirirá (con exactitud de hasta los infinitésimos de orden superior que h) los incrementos iguales en valor absoluto a los números $|r_u h|$ y $|r_v h|$, respectivamente, pues

$$r(u + h, v) - r(u, v) = r_u h + o(h),$$
$$r(u, v + h) - r(u, v) = r_v h + o(h).$$

Al determinar el área de la superficie, sustituyamos las imágenes de los cuadrados $X_i \in \tau(\partial D)$ por los paralelogramos rectilíneos construidos a partir de los vectores $r_u h$ y $r_v h$ (fig. 215). Hallemos el área de tal paralelogramo. Al designarla con $\Delta\sigma_i$, obtendremos

$$\Delta\sigma_i = |r_u h \times r_v h|_{P_i} = |r_u \times r_v|_{P_i} h^2 = |r_u \times r_v|_{P_i} \mu X_i.$$

Las funciones r_u y r_v son continuas en la región cerrada cuadrable $\bar{D}$, por lo cual

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{X_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i = \iint_D |r_u \times r_v| \, du\, dv, \qquad (50.20)$$

donde δ_τ significa, como siempre, la finura de la partición τ. Evidentemente, la condición de que la finura de la partición δ_τ tiende a cero es equivalente a que los rangos k de las particiones del plano en cuadrados, de las cuales hemos partido, tienden hacia el infinito.

Para demostrar la validez de la igualdad (50.20), basta observar que, siendo elegidos arbitrariamente los puntos $P_i \in X_i \in \tau$, $i = 1, 2, \dots$, se verifica la igualdad

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{X_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{i_0} |r_u \times r_v|_{P_i} \mu X_i = \int_D |r_u \times r_v| \, du\, dv.$$

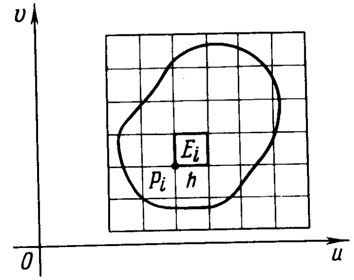


Fig. 214

Efectivamente, en primer lugar, el límite de las sumas integrales de una función integrable no depende de la elección, en el caso dado, de los puntos $P_i \in X_i \in \tau$, y, en segundo lugar, la omisión en las sumas integrales de los sumandos, correspondientes a los conjuntos $X_i \in \tau$ que no figuran en $\tau(\partial D)$, no influye, como se sabe (véase el p. 44.3), en la magnitud del límite de sumas integrales, en nuestro caso, en la magnitud del límite (50.20).

Definición 19. *El límite* (50.20) *lleva el nombre de área o medida* μS *de la superficie* S:

$$\mu S = \lim_{\sigma_\tau \to 0} \sum_{X_i \in \tau(\partial D)} \Delta\sigma_i.$$

Para calcular el área de la superficie, de (50.20) se obtiene inmediatamente la fórmula

$$\mu S = \iint_D |r_u \times r_v| \, du\, dv. \qquad (50.21)$$

Escribámosla en otra forma, expresando el integrando en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática. Diremos, ante todo, que para cualesquiera vectores a y b son lícitas las fórmulas

$$|a \times b| = |a|\,|b| \operatorname{sen} \widehat{ab},$$
$$ab = |a|\,|b| \cos \widehat{ab},$$

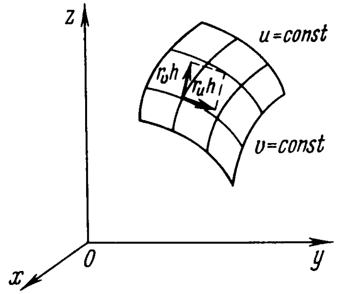


Fig. 215

donde $\widehat{ab}$ es el ángulo formado por los vectores a y b. Elevemos al cuadrado y sumemos estas fórmulas:

$$|a \times b|^2 + |ab|^2 = a^2 b^2.$$

De aquí se deduce que

$$|r_u \times r_v|^2 = r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2 = EG - F^2, \tag{50.22}$$

por lo cual la fórmula (50.21) puede escribirse también así:

$$\mu S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{50.23}$$

A veces, para abreviar la notación, la expresión $\sqrt{EG - F^2}\, du dv$ se designa por el símbolo dS:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du dv; \tag{50.24}$$

y se llama *elemento del área*. Aplicando esta designación, podemos escribir la fórmula (50.23) en la forma

$$\mu S = \iint\limits_D dS.$$

Mostremos que la magnitud del área de una superficie no depende de la elección de su representación (en este caso se consideran sólo las representaciones dadas en las regiones cerradas cuadrables). Pasemos a otra representación $\rho = \rho(u_1, v_1)$ de la superficie continuamente derivable dada, la cual viene dada en la clausura $\bar{D}_1$ de la región cuadrable D_1 y, por consiguiente, para la cual la transformación (50.14) de los parámetros u, v en los u_1, v_1 es una aplicación regular de D sobre $\bar{D}_1$.

En el nuevo sistema de coordenadas consideraremos la integral

$$\mu S = \iint\limits_{D_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}\, du_1 dv_1.$$

Para compararla con la integral (50.23), realicemos el cambio de variables (50.14), lo que es posible, puesto que todas las premisas del teorema 2′ del p. 46.2 están en este caso cumplidas. Al utilizar (50.19), obtendremos

$$\mu S_1 = \iint\limits_{D_1} \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}\, du_1 dv_1 =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du dv = \mu S.$$

De este modo, efectivamente, la magnitud del área de una superficie no depende de cómo se elige su representación.

Hallemos la expresión para el área de una superficie que tiene representación explícita $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$. En este caso $u = x$, $v = y$, $r = (x, y, f(x, y))$ y, por lo tanto (véanse las fórmulas (50.11)),

$$r_u = (1, 0, f_x), \quad r_v = (0, 1, f_y),$$

$$E = r_u^2 = 1 + f_x^2, \quad F = r_u r_v = f_x f_y,$$

$$G = r_v^2 = 1 + f_y^2, EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) -$$

$$- f_x^2 f_y^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2; \mu S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx dy. \tag{50.25}$$

Ejercicios. 12. Demuéstrese que el área de una superficie de revolución, definida en el p. 32.4, coincide con el área de esta superficie, definida en el punto presente.

13. Hállense el perímetro y los ángulos interiores de un triángulo curvilíneo dispuesto en la superficie con la primera forma cuadrática $du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ y limitado por los arcos de las curvas $u = \frac{1}{2}av^2$, $u = -\frac{1}{2}av^2$, $v = 1$ $(a = \text{const} > 0)$.

14. Hállese el área de un cuadrilátero curvilíneo dispuesto en el *helicoide* $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = au$ $(a = \text{const})$ y limitado por los arcos de las curvas $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.

15. En una superficie con la primera forma cuadrática $du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ está dispuesto un triángulo curvilíneo limitado por los arcos de las curvas $u = av$, $u = -av$, $v = 1$. Hállese el área de este triángulo.

50.8. ORIENTACIÓN DE LA SUPERFICIE SUAVE

En este párrafo se supondrá que en un espacio siempre se elige el sistema directo de coordenadas rectangulares cartesianas. Esto significa lo siguiente. Sean i, j y k los versores de los ejes coordenados. Mirando desde el extremo del vector k en la dirección del plano xOy, concluimos que con el fin de hacer coincidir el vector i con el j se debe girar el primero al ángulo $\frac{\pi}{2}$ en el sentido contrahorario. En este caso suele decirse también que la terna ordenada de vectores i, j, k está concordada según la "regla de sacacorchos". Analíticamente esto significa que en el espacio de puntos (x, y, z) se consideran sólo tales bases ordenadas e_1, e_2, e_3 que se obtienen de la base ordenada $i = (1; 0; 0)$, $j = (0; 1; 0)$, $k = (0; 0; 1)$ con ayuda de las matrices que tienen determinante positivo (com más precisión, igual a + 1). De esta forma, si

$$e_m = c_{m1} i + c_{m2} j + c_{m3} k, \quad m = 1, 2, 3,$$

es una base que define el sistema directo de coordenadas, entonces

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = +1.$$

Todas las definiciones y nociones que se introducen más abajo en este párrafo y que están relacionadas con las coordenadas vienen dadas con arreglo a los sistemas directos de coordenadas.

Sea S una superficie suave (véase la definición 16). Cualquier su representación vectorial $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, es continuamente derivable y $r_u \times r_v \neq 0$ en la región cerrada $\bar{D}$.

Por consiguiente, en todo punto de la superficie S está definido el vector unidad normal

$$\nu = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}, \tag{50.26}$$

que es una función continua en $\overline{D}$. Esta circunstancia se expresa brevemente diciendo que en la superficie S existe una normal unitaria continua.

Definición 20. *Toda normal unitaria continua* $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, *de una superficie suave* $S = \{r(u, v); (u, v) \in \overline{D}\}$ *lleva el nombre de orientación de la superficie* S.

Evidentemente, si el vector $\boldsymbol{\nu}$ es una orientación de la superficie S, $-\boldsymbol{\nu}$ será también orientación de la misma superficie y es fácil mostrar que otras orientaciones no existen.

Ejercicio 16. Demuéstrese que una superficie puede tener sólo dos orientaciones.

Una de las dos orientaciones, $\boldsymbol{\nu}$ ó $-\boldsymbol{\nu}$ (elegida arbitrariamente) se llama *positiva* y la otra, *negativa*.

De este modo, el concepto de orientación positiva o negativa en este sentido no se determina unívocamente por la propia superficie, sino depende de la elección de su representación. Las orientaciones positiva y negativa de una superficie se llaman orientaciones *opuestas* de la misma.

En lo que sigue, para concretar, como orientación positiva, para una superficie suave dada mediante la representación vectorial fija $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, se tomará siempre el vector (50.26).

Subrayemos que la continuidad de la normal $\boldsymbol{\nu}$ se considera respecto de las variables u, v, y no respecto de las variables espaciales x, y, z. Si la superficie cuenta con puntos múltiples, puede ocurrir que en el punto de un espacio, portador de distintos puntos de la superficie, pueden haber varias normales distintas.

Cuando se requiere que, en la transformación regular de los parámetros u, v, la superficie conserve la orientación, se debe exigir adicionalmente que el jacobiano de tal transformación sea positivo. En efecto, para la transformación de los parámetros

$$u_1 = \varphi(u, v),$$
$$v_1 = \psi(u, v)$$

de las fórmulas (50.16), según lo hemos visto (véase la observación al final del p. 50.4), se deduce que

$$r_u \times r_v = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} (\rho_{u_1} \times \rho_{v_1})$$

y, por consiguiente, si el jacobiano $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ es positivo, los vectores $r_u \times r_v$ y $\rho_{u_1} \times \rho_{v_1}$ están dirigidos hacia un mismo lado, y si es negativo, hacia los lados opuestos.

De este modo, para las superficies con la orientación elegida, como transformaciones admisibles se considerarán aquellas transformaciones continuamente derivables cuyo jacobiano es positivo.

La superficie S con una orientación positiva se designará mediante S^+, y con una orientación negativa, mediante S^-.

Subrayemos que cualquier superficie suave dada paramétricamente es siempre orientable, es decir, siempre tiene su orientación.

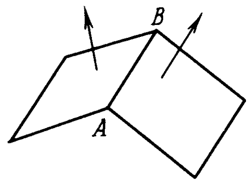


Fig. 216

Definición 21. *Una superficie que tiene fija una de sus orientaciones se denomina orientada.*

La definición de orientación, aducida anteriormente, no puede ser extendida, por supuesto, a las superficies no suaves. Como ejemplo de superficie no derivable en un punto, en la que ya no puede elegirse una normal continua, sirve el cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leqslant a^2. \tag{50.27}$$

En este caso la representación vectorial tiene por expresión:

$$r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}),$$

por consiguiente

$$r_x = \left(1; 0; \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad r_y = \left(0; 1; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right);$$

$$r_x \times r_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 1\right); \quad |r_x \times r_y| = \sqrt{2}.$$

Por cuanto los límites $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ no existen (¿por qué?), entonces la normal unitaria

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{r_x \times r_y}{|r_x \times r_y|} = \left(-\frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}; -\frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

tampoco tiene límite para $(x, y) \to (0; 0)$. Por ello, en el cono (50.27) no se puede elegir una normal continua en $\overline{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$.

Como ejemplo de superficie no suave S, en la que existe toda una línea a lo largo de la cual las normales, cualquier que sea su elección, sufren discontinuidad, sirve una parte del ángulo diedro expuesta en la fig. 216. La línea mencionada en esta superficie es el segmento AB.

50.9. PEGAMIENTO DE LAS SUPERFICIES

La definición, aducida más arriba, de la superficie continua dada en la forma paramétrica no abarca todo lo que interviene intuitivamente en el concepto de superficie. Así, por ejemplo, podemos mostrar que la superficie de una bola no es portadora de ninguna superficie continua dada paramétricamente sin puntos múltiples. Por otra parte, sería una complicación no justificada considerar que la superficie de una bola está provista de puntos múltiples. Existen varios procedimientos para vencer este inconveniente. Elegimos un procedimiento basado en el pegamiento de un número finito de superficies. El pegamiento de las superficies surge de un modo natural en la resolución de los más sencillos problemas. Por ejemplo, es natural considerar la superficie lateral de un cilindro como resultado de pegar los lados opuestos de un rectángulo; la superficie total de un cilindro, como resultado de pegar su superficie lateral y dos bases; la superficie de un cono, como resultado de pegar la superficie lateral de éste con su base, etc.

Pasemos a las definiciones precisas. Diremos que el borde (véase el p. 50.1) de la superficie $S = \{r = r(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}$ es una curva, si la frontera ∂D de la región D es también una curva (con más precisión, portadora de una curva):

$$\partial D = \{u(t), v(t); a \leqslant t \leqslant b\}.$$

En este caso el borde ∂S de la superficie S puede considerarse como una curva:

$$\partial S = \{r(u(t), v(t)); a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Definamos la operación de pegado de las superficies para aquellas superficies cuyos bordes son curvas.

Sean dadas las superficies $S_i = \{r_i(u_i, v_i); (u_i, v_i) \in \bar{D}_i\}$ cuyos bordes ∂S_i son unas curvas, es decir, lo son las fronteras ∂D_i de las regiones D_i:

$$u_i = u_i(t_i), \quad v_i = v_i(t_i), \quad a_i \leqslant t_i \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Entonces los bordes ∂S_i de las superficies serán las curvas

$$\gamma_i = \{r_i(u_i(t_i), v_i(t_i)); a_i \leqslant t_i \leqslant b_i\}.$$

Supongamos que para algunos pares (i, j), $i, j = 1, 2, \dots, m$, $i \neq j$, se han dado un número finito de los segmentos $[a_{ij}^k, b_{ij}^k] \subset [a_i, b_i]$, $a_{ij}^k \leqslant b_{ij}^k$, y de los segmentos $[a_{ji}^k, b_{ji}^k] \subset [a_j, b_j]$, $a_{ji}^k \leqslant b_{ji}^k$, $k = 1, 2, \dots, n_{ij} = n_{ji}$, con la particularidad de que tanto los segmentos $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$, como también los $[a_{ji}^k, b_{ji}^k]$ no tienen dos a dos puntos interiores comunes ni tampoco homeomorfismos $\varphi_{ij}^k: [a_{ij}^k, b_{ij}^k] \to [a_{ji}^k, b_{ji}^k]$, llamados *homeomorfismos de pegamiento*. Además, en este caso, para cualquier $t_i \in [a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ tiene lugar el "pegado"

$$r_i(u_i(t_i), v_i(t_i)) = r_j(u_j(\varphi_{ij}^k(t_i)), \quad v_j(\varphi_{ij}^k(t_i)). \tag{50.28}$$

Designemos mediante γ_{ij}^k una curva cuya representación es

$$r_i(u_i(t_i), \quad v_i(t_i)), \quad t \in [a_{ij}^k, b_{ij}^k].$$

Las curvas γ_{ij}^k se llaman *curvas de pegamiento* o *curvas a lo largo de las cuales se realiza el pegamiento*.

Es evidente que, en virtud de (50.28), la aplicación

$$r = r_j(u_j(t_j), v_j(t_j)), \quad t_j \in [a_{ji}^k, b_{ji}^k],$$

es también la representación de la curva γ_{ij}^k, pues los homeomorfismos φ_{ij}^k representan en sí una transformación admisible del parámetro para la curva γ_{ij}^k.

Supondremos, además, que para $j' \neq j$ los segmentos

$$[a_{ij}^k, b_{ij}^k] \quad \text{y} \quad [a_{ij'}^l, b_{ij'}^l], \quad k = 1, 2, \dots, n_{ij}, \quad l = 1, 2, \dots, n_{ij'}$$

no tienen puntos interiores comunes y, por consiguiente, todo extremo del segmento $[a_{ij}^k, b_{ij}^k]$ puede pertenecer, además, a lo sumo a un segmento $[a_{ij'}^l, b_{ij'}^l]$. Esta condición significa que toda curva de pegamiento γ_{ij}^k es una parte sólo de dos curvas, γ_i y γ_j, que forman los bordes de las superficies S_i y S_j.

Las superficies S_i y S_j se llaman adyacentes, si se pegan por lo menos a lo largo de una curva γ_{ij}^k. El sistema de homeomorfismos de pegamiento φ_{ij}^k se denomina *conexo*, si para cualesquiera superficies S_p y S_q del sistema en consideración existen en él tales superficies $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}$, que $S_{i_1} = S_p$, $S_{i_r} = S_q$ y cada superficie S_{i_ν} es adyacente respecto de $S_{i_{\nu+1}}$, es decir, se ha pegado con ésta a lo largo de una o varias curvas con ayuda de los homeomorfismos de pegamiento correspondientes $\varphi_{i_\nu i_{\nu+1}}$, $\nu = 1, 2, \dots, r - 1$.

Definición 22. *Un sistema de superficies $S_1, S_2, \dots, S_m$ con el sistema conexo de homeomorfismos de pegamiento φ_{ij}^k se llama superficie pegada de las superficies $S_1, \dots, S_m$ a lo largo de las curvas γ_{ij}^k y se designa mediante $S = \{S_i\}$.*

Esta definición, a pesar de ser formalmente engorrosa, tiene, evidentemente, un significado geométrico muy simple. Hablando metafóricamente, la superficie pegada $S = \{S_i\}$ representa en sí las superficies $S_1, \dots, S_m$, ciertos pares de las cuales S_i, S_j tienen identificados (pegados) los puntos que se disponen en las curvas γ_{ij}^k y se aplican uno en el otro en los homeomorfismos φ_{ij}^k, en lo que precisamente consiste la condición de pegamiento (50.28). Indudablemente, como ya se ha indicado, se supone, además, que de cada superficie S_i se puede pasar, realizados un número finito de pasos, a otra superficie cualquiera S_j, cada vez pasando de una cierta superficie a otra adyacente.

Si $S = \{S_i\}$ es una superficie pegada, la totalidad de todos los arcos, que representan tales partes de las curvas ∂S_i que ningunos puntos de las partes indicadas, a excepción, quizás, de los extremales, se pegan con los puntos de otras curvas ∂S_i, se denomina borde ∂S de la superficie pegada S.

Se puede mostrar que reuniendo de modo adecuado las partes citadas de las curvas ∂S_i, pertenecientes al borde ∂S de la superficie $S = \{S_i\}$, podemos obtener un número finito de curvas cerradas (contornos). En otras palabras, el borde de una superficie pegada consta de un número finito de contornos cerrados.

Como ejemplo de pegamiento de las superficies puede servir el pegamiento, para obtener una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, de dos semiesferas $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$, a lo largo de su borde, es decir, a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. Al definir la ecuación de esta circunferencia en la forma paramétrica

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 0, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

a título de homeomorfismo de pegamiento $\varphi: [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ podemos tomar la aplicación idéntica del segmento $[0, 2\pi]$ sobre sí mismo.

Con ayuda del pegamiento de las superficies suaves se puede dar la noción de superficie suave a trozos.

Definición 23. *Una superficie* $S = \{S_i\}$, *obtenida pegando las superficies suaves* $S_1, \ldots, S_m$, *se llama superficie suave a trozos.*

Como ejemplos de superficies suaves a trozos pueden servir la superficie de un cilindro circular, la de un paralelepípedo. Entre tanto, un cono recto circular (50.27) no puede ser dividido en un número finito de partes suaves pegadas, razón por la cual no es una superficie suave a trozos en el sentido de la definición 23. La operación de pegamiento de las superficies puede generalizarse de un modo tal que, conservándose intacta la definición de superficies suaves a trozos para tal operación generalizada de pegamiento, en la clase de las superficies suaves a trozos ya se incluirán también las superficies cónicas. No nos detendremos en esto dejando a cargo del propio lector de hacerlo, en caso de necesidad.

50.10. SUPERFICIES ORIENTABLES Y NO ORIENTABLES

Nuestra tarea inmediata consiste en dar la definición de orientación para las superficies, pegadas de unas superficies que se dan en la forma paramétrica.

La definición de la orientación eligiendo una normal unitaria continua en la superficie resulta en el caso dado incómoda, incluso cuando los puntos múltiples estén ausentes y la continuidad de la normal se entienda como si dependiese continuamente de los puntos del espacio (y no de los parámetros de las superficies que se pegan). Esto se debe a la perturbación eventual de la suavidad de la superficie en aquellas curvas a lo largo de las cuales se realiza el pegamiento.

Por ejemplo, una parte de la superficie del ángulo diedro expuesta en la fig. 216, puede considerarse como resultado de pegar dos rectángulos iguales. Al tender por distintas caras hacia el mismo punto en la arista de dicho ángulo, obtendremos distintos límites de las normales unitarias correspondientes. Más abajo se dará tal definición de una superficie orientable, en términos de la cual la superficie citada será orientable.

Observemos que incluso cuando el "procedimiento suave" se use para pegar las superficies (es decir, cuando para toda curva, a lo largo de la cual se realiza el pegamiento, podemos elegir, en cualquiera de sus puntos, una normal unitaria de modo tal que fuera ésta el límite para las normales unitarias, elegidas de modo adecuado en el entorno del punto citado, de dos superficies que se pegan) las superficies pegadas pueden adquirir nuevas peculiaridades cualitativas: a diferencia de las superficies dadas en la forma paramétrica, en el caso dado no siempre en toda la superficie puede elegirse una normal unitaria continua. Como ejemplo de tal superficie sirve la así llamada cinta o banda de Möbius *), la cual puede obtenerse de una tira rectangular de papel $ABCD$ que se tuerce una vez alrededor de su eje de simetría MN, paralela a los lados BC y AD, después de lo cual se pegan las aristas AB y CD (fig. 217). Verdad es que, empleado tal procedimiento, la cinta de Möbius se obtiene como resultado de pegar la superficie con sí misma. No obstante, no es difícil obtenerla también pegando, de conformidad con la definición 22, dos rectángulos $ABEF$ y $FECD$ (véase la fig. 217).

*) A. F. Möbius (1790—1868), matemático y astrónomo alemán.

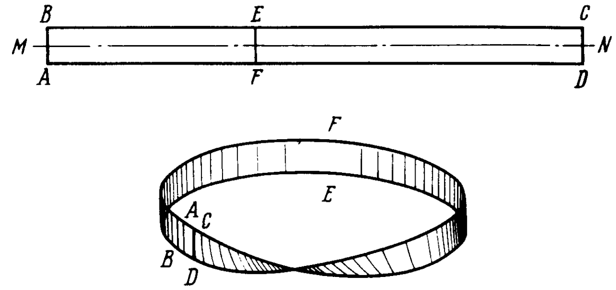


Fig. 217

Una de las peculiaridades características de la cinta de Möbius consiste en que ella tiene sólo una "cara": es imposible, como, por ejemplo, en el caso de la superficie lateral de un cilindro, pintarla de rojo un lado y de azúl, otro lado. Además, en la cinta de Möbius no puede elegirse una normal unitaria que fuera una función continua de un punto del espacio.

Todos los razonamientos aducidos hacen naturales las tentativas de ofrecer tal definición de orientación de una superficie, para la cual las superficies del tipo, por ejemplo, de la superficie de un paralelepípedo resultarían orientadas, y las superficies del tipo de la cinta de Möbius, no orientadas.

Prestemos atención a que la cinta de Möbius puede ser un pordador de una superficie suave, dada paramétricamente, con puntos múltiples y esta superficie, al igual que cualquier otra superficie suave dada paramétricamente, será orientada. Por supuesto, esto no tiene nada que ver con el carácter no orientado de la propia cinta de Möbius.

50.11. SEGUNDO ENFOQUE DEL CONCEPTO DE ORIENTACIÓN DE UNA SUPERFICIE

Pasemos ahora a la descripción de otro enfoque del concepto de orientación que se basa en el pegamiento de las superficies cuyos bordes son unas curvas. Sea $S = \{r = r(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\}$ una superficie suave cuyo borde está constituido por una curva. La orientación positiva de la curva $\partial D = \{u(t),\ v(t);\ a \leqslant b \leqslant b\}$ (es decir, la orientación contrahoraria en el plano u, v con el sistema directo de coordenadas) engendra, en virtud de la aplicación $r(u(t), v(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, una orientación bien determinada del borde ∂S de la superficie S. Esta orientación del borde ∂S de la superficie S se llama concordada con la orientación

$$\nu = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

(véase la definición 20) de la superficie S.

El carácter natural de dicha definición puede aclararse del modo siguiente. Consideremos una superficie dada explícitamente S: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$. Para ella

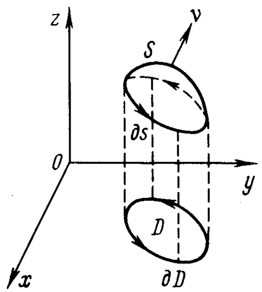


Fig. 218

(véase (50.10), (50.11) y (50.26))

$$\boldsymbol{\nu} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_y^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right).$$

Por consiguiente, $\cos(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}}) = \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} > 0$, es decir, el vector de la normal $\boldsymbol{\nu}$ forma con el eje Oz un ángulo agudo y, por eso, está concordado con la orientación positiva del borde ∂S de la superficie S según la regla de sacacorchos: la orientación del contorno ∂S corresponde al sentido de rotación de la manija del sacacorchos y la dirección de la normal $\boldsymbol{\nu}$, al movimiento del propio sacacorchos (véase la fig. 218).

Evidentemente, si la orientación $\boldsymbol{\nu}$ de la superficie suave en consideración S está concordada con la de su borde ∂S, entonces la orientación $-\boldsymbol{\nu}$ queda concordada con la orientación opuesta de la curva ∂S. De este modo, la definición de la orientación $\boldsymbol{\nu}$ de una superficie suave es equivalente a la definición de la orientación de la curva ∂S que es el borde de la superficie. Por eso el borde orientado ∂S de la superficie suave S lo llamaremos, al igual que la normal unitaria continua $\boldsymbol{\nu}$, *orientación de la superficie S*.

Para una superficie no suave, dada paramétricamente, cuyo borde está constituido por un contorno, su orientación puede considerarse como la definición de partida para la orientación de la propia superficie. Sean S_1 y S_2 dos superficies suaves cuyos bordes son unas curvas y supongamos que estas dos superficies están pegadas (en el sentido de la definición 22) a lo largo de las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, que constituyen las partes de los bordes de las superficies S_1 y S_2. Las orientaciones ∂S_1 y ∂S_2 de las superficies S_1 y S_2 se denominan *concordadas*, siempre que cada una de ellas engendra en las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ que se pegan las orientaciones opuestas.

Definición 24. *Una superficie S, pegada de las superficies $S_1, \dots, S_m$, se denomina orientable, si existen tales orientaciones $\partial S_1, \dots, \partial S_m$ de los contornos de las superficies $S_1, \dots, S_m$ que para cualesquiera dos superficies adyacentes S_i y S_j sus orientaciones ∂S_i y ∂S_j están concordadas.*

La totalidad de tales orientaciones, si es que existe, se llama *orientación de la superficie S*.

Si la totalidad mencionada de orientaciones ∂S_i no existe, la superficie S se llama *no orientable*.

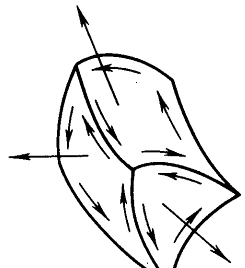


Fig. 219

Si $\partial S_1, \dots, \partial S_m$ es la orientación de la superficie $S = \{S_i\}$, la totalidad de orientaciones opuestas es también una orientación de la superficie S, llamada orientación *opuesta respecto de la dada*.

Se puede mostrar que si la superficie S es orientable, ella no tiene ningunas orientaciones a excepción de las dos orientaciones mencionadas. Una de las dos orientaciones existentes (no importa cuál sea) se llama, comúnmente, positiva, y la otra, negativa.

Por analogía, con el caso examinado antes en el p. 50.8, una superficie orientable que tiene fija una de sus orientaciones se denomina *orientada*. Además, aquella de las superficies orientadas, cuya orientación se ha llamado positiva, se designa con S^+, y la superficie de orientación opuesta, con S^-.

El borde de una superficie pegada orientada $S = \{S_i\}$, como todo borde de la superficie pegada, se compone, de acuerdo con lo dicho anteriormente, de un número finito de contornos cerrados. Cada uno de estos contornos, a su vez, representa una reunión del número finito de curvas, cada una de las cuales forma parte de uno de los contornos ∂S_i, a saber, una parte tal que todos los puntos suyos, a excepción, quizás, de los extremos, no se pegan con los puntos de los otros bordes ∂S_j. Por esta razón, la orientación concordada dada de la superficie orientable pegada $S = \{S_i\}$ engendra determinadas orientaciones (es decir, los órdenes de los puntos) en las curvas mencionadas. Se puede mostrar que dichas orientaciones, tomadas juntas, constituyen las orientaciones de todos los contornos que integran el borde ∂S de la superficie pegada S. La totalidad de estas orientaciones de los contornos que componen el borde ∂S de la superficie S lleva el nombre de *orientación* de dicho *borde* engendrada por la orientación dada de la superficie S, o, que es lo mismo, concordada con ella.

Prestemos atención en que en la definición 24 de la orientación de una superficie ni siquiera se suponía la derivabilidad de las superficies a pegar $S_1, \dots, S_m$.

Si la superficie S está pegada de las superficies suaves $S_1, \dots, S_m$, entonces, para prefijar su orientación, se pueden elegir en cada superficie $S_1, \dots, S_m$ las normales unitarias continuas de una manera tal que las orientaciones ∂S_i de los bordes de las superficies S_i, concordadas con dichas normales, sean concordadas entre sí en el sentido de la definición 24, es decir, que representen la orientación de la superficie S (véase la fig. 219).

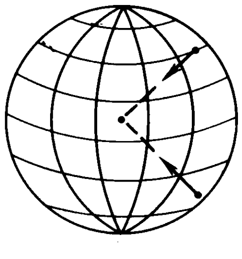


Fig. 220

Para enterarse, con tal modo de dar la orientación, de si coinciden o no dos orientaciones, es suficiente recurrir tan sólo a un punto arbitrario; si las normales coinciden en dicho punto, coinciden en todo punto, siempre que, naturalmente, existen; si en el punto mencionado las normales no coinciden, es decir, son opuestas, serán opuestas en todo punto, pues, como lo hemos indicado más arriba, existen sólo dos orientaciones de la superficie dada.

Sin embargo, en el caso de una superficie suave a trozos ya no podemos introducir la noción de orientación positiva, haciendo uso de las representaciones dadas de las superficies suaves a pegar y tomando en éstas normales unitarias según la fórmula (50.26), puesto que estas orientaciones pueden ser no concordadas. Por ello, cuando se trata de las superficies suaves a trozos, se debe especificar cada vez qué precisamente se sobreentiende en el caso concreto por superficies orientadas S^+ y S^- de la superficie dada S.

Se puede mostrar que cualquier superficie suave a trozos que constituye la frontera de cierta región del espacio tridimensional es orientable. En este caso una de las orientaciones se compone de las normales unitarias dirigidas de la superficie al interior de la región (las así llamadas *normales interiores*), y la otra se compone de las normales unitarias dirigidas de la superficie al exterior de la región (las así llamadas *normales exteriores*). Como ejemplo de tal superficie interviene una esfera. En calidad de su orientación pueden tomarse, por ejemplo, las normales unitarias dirigidas a lo largo del radio desde un punto de la esfera hacia el centro (fig. 220).

Como ejemplo de superficie no orientable (en el sentido de la definición 24) sirve la cinta de Möbius.

A veces las superficies orientables suaves a trozos se llaman, además, *superficies bilaterales*: tienen dos "caras" correspondientes a dos elecciones de las normales unitarias que prefijan dos orientaciones suyas. Correspondientemente, las superficies no orientables se denominan *unilaterales*. El empleo de este término se ha explicado con el ejemplo de cinta de Möbius en el p. 50.10.

No nos detendremos aquí en los razonamientos matemáticos concernientes a la demostración de las afirmaciones enunciadas. Esto requeriría el empleo de métodos cuyo estudio sale de los márgenes de este curso. Las afirmaciones generales enunciadas más arriba sin demostración no se usan, en esencia, en la exposición ulterior. Cuando, en lo sucesivo, se trate de un caso concreto, se puede indicar siempre cuál precisamente orientación se considera.

Ejercicios. 17. Demuéstrese que el cilindro recto circular representa una superficie suave a trozos sin borde.

18. Sean dados el vector τ y la curva $\gamma = \{\rho(u),\ a \leqslant u \leqslant b\}$.

Una superficie, dada mediante la representación de la forma

$$r = r(u, v) \overset{\text{def}}{=} \rho(u) + v\tau, \quad a \leqslant u \leqslant b, \quad c \leqslant v \leqslant d,$$

lleva el nombre de *superficie cilíndrica* S con la generatriz γ y una directriz paralela al vector τ.

Demuéstrese que si la curva γ es suave a trozos, la superficie S será también suave a trozos.

§ 51. INTEGRALES DE SUPERFICIE

En este párrafo y en los que siguen se considerarán sólo las superficies definidas por las representaciones paramétricas y, además, aquellas que son suaves (véase la definición 16 en el § 50) y suaves a trozos (véase la definición 23, en el § 50).

51.1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DE SUPERFICIE

Sea dada una superficie suave S, con la particularidad de que

$$r = r(u, v) = \{x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v);\ (u, v) \in \overline{D}\} \tag{51.1}$$

es su representación, con más precisión, representación continuamente derivable sin puntos singulares, D es una región plana cuadrable y, como siempre, E, G y F son los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie S. Supongamos, luego, que en el conjunto de puntos $r(u, v)$ de la superficie S está definida la función Φ, es decir, la función $\Phi(r(u, v)) = \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. A veces la función Φ se denotará también mediante $\Phi(x, y, z)$ (compárese con el p. 47.1).

Definición 1. *Una integral* $\iint\limits_S \Phi(x, y, z)dS$ *se determina por la igualdad* (*véase* (50.24))

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)dS = \iint\limits_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \tag{51.2}$$

Ésta se llama *integral de superficie de primera especie*.

Con ciertas restricciones impuestas en la función Φ la integral (51.2) existe. Así, por ejemplo, existe para toda función Φ, continua en la superficie suave $S = \{r(u, v), (u, v) \in \overline{D}\}$, es decir, para la función $\Phi(r(u, v))$, continua en la región cerrada cuadrable $\overline{D}$. Efectivamente, en este caso, de acuerdo con la definición 1, la integral

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z)dS$$

se reduce a una integral de la función continua en $\overline{D}$, la cual, como se sabe (véase el p. 44.4), existe. Las condiciones más generales de existencia de la integral de superficie de primera especie pueden obtenerse de las condiciones correspondientes de existencia de las integrales múltiples (véase el p. 44.4), aplicadas a la integral que figura en el segundo miembro de la igualdad (51.2).

Supongamos, para simplificar, que la función Φ es continua en la superficie suave S y sea $\rho = \rho(u_1, v_1) = (\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1))$ otra representación de esta superficie; dicha representación viene dada en la clausura $\bar{D}_1$ de la región cuadrable $\bar{D}_1$ y para ella la transformación (50.14) de los parámetros u, v en u_1, v_1 es biunívoca y continuamente derivable en $\bar{D}$, y, además, su jacobiano en $\bar{D}$ es distinto de cero. Si E_1, F_1 y G_1 son coeficientes de la primera forma cuadrática, correspondientes a dicha representación, entonces

$$\iint_D \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv =$$

$$= \iint_{D_1} \Phi(\varphi(u_1, v_1), \psi(u_1, v_1), \chi(u_1, v_1)) \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\,du_1\,dv_1. \tag{51.3}$$

Para convencerse de esto, es suficiente realizar el cambio de variables (50.14) en la integral que figura en el segundo miembro de esta igualdad y hacer uso de la fórmula (50.19). De este modo, la integral de superficie de primera especie no depende de cómo se elige la representación de la superficie. Las integrales de superficie de primera especie se encuentran en varios problemas de las matemáticas y sus aplicaciones. Por ejemplo, el área de una superficie (véase el p. 50.7) se expresa con ayuda de una integral de superficie de primera especie: si la función $\Phi(x, y, z)$ es idénticamente igual a la unidad en la superficie S, la fórmula (51.2) se convierte en una que sirve para determinar el área μS de la superficie S (véase (50.23)):

$$\mu S = \iint_D \sqrt{XG - F^2}\,du\,dv = \iint_S dS.$$

Si $\Phi(x, y, z)$ es la densidad de cierta masa distribuida por la superficie S, entonces la integral (51.2) proporciona la magnitud de la màsa de toda la superficie.

Sean ahora, como siempre, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ los vectores unidad coordenados,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\boldsymbol{k} \tag{51.4}$$

y

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|, \tag{51.5}$$

con la particularidad de que, con arreglo a nuestras suposiciones, la normal $\boldsymbol{\nu}$ es continuamente prolongable a la frontera de la región D.

La superficie S en la que se ha elegido la normal unitaria $\boldsymbol{\nu}$ se designara con S^+, y la misma superficie con la normal elegida $-\boldsymbol{\nu}$, con S^- (evidentemente, $\boldsymbol{\nu}$ y $-\boldsymbol{\nu}$ son dos orientaciones de la superficie S). Subrayemos que S^+ y S^- se determinan por la propia superficie "con la exactitud hasta la orientación" y dependen de la elección de la representación de la superficie.

Definición 2. *Las integrales de superficie*

$$\iint_{S+} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy \quad \text{y} \quad \iint_{S-} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy, \tag{51.6}$$

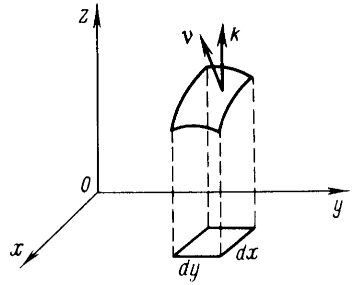


Fig. 221

llamadas integrales de superficie de segunda especie (para la representación dada de la superficie) se determinan según las fórmulas

$$\begin{aligned} \iint_{S+} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})\,dS, \\ \iint_{S-} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy &= \iint_S \Phi(x, y, z) \cos(\widehat{-\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})\,dS, \end{aligned} \tag{51.7}$$

donde $(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})$ *y* $(\widehat{-\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})$ *son los ángulos entre los vectores* $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{k}$ *y entre* $-\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{k}$, *respectivamente.*

Como base de esta definición se ha tomado un razonamiento intuitivo de que el elemento del área dS de la superficie dada (véase (50.24)), multiplicado por el coseno del ángulo que este elemento "forma" con el plano xOy, es igual aproximadamente al elemento del área $dx\,dy$ de este plano (fig. 221), como si se tratase de las áreas de una figura plana y sus proyecciones.

Las integrales (51.6) se designarán mediante el símbolo común

$$\iint_S \Phi(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{51.8}$$

Dado que $(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}}) + (\widehat{-\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}}) = \pi$, y, por lo tanto, $\cos(\widehat{-\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}}) = -\cos(\widehat{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k}})$ de (51.7) obtenemos

$$\iint_{S-} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy = -\iint_{S+} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{51.9}$$

Por analogía, con las integrales de superficie de primera especie, las integrales de superficie de segunda especie existen a ciencia cierta, si la función Φ es continua en la superficie S.

Por cuanto las integrales de superficie de primera especie no dependen de la representación de la superficie, las integrales de superficie de segunda especie (51.6) no dependen de cómo se elige la representación de la superficie orientada (en otras palabras, no dependen de cómo se elige la representación de una superficie que conserva su orientación dada), pero, por supuesto, las integrales (51.8) dependen en el caso general, para la superficie S y la función Φ dadas, de la elección de la normal continua ν en la superficie, es decir, de la elección de la orientación de la superficie (véase 51.9).

Obtengamos las fórmulas que sean cómodas para calcular las integrales de superficie de segunda especie. Demos a conocer previamente que de (51.4), (51.5) y (50.22) proviene que

$$\cos(\widehat{\nu, k}) = \nu k = \frac{nk}{|n|} = \frac{(r_u \times r_v)k}{|r_u \times r_v|} = \frac{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{|r_u \times r_v|} = \frac{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

razón por la cual $\sqrt{EG - F^2}\cos(\widehat{\nu, k}) = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, y, por lo tanto,

$$\iint_S \Phi(x, y, z)dxdy = \iint_S \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\nu, k})dS =$$

$$= \iint_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\cos(\widehat{\nu, k})\sqrt{EG - F^2}dudv =$$

$$= \iint_D \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dudv.$$

De este modo, omitiendo las designaciones de los argumentos de la función, tenemos

$$\iint_{S+} \Phi dxdy = \iint_D \Phi\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dudv \tag{51.10}$$

y, de conformidad con (51.9),

$$\iint_{S-} \Phi dxdy = -\iint_D \Phi\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dudv = \iint_D \Phi\frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)}dudv. \tag{51.11}$$

A veces la integral $\iint_{S+} \Phi dxdy$ se designa como $\iint_S \Phi dxdy$; en este caso la integral $\iint_{S-} \Phi dxdy$ se escribe en la forma $\iint_S \Phi dydx$.

De este modo,

$$\iint_S \Phi dxdy = \iint_D \Phi\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dudv,$$

$$\iint_S \Phi dydx = \iint_D \Phi\frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)}dudv.$$

Si la superficie S está dada explícitamente por la función continuamente derivable $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$, entonces la fórmula (51.2) adquiere la forma (véase (50.25))

$$\iint_S \Phi(x, y, z)dS = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy,$$

mientras que las fórmulas (51.10) y (51.11) tendrán por expresión

$$\iint_{S+} \Phi(x, y, z)dxdy = \iint_D \Phi(x, y, f(x, y))dxdy,$$

$$\iint_{S-} \Phi(x, y, z)dxdy = -\iint_D \Phi(x, y, f(x, y))dxdy.$$

Aquí S^+ se llama *"cara superior de la superficie S"* (corresponde a la orientación positiva ν de la superficie S para la representación dada de ésta: $z = f(x, y)$), y S^-, *"cara inferior de la superficie S"* (corresponde a la orientación negativa $-\nu$). Estas denominaciones se deben a la circunstancia de que en el caso de definición explícita de la superficie

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x i + f_y j + k,$$

y, por consiguiente,

$$\nu = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, -\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right),$$

y por ello, como ya se ha observado antes,

$$\cos(\widehat{\nu, k}) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} > 0.$$

De aquí se ve que el ángulo entre los vectores ν y k es agudo, es decir, el vector ν está dirigido "hacia arriba" de la superficie en consideración (véase fig. 221).

Por analogía con la definición (51.7) se determinan también otras integrales de superficie de segunda especie:

$$\begin{aligned} \iint_{S+} \Phi(x, y, z)dydz &= \iint_S \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\nu, i})dS, \\ \iint_{S-} \Phi(x, y, z)dydz &= \iint_S \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{-\nu, i})dS, \\ \iint_{S+} \Phi(x, y, z)dzdx &= \iint_S \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{\nu, j})dS, \\ \iint_{S-} \Phi(x, y, z)dzdx &= \iint_S \Phi(x, y, z)\cos(\widehat{-\nu, j})dS. \end{aligned} \tag{51.12}$$

Para estas integrales, por analogía con lo hecho anteriormente, obtendremos

$$\iint_{S-} \Phi dydz = -\iint_{S+} \Phi dydz,$$

$$\iint\limits_{S^-} \Phi dzdx = - \iint\limits_{S^+} \Phi dzdx,$$

$$\iint\limits_{S^+} \Phi dydz = \iint\limits_{D} \Phi \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dudv, \qquad (51.13)$$

$$\iint\limits_{S^+} \Phi dzdx = \iint\limits_{D} \Phi \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv.$$

Los diversos problemas que conducen al concepto de integral de superficie de segunda especie serán considerados en el § 52.

51.2. INTEGRALES DE SUPERFICIE COMO LÍMITES DE LAS SUMAS INTEGRALES

Las integrales de superficie se pueden obtener también como límites de las sumas integrales correspondientes. Supongamos que S es una superficie suave, $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, la representación de dicha superficie y D, una región cuadrable. Supondremos, para simplificar, que en D existen particiones tan menudas como se quiera y los elementos de éstas son regiones cuadrables. Solamente las particiones de este género se considerarán en el presente punto. Tomemos cualquiera de las particiones mencionadas $\tau = \{D_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ de la región D. Designemos mediante S_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, i_0$, una superficie que se da por la representación $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}_i$. Es evidente que todas las S_i son también superficies suaves (el sistema $\tau_S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ lleva el nombre de *partición de la superficie* S). Supongamos que la función $\Phi(r(u, v)) = \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ es continua en $\bar{D}$ y $(u_i, v_i) \in \bar{D}_i$, $\Phi_i = \Phi(r(u_i, v_i))$. Denotemos con $\cos_i(\widehat{\nu, k})$ el coseno del ángulo formado por la normal ν y el versor k en el punto $r(u_i, v_i)$ de la superficie dada y pongamos

$$\sigma_\tau^{(1)} = \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \mu S_i, \quad \sigma_\tau^{(2)} = \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \cos_i(\widehat{\nu, k}) \mu S_i;$$

entonces

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau^{(1)} = \iint\limits_S \Phi(x, y, z) dS, \qquad (51.14)$$

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau^{(2)} = \iint\limits_S \Phi(x, y, z)\, dxdy, \qquad (51.15)$$

donde, como siempre, δ_τ es la finura de la partición τ. En efecto,

$$\iint\limits_S \Phi(x, y, z) dS = \iint\limits_D \Phi(r(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0} \iint\limits_{D_i} \Phi(r(u, v))\sqrt{EG - F^2} dudv;$$

por cuanto $\mu S_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt{EG - F^2}\, dudv$, entonces

$$\sigma_\tau^{(1)} = \sum_{i=1}^{i_0} \Phi_i \iint\limits_{D_i} \sqrt{EG - F^2}\, dudv =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0} \iint\limits_{D_i} \Phi(r(u_i, v_i))\sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Al designar ahora con $\omega(\delta; \Phi)$ el módulo de continuidad de la función Φ en la región cerrada $\bar{D}$, tendremos

$$\left| \iint\limits_S \Phi(x, y, z) dS - \sigma_\tau^{(1)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i_0} \iint\limits_{D_i} |\Phi(r(u, v)) - \Phi(r(u_i, v_i))| \sqrt{EG - F^2}\, dudv \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta_\tau, \Phi) \sum_{i=1}^{i_0} \mu S_i = \omega(\delta_\tau; \Phi) \mu S.$$

Al pasar en esta desigualdad al límite, para $\delta_\tau \to 0$, y observar que $\lim\limits_{\delta_\tau \to 0} \omega(\delta_\tau; \Phi) = 0$, obtendremos la fórmula (51.14).

Análogamente se demuestra la fórmula (5.15) (el producto $\Phi \cos(\nu, k)$ es continuo y, por ende, continuo uniformemente en $\bar{D}$). Los razonamientos similares son lícitos también para las integrales de segunda especie de otros tipos (15.12).

Ejercicio 1. Demuéstrese la fórmula (51.15).

51.3. INTEGRALES DE SUPERFICIE EXTENDIDAS A LAS SUPERFICIES SUAVES A TROZOS

Definamos las integrales de superficie extendidas a las superficies suaves a trozos.

Definición 3. *Supongamos que* $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ *es una superficie suave a trozos (véase la definición 23 en el p. 50.9) y* $\Phi(x, y, z)$, *una función definida en el conjunto de puntos de la superficie* S. *Entonces, según la definición*,

$$\iint\limits_S \Phi dS = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i} \Phi dS_i. \qquad (51.16)$$

Definición 4. *Si la superficie suave a trozos* $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ *es orientable y* $S^+ = \{S_i^+\}_{i=1}^{i=k}$ *es una de las superficies orientadas que corresponde a* S *(véanse las designaciones en el p.* 50.11), *entonces, por definición*,

$$\iint\limits_{S^+} \Phi dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i^+} \Phi dxdy,$$

$$\iint_{S+} \Phi dydz = \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i^+} \Phi dydz,$$

$$\iint_{S+} \Phi dzdx = \sum_{i=1} \iint_{S_i^+} \Phi dzdx. \tag{51.17}$$

Por supuesto, esta definición tiene sentido sólo en el caso en que las integrales en los segundos miembros de las igualdades existen. Para esto es necesario, ante todo, que las representaciones de las superficies S_i sean dadas en las regiones cuadrables.

Análogamente en este caso se definen también las integrales extendidas a la superficie $S^- = \{S_i^-\}_{i=1}^{i=k}$.

Nos hemos detenido sólo en aquellas propiedades de las integrales de superficie que están ligadas con el carácter específico de su definición y con la superficie a la que, como suele decirse, se extiende la integración. Es natural que por cuanto las integrales de superficie se reducen a las integrales múltiples ordinarias, para ellas son propias también las diferentes propiedades de las últimas (linealidad, teorema integral del valor medio, etc.).

OBSERVACIÓN. Las condiciones, enunciadas anteriormente (véanse las definiciones 10 en el p. 50.2 y 16 en el p. 50.4), que se imponen sobre las aplicaciones que realizan las transformaciones admisibles de los parámetros para las superficies suaves, resultan ser a menudo demasiado rígidas (compárese con la circunstancia similar para las curvas en el p. 47.3). Por ejemplo, adoptado tal procedimiento, las representaciones de la parte de una bola de radio unidad con centro en el origen de coordenadas, dispuesta en el primer octante:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \text{ donde } x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

y

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, y = r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi, \quad z = r\operatorname{sen}\psi,$$

donde $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, no son equivalentes. Más aún, la primera representación no define, en el sentido indicado, una superficie continuamente derivable, por cuanto las derivadas parciales de la función $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ no están acotadas en la región $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ y no pueden ser continuamente prolongadas a su clausura $\bar{D}$. Resulta, pues, conveniente ampliar la definición de superficie continuamente derivable. Hagámoslo del modo siguiente.

Examinemos una totalidad de representaciones $r = r(u, v)$ $(u, v) \in \bar{D}$, continuas en $\bar{D}$ y continuamente derivables en D. Llamaremos transformaciones admisibles de los parámetros $u = \varphi(u_1, v_1), v = \psi(u_1, v_1), (u_1, v_1) \in \bar{D}_1$, a toda aplicación continua y biunívoca de la clausura $\bar{D}_1$ de la región plana D_1 sobre $\bar{D}$ que hace pasar puntos interiores a los interiores, puntos de frontera a los de frontera, con la particularidad de que dicha aplicación debe ser continuamente derivable y tener en D un jacobiano distinto de cero. Como siempre, dos representaciones se denominarán equivalentes, si se puede pasar de una de ellas a la otra con ayuda de una transformación admisible de los parámetros.

Diremos que la clase de representaciones equivalentes del tipo mencionado define una superficie continuamente derivable, siempre que en esta clase existe por lo menos una representación $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, que es continuamente derivable *hasta la frontera de la región* $\bar{D}$, es decir, definida en la clausura $\bar{D}$ de la región D.

Una superficie continuamente derivable se llama suave, si $r_u \times r_v \neq 0$ en $\bar{D}$ para cierta representación suya $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$. El área de la superficie continuamente derivable representada por $r = r(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$, se determina como valor de la integral

$$\iint_D |r_u \times r_v| dudv,$$

la cual es, quizás, impropia. Para convencerse de su existencia, basta realizar el cambio de variable con ayuda de una transformación admisible que convierte la representación dada en alguna otra que sea continuamente derivable hasta la frontera de la región.

De un modo semejante se debilitan los requisitos impuestos sobre las transformaciones admisibles del parámetro para el caso de las superficies orientadas.

Con estas definiciones quedan en vigor todas las definiciones aducidas anteriormente para las integrales de superficie, como también las propiedades de éstas, habida cuenta, naturalmente, de que en tal caso podemos obtener, para ciertas representaciones de las superficies, integrales impropias. Siguen siendo vigentes, además todos los teoremas concernientes a las integrales de superficie que se demuestran en el párrafo que sigue; no obstante, no nos detendremos en este caso especialmente.

Ejercicios. 2. Sea S una superficie suave en el nuevo sentido ampliado y sea Φ una función continua en S. Demuéstrese que existen las integrales

$$\int_S \Phi(x, y, z)dxdy, \quad \int_S \Phi(x, y, z)dzdx, \quad \int_S \Phi(x, y, z)dydz.$$

Calcúlense las siguientes integrales de superficie de primera especie:

3. $\iint_S x^2y^2dS$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geqslant 0\}$.

4. $\iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$; $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, 0 \leqslant z \leqslant H\}$.

5. $\iint_S \frac{dS}{r}$; S es una porción de la superficie del paraboloide $z = xy$, obtenida al cortarla por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, y r es la distancia del punto corriente de la superficie S hasta el eje Oz.

Calcúlense las siguientes integrales de superficie de segunda especie:

6. $\iint_S zdxdy$, donde S es el lado exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

7. $\iint_S yzdxdy + zxdydz + xydzdx$, donde S es el lado exterior de una superficie

compuesta por una porción de la superficie lateral del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y las partes de los planos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = H, \text{ siendo } x, \ y, \ z \geqslant 0.$$

§ 52. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

52.1. DEFINICIONES

En lugar de los términos "función numérica de un punto", "función vectorial de un punto" se usan también términos equivalentes: *campo escalar, campo vectorial.* Esta terminología recalca que los valores de las funciones en consideración dependen precisamente de los puntos de un espacio (en los que dichas funciones están definidas) y no dependen de las coordenadas suyas, siendo elegido uno u otro sistema de coordenadas.

Empleando esta terminología, podemos decir, por ejemplo, que todo campo escalar $u = u(M)$, definido y derivable en cierta región G, engendra el campo vectorial de sus gradientes (véanse el p. 20.6 y el p. 50.5, pág 248): $\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{grad} u$.

Definición 1. *Supongamos que en la región G*) está dado un campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ y existe una función $u = u(M)$, definida en G, tal que $\boldsymbol{a}(M) =$ $= \operatorname{grad} u(M)$. Entonces la función $u(M)$ lleva el nombre de función potencial o potencial del campo vectorial dado**).*

Introduciendo el símbolo nabla, $\nabla = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ (véase el p. 20.7), podemos escribir:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u,$$

donde en el segundo miembro figura el "producto" del vector simbólico nabla por una función numérica u.

Sea, por ejemplo, $E(M)$ la intensidad de un campo eléctrico creado por una carga unidad negativa que se ubica en el origen de coordenadas. Entonces en el punto $M(x, y, z)$ el vector $E(M)$ tiene, según lo sabemos por el curso de la física, la longitud $1/r^2$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, y está dirigido del punto M hacia el origen de coordenadas. De aquí se obtiene que

$$E(M) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right).$$

El potencial eléctrico del campo en consideración, es decir, la función $u(M) = 1/r$, es también potencial en el sentido indicado arriba, pues $\operatorname{grad} u(M) = E(M)$.

Consideraremos de nuevo un campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, definido en cierta región G. Fijemos un sistema de coordenadas y en este caso podemos considerar la función vectorial $\boldsymbol{a}(M)$ como función de tres variables, esto es, las coordenadas x, y, z del punto M: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$.

*) En este párrafo, para simplificar, se considerarán sólo regiones planas o tridimensionales G.

**) A veces, en las aplicaciones, el potencial u se determina por la fórmula $\boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} u$.

Supongamos que $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ y está dado un vector unidad $\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Tracemos por el punto M_0 una recta en la dirección de $\boldsymbol{e}$:

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta,$$
$$z = z_0 + t\cos\gamma, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Definición 2. *La derivada de la función vectorial*

$$\boldsymbol{a}(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$$

respecto de t para $t = 0$ (si es que existe) recibe el nombre de derivada de la función vectorial $\boldsymbol{a}(M)$ según la dirección de $\boldsymbol{e}$ en el punto M_0 y se denota $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}(M_0)}{\partial \boldsymbol{e}} = \frac{d}{dt}\, \boldsymbol{a}(x_0 + t\cos\alpha, \ y_0 = t\cos\beta, \ z_0 + t\cos\gamma)\bigg|_{t=0}.$$

Según la regla de derivación de una función compuesta, omitiendo, para simplificar, las designaciones del argumento, obtenemos

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}\cos\gamma. \tag{52.1}$$

Suponiendo $\boldsymbol{e}\nabla = \cos\alpha\dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\dfrac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\dfrac{\partial}{\partial z}$ ("producto escalar del vector $\boldsymbol{e}$ por el vector simbólico ∇), escribamos la fórmula (52.1) en la forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{e}\nabla)\boldsymbol{a}.$$

Definición 3. *Si $b = (b_x, b_y, b_z)$ es un vector fijo arbitrario (no obligatoriamente un vector unidad), entonces el vector*

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} = b_x\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} + b_y\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} + b_z\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}$$

se llama gradiente del vector $\boldsymbol{a}$ respecto del vector $\boldsymbol{b}$.

Si $\boldsymbol{b} = b\boldsymbol{b}_0$, donde $|\boldsymbol{b}_0| = 1$, por medio de una "transformación formal" obtenemos

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} = (b\boldsymbol{b}_0\nabla)\boldsymbol{a} = b(\boldsymbol{b}_0\nabla)\boldsymbol{a} = b\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{b}_0}.$$

Pasando a la notación en coordenadas, es fácil convencerse de que la fórmula obtenida es justa y mostrar que el símbolo ∇ se puede tratar en los cálculos como un vector auténtico sin olvidar, por supuesto, que ∇ significa, además, una operación de la derivación bien determinada. No nos detendremos aquí en la argumentación de legitimidad de tales "transformaciones formales con el símbolo ∇". Cualquier fórmula, obtenida de modo semejante, la podemos deducir, por supuesto, sin recurrir al símbolo ∇, sirviéndose de los razonamientos habituales argumentados en un sistema de coordenadas. Se debe tener en cuenta, sin embargo, que el empleo del símbolo ∇ en muchos casos facilita considerablemente los cálculos.

Volvamos otra vez al campo vectorial de partida $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ en la región G.

Definición 4. *Sea* $\boldsymbol{a}(a_x, a_y, a_z)$ *un campo derivable en cierto punto. El número* $\dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$ *se denomina divergencia del campo en el punto dado y se denota mediante* div $\boldsymbol{a}$, *es decir,*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{52.2}$$

Simbólicamente div $\boldsymbol{a}$ puede ser escrita como producto escalar del símbolo ∇ por el vector $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a}.$$

Definición 5. *Un vector cuyas coordenadas son*

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \tag{52.3}$$

lleva el nombre de rotor del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ *y se designa* rot $\boldsymbol{a}$.

Con ayuda del símbolo ∇ el rotor puede escribirse en forma del siguiente producto vectorial:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{52.4}$$

El significado físico y geométrico de div $\boldsymbol{a}$ y rot $\boldsymbol{a}$ se aclarará en lo que sigue más abajo.

He aquí un ejemplo de las transformaciones formales con el símbolo ∇. Si el símbolo ∇ está seguido por varios términos y uno de los últimos se encuentra bajo la acción del símbolo en su calidad de operador de derivación, mientras que los otros términos están libres de la acción mencionada, el término accionado se denotará con una flecha vertical. Expliquemos esto con un ejemplo.

Sea f un campo escalar y $\boldsymbol{a}$, un campo vectorial, entonces

$$\operatorname{rot} f\boldsymbol{a} = \nabla \times f\boldsymbol{a} = \nabla \times f\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}} + \nabla \times \overset{\downarrow}{f}\boldsymbol{a} =$$
$$= f(\nabla \times \boldsymbol{a}) + (\nabla f \times \boldsymbol{a}) = f \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} f \times \boldsymbol{a}.$$

Introduzcamos unas definiciones más, ligadas con el campo vectorial $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ en la región G.

Definición 6. *Sea* γ *una curva cerrada suave a trozos en la región* G. *La integral*

$$\int_\gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

se denomina circulación del campo vectorial $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *a lo largo de la curva* γ *y se designa* $\int_\gamma \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r}$, *donde* $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$.

Si γ es una curva suave orientada; $\boldsymbol{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ es su vector tangente unidad; s, la longitud variable del arco y $\operatorname{pr}_t \boldsymbol{a}$, la magnitud de la proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre la tangente, entonces

$$\int_\gamma \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r} = \int_\gamma \operatorname{pr}_t \boldsymbol{a} ds.$$

Efectivamente,

$$\int_\gamma \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r} = \int_\gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$
$$= \int_\gamma (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) ds = \int_\gamma \boldsymbol{a}\boldsymbol{t} ds =$$
$$= \int_\gamma \operatorname{pr}_t \boldsymbol{a} ds.$$

Definición 7. *Un campo cuya circulación a lo largo de cualquier curva cerrada suave a trozos, dispuesta en la región* G, *es nula, se denomina potencial.*

Recordemos que en el p. 47.8 se ha mostrado (véase el lema 2) que la condición, bajo la cual la integral $\int_\gamma P dx + Q dy$ es nula a lo largo de cualquier contorno cerrado $\gamma \subset G$, es equivalente a que $\int_{AB} P dx + Q dy$ no depende del trayecto de integración entre los puntos A y B. En la demostración de esta afirmación no se especificaba en ninguna circunstancia que la curva γ se dispone en una región plana. Por ello, la demostración del lema 2, aducida en el p. 47.8, queda vigente también para las integrales curvilíneas a lo largo de las curvas espaciales. De este modo, pues, *la circulación* $\int_\gamma \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r} = \int_\gamma a_x dx + a_y dy + a_z dz$ *es nula a lo largo de cualquier contorno cerrado suave a trozos* $\gamma \subset G$ *cuando, y sólo cuando, la integral* $\int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ *no dependa del trayecto de integración*, es decir, de la curva con su origen en el punto A y extremo en el punto B y que está dispuesta íntegramente en la región G.

Consideremos a título de ejemplo un campo vectorial plano, es decir, el campo $\boldsymbol{a} = (P, Q)$ dado en la región plana G: $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$. El rotor de este campo tiene por expresión

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

En los términos nuevos el teorema 4 del p. 47.8 puede ser parafraseado de la manera siguiente. *Para una región plana simplemente conexa G son equivalentes la noción de carácter potencial del campo, la existencia de una función potencial y la condición de que el rotor del campo es nulo en todos los puntos.*

Definición 8. *Sea S una superficie orientada dispuesta en la región G, sea $\boldsymbol{\nu}$ un vector unidad de la normal a la superficie que determina la orientación de la última,* *y sea S^+ la superficie S de orientación indicada. La integral*

$$\iint_{S+} a\nu dS$$

se llama flujo del campo vectorial a través de la superficie S y se designa

$$\iint_S a dS,$$

donde

$$dS = \nu dS \text{ (o bien } \iint_S a dS^+, dS^+ = \nu dS).$$

Es obvio que $a\nu = \mathrm{pr}_\nu a$, razón por la cual $\iint_S a dS = \iint_S \mathrm{pr}_\nu a dS$.

En el flujo $\iint_{S+} a\nu dS$ se omite corrientemente el índice de orientación y se escribe simplemente $\iint_S a\nu dS$, considerando que a título de orientación se ha tomado la normal ν que figura en la expresión subintegral.

En los puntos ulteriores de este párrafo se estudiarán algunas propiedades de los campos vectoriales, en particular, en el caso tridimensional se establecerán las condiciones necesarias y suficientes para que un campo sea potencial. Se demostrarán previamente los teoremas sobre las integrales, relacionados con los conceptos que se han introducido en el presente punto.

Ejercicios. 1. Demuéstrense las siguientes fórmulas:

a) $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ u = 0$;
b) $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ a = 0$;
c) $\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ u = \Delta u$,
donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;
d) $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ a = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ a - \Delta a$, donde $\Delta a = (\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z)$, $a = (a_x, a_y, a_z)$;
e) $\mathrm{div}(fa) = f\,\mathrm{div}\,a + \mathrm{grad}\,fa$;
f) $\mathrm{div}\,a \times b = b\,\mathrm{rot}\,a - a\,\mathrm{rot}\,b$.

2. Hállese el flujo del campo vectorial $a = (x - 2z)i + (x + 3y + z)i + (5x + y)k$ a través de una plazoleta triangular con vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y de orientación, determinada por una normal dirigida en el sentido opuesto al origen de coordenadas.

3. Hállese el flujo del campo vectorial $a = y^2 i + zk$ a través de la superficie S: $\{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, 0 \leqslant z \leqslant 2\}$, si se conoce que la normal unitaria a la superficie citada está dirigida en el sentido opuesto al eje Oz.

4. Hállese el flujo del campo vectorial $a = xi + yi + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\,k$ a través de la porción de un hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{3}$, opuesta al origen de coordenadas.

5. Hállese el flujo del campo vectorial $a = (xy - y^2)i + (-x^2 + xy + 2x)j + zk$ a través de un lado, opuesto al origen de coordenadas, de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, que se obtiene al cortarla por el cono $z^2 = \frac{1}{2}x^2 + y^2$.

6. Hállese div a, si

$$a = (6x^2y^2 - z^3 + yz - 5)i + (4x^3y + xz + 2)j + (xy - 3xz^2 - 3)k.$$

Supongamos que $r = xi + yj + zk$, $r = |r|$, f es una función numérica derivable en todo punto de R_+, y c, un vector constante. Hállense:

7. $\mathrm{div}\,(f(r)r)$.
8. $\mathrm{div}\,(rc)$
9. $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f(r))$.
10. $\mathrm{div}\,(r^2c)$.
11. $\mathrm{div}\,(f(r)c)$.
12. $\mathrm{div}\,(c \times r)$.
13. Hállese rot a, si

$$a = xyzi + (2x + 3y - z)j + (x^2 + z^2)k.$$

Hállense:
14. $\mathrm{rot}\,(c \times r)$.
15. $\mathrm{rot}\,((cr)r)$.
16. $\mathrm{rot}\,(f(r)r)$.
17. $\mathrm{rot}\,(f(r)c)$.

18. Hállese la circulación del campo vectorial $a = -yi + xj + ck$ (c = const) a lo largo de la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, dispuesta en el plano Oxy.

19. Hállese la circulación del campo vectorial $a = yi - xj$ a lo largo de una línea cerrada que se forma por el arco de la astroide $x = R\cos^3 t$, $y = R\,\mathrm{sen}^3 t$, $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$ y los segmentos de los ejes de coordenadas que se obtienen al cortarlos por la citada astroide.

52.2. SOBRE LA INVARIACIÓN DE LOS CONCEPTOS DE GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTOR

Diremos en primer lugar que al transformar ortogonalmente las coordenadas cartesianas, el vector simbólico ∇ se transforma según las reglas de transformación de los vectores corrientes. En efecto, sea dada la transformación ortogonal de las coordenadas

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \tag{52.5}$$

En el caso de las transformaciones ortogonales la matriz de una transformación inversa coincide con la matriz transpuesta, por lo cual

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' \\ y &= a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z', \\ z &= a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z'. \end{aligned} \tag{52.6}$$

Con ello, como es bien conocido, a partir de las fórmulas (52.5) y (52.6) se transforman tanto las coordenadas de los puntos, como las de los vectores.

Haciendo uso de las fórmulas (52.5) y la regla de derivación de una función compuesta, obtendremos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} =$$

$$= a_{11}\frac{\partial}{\partial x'} + a_{21}\frac{\partial}{\partial y'} + a_{31}\frac{\partial}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} =$$
$$= a_{12}\frac{\partial}{\partial x'} + a_{22}\frac{\partial}{\partial y'} + a_{32}\frac{\partial}{\partial z'}, \qquad (52.7)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} =$$
$$= a_{13}\frac{\partial}{\partial x'} + a_{23}\frac{\partial}{\partial y'} + a_{33}\frac{\partial}{\partial z'}.$$

Correspondientemente, las fórmulas inversas que expresan derivadas respecto de las variables x', y', z' en términos de las derivadas respecto de x, y, z, tendrán por expresión

$$\frac{\partial}{\partial x'} = a_{11}\frac{\partial}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = a_{21}\frac{\partial}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial}{\partial y} + a_{23}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad (52.8)$$
$$\frac{\partial}{\partial z'} = a_{31}\frac{\partial}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Las fórmulas (52.5) — (52.8) muestran precisamente que las coordenadas de los vectores ordinarios y las "coordenadas" del vector simbólico ∇ se transforman, en las transformaciones ortogonales de coordenadas cartesianas, según una misma regla. En particular, de (52.8) se deduce que el gradiente de la función u en el sistema de coordenadas x, y, z, es decir, el vector de coordenadas $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ tendrá en el sistema x', y', z' las coordenadas $\frac{\partial u}{\partial x'}, \frac{\partial u}{\partial y'}, \frac{\partial u}{\partial z'}$, es decir, sigue siendo gradiente también en este último sistema de coordenadas. De este modo, queda demostrado una vez más (véase el p. 20.7) que el gradiente de una función no depende de la elección del sistema de coordenadas cartesianas. Por cuanto el vector ∇ se transforma igual que los vectores ordinarios, es natural esperar que el producto escalar $\nabla \boldsymbol{a}$ tampoco depende de la elección del sistema mencionado de coordenadas.

Supongamos que el vector $\boldsymbol{a}$ en el sistema x, y, z tiene las coordenadas a_x, a_y, a_z y en el sistema x', y', z', las $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$. En virtud de las fórmulas (52.7), tenemos

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = a_{11}\frac{\partial a_x}{\partial x'} + a_{21}\frac{\partial a_x}{\partial y'} + a_{31}\frac{\partial a_x}{\partial z'} +$$
$$+ a_{12}\frac{\partial a_y}{\partial x'} + a_{22}\frac{\partial a_y}{\partial y'} + a_{32}\frac{\partial a_y}{\partial z'} + a_{13}\frac{\partial a_z}{\partial x'} + a_{23}\frac{\partial a_z}{\partial y'} +$$
$$+ a_{33}\frac{\partial a_z}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x'}(a_{11}a_x + a_{12}a_y + a_{13}a_z) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y'}(a_{21}a_x + a_{22}a_y + a_{23}a_z) + \frac{\partial}{\partial z'}(a_{31}a_x +$$
$$+ a_{32}a_y + a_{33}a_z). \qquad (52.9)$$

Aplicando las fórmulas (52.5) al vector $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, (es decir, sustituyendo en dichas fórmulas x, y, z por a_x, a_y, a_z, y x', y', z', por $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$), llegamos a que las expresiones entre paréntesis en el segundo miembro de la igualdad (52.9) son iguales sucesivamente a $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$, y, por consiguiente,

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

Esta igualdad muestra precisamente que la divergencia de un campo vectorial en todo punto se determina unívocamente por el propio campo vectorial y no depende de cómo se elige el sistema de coordenadas, lo que al principio podría parecer proveniente de la fórmula (52.2).

Un producto vectorial de los vectores ordinarios no depende, en virtud de su significado geométrico, de la elección de los sistemas cartesianos de coordenadas con la misma orientación (por ejemplo, el producto vectorial de dos vectores no cambiará, si se pasa de un sistema derecho de coordenadas cartesianas (véase el p. 50.8) a otro sistema de la misma orientación. Es por eso que resulta natural esperar que la misma propiedad la posee también el "producto vectorial simbólico" rot $\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a}$.

Efectivamente, si designamos los vectores coordenados unidad del sistema de coordenadas x', y', z' mediante $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$, respectivamente, entonces, como se sabe, los vectores coordenados unidad $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ del sistema de coordenadas x, y, z se expresarán en términos de $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{k}'$ mediante una matriz transpuesta respecto de la matriz de la transformación (52.5), es decir, mediante la matriz de la transformación (52.6):

$$\boldsymbol{i} = a_{11}\boldsymbol{i}' + a_{21}\boldsymbol{j}' + a_{31}\boldsymbol{k}',$$
$$\boldsymbol{j} = a_{12}\boldsymbol{i}' + a_{22}\boldsymbol{j}' + a_{32}\boldsymbol{k}', \qquad (52.10)$$
$$\boldsymbol{k} = a_{13}\boldsymbol{i}' + a_{23}\boldsymbol{j}' + a_{33}\boldsymbol{k}'.$$

Haciendo uso de las fórmulas (52.6), (52.7) y (52.10), obtenemos

$$\text{rot}\, \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11}i'+a_{21}j'+a_{31}k' & a_{12}i'+a_{22}j'+a_{32}k' & a_{13}i'+a_{23}j'+a_{33}k' \\
a_{11}\dfrac{\partial}{\partial x'}+a_{21}\dfrac{\partial}{\partial y'}+a_{31}\dfrac{\partial}{\partial z'} & a_{12}\dfrac{\partial}{\partial x'}+a_{22}\dfrac{\partial}{\partial y'}+a_{32}\dfrac{\partial}{\partial z'} & a_{13}\dfrac{\partial}{\partial x'}+a_{23}\dfrac{\partial}{\partial y'}+a_{33}\dfrac{\partial}{\partial z'} \\
a_{11}a_{x'}+a_{21}a_{y'}+a_{31}a_{z'}, & a_{12}a_{x'}+a_{22}a_{y'}+a_{32}a_{z'}, & a_{13}a_{x'}+a_{23}a_{y'}+a_{33}a_{z'}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial z'} \\ a_{x'} & a_{y'} & a_{z'} \end{vmatrix}. \qquad (52.11)
$$

La última igualdad se demuestra igual que en el caso de las matrices numéricas ordinarias se demuestra el hecho de que el determinante de un producto de dos matrices cuadradas de un mismo orden es igual al producto de sus determinantes. Con el fin de demostrar dicha igualdad, basta convencerse de que en sus ambos miembros figuran las sumas algebraicas iguales de los mismos sumandos.

El determinante de la transformación ortogonal es igual a $+1$ ó -1, con la particularidad de que si dicha transformación conserva su orientación, entonces a $+1$. Por ello, si en el caso que se considera los sistemas elegidos de coordenadas x, y, z y x', y', z' están igualmente orientados, tendremos

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1
$$

y, por consiguiente, de (52.11) se tiene

$$
\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial z'} \\ a_{x'} & a_{y'} & a_{z'} \end{vmatrix}
$$

Esta igualdad significa precisamente que el rotor del campo vectorial no depende de cómo se elige el sistema de coordenadas cartesianas con la misma orientación que tiene el sistema dado. Indiquemos, sin embargo, si se pasa de un sistema de coordenadas al otro sistema de otra orientación, por ejemplo, de un sistema de coordenadas derecho a un sistema izquierdo, entonces todo rotor (al igual que un producto vectorial ordinario) se sustituirá por un vector opuesto. Esto se deduce de la fórmula (52.11), puesto que el determinante de la transformación ortogonal, que cambia la orientación, es igual a -1.

De este modo, el rotor de un campo vectorial se determina unívocamente, "salvo el signo", por el propio campo vectorial, y si no limitamos únicamente a los sistemas derechos de coordenadas cartesianas, no depende de la elección de los mismos.

52.3. FÓRMULA DE OSTROGRADSKI — GAUSS. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIVERGENCIA

Sea G una región en el espacio R^3_{xyz}. Supongamos que en el plano R^2_{xy} existe tal dominio cuadrable Γ que la frontera de la región G se compone de dos superficies S_1 y S_2, definidas mediante las representaciones explícitas $z = \varphi(x, y)$ y $z = \psi(x, y)$, respectivamente (donde las funciones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son continuas en la región cerrada $\bar{\Gamma}$, $\varphi(x, y) \leqslant \psi(x, y)$, $(x, y) \in \bar{\Gamma}$), y, quizás, de una parte S_0 del cilindro cuya base está formada por la frontera $\partial\Gamma$ de la región Γ (véase el p. 44.1). Supongamos, además, que S_0, S_1 y S_2 son superficies suaves a trozos (fig. 222). En este caso toda la frontera S de la región G será asimismo una superficie suave a trozos y, además, orientable, como cualquier superficie suave a trozos que sirve de frontera de una región. Las normales exteriores ν de la superficie S en sus partes suaves constituyen las orientaciones de las mismas. Debido a estas orientaciones, las partes suaves de la superficie S están orientadas de manera concordante (véase el p. 50.11) y, por consiguiente, generan la orientación de toda la superficie S. Esta orientación se logra, si para cada parte suave de la superficie se elige la orientación de su borde, concordada con la normal exterior ν en la parte respectiva según la regla del sacacorchos.

Designemos la superficie S y, correspondientemente, las superficies S_0, S_1 y S_2 de orientación elegida (la que se llamará positiva) mediante S^+ y, correspondientemente, S_0^+, S_1^+, S_2^+. Observemos que aquí de orientación positiva sirve para la superficie S_1 su "cara inferior", y para la superficie S_2, la "cara superior" de ella (véase 51.1).

La elección de la normal ν en el caso que se considera se describe también de una manera fácil y directa, es decir, sin que se recurra al concepto de normal "exterior": en los puntos de la superficie S_1, en los que la normal existe, se debe elegir una normal que forma el ángulo obtuso con el eje Oz, y en los puntos de la superficie S_2, un ángulo agudo. Entre tanto, en los puntos de la superficie S_0 la elección de la normal

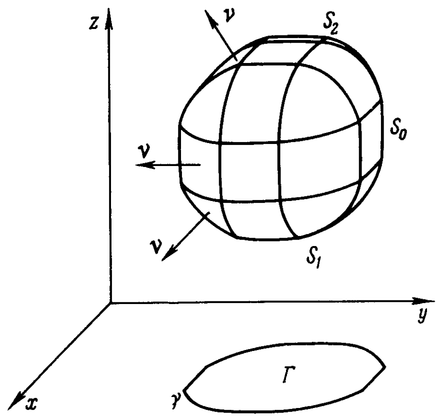


Fig. 222

para nuestros objetivos no nos importa (lo que se pondrá claro en adelante): calcularemos las integrales del tipo (51.7) extendidas a la superficie S, las cuales, siendo extendidas a la superficie S_0, son nulas, cualquiera que sea la elección de las normales, puesto que las últimas son siempre perpendiculares al eje Oz.

Supondremos que la región G posee las propiedades, análogas a las citadas, respecto de todos los ejes coordenados. Tales *regiones* se llamarán *elementales* (compárese con el p. 47.5). Un ejemplo de región elemental se expone en la fig. 222.

Designemos con $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ los cosenos directores de la normal exterior unitaria ν de la superficie S:

$$\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Teorema 1 (de Ostrogradski — Gauss *). *Supongamos que en la clausura $\bar{G}$ de la región G, del tipo mencionado más arriba, vienen dadas las funciones $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ y $R = R(x, y, z)$ continuas en $\bar{G}$, lo mismo que todas las derivadas parciales suyas $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x}$ **). En este caso*

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \iint_{S^+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS. \qquad (52.12)$$

Esta fórmula, al suponer $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, puede ser escrita en la forma

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dxdydz = \iint_S \mathbf{a}\, dS^+, \qquad (52.13)$$

es decir, la integral de la divergencia de un campo vectorial, extendida a cierta región, es igual al flujo de este campo a través de la superficie que limita dicha región.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos, por ejemplo, la integral

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Al emplear las designaciones introducidas al principio de este punto, obtendremos

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_\Gamma \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz\right] dxdy =$$

*) M. V. Ostrogradski (1801—1861), matemático ruso; K. F. Gauss (1777—1855), matemático alemán.

**) La continuidad de las derivadas parciales en una frontera se entiende como su prolongabilidad continua a la frontera de la región.

$$= \iint_\Gamma \{R[x, y, \psi(x, y)] - R[x, y, \varphi(x, y)]\} dxdy =$$

$$= \iint_{S_2^+} R(x, y, z)dxdy + \iint_{S_1^+} R(x, y, z)dxdy. \qquad (52.14)$$

Al observar luego que en la superficie S_0 tiene lugar la igualdad $\cos\gamma = 0$, tendremos (véase (51.7))

$$\iint_{S_0^+} R(x, y, z)dxdy = \iint_{S_0^+} P(x, y, z)\cos\gamma dS = 0.$$

Por eso la fórmula (52.14) puede ser escrita así:

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz =$$

$$= \iint_{S_2^+} Rdxdy + \iint_{S_1^+} Rdxdy + \iint_{S_0^+} Rdxdy = \iint_{S^+} Rdxdy. \qquad (52.15)$$

De un modo sumamente análogo se demuestran las fórmulas

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_{S^+} Pdydz,$$

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_{S^+} Qdzdx. \qquad (52.16)$$

Sumando (52.15) y (52.16), obtendremos precisamente, en virtud de las definiciones (51.7) y (51.12), la fórmula (52.12), llamada *fórmula de Ostrogradski — Gauss*. □

A veces resulta más conveniente utilizar la fórmula (52.12) en la forma

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

La validez de tal notación se deduce directamente de la definición de la integral de superficie de segunda especie: véase (51.7) y (51.12).

La fórmula de Ostrogradski — Gauss (52.12) puede demostrarse también para las regiones G de la forma más general en comparación con las mencionadas, a saber, para aquellas que admiten la partición finita en las regiones G_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, del tipo considerado más arriba. Con este fin es suficiente escribir la fórmula de Ostrogradski para cualquiera de las regiones G_i y sumar los resultados; de resultas se obtiene la fórmula buscada para la región G. Efectivamente, en el primer miembro de la igualdad se obtendrá, en virtud de que la integral es aditiva, una integral correspondiente extendida a la región G, mientras que en el segundo miembro las integrales de superficie calculadas a lo largo de las partes correspondientes de las fronteras de las regiones G_i darán en suma cero, porque las normales exteriores en los puntos de fronteras de las regiones G_i, pertenecientes a las fronteras de dos regiones de este género, están dirigidas en las direcciones opuestas; quedarán, pues, sólo las integrales a lo largo de aquellas partes de las fronteras de G_i que forman en su totalidad la frontera de la región G (compárese con el p. 47.5). Los planos paralelos a los planos coordenados suelen ser más cómodos para obtener las particiones citadas de la región G.

Observemos que entre las regiones de este género hay también aquellas cuya frontera se compone de unos cuantos "trozos", es decir, puede ser representada como suma de un número finito de superficies disjuntas suaves a trozos (compárese con las generalizaciones correspondientes de la fórmula de Green en el p. 47.5).

Se puede mostrar que la fórmula de Ostrogradski — Gauss es válida para cualquier región limitada cuya frontera se compone de un número finito de las superficies suaves a trozos. Sin embargo, esto sería un trabajo muy voluminoso y no nos detendremos en dicho problema, limitándonos solamente a la formulación del teorema.

Teorema 1′ (de Ostrogradski — Gauss). *Supongamos que la frontera ∂G de una región limitada G se compone de un número finito de superficies suaves a trozos y que el vector $a = (P, Q, R)$, como también las derivadas parciales $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ y $\frac{\partial R}{\partial z}$ son continuas en $\bar{G}$, entonces*

$$\iiint \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx dy dz = \iint\limits_{\partial G} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}.$$

Como orientación en las partes suaves de la frontera ∂G está elegida aquí la normal exterior.

Por ejemplo, si $G = \{(x, y, z) : 0 < a < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < b$ es un anillo esférico y, por lo tanto, su frontera se compone de dos esferas

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\} \quad \text{y}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = b^2\},$$

entonces, en la esfera interior S_1 se debe tomar una normal dirigida hacia el centro de la bola G y en la esfera exterior S_2, en la dirección contraria.

La fórmula de Ostrogradski — Gauss permite hallar la expresión para el volumen de una región mediante la integral correspondiente de superficie. Efectivamente, poniendo en (52.12), $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = z$, y observando que $\iiint\limits_G dx dy dz = \mu G$, obtendremos

$$\mu G = \frac{1}{3} \iint\limits_{S+} (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) dS,$$

o bien

$$\mu G = \frac{1}{3} \iint\limits_{S+} x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

La fórmula de Ostrogradski — Gauss ofrece la posibilidad de establecer un enfoque geométrico al concepto de divergencia.

Teorema 2. *Supongamos que en una región tridimensional G*) está definido el campo vectorial continuamente derivable $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$. Sea $M_0 \in G$ y sea D tal región con la frontera suave a trozos S que $M_0 \in D$, $\bar{D} \subset G$ y para el dominio D es válida la fórmula de Ostrogradski — Gauss**).*

Designemos con S^+ la superficie S, orientada con ayuda de la elección de la normal exterior, y con $d(D)$, el diámetro del dominio D. Entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{d(D)\to 0} \frac{\iint\limits_S \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}^+}{\mu D}. \tag{52.17}$$

DEMOSTRACIÓN. Según la fórmula (52.13) tenemos

$$\iiint\limits_D \operatorname{div} \boldsymbol{a} dx dy dz = \iint\limits_S \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}^+. \tag{52.18}$$

Mas según el teorema integral del valor medio (p. 44.6),

$$\iiint\limits_D \operatorname{div} \boldsymbol{a} dx dy dz = \operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) \mu D, \quad M \in D. \tag{52.19}$$

Al sustituir (59.19) en (52.18), obtenemos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \frac{\iint\limits_S \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}^+}{\mu D}. \tag{52.20}$$

Pasando al límite en la fórmula (52.20) para $d(D) \to 0$, obtendremos, por ser continua la función $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$ en el punto M_0, la fórmula (52.17). □

Se puede probar que las magnitudes en el segundo miembro de la igualdad (52.27) no dependen de la elección del sistema de coordenadas (en el segundo miembro figuran la integral doble de un producto escalar de los vectores y el volumen de la región), por lo cual de aquí se deduce una vez más que la divergencia del campo vectorial no depende de la elección del sistema de coordenadas.

De la igualdad (52.17) se infiere que el segundo miembro de esta igualdad puede considerarse como la definición de la divergencia del campo dado.

Los puntos del campo vectorial $\boldsymbol{a}$, en los que $\operatorname{div} \boldsymbol{a} \neq 0$, reciben el nombre de "fuentes" del campo vectorial. El carácter natural de este término se explica intuitivamente por aquella circunstancia que si el punto es una "fuente", entonces, como se deduce de la fórmula (52.17), para todas las regiones D, cuyos diámetros son suficientemente pequeños y que contienen el punto M_0, tendremos $\iint\limits_S \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S} \neq 0$, es decir, el flujo a través de cualquier superficie, suficientemente pequeña, que rodea la fuente, no es igual a cero.

*) Aquí no se imponen ningunas restricciones sobre la estructura de la región G.

**) Las regiones D de esta índole siempre existen, por ejemplo, entre ellas figuran todas las bolas de radio suficientemente pequeño con centro en el punto M_0, o bien los cubos de dimensiones suficientemente pequeñas con centro en el punto M_0.

52.4. FÓRMULA DE STOKES. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DEL ROTOR

Supongamos que S es una superficie en el espacio R^3_{xyz} dos veces continuamente derivable privada de puntos singulares; $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in \bar{D}$ es su representación y D, una región limitada plana, para la cual es válida la fórmula de Green. Admitamos que la frontera de la región D se compone de un contorno sencillo suave a trozos. Designemos con γ_0 el contorno orientado positivo que limita el dominio D, y con $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, la representación de este contorno. Sea

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$$

la orientación en la superficie S (véase la definición 20 en el p. 50.8), $\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Bajo las suposiciones asumidas la normal $\boldsymbol{\nu}$ es continua en $\bar{D}$.

Designemos mediante S^+ la superficie S con la normal $\boldsymbol{\nu}$ elegida en S. Sea Γ un contorno que tiene la representación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$. Diremos que el *contorno* Γ *limita la superficie* S *y también que la superficie* S *está tendida sobre el contorno* Γ.

Supongamos, por fin, que G es una región en el espacio R^3_{xyz} y $S \subset G$. Cumplidas estas suposiciones, resulta válido el siguiente teorema.

Teorema 3 (de Stokes *)). *Supongamos que las funciones P, Q y R son continuas en la región G, al igual que sus primeras derivadas parciales, y sea $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$. En este caso*

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}^+, \tag{52.21}$$

es decir, la circulación de un campo vectorial a lo largo del contorno Γ es igual al flujo del rotor de este campo a través de la superficie S, limitada por el contorno Γ. En la forma coordenada esta fórmula tiene por expresión

$$\int_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

o bien

$$\int_\Gamma P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS. \tag{52.22}$$

DEMOSTRACIÓN. Examinemos, por, ejemplo, la integral $\int_\Gamma P dx$. Al observar que a lo largo de las curvas Γ_0 y Γ las variables u y v son funciones de t, y al hacer uso de las designaciones introducidas al principio de este punto, obtendremos

*) G. Stokes (1819—1903), matemático y mecánico inglés.

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx = \int_a^b P[x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))]x_t'(u(t), v(t))dt = \int_{\Gamma_0} P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \left[\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial x(u, u)}{\partial v} dv\right].$$

Hemos aprovechado aquí la fórmula

$$x_t'(u(t), v(t)) = \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial u}\frac{\partial u}{dt} + \frac{\partial x(u(t), v(t))}{\partial v}\frac{\partial v}{dt}.$$

Al aplicar la fórmula de Green a la integral obtenida $\int_{\Gamma_0} P\dfrac{\partial x}{\partial u}du + P\dfrac{\partial x}{\partial v}dv$, tendremos:

$$\int_\Gamma P dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]du dv =$$

$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}\right]du dv =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]du dv =$$

$$= \iint_{S+} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \iint_{S+} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS. \tag{52.23}$$

Aquí se han tomado en consideración las fórmulas (51.7), (51.10) y (51.13). Análogamente se demuestra que

$$\int_\Gamma Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS, \tag{52.24}$$

$$\iint_\Gamma R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS. \tag{52.25}$$

Sumando las fórmulas (52.23), (52.24) y (52.25), obtendremos, precisamente la *fórmula* (52.22) que lleva el nombre *de Stokes*. □

Para imaginarse de la manera más ilustrativa la relación que existe entre la elección de la normal $\boldsymbol{\nu}$ en la superficie S y la orientación del contorno Γ, *que la limita*, consideraremos una superficie S que tiene la representación explícita $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$.

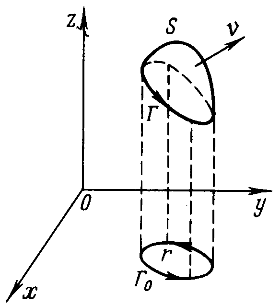


Fig. 223

Sea Γ_0 un contorno orientado positivo en el plano xOy que es al mismo tiempo la frontera de D, y sea $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, la representación de dicho contorno. La orientación de la curva Γ la definamos, como hasta ahora, mediante la representación

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = f[x(t), y(t)], \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{52.26}$$

En el caso dado el contorno Γ_0 es la proyección de la curva Γ. Entre tanto, la normal $\boldsymbol{\nu}$, como ya se ha mostrado, forma con el eje Oz (cuando la superficie se representa de manera explícita) un ángulo agudo (véase el p. 51.1), por lo cual si la superficie S se observa desde la dirección positiva del eje Oz, el contorno Γ quedará orientado en el sentido contrahorario, es decir, la orientación de la curva Γ está concordada con la normal $\boldsymbol{\nu}$ ("según la regla del sacacorchos") (fig. 223). Esto es equivalente a que un observador, que recorre la superficie S a lo largo del contorno orientado Γ y que la mira desde el extremo de la normal $\boldsymbol{\nu}$, ve la superficie S dispuesta a la izquierda. Esta interpretación evidente de concordancia entre la orientación de la normal $\boldsymbol{\nu}$ y la del contorno Γ tiene la ventaja de que no está relacionada con la elección del sistema de coordenadas y queda válida para cualquier superficie S, considerada en relación con el teorema de Stokes, y no sólo para una superficie dada explícitamente. Por supuesto, todos semejantes razonamientos no representan demostraciones matemáticas, sino que sólo explican de modo palpable la fórmula de Stokes.

Cabe observar que la fórmula de Stokes queda válida, si consideramos en ella la orientación opuesta del contorno y las normales opuestas $-\boldsymbol{\nu}$; en este caso ambos miembros de la igualdad (52.21) cambian el signo por el contrario (las orientaciones del contorno y de la superficie quedan concordadas según la "regla del sacacorchos").

La fórmula de Stokes puede ser demostrada también para las superficies orientables suaves a trozos $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$, a saber, en el caso cuando las superficies S_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, satisfacen las condiciones del teorema demostrado 3. En este último caso el borde de la superficie ∂S (véase el p. 50.11) puede ser de un número finito de los contornos cerrados Γ_j, $j = 1, 2, \ldots, j_0$.

Para demostrarlo, basta escribir las fórmulas de Stokes para cada superficie S_i, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, y sumarlas (compárese con las generalizaciones de la fórmula de

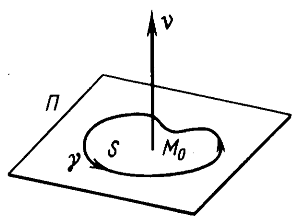


Fig. 224

Green en el p. 47.5 y del teorema de Ostrogradski — Gauss en el p. 52.3).

Indiquemos, además, que la condición de que la superficie S sea *dos veces* continuamente derivable fue impuesta en el teorema 3 sólo con el objeto de simplificar la demostración (la última se hace *esencialmente* más simple). La fórmula de Stokes (52.21) queda en vigor también, si se supone sólo la suavidad de la superficie S (conservándose las demás condiciones del teorema). La demostración de esta afirmación sale de los márgenes de nuestro curso.

De lo dicho proviene que la fórmula de Stokes sigue siendo lícita también para las superficies $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ que son simplemente orientadas y suaves a trozos (es decir, sin la suposición de que las superficies S_i hayan de ser *dos veces* continuamente derivables).

Enunciemos ahora el teorema para este caso.

Teorema 3′ (de Stokes). *Supongamos que la función vectorial* $\boldsymbol{a}$ *es continuamente derivable en la región* G *y sea* $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=i_0}$ *una superficie orientada suave a trozos cuyo borde* ∂S *tiene orientación engendrada por la orientación dada de la superficie* S (véase el p. 50.11). *Entonces*

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}.$$

La concordancia de las orientaciones de los contornos Γ_j, de los que se compone el borde ∂S de la superficie S, con la orientación de dicha superficie y, por lo tanto, con la de $\boldsymbol{\nu}$ de las superficies S_i significa con evidencia que un observador, que se mueve a lo largo del contorno Γ_j, $j = 1, 2 \ldots, j_0$, y mira a la superficie S desde la punta de la normal $\boldsymbol{\nu}$, ve la superficie S dispuesta a la izquierda.

El teorema de Stokes ofrece la posibilidad de establecer un enfoque geométrico al concepto de rotor de un campo vectorial.

Teorema 4. *Supongamos que en la región tridimensional* G *está definido un campo vectorial continuamente derivable* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$; M_0 *es un punto fijo*, $M_0 \in G$, $\boldsymbol{\nu}$ *es un vector unidad constante arbitrariamente elegido y* Π, *un plano que es perpendicular a* $\boldsymbol{\nu}$ *y pasa por el punto* M_0; S *es una región limitada en el plano* Π *cuya frontera está representada por el contorno suave a trozos* Γ, $d(S)$ *es el diámetro de la región* S; *supongamos también que el contorno* Γ *está orientado, de modo con-*

cordado, con la normal ν *), $M_0 \in S$ *y* $S \subset G$ **) (fig. 224). *En este caso* **)

$$\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{d(S)\to 0}\left(\frac{\int_\Gamma \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}}{\mu S}\right). \tag{52.27}$$

DEMOSTRACIÓN. Según la fórmula de Stokes,

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}dS,$$

mas, conforme al teorema integral del valor medio,

$$\iint_S \operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}dS = \operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}(M)\mu S, \quad M \in S.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}(M) = \frac{\int_\Gamma \boldsymbol{a}dS}{\mu S}. \tag{52.28}$$

Observemos que cuando $d(S) \to 0$, también $M \to M_0$. En vista de que la función $\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}(M)$ es continua en el punto M_0, pasando al límite en (52.28) para $d(S) \to 0$, obtendremos la fórmula (52.27). □

De (52.27) se deduce que el segundo miembro de esta igualdad puede considerarse como la definición de la proyección del rotor del campo dado sobre el vector unidad ν, arbitrariamente elegido pero fijo. Esto nos lleva también a la nueva definición del propio vector, puesto que será suficiente, por ejemplo, elegir arbitrariamente tres vectores ortogonales unidad ν_1, ν_2, ν_3, las proyecciones sobre los cuales, como es sabido, determinan unívocamente cualquier vector.

Se puede mostrar que las magnitudes que figuran en el segundo miembro de la igualdad (52.27) no dependen de la elección del sistema de coordenadas, no obstante la concordancia de las orientaciones del vector ν y contorno Γ sí depende de la orientación del sistema de coordenadas: al pasar del sistema de coordenadas derecho al izquierdo, la concordancia de las orientaciones de ν y Γ según "la regla del sacacorchos" se sustituye por la concordancia según la regla inversa, de acuerdo con la cual, siendo fijada la orientación del vector ν, la del contorno Γ se cambia en opuesta. De este modo, la integral $\int_\Gamma \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}$ cambia de signo, cuando varía la orientación del sistema de coordenadas, por lo cual, en virtud de la fórmula (52.27), cambia de signo también $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

De lo dicho proviene que la fórmula de Stokes (52.22) es lícita no sólo para el sistema de coordenadas derecho, sino también para el izquierdo, puesto que, al variar

*) Como en el teorema 3 (según la "regla del sacacorchos").

**) Es evidente que las regiones citadas S siempre existen (¿por qué?).

***) Mediante $\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a}$ está designada la proyección del vector $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ sobre el vector ν, es decir, $\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{a} = = \operatorname{pr}_\nu \operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

la orientación del sistema de coordenadas, tanto el miembro izquierdo, como el derecho de la igualdad (52.22) cambian de signo: siendo fijada la orientación del vector ν de la superficie S, cambian de signo tanto $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ como también el contorno Γ, si varía la orientación del sistema de coordenadas.

52.5. CAMPOS VECTORIALES SOLENOIDALES

Una región limitada para la cual se cumple el teorema de Ostrogradski — Gauss (véase el p. 52.3) se llamará en este punto *admisible*. Se denominará *admisible* la totalidad de superficies, si es la frontera de una región admisible.

Se ha observado en el p. 52.3 que el teorema de Ostrogradski — Gauss es válido para cualquiera región acotada cuya frontera se compone de un número finito de las superficies suaves a trozos. Por ello, cualquiera de tales regiones es admisible. Es justa, evidentemente, la afirmación recíproca: toda región admisible tiene frontera compuesta de un número finito de las superficies suaves a trozos, pues, de lo contrario no se podría ni siquiera hablar sobre las integrales de superficie a lo largo de la frontera.

El lector que prefiere utilizar tan sólo hechos demostrados, puede tomar en calidad de regiones y superficies admisibles aquellas, para las cuales fue demostrado en el presente curso el teorema de Ostrogradski — Gauss.

Definición 9. *Un campo vectorial* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$, *continuamente derivable en la región* G, *se denomina solenoidal en la misma, si el flujo del campo* $\boldsymbol{a}$ *a través de la frontera orientada de cualquier región admisible* D, *cuya clausura* $\bar{D}$ *se dispone en* G: $\bar{D} \subset G$, *es igual a cero:*

$$\iint_{\partial D} \boldsymbol{a}dS = 0. \tag{52.29}$$

La frontera ∂D de la región admisible D tiene dos orientaciones, generadas por las normales interior y exterior, respectivamente. Es evidente que si la condición (52.29) se cumple con una orientación, se cumplirá también con la otra, puesto que las integrales correspondientes pueden diferenciarse sólo en el signo.

Expliquemos la definición del campo solenoidal con un ejemplo. Sea G un anillo esférico: una parte del espacio comprendida entre dos esferas S_r y S_R que tienen el centro común O y los radios r y R, $r < R$, y sea $\boldsymbol{a}$ el campo vectorial solenoidal en G. Entonces, su flujo será nulo, por ejemplo, a través de cualquier esfera S que se dispone en G y limita una bola, también dispuesta en G.

Sin embargo, el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a}$ a través de la esfera S_ρ de radio ρ, $r < \rho < R$, y centro en el punto O no ha de ser nulo, puesto que la bola, limitada por dicha esfera, no se contiene en la región G (fig. 225).

Por otro lado, será nula la suma de los flujos del campo vectorial a través de dos esferas S_{ρ_1} y S_{ρ_2} de radios ρ_1 y ρ_2, $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, y del mismo centro, si orientamos una de éstas eligiendo una normal que va al centro y la otra, en la dirección opuesta. Efectivamente, las esferas mencionadas limitan un anillo esférico, íntegramente dispuesto en la región G, mientras que su orientación elegida es la orientación de la frontera que corresponde a la normal exterior o interior. Por esto, según la definición del campo solenoidal, el flujo de éste a través de la frontera orientada que se considera será igual a cero.

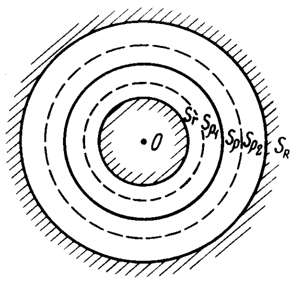


Fig. 225

Teorema 5. *Para que un campo vectorial continuamente derivable en la región G sea solenoidal en ella, es necesario y suficiente que su divergencia sea nula en todos los puntos de la región G:*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = 0, \quad M \in G.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Sea $\boldsymbol{a}$ un campo vectorial solenoidal en la región G y $M_0 \in G$. Designemos con Q_r una bola abierta de radio $r > 0$ y centro en el punto M_0, y con S_r, la esfera que limita dicha bola. Por cuanto todos los puntos $M \in G$, incluido también el punto M_0, son interiores para G, entonces existe tal $r_0 > 0$ que para $r < r_0$ todas las bolas de radio r, junto con las esferas que las limitan, se contendrán dentro de G.

Ha de notarse ahora que el límite (52.17), igual al valor de la divergencia del campo vectorial $\boldsymbol{a}$ en el punto M_0, existe para las regiones admisibles arbitrarias D, $D \subset \bar{D} \subset G$, cuyos diámetros tienden a cero. Por esta razón él existe también cuando $D = Q_r$, $r < r_0$ se elige especialmente:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{r \to 0} \frac{\iint\limits_{S_r} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S}.}{\mu Q_r}.$$

En vista de la definición del campo solenoidal, para todo $r < r_0$ tiene lugar la igualdad

$$\iint\limits_{S_r} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S} = 0,$$

por lo cual $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M_0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea $\boldsymbol{a}$ un campo vectorial, continuamente derivable en la región G, con la divergencia igual a cero en todos los puntos de la región G. Si D es una región admisible arbitraria de tal género que $D \subset \bar{D} \subset G$, entonces, en virtud del teorema de Ostrogradski — Gauss

$$\iint\limits_{\partial D} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S} = \iiint\limits_{D} \operatorname{div} \boldsymbol{a} dx dy dz = 0,$$

es decir, el campo $\boldsymbol{a}$ es solenoidal. □

De ejemplo tipo de campo solenoidal interviene un campo vectorial que representa en sí en cierta región el campo de rotores de un campo vectorial dos veces continuamente derivable en la región citada.

En efecto, si $\boldsymbol{a}$ es un campo dos veces continuamente derivable en la región G, entonces rot $\boldsymbol{a}$ es un campo solenoidal en G, ya que div rot $\boldsymbol{a} = 0$.

No es difícil ofrecer un razonamiento verosímil que afirma la validez de esta correlación. Con este fin basta pasar al vector simbólico ∇; entonces la igualdad en consideración tomará la forma $\nabla(\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0$.

Un producto mixto de los vectores ordinarios en el caso en que dos factores son coincidentes, es nulo, puesto que en este caso un paralelepípedo tendido sobre dichos vectores degenera en un paralelogramo y, por ende, su volumen es igual a cero. Por esta razón es natural esperar que la igualdad mencionada es verídica también para el vector ∇. Este razonamiento verosímil puede convertirse en el argumentado matemáticamente que tenga una fuerza probatoria, si demostramos que el vector simbólico ∇ posee, de hecho, las propiedades, ya utilizadas por nosotros, análogas a las propiedades correspondientes de los vectores ordinarios. Lo último puede hacerse con ayuda de una simple comprobación, pasando, por ejemplo, a una notación coordenada (véanse (52.2) y (52.4)).

52.6. CAMPOS VECTORIALES POTENCIALES

En este punto la superficie S, para la cual es válido el teorema de Stokes, se llamará admisible.

Definición 10. *La región tridimensional G se denomina simplemente conexa, si, cualquiera que sea una quebrada cerrada γ, dispuesta en G, existe la superficie admisible S que se dispone tambien en G y está tendida sobre la quebrada γ* (véase el punto 52.4).

A veces las regiones simplemente conexas se llaman *conexas simple y superficialmente*.

Si la región en consideración G es convexa, existe un método muy simple para tender las superficies sobre el contorno. La superficie buscada siempre puede tomarse en este caso en forma de un cono con vértice en el punto arbitrariamente fijado $M_0 \in G$, para el cual la curva dada γ sirve como directriz. Si

$$\rho = \rho(u), \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,$$

es la representación de esta curva y r_0 es el radio vector del punto M_0, entonces el cono buscado S, tendido sobre el contorno dado, se da mediante la representación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + v[\boldsymbol{\rho}(u) - \boldsymbol{r}_0], \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1. \tag{52.30}$$

Considerando u y v como coordenadas polares, vemos que la "representación" del cono viene dada en un círculo unitario, con la paricularidad de que la circunferencia unitaria $\gamma_0 = \{(u, v) : v = 1\}$ pasa al contorno dado γ, y su centro, al vértice del cono (fig. 226).

La palabra "representación" viene entre comillas, puesto que el concepto de representación de una superficie se ha introducido más arriba sólo para el caso en que los parámetros u y v eran coordenadas cartesianas. El cono (52.30) tendrá, en el

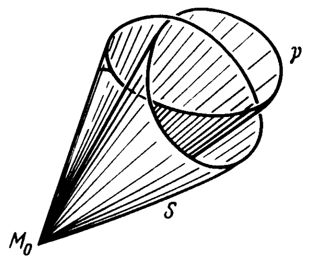


Fig. 226

caso general, puntos múltiples y no será una superficie suave a trozos incluso en el caso cuando γ sea una curva suficientemente suave, es decir, si γ es una curva sin puntos singulares continuamente derivable un número suficiente de veces. En el cono (52.30) habrá, en general, puntos singulares distintos del vértice. Precisamente para eliminar este inconveniente de un modo más sencillo, nos hemos limitado, definiendo la región simplemente conexa, a considerar los contornos en forma de las quebradas cerradas. En este último caso el vértice del cono M_0 puede siempre elegirse de un modo tal que el cono citado sea una superficie suave a trozos. Efectivamente, cualquiera que sea la elección del vértice del cono en el caso en que una cierta quebrada γ sirva de su directriz, el cono se descompone en un número finito de triángulos S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, los cuales, en verdad, serán, quizás, degenerados, es decir se convertirán en un segmento o un punto. Uno de los vértices de dichos triángulos será precisamente el vértice M_0 del conc, mientras que el lado opuesto lo constituirá uno de los lados de la quebrada γ. Cada uno de estos triángulos puede considerarse como una superficie continuamente derivable cualquier número de veces y prefijarse mediante una representación realizada por las funciones lineales (véanse el p. 16.5 y (52.30)). Si el triángulo es degenerado, todos los puntos de él serán singulares. No obstante, mediante un desplazamiento, tan pequeño como se quiera, del vértice del cono podemos conseguir que el vértice esté en una posición general con todos los lados de la quebrada γ, es decir, no se disponga en ninguna de las rectas que pase por un lado cualquiera de la quebrada γ. De resultas, todos los triángulos S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, serán regulares y, por lo tanto, podrán considerarse como superficies suaves privadas de puntos singulares. En cuanto al propio cono S, éste resultará ser, de tal modo, una superficie suave a trozos $S = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$. Además, por cuanto todo punto de una región, cualquiera que sea su desplazamiento tan pequeño como se quiera, queda dentro de la región, el vértice M_0 del cono S puede siempre elegirse en la misma, a consecuencia de lo cual, por ser convexa la región, todo el cono se dispondrá dentro de ella. Al cono suave a trozos S, que se ha obtenido, se le puede aplicar el teorema de Stokes, en otras palabras, dicho cono es una superficie admisible en este punto. Hemos demostrado pues que toda *región convexa es* simplemente *conexa*.

Como ejemplo de región no simplemente conexa puede servir un toro, es decir, una región formada por la rotación de un círculo en torno del eje que no lo interseca (fig. 227).

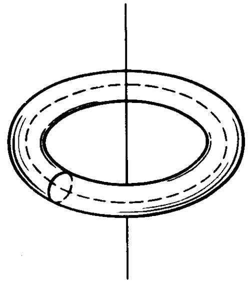


Fig. 227

Recordemos que un campo se llama potencial, si su circulación $\int\limits_{\gamma} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}$ es nula a lo largo de cualquier contorno cerrado $\gamma \subset G$, o bien, que es lo mismo, si la integral $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}$ no depende del camino de integración que une en la región G los puntos A y B. Los razonamientos más detallados sobre esto se encuentran en el p. 52.1. Resulta que en una región simplemente conexa un campo vectorial será potencial, si, y sólo si, es irrotacional. Esta afirmación está contenida y se demuestra en el teorema 6 que sigue abajo.

Teorema 6. *Sea dado en la región simplemente conexa G un campo vectorial continuamente derivable $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$. Para este caso son equivalentes las siguientes tres propiedades*:

1. *El campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ es potencial en la región G.*

2. *Existe una función $u = u(M)$, potencial en G, es decir, tal función $u(M)$ que $\boldsymbol{a} =$* grad *u, o bien, que es lo mismo, $du = Pdx + Qdy + Rdz$. En este caso para cualesquiera dos puntos $A \in G$ y $B \in G$ y toda curva suave a trozos $\overset{\frown}{AB}$, que en G une dichos puntos, se verifica la igualdad*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

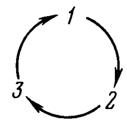
3. *El campo vectorial $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$ es irrotacional*: rot $\boldsymbol{a} = 0$ *en la región G, es decir*,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Subrayemos que del teorema 6 se deduce, en particular, que *el campo vectorial $\boldsymbol{a}$, continuamente derivable en una región simplemente conexa, es potencial cuando, y sólo cuando, sea un campo de gradientes de cierta función escalar u*:

$$\boldsymbol{a} = \nabla u.$$

DEMOSTRACIÓN. Se realizarán los razonamientos según el siguiente esquema.



Paso primero. 1 ⇒ 2. Esta afirmación, es decir, la existencia de la función potencial, se demuestra por analogía completa con el caso de una región plana considerado anteriormente (véase el teorema 3 en el p. 47.8) y por esta razón nos abstenemos de su demostración.

Paso segundo: 2 ⇒ 3. La afirmación 2 ⇒ 3 también se demuestra igual que en el caso plano: significa simplemente que las correspondientes segundas derivadas mixtas de una función potencial son iguales.

Las afirmaciones 1 ⇒ 2 y 2 ⇒ 3 son justas también sin que se suponqa que G es una región simplemente conexa.

Paso tercero: 3 ⇒ 1. Sea en G rot $\boldsymbol{a} = 0$. Admitamos primero que γ es una curva cerrada, dos veces continuamente derivable a trozos, dispuesta en G. Si existe una superficie admisible S, contenida en G y limitada por el contorno γ, entonces, del teorema de Stokes obtenemos inmediatamente

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S} = 0.$$

Ya que la región G es simplemente conexa (véase la definición 10), esta igualdad se verifica, en particular, para cualquier quebrada que tiene un número finito de lados. Por eso, si γ es una curva cerrada suave a trozos, dispuesta en G, entonces, eligiendo una sucesión de quebradas λ_n, inscritas en γ con los lados que tienden a cero para $n \to \infty$, de acuerdo con el lema 3 del p. 47.8, obtendremos

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = 0. \ \square$$

Como conclusión observemos que aunque los campos vectoriales potenciales y solenoidales no abarcan todos los campos vectoriales posibles, permiten, sin embargo, describir una clase bastante amplia de los campos vectoriales. A saber, asumidas ciertas suposiciones suficientemente generales, cualquier campo vectorial $\boldsymbol{a}$ representa una suma de los campos vectoriales potencial y solenoidal. Con más precisión, existen una función escalar u y un campo vectorial $\boldsymbol{b}$ tales que $\boldsymbol{a} = \nabla u + \operatorname{rot} \boldsymbol{b}$. Por cuanto rot $\nabla u = 0$ y div rot $\boldsymbol{b} = 0$, entonces el primer sumando es un campo potencial y el segundo, solenoidal.

Esta suposición se llama también teorema de Helmholtz *) (su demostración se puede hallar en el libro "Métodos de la física teórica" que se debe a la pluma de P. M. Morse y G. Feshbach (P. Morse, G. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, New York-Toronto-London, 1953).

Ejercicios. 20. Demuéstrese que el flujo de un rotor de un campo vectorial continuamente derivable en cierta región a través de una esfera cualquiera dispuesta en la región mencionada es igual a cero.

21. Demuéstrese que

$$\iiint_G \operatorname{grad}\varphi \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,dx\,dy\,dz = \iint_S (\boldsymbol{a} \times \operatorname{grad}\varphi\, d\boldsymbol{S}).$$

*) H. Helmholtz (1821—1894), físico y fisiólogo alemán.

Aquí se supone que para la región G, limitada por la superficie S, queda aplicable el teorema de Ostrogradski — Gauss.

22. Hállense la divergencia y el rotor para los campos vectoriales $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3$ y $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$. ¿Serán estos campos potenciales, solenoidales? Calcúlese el flujo de los campos vectoriales $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ a través de esfera $S_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

23. Calcúlese el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$.

24. Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ los campos vectoriales derivables y sea u una función escalar, dos veces derivable, en la región $G \subset R^3$, $\boldsymbol{b} = \operatorname{grad} u$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$. Demuéstrese que para que sea div $\boldsymbol{c} = 0$, es necesario y suficiente que la función u satisfaga en G la ecuación $\Delta u = \operatorname{div} \boldsymbol{a}$ (de este modo la demostración del teorema de Helmholtz se reduce a la resolución en la región G de la ecuación del tipo $\Delta u = f(x, y, z)$).

Haciendo uso del teorema de Ostrogradski — Gauss, calcúlese el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{a}$ a través de la superficie cerrada S, si:

25. $\boldsymbol{a} = (1 + 2x)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leqslant z \leqslant 4\}$.

26. $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, 3z = x^2 + y^2\}$.

Establézcase cuáles de los siguientes campos vectoriales son solenoidales:

27. $\boldsymbol{a} = x(z^2 - y^2)\boldsymbol{i} + y(x^2 - z^2)\boldsymbol{j} + z(y^2 + x^2)\boldsymbol{k}$.

28. $\boldsymbol{a} = (1 + 2xy)\boldsymbol{i} - y^2z\boldsymbol{j} + (z^2y - 2yz + 1)\boldsymbol{k}$.

Haciendo uso del teorema de Stokes, hállese la circulación del vector $\boldsymbol{a}$ a lo largo del contorno γ, si

29. $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $\gamma = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \geqslant 0\}$.

30. $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j}$; $\gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 9, 3y + 4z = 5\}$.

§ 53. INTEGRALES PROPIAS DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

53.1. DEFINICIÓN DE LAS INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO; SU CONTINUIDAD E INTEGRABILIDAD SEGÚN EL PARÁMETRO

Supongamos que Y es un conjunto de números reales, $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son dos funciones definidas en Y, $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$ y la función $f(x, y)$ está definida en el conjunto

$$\{(x, y) : y \in Y, x \in [\varphi(y), \psi(y)]\}. \tag{53.1}$$

Las integrales de la forma

$$\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx \tag{53.2}$$

se denominan *integrales dependientes de un parámetro*, y la variable y se llama, corrientemente, *parámetro*.

Se encuentra a menudo el caso particular de tal tipo de integrales, cuando las funciones φ y ψ son constantes, es decir, las integrales de la forma

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx. \tag{53.3}$$

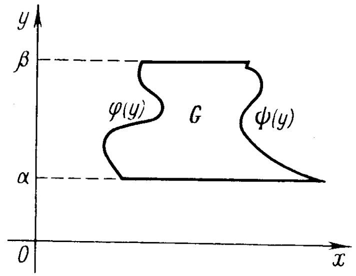


Fig. 228

Si Y es un conjunto de todos los números naturales, $Y = N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, entonces, suponiendo $f(x, n) = f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, la integral (53.3) puede escribirse en la forma

$$\int_a^b f_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Se ha obtenido de este modo una sucesión numérica formada por las integrales de las funciones de cierta sucesión funcional.

Examinemos un caso en que el conjunto Y representa en sí un segmento $[\alpha, \beta]$, las funciones $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ son continuas en dicho segmento y $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$. Supongamos que las gráficas de las funciones $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ y, quizás, los segmentos de las rectas $y = \alpha$ e $y = \beta$ forman la frontera de la región limitada G (fig. 228). Esta región es, evidentemente, cuadrable (véase el p. 44.1). En este caso el conjunto (53.1), sobre el cual viene definida la función $f(x, y)$, es la clausura $\bar{G}$ de la región mencionada G:

$$\bar{G} = \{(x, y); \alpha \leqslant y \leqslant \beta, \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}. \qquad (53.4)$$

En lo sucesivo estudiaremos las propiedades de la función $\Phi(y)$ (su continuidad, las reglas de su derivación e integración) en dependencia de las propiedades de las funciones $f(x, y)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$. Algunas de dichas propiedades se han obtenido antes, al estudiar la integral múltiple. Así por ejemplo, el lema demostrado en el p. 45.1 ofrece las condiciones, bajo las cuales una integral dependiente de un parámetro es una función continua de este parámetro. Enunciemos este lema en forma de un teorema, aplicando las designaciones del presente párrafo.

Teorema 1. *Si la función $f(x, y)$ es continua en la clausura $\bar{G}$ de la región G* (véase (53.4)), *la función $\Phi(y)$, definida por la fórmula* (53.2), *es continua en el segmento* $[\alpha, \beta]$.

A la afirmación de este teorema se le puede comunicar la siguiente expresión:

$$\lim_{y \to y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx = \int_{\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)}^{\lim\limits_{y \to y_0} \psi(y)} \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx. \qquad (53.5)$$

En efecto, del teorema 1 se deduce que el límite en el primer miembro de la igualdad (53.5) es iqual a $\Phi(y_0)$, y, en virtud de la continuidad de las funciones φ, ψ y f, el segundo miembro de la igualdad es también igual a

$$\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)dx = \Phi(y_0).$$

En particular, para la integral (53.3) tenemos

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx,$$

es decir, en este caso resulta posible el paso límite bajo el signo de integral.

En el teorema sobre el paso límite bajo el signo de integral se pueden debilitar las exigencias impuestas sobre la función $f(x, y)$, al requerir solamente, en lugar de su continuidad respecto de la totalidad de variables, que sea continua respecto de una sola variable y que tienda uniformemente al límite, respecto de la otra.

Teorema 2. *Supongamos que la función $f(x, y)$ está definida para todo $x \in [a, b]$, $y \in Y$ y es continua respecto de x en $[a, b]$ para cualquier y fijo, $y \in Y$. Entonces, si para $y \to y_0$**) *la función $f(x, y)$ tiende uniformemente en el segmento $[a, b]$ hacia la función $\varphi(x)$* (véase el p. 39.4), *se tiene*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una sucesión $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $\lim\limits_{y \to y_0} y_n = y_0$. Entonces (véase el ejercicio 5 en el p. 39.4) la sucesión $\varphi_n(x) = f(x, y_n)$ tenderá uniformemente en el segmento $[a, b]$ hacia la función $\varphi(x)$. De aquí se deduce (véase el p. 36.4) en primer lugar que $\varphi(x)$ es continua y, por ende, integrable en el segmento $[a, b]$, y, en el segundo lugar, que

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x, y_n)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

y, como esto es cierto para cualquier sucesión indicada $\{y_n\}$, el teorema queda demostrado. ☐

Pasemos al problema de integrabilidad de las integrales (53.2) que dependen de un parámetro.

Teorema 3. *Supongamos que la región G es elemental respecto de ambos ejes de coordenadas, es decir,*

$$G = \{(x, y) : \alpha < y < \beta, \varphi(y) < x < \psi(y)\} =$$
$$= \{(x, y) : a < x < b, \varphi_1(x) < y < \psi_1(x)\},$$

*) Aquí y_0 es un número o uno de los infinitos: ∞, $+\infty$ ó $-\infty$.

donde las funciones φ y ψ son continuas en el segmento $[\alpha, \beta]$, *mientras que las funciones φ_1 y ψ_1 lo son en el segmento* $[a, b]$. *Entonces, si la función $f(x, y)$ es continua en la clausura $\bar{G}$ de la región G, se tiene*

$$\int_\alpha^\beta \Phi(y)dy = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx\right]dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x,y)dy\right]dx =$$

$$= \iint_G f(x, y)dxdy. \qquad (53.6)$$

Es evidente que el teorema 3 hace paráfrasis del teorema correspondiente sobre la reducción de la integral múltiple a una reiterada (véase el p. 45.1).

53.2. DERIVACIÓN DE LAS INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Al estudiar las propiedades diferenciales de las integrales que dependen de un parámetro, consideraremos al principio las integrales de la forma (53.3).

Teorema 4 (regla de Leibniz). *Si la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en un rectángulo cerrado* $P = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant y \leqslant \beta\}$, *entonces la función* $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ *es derivable en el segmento* $[\alpha, \beta]$ *y*

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

Así pues, para derivar, bajo las suposiciones asumidas, una integral que depende de parámetro, es suficiente derivar la expresión subintegral, dejando intactos los límites de integración.

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in [\alpha, \beta]$ e $y + \Delta y[\alpha, \beta]$; entonces

$$\frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}\int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x, y + \theta\Delta y)}{\partial y}dx, \quad 0 < \theta < 1.$$

Se ha aplicado aquí la fórmula de incrementos finitos de Lagrange.

Al designar ahora con $\omega\left(\delta; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ el módulo de continuidad de la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, obtendremos

$$\left|\frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f(x,y + \theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|dx \leqslant \int_a^b \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(|\Delta y|; \frac{\partial f}{\partial y}\right)(b - a). \qquad (53.7)$$

Dado que la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es uniformemente continua en el rectángulo cerrado P, resulta que $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \omega\left(|\Delta y|; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$; por eso, de (53.7) obtenemos

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \square$$

El teorema 4 se generaliza con facilidad para el caso de una integral de la forma general (53.2) que depende de un parámetro.

Teorema 4′. *Supongamos que:*

1) *la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en el rectángulo cerrado*

$$P = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant y \leqslant \beta\},$$

2) $\bar{G} \subset P$ (véase (53.4));

3) *las funciones $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ tienen derivadas continuas en el segmento* $[\alpha, \beta]$.

Bajo estas condiciones la integral (53.2), *dependiente de un parámetro, tiene también una derivada en el segmento* $[\alpha, \beta]$, *con la particularidad de que*

$$\frac{d\Phi}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx - f[\varphi(y), y]\frac{d\varphi(y)}{dy} + f[\psi(y), y]\frac{d\psi(y)}{dy}. \qquad (53.8)$$

DEMOSTRACIÓN. Examinemos una función

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)dx, \quad a \leqslant u \leqslant b, \quad a \leqslant v \leqslant b, \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta.$$

No es difícil comprobar directamente que las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial u}, \dfrac{\partial F}{\partial v}$ de la función F existen y son continuas en totalidad de las variables y, u, v. Comprobemos primero la existencia y continuidad de la derivada parcial $\dfrac{\partial F}{\partial y}$. Su existencia se desprende inmediatamente del teorema 4, con la particularidad de que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \qquad (53.9)$$

Demostremos su continuidad. Sea $a \leqslant u \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, $a \leqslant u + \Delta u \leqslant b, a \leqslant v + \Delta v \leqslant b, \alpha \leqslant y + \Delta y \leqslant \beta$; al poner

$$\Delta \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y} = \frac{\partial F(y + \Delta y, u + \Delta u, v + \Delta v)}{\partial y} - \frac{\partial F(y, u, v)}{\partial y},$$

obtendremos:

$$\left|\Delta\frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y}\right| = \left|\int_{u+\Delta u}^{v+\Delta v}\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial y}dx - \int_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_u^v\left[\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]dx\right| +$$

$$+\left|\int_{u+\Delta u}^{u}\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial y}dx\right| + \left|\int_v^{v+\Delta v}\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial y}dx\right|. \quad (53.10)$$

Por cuanto la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ está definida en el rectángulo P, todas las integrales escritas tienen sentido en virtud de la elección indicada anteriormente de valores de los argumentos y

$$|v-u| \leqslant b-a. \quad (53.11)$$

Luego, de la continuidad de la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el rectángulo P proviene que esta función está acotada en él, es decir, existe tal constante $M > 0$ que para todo punto $(x,y) \in P$ se verifica la desigualdad

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leqslant M. \quad (53.12)$$

Al designar, como hasta ahora, con $\omega\left(\delta;\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ el módulo de continuidad de la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el rectángulo P y hacer uso de las desigualdades (53.11) y (53.12), de (53.10) obtenemos

$$\left|\Delta\frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y}\right| \leqslant \omega\left(|\Delta y|;\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left|\int_u^v dx\right| + M\left|\int_{u+\Delta u}^{u}dx\right| +$$

$$+M\left|\int_v^{v+\Delta v}dx\right| \leqslant (b-a)\omega\left(|\Delta y|;\frac{\partial f}{\partial y}\right) + M|\Delta u| + M|\Delta v|.$$

De aquí se deduce que $\lim\limits_{\sqrt{\Delta y^2+\Delta u^2+\Delta v^2}\to 0}\Delta\frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y} = 0$. Esto significa precisamente la continuidad de la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$ en el conjunto

$$\{(y,u,v): c \leqslant y \leqslant d, a \leqslant u \leqslant b, a \leqslant v \leqslant b\}.$$

La continuidad en este conjunto de las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u,v), \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f(v,y) \quad (53.13)$$

es obvia.

La relación entre las funciones Φ y F se establece por medio de la fórmula

$$\Phi(y) = F(y,\varphi(y),\psi(y)).$$

Debido a lo demostrado anteriormente, la función Φ puede derivarse según la regla para derivar las funciones compuestas:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy}.$$

Sustituyendo aquí las expresiones para las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial u} \text{ y } \frac{\partial F}{\partial v}$$

(véase (53.9) y (53.13)) y suponiendo $u = \varphi(y)$ y $v = \psi(y)$, obtendremos la fórmula (53.8). □

§ 54. INTEGRALES IMPROPIAS DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

54.1. DEFINICIONES FUNDAMENTALES. CONVERGENCIA UNIFORME DE LAS INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Consideraremos las integrales del tipo

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx, \quad (54.1)$$

donde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, la variable y pertenece a cierto conjunto Y y la integral (54.1) es, para ciertos valores de y (en particular para todo y), impropia.

Definición 1. *Si, para todo $y_0 \in Y$, la integral*

$$\Phi(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)dx$$

converge, la integral (54.1) *se llama convergente en el conjunto Y.*

En lo sucesivo, si no se especifica alguna otra circunstancia, consideraremos sólo el caso en que se cumplen las condiciones:

1) $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) cualquiera que sea $y \in Y$, la función $f(x,y)$ es integrable según Riemann respecto de la variable x en todo segmento $[a,\eta]$, donde η es tal que $a < \eta < b$.

En este caso la convergencia de la integral (54.1) en el conjunto Y significa que para cualquier $y \in Y$ existe un límite

$$\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y)dx$$

(si es que $b = +\infty$, entonces $b - 0 = +\infty$). Por cuanto

$$\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^\eta f(x,y)dx = \int_\eta^b f(x,y)dx,$$

de lo dicho obtendremos, para todo $y \in Y$ fijo:

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_\eta^b f(x, y)dx = 0.$$

De este modo, *si la integral* (54.1) *converge en el conjunto* Y, *entonces para todo* $y \in Y$ *fijo, cualquiera que sea el número* $\varepsilon > 0$, *existe tal* $\eta_\varepsilon = \eta_\varepsilon(y) < b$, *que si* $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$, *se tiene*

$$\left| \int_\eta^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon. \tag{54.2}$$

Las condiciones, bajo las cuales para las integrales impropias dependientes de un parámetro resultan válidos los teoremas, análogos a los demostrados en el párrafo anterior para integrales propias, están basadas sobre el concepto de la así llamada convergencia uniforme de la integral.

Se supondrá, según lo observado más arriba, que la integral (54.1) satisface las condiciones citadas 1) y 2).

Definición 2. *La integral* $\int_a^b f(x, y)dx$, *convergente en el conjunto* Y, *se llama convergente uniformemente en dicho conjunto, si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe tal* $\eta_\varepsilon < b$ *que para todo* $y \in Y$ *y todos los* η *tales que* $\eta_\varepsilon < \eta < b$, *se verifica la desigualdad*

$$\left| \int_\eta^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Recordemos que en nuestro caso b puede ser tanto finito, o sea, un número, como infinito, o sea, igual a $+\infty$. De este modo, la definición de convergencia uniforme en la forma aducida es válida simultáneamente tanto para el caso en que la integración se realiza por el segmento finito $[a, b]$, mientras que la integral impropia surja a cuenta de que el integrando no está acotado, como para el caso en que la integral impropia aparece a cuenta de que no está acotado el intervalo de integración $[a, +\infty]$.

Las definiciones aducidas de la convergencia y convergencia uniforme de una integral recuerdan las definiciones correspondientes para las series (véanse los pp. 36.1 y 36.3). Entre estas definiciones realmente existe una cierta relación.

Sea $\{\eta_n\}$ una sucesión tal que

$$\eta_1 = a, \eta_n \in [a, b), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \eta_n = b.$$

A la par con la integral (54.1) consideraremos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y)dx. \tag{54.3}$$

Sea

$$S_n(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, y)dx = \int_a^{\eta_n} f(x, y)dx$$

su suma parcial. En este caso, si la integral (54.1) converge (converge uniformemente) sobre el conjunto Y, será, evidentemente, convergente (uniformemente convergente) sobre el conjunto Y también la serie (54.3); con ello

$$\int_a^b f(x, y)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{\eta_n} f(x, y)dx = \lim_{n\to\infty} S_n(y),$$

es decir, la integral en consideración es igual a la suma de la serie (54.3).

La definición de la convergencia uniforme puede parafrasearse además de la manera siguiente.

Definición 2′. *La integral* (54.1), *convergente sobre el conjunto* Y, *se llama uniformemente convergente sobre dicho conjunto, si*

$$\lim_{\eta\to b-0} \sup_{y\in Y} \left| \int_\eta^b f(x, y)dx \right| = 0. \tag{54.4}$$

En efecto, si la integral (54.1) converge uniformemente sobre el conjunto Y en el sentido de la definición 2, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\eta_\varepsilon < b$ que se cumple la desigualdad (54.2) siendo $y \in Y$ e $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$, y por consiguiente,

$$\sup_{y\in Y} \left| \int_\eta^b f(x, y)dx \right| \leqslant \varepsilon, \eta_\varepsilon \leqslant \eta < b,$$

de donde proviene precisamente (54.4). Viceversa, si la integral en consideración converge uniformemente sobre el conjunto Y en el sentido de la definición 2′, entonces de la condición (54.4) se infiere, para cualquier $\varepsilon > 0$, la existencia de tal número η_ε que con $y \in Y$ y $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$ se verifica la desigualdad (54.2). □

Si consideramos la integral

$$F(y, \eta) \overset{\text{def}}{=} \int_\eta^b f(x, y)dx,$$

llegaremos a que, evidentemente, la condición (54.4) implica que esta integral tiende uniformemente sobre Y hacia cero para $\eta \to b - 0$ (en la terminología del p. 39.4, el parámetro aquí no es y, como lo fue en el punto mencionado, sino la variable η).

La convergencia uniforme sobre el conjunto Y de la integral (54.1) significa también que en este conjunto la función

$$\Phi(y, \eta) \overset{\text{def}}{=} \int_a^\eta f(x, y)dx \tag{54.5}$$

tiende uniformemente, para $\eta \to b - 0$, hacia la función (54.1).

Efectivamente, lo último significa (véase el p. 39.4) que para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\eta_\varepsilon < b$, que para cualquier η que satisface la condición $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$, y cualquier $y \in Y$ se verifica la desigualdad

$$|\Phi(y) - \Phi(y, \eta)| < \varepsilon.$$

Pero

$$\Phi(y) - \Phi(y, \eta) = \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^\eta f(x, y)dx = \int_\eta^b f(x, y)dx.$$

Por eso

$$\left|\int_{\eta}^{b} f(x, y)dx\right| < \varepsilon.$$

De este modo, la condición $\Phi(y, \eta) \underset{Y}{\rightrightarrows} \Phi(y)$ para $\eta \to b - 0$ es equivalente al cumplimiento de las condiciones de la definicion 2, es decir, a la convergencia uniforme sobre el conjunto Y de la integral (54.1).

Ejemplo. Consideremos una integral $\Phi(y) = \int_{0}^{+\infty} ye^{-xy}dx$. A título de conjunto Y tomemos el semieje $y \geqslant 0$ (para cualquier $y < 0$ esta integral diverge). Es fácil convencerse de que la integral en consideración converge sobre Y. Para cualquier $\alpha > 0$ converge uniformemente en el intervalo $[\alpha, +\infty)$. Efectivamente, en este caso se comprueba con facilidad, por ejemplo, el cumplimiendo de la condición (54.4):

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant \alpha} \left| \int_{\eta}^{+\infty} ye^{-xy}dx \right| = \lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant \alpha} e^{-\eta y} = \lim_{\eta \to +\infty} e^{-\alpha\eta} = 0.$$

Mientras tanto, la convergencia uniforme no subsiste en todo el semieje. En efecto,

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant 0} \left| \int_{\eta}^{+\infty} ye^{-xy}dx \right| = \lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant 0} e^{-\eta y} = 1,$$

es decir, en el conjunto Y la condición (54.4) no se cumple.

Teorema 1 (criterio de Weierstrass). *Si existe una función no negativa $\varphi(x)$, definida en el intervalo $[a, b)$ e integrable según Riemann en todo segmento $[a, \eta]$, donde $a < \eta < b$, de tal índole que:*

1) $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x)$, *donde* $a \leqslant x < b$, $y \in Y$;

2) *la integral* $\int_{a}^{b} \varphi(x)dx$ *converge*,

entonces la integral (54.1) *converge uniformemente sobre el conjunto Y.*

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, en virtud del criterio de comparación (véase el p. 33.3), la integral (54.1) converge absolutamente y, por lo tanto, es simplemente convergente, cualquiera que sea $y \in Y$. Luego, por lo que la integral $\int_{a}^{b} \varphi(x)dx$ es convergente, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\eta_\varepsilon < b$, que si $\eta_\varepsilon \leqslant \eta < b$, entonces $\int_{\eta}^{b} \varphi(x)dx < \varepsilon$. En tal caso, en virtud de la condición 1 del teorema

$$\left|\int_{\eta}^{b} f(x, y)dx\right| \leqslant \int_{\eta}^{b} |f(x, y)|dx \leqslant \int_{\eta}^{b} \varphi(x)dx < \varepsilon, \quad \eta_\varepsilon \leqslant \eta < b, \quad y \in Y,$$

lo que significa precisamente la convergencia uniforme de la integral $\int_{a}^{b} f(x, y)dx$ sobre el conjunto Y. □

Con ayuda del criterio de Weierstrass se establece, por ejemplo, que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2}$ converge uniformemente sobre todo el eje real $-\infty < y < +\infty$. En efecto, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$ converge, y para cualesquiera x e y se verifica la desigualdad $\frac{1}{1 + x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}$.

Del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de las funciones según un parámetro (véase el p. 39.4) se obtienen directamente las condiciones necesarias y suficientes (que también se llaman criterio de Gauchy) para la convergencia uniforme de las integrales.

Teorema 2. (criterio de Cauchy de la convergencia uniforme de las integrales). *Para que la integral* (54.1) *converja uniformemente sobre el conjunto Y, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista tal $\eta < b$, que cualesquiera que sean η' y η'', que satisfagan las condiciones $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, y todo $y \in Y$, se verifique la desigualdad*

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx\right| < \varepsilon. \tag{54.6}$$

Efectivamente, como ya se ha observado, la convergencia uniforme de la integral (54.1) es equivalente a que la función $\Phi(y, \eta)$ tienda uniformemente al límite (véase (54.5)), mientras que la desigualdad (54.6) puede escribirse, en las designaciones de (54.5), en la forma

$$|\Phi(y, \eta'') - \Phi(y, \eta')| < \varepsilon.$$

Por eso el teorema 2 no es otra cosa que simplemente una paráfrasis del teorema 4 del punto 39.4 para el caso que ahora se considera.

Ejercicios. Investíguense la convergencia y la convergencia uniforme de las integrales para todos los valores del parámetro α, indíquense las regiones de variación del parámetro α, en las que tiene lugar la convergencia uniforme de las integrales:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + (x - \alpha)^2}$.
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}dx$.
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x + \alpha\sqrt{x}}$.
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$.

6. Investíguese la convergencia uniforme de la integral $\displaystyle\int_0^{-\infty} \frac{dx}{(x-a)^p + b^p}$ cuando $a \in \boldsymbol{R}$, $b \geqslant b_0 > 0$ (cuando $b > 0$, respectivamente), $p > 1$.

54.2*. CRITERIO DE LA CONVERGENCIA UNIFORME DE LAS INTEGRALES

En este punto se demostrará el criterio para la convergencia uniforme de las integrales, análogo al criterio correspondiente para la convergencia uniforme de las series (véase el p. 36.3).

Teorema 3. *Supongamos que las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ están definidas para $a \leqslant x < +\infty$, e $y \in Y$ (a es finito, Y es un conjunto numérico), con la particularidad de que la función $f(x, y)$ es continua respecto de la variable x, mientras que $g(x, y)$ tiene la derivada $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ continua respecto de x. Si*

1) *la función $g(x, y)$ es monótona respecto de x para cada $y \in Y$, y en el conjunto Y tiende uniformemente hacia cero cuando $x \to \infty$;*

2) *la integral $\displaystyle\int_a^\eta f(x, y)\,dx$ está acotada como una función de las variables $\eta \in [a, +\infty)$ e $y \in Y$ en el conjunto $[a, +\infty) \times Y$;*

entonces la integral

$$\int_a^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\,dx \tag{54.7}$$

converge uniformemente sobre el conjunto Y.

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el segundo teorema del valor medio para las integrales (véase el p. 30.3*), para cualesquiera η' y η'', $a < \eta' < \eta''$, se verifica la igualdad

$$\int_{\eta'}^{\eta''} g(x, y) f(x, y)\,dx = g(\eta', y) \int_{\eta'}^{\xi} f(x, y)\,dx + g(\eta'', y) \int_{\xi}^{\eta''} f(x, y)\,dx, \tag{54.8}$$

donde $\eta' < \xi < \eta''$. En vista de la condición 2) del teorema, existe tal constante $M > 0$ que para cualesquiera $(\eta, y) \in [a, +\infty) \times Y$ tiene lugar la desigualdad $\left|\displaystyle\int_a^\eta f(x, y)\,dx\right| \leqslant M$. Por eso

$$\left|\int_{\eta'}^{\xi} f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_a^{\xi} f(x,y)\,dx + \int_{a}^{\eta'} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^{\xi} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int_a^{\eta'} f(x,y)\,dx\right| = 2M; \tag{54.9}$$

análogamente,

$$\left|\int_{\xi}^{\eta''} f(x,y)\,dx\right| \leqslant 2M. \tag{54.10}$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. En virtud de que la función $g(x, y)$ tiende uniformemente a cero en el conjunto Y, cuando $x \to +\infty$, existe tal $\eta_\varepsilon > a$ que, cualesquiera que sean $x > \eta_\varepsilon$ e $y \in Y$, se verifica la desigualdad

$$|g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{54.11}$$

Con ayuda de las desigualdades (54.9), (54.10) y (54.11), de (54.8) se deduce que para cualesquiera $\eta' > \eta_\varepsilon$ y $\eta'' > \eta_\varepsilon$ tiene lugar la estimación

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} g(x,y) f(x,y)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant |g(\eta', y)| \left|\int_{\eta'}^{\xi} f(x,y)\,dx\right| + |g(\eta'', y)| \left|\int_{\xi}^{\eta''} f(x,y)\,dx\right| <$$

$$< 2M \frac{\varepsilon}{4M} + 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

De este modo, la condición de Cauchy (véase el p. 54.1) referente a la convergencia uniforme de la integral (54.7) queda cumplida. □

OBSERVACIÓN. Se podría estimar la integral en el primer miembro de la igualdad sin recurrir al segundo teorema del valor medio, sino procediendo de manera análoga a la que se ha usado en la demostración del criterio de Dirichlet en el p. 33.6, integrarla por partes. Esto, no obstante, haría, más engorrosa la demostración sin que se eviten, en esencia, los razonamientos repetidos, propios para la demostración del segundo teorema del valor medio.

El hecho de que la función $g(x, y)$ tiene derivada continua respecto de x no es esencial y se debe sólo a que el segundo teorema del valor medio en el p. 28.3* se ha demostrado bajo las condiciones de tal suposición.

Ejemplo. La integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} xy}{1 + x^2}\,dx$ converge uniformemente para $y \geqslant y_0 > 0$. En efecto, la función $g(x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{x}{1 + x^2}$ va decreciendo para $x \geqslant 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, con la particularidad de que, por cuanto $g(x)$ no depende de y, dicha función tiende a cero uniformemente (cuando $x \to +\infty$) respecto de y; además

$$\left|\int_0^\eta \operatorname{sen} xy\,dx\right| = \frac{1 - \cos \eta y}{y} \leqslant \frac{2}{y_0}.$$

De este modo, ambas condiciones del teorema 3 están cumplidas.

Problema 32. Demuéstrese que si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ están definidas para $-\infty < a \leqslant x < +\infty$ e $y \in Y$, siendo la integral $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ uniformemente convergente sobre Y, mientras que la función $g(x, y)$ es monótona respecto de x y está acotada en el conjunto $[a, +\infty) \times Y$, entonces la integral $\int_a^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dx$ converge uniformemente sobre Y.

Ejercicios. 7. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x, y)$ son continuas respecto de x; además, cuando $x \to +\infty$, la función $g(x, y)$ tiende, de manera monótona y uniforme respecto de $y \in Y$, hacia cero y tiene derivada continua $\dfrac{\partial g(x, y)}{\partial x}$, $x \geqslant a$, $y \in Y$, mientras que la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente. En este caso la integral $\int_a^{+\infty} f(x)g(x, y)dx$ es uniformemente convergente sobre el conjunto Y.

Investíguese la convergencia uniforme de las integrales:

8. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen}^p x}{x^q} dx$ para $\alpha \geqslant 0, p \geqslant 0, q \geqslant 0.$

9. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln^p x}{x^q} dx$ para $p \geqslant 0, q \geqslant 0.$

54.3. PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES IMPROPIAS DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Al estudiar las propiedades de las integrales impropias dependientes de un parámetro, nos encontraremos a menudo con la permutación de los pasos límites relativos a diferentes variables. Por eso demostraremos, ante todo, un lema concerniente al problema en consideración.

Lema 1. *Sean X e Y dos conjuntos de números; la función $f(x, y)$ viene definida en su producto $X \times Y$* (véase el p. 41.2): *$x \in X$, $y \in Y$, x_0 e y_0 son unos números o infinitos cualesquiera ∞, $+\infty$, $-\infty$, y existen los límites*

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y), \quad x \in X, \quad y \quad \psi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y), \quad y \in Y.$$

Si la función f tiende uniformemente por lo menos hacia uno de los límites citados, existen y son iguales entre sí ambos límites reiterados:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, por ejemplo, que la función $f(x, y)$ tiende uniformemente en X hacia $\varphi(x)$ cuando $y \to y_0$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo existe

un entorno $U(y_0)$ tal que, cualesquiera que sean $y \in \overset{\circ}{U}(y_0) \cap Y$*) y $x \in X$, se verifica la desigualdad

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{54.12}$$

Si $y_1 \in \overset{\circ}{U}(y_0) \cap Y$ e $y_2 \in \overset{\circ}{U}(y_0) \cap Y$, entonces

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant |f(x, y_1) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

Pasando aquí al límite para $x \to x_0$, obtendremos

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leqslant \varepsilon. \tag{54.13}$$

Conforme al criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función (véase el p. 4.11), de (54.13) se deduce que existe un límite finito

$$\lim_{y \to y_0} \psi(y) = A.$$

Se ha demostrado pues la existencia del límite reiterado

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A.$$

Fijemos ahora $y_1 \in \overset{\circ}{U}(y_0) \cap Y$. En este caso de (54.12), para $y = y_1$, y de (54.13), para $y_2 \to y_0$, obtendremos, respectivamente

$$|f(x, y_1) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\psi(y_1) - A| \leqslant \varepsilon. \tag{54.14}$$

Para todo $y \in Y$ existe el límite $\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)$. Por ello, siendo fijo $y_1 \in \overset{\circ}{U}(y_0) \cap Y$, para $\varepsilon > 0$ dado se encontrará tal entorno $U(x_0)$ que para cualquier $x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ tendremos

$$|f(x, y_1) - \psi(y_1)| < \varepsilon. \tag{54.15}$$

De las desigualdades (54.14) y (54.15) para todo $x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ se tiene

$$|\varphi(x) - A| \leqslant |\varphi(x) - f(x, y_1)| + |f(x, y_1) - \psi(y_1)| + |\psi(y_1) - A| < 3\varepsilon,$$

lo que significa precisamente la existencia del límite reiterado

$$A = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y). \ \square$$

Teorema 4. *Sea $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ y supongamos que la función $f(x, y)$ está definida para todo $x \in [a, b)$, $y \in Y$, y en $[a, b)$ es continua respecto de x para cualquier $y \in Y$. Entonces, si con $\eta \in [a, b)$ cualquiera la función $f(x, y)$ tiende, uniformemente en el segmento $[a, \eta]$ hacia la función $\varphi(x)$ cuando $y \to y_0$***), *y la in-*

---

*) Mediante $\overset{\circ}{U}$ se denota, como siempre, un entorno reducido.

**) Aquí y_0 es un número o bien uno de los infinitos ∞, $+\infty$, $-\infty$.

tegral

$$\int_a^b f(x,y)dx \tag{54.16}$$

es uniformemente convergente sobre el conjunto Y, entonces

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{54.17}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $a < \eta < b$, de acuerdo con el teorema 2 del p. 53.1, tenemos

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^\eta f(x,y)dx = \int_a^\eta \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^\eta \varphi(x)dx. \tag{54.18}$$

Por eso, según la definición de la integral impropia, la igualdad (54.17) se puede escribir en otra forma:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x,y)dx = \lim_{\eta\to b-0}\lim_{y\to y_0}\int_a^\eta f(x,y)dx. \tag{54.19}$$

De este modo, resta demostrar la posibilidad de permutar el orden de los pasos límites respecto a las variables y y η para la función

$$\Phi(y,\eta) = \int_a^\eta f(x,y)dx.$$

Esto proviene del lema demostrado más arriba. En efecto, de acuerdo con (54.18), existe el límite $\lim\limits_{y\to y_0}\Phi(y,\eta)$. Por otra parte existe también el límite

$$\lim_{\eta\to b-0}\Phi(y,\eta) = \lim_{\eta\to b-0}\int_a^\eta f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y)dx,$$

con la particularidad de que, por hipótesis del teorema, la función tiende a su límite uniformemente en el conjunto Y. Por consiguiente, la validez de la igualdad (54.19) se desprende directamente de la afirmación del lema. □

Teorema 5. *Supongamos que la función $f(x,y)$ está definida y es continua (como función de dos variables) en un "rectángulo" semiabierto*

$$\{(x,y) : a \leqslant x < b,\ c \leqslant y \leqslant d\}, \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty$$
$$-\infty < c < d < +\infty.$$

En este caso, si la integral $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ converge uniformemente en $[c,d]$, será una función continua en dicho segmento.

DEMOSTRACIÓN. Cualquiera que sea $y_0 \in [c,d]$, la función $f(x,y)$ tiende uniformemente, para $y \to y_0$, hacia la función $f(x,y_0)$ en todo segmento $[a,\eta]$, $a < \eta < b$ (véase el p. 39.4). Por ello, de acuerdo con el teorema antecedente (véase (54.17)),

$$\lim_{y\to y_0}\Phi(y) = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx = \Phi(y_0). \ \square$$

Teorema 6. *Cumplidas las suposiciones del teorema 5, se tiene*

$$\int_c^d \Phi(y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \tag{54.20}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $a < \eta < b$, entonces, según el teorema 3 del p. 53.1, tenemos

$$\int_c^d dy\int_a^\eta f(x,y)dx = \int_a^\eta dx\int_c^d f(x,y)dy. \tag{54.21}$$

La función $\Phi(y,\eta) = \int_a^\eta f(x,y)dx$ es continua respecto de y, y cuando $\eta \to b-0$, tiende a su límite $\Phi(y)$ uniformemente en el segmento $[c,d]$. Por eso, de conformidad con el teorema 2, el p. 53.1, en el primer miembro de la igualdad (54.21) podemos pasar al límite bajo el signo de la integral para $\eta \to b-0$:

$$\lim_{\eta\to b-0}\int_c^d dy\int_a^\eta f(x,y)dx = \lim_{\eta\to b-0}\int_c^d \Phi(y,\eta)dy =$$
$$= \int_c^d \lim_{\eta\to b-0}\Phi(y,\eta)dy = \int_c^d \Phi(y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx;$$

y en este caso el límite obtenido es finito. Por consiguiente, cuando $\eta \to b-0$, el segundo miembro de la igualdad (54.21) tiene también el mismo límite el cual, por definición de la integral impropia, es igual a

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \ \square$$

Demostremos un teorema sobre la permutación del orden de integración para el caso en que ambas integrales son impropias.

Teorema 7. *Supongamos que la función $f(x,y)$ está definida y es continua en el rectángulo semiabierto*

$$\{(x,y) : a \leqslant x < b,\ c \leqslant y < d\},$$
$$-\infty < a < b \leqslant +\infty, \quad -\infty < c < d \leqslant +\infty.$$

Si la integral

$$\int_a^b f(x,y)dx \tag{54.22}$$

es uniformemente convergente en cualquier segmento $[c,\eta]$, $c < \eta < d$, y la integral

$$\int_c^d f(x,y)dy \tag{54.23}$$

es uniformemente convergente en cualquier segmento $[a, \xi]$, $a < \xi < b$, *y existe, además, una de las dos integrales reiteradas*

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)|\, dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|\, dy,$$

existen y son iguales entre sí ambas integrales reiteradas

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx \quad y \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

es decir,

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{54.24}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, por ejemplo, que existe una integral

$$\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|\, dy \tag{54.25}$$

y sea $c < \eta < d$. En virtud de que la integral (54.22) es uniformemente convergente en el segmento $[c, \eta]$, de acuerdo con el teorema 6, tenemos

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\, dy. \tag{54.26}$$

El límite del primer miembro de esta igualdad para $\eta \to d - 0$ es, obviamente, igual a

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Probemos que el límite del segundo miembro de la igualdad (54.26) es igual a

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

es decir, en este caso resulta posible el paso límite, para $\eta \to d - 0$, bajo el signo de integral. Comprobemos si se cumplen las premisas del teorema 4 de este punto. La función $\Phi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y)\, dy$ es continua respecto de x (véase el teorema 1 del p. 53.1) y, por hipótesis del teorema, en cualquier segmento $[a, \xi]$, $a < \xi < b$, tiende uniformemente a la integral (54.23) cuando $\eta \to d - 0$, es decir, hacia la función $F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$. Por fin, la integral

$$\int_a^b \Phi(x, \eta)\, dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\, dy$$

converge uniformemente respecto de η, $c < \eta < d$, pues

$$|\Phi(x, \eta)| \leqslant \int_c^d |f(x, y)|\, dy,$$

mientras que la integral (54.25) converge por suposición.

Por consiguiente, las condiciones del teorema 4 para el segundo miembro de la igualdad (54.26) quedan cumplidas, por lo cual

$$\lim_{\eta \to d - 0} \int_a^b \Phi(x, \eta)\, dx = \int_a^d \lim_{\eta \to d - 0} \Phi(x, \eta) \qquad dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Así pues, la igualdad (54.24), que se demuestra, se obtiene de (54.26) pasando al límite para $\eta \to d - 0$. □

Pasemos ahora a considerar la derivabilidad de las integrales impropias dependientes de un parámetro.

Teorema 8. *Supongamos que las funciones* $f(x, y)$ *y* $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *están definidas y son continuas en el rectángulo semiabierto*

$$\Delta = \{a \leqslant x < b, c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$-\infty < a < b \leqslant +\infty, \quad -\infty < c < d < +\infty.$$

Si la integral $\int_a^b f(x, y)\, dx$ *converge y la integral* $\int_a^b \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx$ *converge uniformemente en el segmento* $[c, d]$, *entonces la función* $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ *es continuamente derivable en dicho segmento y*

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Representemos la función $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ en forma de una serie convergente en el segmento $[c, d]$:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y)\, dx, \tag{54.27}$$

donde η_n, $n = 1, 2, \ldots$, es una sucesión fija tal que $\eta_n \in [a, b)$, $\eta_1 = a$ y $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = b$, y la función $\int_a^b \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$ se representará en forma en una serie convergente en el segmento $[c, d]$

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \tag{54.28}$$

De acuerdo con el teorema 4 del p. 53.2, todo término de la serie (54.28) es una derivada, respecto de la variable y, del término correspondiente de la serie (54.27), por lo cual, en virtud del teorema sobre la derivación de las series (véase el p. 36.4), la suma de la serie (54.28) es la derivada de la suma de la serie (54.27). □

Como ya se ha observado, todas las formulaciones y demostraciones anteriores se refieren a las integrales impropias dependientes de un parámetro que satisfacen las condiciones 1) y 2), enunciadas al principio del p. 54.1. De manera sumamente análoga se consideran también los casos más generales, por ejemplo, si

1′) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

2′) para todo $y \in Y$ la función $f(x, y)$ respecto de la variable x es integrable según Riemann en cualquier segmento $[\xi, \eta]$, donde $a < \xi < \eta < b$.

La teoría construida de las integrales dependientes de un parámetro se extiende de modo natural al caso en que una integral depende de dos o, en general, de cierto número finito de parámetros $y_1, \ldots, y_n$. Con ello, muchas de las formulaciones de las definiciones y los teoremas, al igual que las demostraciones, quedan invariables, siempre que se da a las designaciones usadas el sentido nuevo. Esto atañe, por ejemplo, a la definición de la convergencia uniforme y al teorema del paso al límite bajo el signo de integral, sólo conviene considerar que $y = (y_1, \ldots, y_n)$, y_0 es un punto del mismo espacio o el infinito, mientras que $y \to y_0$ se entiende en el sentido de límite en dicho espacio.

54.4. APLICACIÓN DE LA TEORIA DE INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO AL CÁLCULO DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Hasta ahora hemos conocido dos métodos para calcular integrales definidas. El primero de ellos parte de la definición de la integral como un límite de las sumas integrales y es de amplio uso en los procedimientos numéricos de los cálculos. Se estudiará más detalladamente en el p. 60.4. El segundo método, que ya ha sido empleado constantemente, se basa sobre la búsqueda de la función subintegral primitiva y la aplicación de la fórmula de Newton — Leibniz. Resulta que a veces se logra obtener los valores exactos de las integrales definidas, utilizando la teoría de integrales dependientes de un parámetro. La ventaja de este método consiste en que en algunos casos se calculan, con ayuda de este método, las integrales de unas funciones cuyas primitivas no son funciones elementales, debido a lo cual el procedimiento usual en el que se emplea la fórmula de Newton — Leibniz resulta no aplicable.

Ejemplo 1. Supongamos que se pide calcular la integral

$$J = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{54.29}$$

Demos a conocer los métodos de su cálculo basados sobre la sustitución de la integral dada por alguna otra que dependa de un parámetro y para la cual (54.29) sirva de valor particular.

Consideremos una función $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$ y la integral

$$J(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{54.30}$$

Es evidente que la integral (54.29) se obtiene de aquí cuando $y = 1$. Puesto que $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = 0(1)$ para $x \to 0$ y $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = 0\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ para $x \to 1$ y cualquier y fijo, entonces la integral (54.30) converge con todo y.

De la desigualdad $\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = \left|\dfrac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

y de la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ se deduce que la integral

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx \tag{54.31}$$

converge uniformemente sobre todo el eje real y, de conformidad con el teorema 8 del p. 54.3, es igual a $J'(y)$.

Al realizar sucesivamente los cambios de la variable de integración $x = \cos\varphi$ y $t = \operatorname{tg}\varphi$, obtendremos

$$J'(y) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1+y^2\cos^2\varphi} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{1+y^2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

De aquí, por definición de la integral indefinida, se infiere que

$$J(y) = \int J'(y)\,dy = \frac{\pi}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) + C.$$

Pero, de (54.30) se deduce que $J(0) = 0$, por lo cual $C = 0$ y

$$J(y) = \frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$$

Sustituyendo aquí $y = 1$, obtenemos el valor de la integral buscada (54.29)

$$J = J(1) = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

La integral (54.29) puede calcularse también aplicando la integración respecto de un parámetro. Al notar que $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$, obtendremos para J la expre-

sión
$$J=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}. \tag{54.32}$$

La integral $\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$ converge uniformemente respecto de y, pues $\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, mientras que la integral $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ converge.
Por esta razón podemos cambiar en (54.32) el orden de integración (véase el teorema 6 del p. 54.3). Entonces (haciendo uso del valor, obtenido directamente más arriba, de la integral respecto de x), encontramos
$$J=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Ejemplo 2. Calculemos el valor de la integral
$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}dx. \tag{54.33}$$

Se puede mostrar que la correspondiente integral indefinida no se expresa, para $\alpha\neq 0$, en términos de las funciones elementales, a consecuencia de lo cual la integral dada no se calcula por el procedimiento habitual con ayuda de la fórmula de Newton — Leibniz.

La integral (54.33) es convergente para todo valor de α. En efecto, si $\alpha=0$, entonces, evidentemente, $I(0)=0$. Si, en cambio, $\alpha\neq 0$, entonces, al realizar el cambio de la variable $t=\alpha x$, se obtendrá
$$I(\alpha)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt=I(1), & \text{si}\quad \alpha>0\\[2ex] \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}t}{t}dt=-I(1), & \text{si}\quad \alpha<0.\end{cases}$$

Por cuanto la integral $I(1)$ es convergente (véase el p. 33.5), convergerá también la integral $I(\alpha)$.

Con el fin de calcular la integral (54.33), examinemos una integral más general
$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}dx.$$

Al derivar formalmente respecto de α bajo el signo de integral, obtendremos una integral $\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\cos\alpha dx$, la cual converge uniformemente respecto del parámetro α, $-\infty<\alpha<+\infty$, cualquiera que sea $\beta>0$ fijo. Por consiguiente, para $\beta>0$ (véase el tomo 1, p. 26.4) se tiene
$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\cos\alpha x dx=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$
de donde
$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{\alpha}\frac{\beta dt}{t^2+\beta^2}+C(\beta)=\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}+C(\beta).$$
Pero $I(0,\beta)=0$, por lo tanto, $C(\beta)=0$. Así pues,
$$I(\alpha,\beta)=\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta},\quad \beta>0.$$

Nos interesa, sin embargo, el valor de la integral $I(\alpha,\beta)$ para $\beta=0$. Resulta más simple tratar de argumentar la posibilidad de pasar al límite bajo el signo de la integral $I(\alpha,\beta)$ cuando $\beta\to+0$. Fijemos un número $b\geqslant 0$ y mostremos que la integral $I(\alpha,\beta)$ converge uniformemente respecto del parámetro β en el segmento $[0, b]$, cualquiera que sea $\alpha\neq 0$ fijo. Efectivamente, integrando por partes (véase el p. 26.4 del tomo 1), obtendremos
$$\int_\eta^{+\infty}e^{-\beta x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}dx=\frac{1}{x}e^{-\beta x}\frac{\alpha\cos\alpha x+\beta\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg|_\eta^{+\infty}+$$
$$+\int_\eta^{+\infty}e^{-\beta x}\frac{\alpha\cos\alpha x+\beta\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\frac{dx}{x^2}.$$

Elijamos η_ε de modo tal que para $\eta\geqslant\eta_\varepsilon$ se cumplan las desigualdades
$$\left|\frac{1}{\eta}e^{-\eta\beta}\frac{\alpha\cos\alpha\eta+\beta\operatorname{sen}\alpha\eta}{\alpha^2+\beta^2}\right|\leqslant\frac{|\alpha|+b}{\alpha^2}\frac{1}{\eta}<\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\left|\int_\eta^{+\infty}e^{-\beta x}\frac{\alpha\cos\alpha x+\beta\operatorname{sen}x}{\alpha^2+\beta^2}\frac{dx}{x^2}\right|\leqslant\frac{|\alpha|+b}{\alpha^2}\int_\eta^{+\infty}\frac{dx}{x^2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

En tal caso para $\eta\geqslant\eta_\varepsilon$ obtendremos $\left|\int_\eta^{+\infty}e^{-\beta x}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}dx\right|<\varepsilon$, lo que precisamente demuestra la convergencia uniforme de la integral $I(\alpha,\beta)$ respecto del parámetro β en cualquier segmento $[0,b]$. Ahora, en virtud del teorema 4 del p. 54.3, se tiene

$$I(\alpha) = I(\alpha, 0) = \lim_{\beta \to +0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\beta \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha;$$

así pues,

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{si } \alpha > 0, \\ 0, & \text{si } \alpha = 0, \\ -\pi/2, & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Cabe fijar la atención en que la derivación respecto de α en (54.33) llevaría a una integral divergente $\int_0^\infty \cos \alpha x dx$. La derivación se hizo posible, en $I(\alpha, \beta)$, gracias a la presencia del factor $e^{-\beta x}$, $\beta > 0$, llamado "factor de convergencia". Se denomina "método de introducción del factor de convergencia" el procedimiento por cuyo intermedio se calcula la integral de la forma $\int_0^\infty f(x)dx$, pasando a la integral $\int_0^\infty e^{-\beta x} f(x) dx$, derivando respecto de β, buscando la integral obtenida y pasando al límite cuando $\beta \to 0$.

Conociendo el valor de $I(\alpha)$ es posible hallar con facilidad también los valores de varias integrales semejantes. Por ejemplo, podemos mostrar fácilmente (de lo que haremos uso en adelante) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = |\alpha| \pi. \tag{54.34}$$

Efectivamente, integrando por partes, encontraremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx = 2\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx = |\alpha| \pi.$$

Ejercicios. Calcúlense las integrales

10. $\int_0^a \frac{\ln(1 + ax)}{1 + x^2} dx \ (a > 0).$

11. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx \ (|a| < 1).$

12. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1 + b^2 x^2)} dx.$

13. $\int_0^\infty \frac{\cos ax + \cos bx - 2}{x^2} dx \ (a, b \neq 0).$

14. $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\operatorname{sen}^2 bx}{x^2} dx.$

54.5. INTEGRALES DE EULER

Examinemos las integrales

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} dx, \tag{54.35}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \tag{54.36}$$

llamadas *integrales de Euler de primera y segunda especie*, respectivamente, la integral (54.35) lleva el nombre de *función beta* y la (54.36), *función gamma*.

Aclaremos, ante todo, para qué valores de los parámetros p, q y s tienen sentido los segundos miembros de las fórmulas (54.35) y (54.36). Consideremos al principio la integral (54.35). En el caso general la función subintegral tiene dos peculiaridades: cuando $x = 0$ y cuando $x = 1$, por lo cual representemos la integral en la forma

$$B(p, q) = \int_0^{1/2} x^{p-1} (1 - x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} dx.$$

Al comparar la primera integral en el segundo miembro con la integral $\int_0^{1/2} x^{p-1} dx$, y la segunda integral, con $\int_{1/2}^1 (1 - x)^{q-1} dx$, que son convergentes para $p > 0$ y $q > 0$, respectivamente, y divergentes para $p \leqslant 0$ y $q \leqslant 0$, respectivamente, (véase el p. 33.3), llegamos a que el dominio de definición de la función beta (54.35) en el plano p, q será el ángulo recto $p > 0$, $q > 0$.

Luego, la integral $B(p, q)$ converge uniformemente en cada ángulo recto $p \geqslant p_0$, $q \geqslant q_0$, cualesquiera que sean $p_0 > 0$ y $q_0 > 0$. En efecto, de acuerdo con el criterio de Weierstrass, esto se desprende (véase el p. 54.1) de la desigualdad

$$x^{p-1} (1 - x)^{q-1} \leqslant x^{p_0 - 1} (1 - x)^{q_0 - 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

y de la convergencia, demostrada más arriba, de la integral

$$B(p_0, q_0) = \int_0^1 x^{p_0 - 1} (1 - x)^{q_0 - 1} dx, \quad p_0 > 0, \quad q_0 > 0.$$

Por cuanto todo punto (p, q), $p > 0$, $q > 0$, pertenece a cierto ángulo $p > p_0$, $q > q_0$, siendo elegidos de modo adecuado los números $p_0 > 0$ y $q_0 > 0$, entonces, en virtud del teorema 5 del p. 54.3, la función $B(p, q)$ es continua en todo su dominio de definición.

Con el fin de encontrar el dominio de definición de la función gamma (54.36), representémosla en la forma

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx. \quad (54.37)$$

Al comparar el primer sumando en el segundo miembro con la integral $\int_0^1 x^{s-1}dx$, la cual converge para $s > 0$ y diverge para $s \leqslant 0$, llegamos a que la integral $\int_0^1 x^{s-1} \times \times e^{-x}dx$ converge y diverge para los mismos valores del parámetro s. En lo que se refiere a la segunda integral en el miembro derecho de la igualdad (54.37), converge para cualquier valor de s. Esto proviene, por ejemplo, de la validez, para todo s, de la igualdad $x^{s-1}e^{-x} = o(e^{-x/2})$ cuando $x \to +\infty$, y de la convergencia de la integral $\int_1^{+\infty} e^{-x/2}dx = 2e^{-1/2}$. De este modo, la integral (54.36) converge para todo $s > 0$ y diverge cuando $s \leqslant 0$.

Probemos ahora que la integral (54.36) converge uniformemente en todo segmento $[s_1, s_2]$, donde $0 < s_1 < s_2 < +\infty$. En efecto, sea $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$; entonces, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, se tiene

$$x^{s-1}e^{-x} \leqslant x^{s_1-1}e^{-x},$$

y si $x \geqslant 1$, se tiene

$$x^{s-1}e^{-x} \leqslant x^{s_2-1}e^{-x}$$

y como las integrales $\int_0^1 x^{s_1-1}e^{-x}dx$ y $\int_1^{+\infty} x^{s_2-1}e^{-x}dx$ convergen, de la fórmula (54.37) se deduce, en virtud del criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de integrales (véase el p. 54.1), la convergencia uniforme de la integral $\Gamma(s)$ en el segmento $[s_1, s_2]$. De aquí proviene, en vista del teorema 5 del p. 54.3, que la función $\Gamma(s)$ es continua en todo su dominio de definición.

Ejercicio 15. Demuéstrese que las funciones $B(p, q)$ y $\Gamma(s)$ son infinitamente derivables.

Problema 33. Demuéstrese que $B(p, q)$ y $\Gamma(s)$ son las funciones analíticas.

Demos a conocer algunas propiedades de las integrales $\Gamma(s)$ y $B(p, q)$. Ante todo, de la fórmula (54.36) se obtiene directamente

$$\Gamma(s) > 0 \, (s > 0), \quad (54.38)$$

en particular, la función gamma no tiene ceros. Luego, al integrar por partes, obtenemos

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx = -x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = s\Gamma(s). \quad (54.39)$$

De este modo, si $s > n$ ($n = 1, 2, \dots$,), entonces

$$\Gamma(s) = (s-1)(s-2)\dots(s-n)\Gamma(s-n). \quad (54.40)$$

Para cualquier $s > 0$ puede elegirse un número entero no negativo n de modo tal que sea $0 < s - n \leqslant 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), y en este caso $\Gamma(s)$ se expresará, mediante la fórmula (54.40), en términos del valor de la función gamma en cierto punto del intervalo $(0, 1]$. En otras palabras, si se conoce el valor de la función gamma en el intervalo $(0,1]$, se puede hallar su valor en cualquier punto.

Hemos de notar, además, que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$, y, por lo tanto, en virtud de la fórmula (54.40),

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

De aquí se ve que la función gamma $\Gamma(s+1)$ es una prolongación de la función $s!$, definida sólo para $s = 0, 1, 2, \dots$ enteros, a todo el semieje $s > -1$ de números reales.

Demostraremos las siguientes propiedades de la función beta $B(p, q)$.

1. Para cualesquiera $p > 0$ y $q > 0$

$$B(p,q) = B(q,p). \quad (54.41)$$

Para convencerse de esto, basta efectuar el cambio de la variable $t = 1 - x$ en la integral (54.35).

2. Para cualesquiera $p > 0$ y $q > 1$

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1). \quad (54.42)$$

Análogamente, en virtud de la simetría (véase (54.41)), para cualesquiera $q > 0$ y $p > 1$

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q). \quad (54.43)$$

En efecto, al integrar por partes (54.35) y observar que $x^p(1 - x)^{q-2} = x^{p-1}(1-x)^{q-2} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, obtendremos $B(p, q) =$

$$= \int_0^1 (1-x)^{q-1}d\frac{x^p}{p} = \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Big|_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx =$$

$$= \frac{q-1}{p}\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx - \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx =$$

$$= \frac{q-1}{p}B(p,q-1) - \frac{q-1}{p}B(p,q),$$

de donde se desprende (54.42), y, en virtud de la simetría, también (54.43).

3. Para cualesquiera $p > 0$

$$\mathrm{B}(p, n) = \mathrm{B}(n, p) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Esta fórmula se obtiene como resultado de la aplicación sucesiva de la correlación (54.42), si se toma en consideración que $\mathrm{B}(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1}dx = \frac{1}{p}$. Si $p = m$ es también un número natural, entonces $\mathrm{B}(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

Entre las funciones $\mathrm{B}(p, q)$ y $\Gamma(s)$ existe una correlación que se establece mediante la fórmula de Euler

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \quad q > 0. \tag{54.44}$$

Demostrémosla, siguiendo el método de Dirichlet. Realicemos en la fórmula (54.36) el cambio de la variable $x = (1+t)y$, $t > 0$:

$$\frac{\Gamma(s)}{(1+t)^s} = \int_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-(1+t)y}dy$$

y pongamos $s = p + q, p > 0, q > 0$; entonces

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy.$$

Multipliquemos ambos miembros de esta igualdad por t^{p-1} e integremos respecto de t entre 0 y $+\infty$:

$$\Gamma(p+q)\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = \int_0^{+\infty} t^{p-1}dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy. \tag{54.45}$$

Realicemos el cambio de variable $t = \frac{x}{1-x}$ en la integral que figura en el primer miembro de la igualdad (54.45):

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = B(p,q). \tag{54.46}$$

Para calcular el segundo miembro de la igualdad observemos que

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1}dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy =$$

$$= \lim_{\xi \to +0} \int_0^{+\infty} t^{p-1}dt \int_\xi^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy. \tag{54.47}$$

En efecto, designando $\Phi(t, \xi) = \int_\xi^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy$, de la estimación

$$0 \leqslant \Phi(t, 0) - \Phi(t, \xi) \leqslant \int_0^\xi y^{p+q-1}e^{-y}dy,$$

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t, \xi)dt \leqslant \int_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t, 0)dt$$

concluimos que para $\xi \to +0$ la función $\Phi(t, \xi)$ tiende hacia $\Phi(t, 0)$ uniformemente respecto de $t \in (0, +\infty)$ y que la integral $\int_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t, \xi)dt$ converge uniformemente respecto de ξ, pues converge la integral (54.45). Por consiguiente, en el segundo miembro de (54.47) podemos pasar al límite bajo el signo de la integral exterior.

Luego,

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1}dt \int_\xi^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy =$$

$$= \int_\xi^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}dy \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-ty}dt, \quad \xi > 0, \quad p \geqslant 1, \quad q \geqslant 1. \tag{54.48}$$

La permutación del orden de integración es posible aquí, porque, primero, la integral $t^{p-1}\int_\xi^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy$ es uniformemente convergente respecto de t en cualquier segmento $[0, a]$, lo que se deduce de la estimación uniforme de la función subintegral

$$t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y} \leqslant a^{p-1}y^{p+q-1}e^{-y}, \quad 0 \leqslant t \leqslant a,$$

y de la convergencia de la integral $\int_\xi^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}dy$, segundo, la integral

$$y^{p+q-1}e^{-y}\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-ty}dt$$

converge uniformemente respecto de y en cualquier segmento $[\xi, b]$, $\xi > 0$, lo que se deduce de la estimación uniforme de la función subintegral

$$y^{p+q-1}e^{-y}t^{p-1}e^{-ty} \leqslant b^{p+q-1}t^{p-1}e^{-\xi t}$$

y de la convergencia de la integral $\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-\xi t}dt$; tercero, la integral que figura en el segundo miembro de la igualdad (54.48) existe. De este modo, la legitimidad del cambio del orden de integración en (54.48) se infiere del teorema 7, p. 54.3 (observemos que en este caso la función subintegral es no negativa).

Al realizar el cambio de variable $ty = u$, obtendremos

$$\int\limits_\xi^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}dy \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt = \Gamma(p)\int\limits_\xi^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy. \qquad (54.49)$$

Por fin,

$$\lim_{\xi\to+0}\int\limits_\xi^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy = \Gamma(q). \qquad (54.50)$$

De (54.45)—(54.50) obtenemos la fórmula (54.44) para $p \geqslant 1, q \geqslant 1$. Si ahora $p > 0$ y $q > 0$, entonces, según lo demostrado, se tiene

$$B(p+1, q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

Aplicando las correlaciones (54.39), (54.42) y (54.43), obtendremos la fórmula (54.44) bajo el supuesto de que $p > 0, q > 0$. □

54.6. FUNCIONES DE VALORES COMPLEJOS DE UN ARGUMENTO REAL

En lo que sigue se considerarán sistemáticamente las funciones de valores complejos $w(t) = u(t) + iv(t)$ del argumento real t (las funciones $u(t)$ y $v(t)$ adquieren valores reales). Ya nos encontramos con los conceptos de límite y continuidad de las funciones similares. La derivada de la función $w(t)$ se determina según la fórmula

$$w'(t) \overset{\text{def}}{=} u'(t) + iv'(t).$$

Mostremos, por ejemplo, que, de acuerdo con dicha regla, $(e^{i\alpha t})' = i\alpha e^{i\alpha t}$. En efecto,

$$(e^{i\alpha t})' = (\cos\alpha t + i\,\text{sen}\,\alpha t)' = -\alpha\,\text{sen}\,\alpha t + i\alpha\cos\alpha t = $$
$$= i\alpha(\cos\alpha t + i\,\text{sen}\,\alpha t) = i\alpha e^{i\alpha t}.$$

Análogamente se determina también la integral (propia o impropia) de la función $w = u + iv$:

$$\int\limits_a^b w(t)dt = \int\limits_a^b u(t)dt + i\int\limits_a^b v(t)dt, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty.$$

La integral $\int\limits_a^b (u(x) + iv(x))dx$ se denomina impropia, si lo es por lo menos una de las integrales $\int\limits_a^b u(x)dx$ y $\int\limits_a^b v(x)dx$. Además, la integral impropia $\int\limits_a^b (u(x) + iv(x))dx$ se llama ***convergente***, si convergen tanto $\int\limits_a^b u(x)dx$, como también $\int\limits_a^b v(x)dx$.

En este caso

$$\int\limits_a^b (u(x) + iv(x))dt \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b u(x)dx + i\int\limits_a^b v(x)dx.$$

La función w se denomina ***absolutamente integrable***, si lo son las funciones u y v.

Es evidente que toda una serie de las propiedades de las integrales de las funciones reales (linealidad de la integral, aditividad de ésta según los conjuntos, etc.) se extienden automáticamente a las funciones de valores complejos. Observemos, por ejemplo, que si $w(x) = u(x) + iv(x)$, donde $u(x)$ y $v(t)$ son funciones reales integrables según Riemann en el segmento $[a, b]$, entonces la integral $\int\limits_a^b w(x)dx$ es también el límite de las sumas integrales $\sigma_\tau = \sum\limits_{i=1}^k w(\xi_i)\Delta x_i (\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ es la partición del segmento $[a, b]$, $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k)$. De aquí, al igual que para las funciones reales, se desprende que en este caso la función $|w(x)|$ es también integrable según Riemann y que se verifica la desigualdad

$$\left|\int\limits_a^b w(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |w(x)|dx.$$

Esta desigualdad es válida también para las funciones de valores complejos absolutamente integrables en el sentido impropio, lo que se establece por medio de un paso límite.

Mas, en el caso de las funciones que toman valores complejos se debe tener cuidado al recurrir a los análogos de los teoremas demostrados para las funciones reales. La razón para ello es que no todas las afirmaciones válidas para las funciones del argumento real, que toman sólo valores reales, se extienden a las funciones de valores complejos. Con una situación semejante ya nos hemos encontrado al estudiar las funciones vectoriales (véase el p. 15.2 y también 37.9*). Por ejemplo, las afirmaciones, semejantes al teorema de Rolle y, por lo tanto, al de Lagrange de valores medios no son válidas para las funciones de valores complejos. Esto lo demuestra el ejemplo, aducido en el p. 15.2, si se escribe en términos de los valores complejos.

A saber, consideremos una función $f(t) = \cos t + i\,\text{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; para ella se verifica $f(0) = f(2\pi) = 1$, $f'(t) = -\text{sen}\,t + i\cos t$. Por cuanto $|f'(t)| = \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1$, no existe tal punto $\xi \in [0, 2\pi]$, que se verifique $f'(\xi) = 0$. Por consiguiente, el análogo del teorema de Rolle no tiene lugar en el caso dado.

Tampoco resulta cierta la regla de L'Hospital cuya demostración se ha basado sobre el teorema del valor medio. Probemos esto con un ejemplo *).

Sea $f(t) = t$, $g(t) = t + t^2 e^{\frac{i}{t^2}}$, $0 < t < 1$. Por cuanto, de acuerdo con la fórmula de Euler, $e^{i/t^2} = \cos\frac{1}{t^2} + i \operatorname{sen}\frac{1}{t^2}$, entonces

$$|e^{i/t^2}| = \sqrt{\cos^2\frac{1}{t^2} + \operatorname{sen}^2\frac{1}{t^2}} = 1.$$

Por eso, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$, y

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 0}(1 + te^{i/t^2}) = 1. \qquad (54.51)$$

Teniendo presente que

$$g'(t) = 1 + \left(2t - \frac{2i}{t}\right)e^{i/t^2}, \quad 0 < t < 1,$$

obtenemos

$$|g'(t)| \geqslant \left|\frac{2i}{t} - 2t\right| - 1 \geqslant \frac{2}{t} - 2t - 1 \geqslant \frac{2}{t} - 1 = \frac{2-t}{t}.$$

Por consiguiente, $\left|\dfrac{f'(t)}{g'(t)}\right| = \dfrac{1}{|g'(t)|} \leqslant \dfrac{t}{2-t}$, a consecuencia de lo cual

$$\lim_{t\to 0}\frac{f'(t)}{g'(t)} = 0. \qquad (54.52)$$

Comparando (54.51) y (54.52), nos convencemos de que en el caso dado la regla de L'Hospital no es aplicable.

54.7*. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA FUNCIÓN GAMMA

Mostremos que el comportamiento asintótico de la función gamma

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^s dx, \quad s > -1, \qquad (54.53)$$

puede ser descrito, para valores suficientemente grandes de la variable independiente s, mediante una fórmula bastante sencilla que contiene sólo funciones elementales.

*) Este ejemplo se ha tomado del libro de W. Rudin "Fundamentos del análisis matemático". (W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 2nd ed., New York-Toronto-London, 1964).

Es fácil ver que la función subintegral en la integral (54.53) toma su valor máximo cuando $x = s$. Realicemos en esta integral el cambio de la variable de integración, trasladando el punto $x = s$ al nuevo origen de coordenadas: $x = s + y$, y realizando, a continuación, la transformación de semejanza con un coeficiente igual a s: $y = st$, es decir, pongamos $x = s(1 + t)$. Obtendremos

$$\Gamma(s+1) = e^{-s}s^{s+1}\int_{-0}^{+\infty}[e^{-t}(1+t)]^s dt. \qquad (54.54)$$

Examinemos la función

$$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} e^{-t}(1+t), \quad -\infty < t < +\infty. \qquad (54.55)$$

Por cuanto $\varphi'(t) = -te^{-t}$, la función φ decrece cuando $t<0$ y crece cuando $t<0$; en el punto $t = 0$ la función alcanza su valor máximo $\varphi(0) = 1$. Luego, al poner

$$h(t) \overset{\text{def}}{=} -t + \ln(1+t), \quad -1 < t < -\infty \qquad (54.56)$$

obtendremos

$$\varphi(t) = e^{h(t)}, \quad -1 < t < +\infty, \qquad (54.57)$$

donde para $|t| < 1$

$$h(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots$$

y por eso

$$h(t) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \to 0. \qquad (54.58)$$

Así pues, la función gamma puede ser representada en la forma (véanse (54.54), (54.55) y (54.57))

$$\Gamma(s+1) = e^{-s}s^{s+1}\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt, \qquad (54.59)$$

donde el comportamiento de la función $h(t)$ para $t \to 0$ se describe por la correlación (54.58).

Antes de pasar a la deducción de la fórmula asintótica para $\Gamma(s+1)$ con $s \to +\infty$, aclaremos el método de su obtención con ayuda de unos razonamientos que no son muy rigurosos, pero verosímiles. La gráfica de la función $\varphi(t)$ es de la forma expuesta en la fig. 229. A medida que crece el parámetro s, la gráfica de la función $[\varphi(t)]^s$ irá "apretándose" contra el eje de la variable t y el segmento unidad del eje de ordenadas. Está claro por eso que la integral

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt, \qquad (54.60)$$

en el segundo miembro de la fórmula (54.59) se aproximará perfectamente bien para

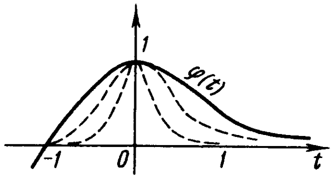


Fig. 229

grandes valores de s, mediante la integral

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)}dt, \tag{54.61}$$

donde $\delta > 0$ es arbitrario, pero fijo, con la particularidad de que, con una exactitud tanto mayor cuanto mayor sea el valor del parámetro s. En otras palabras, si s es suficientemente grande, entonces tanto para $-1 < t < -\delta$, como para $t > \delta$, los valores de la función $e^{sh(t)}$ son tan pequeños que cada una de las integrales $\int_{-1}^{-\delta} e^{sh(t)}dt$ y $\int_{\delta}^{\infty} e^{sh(t)}dt$ puede ser despreciada con alto grado de precisión. Es natural esperar que, siendo fijado $\delta > 0$, el error relativo que se obtiene como resultado de aproximar la integral (54.60) con ayuda de las integrales del tipo (54.61), también puede hacerse tan pequeño como se quiera, a cuenta de la elección del parámetro s lo suficientemente grande.

En virtud de (54.58), al tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeño, podemos aproximar con éxito la integral (54.61) por medio de la integral

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{st^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{s}} \int_{-\delta\sqrt{\frac{s}{2}}}^{\delta\sqrt{\frac{s}{2}}} e^{-u^2}du. \tag{54.62}$$

Si $\delta > 0$, el segundo miembro de esta igualdad tiende, para $s \to +\infty$, hacia la integral de Poisson (véase el p. 48.2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}. \tag{54.63}$$

De resultas, para los valores grandes de s la integral (54.60) resulta ser, en cierto sentido, bien aproximada por la expresión $\sqrt{2\pi/s}$ (véanse (54.62) y (54.63)). Por esta razón es natural tratar de demostrar una igualdad asintótica

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}}, s \to +\infty.$$

Mostremos que esta igualdad realmente tiene lugar. Elijamos arbitrariamente ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. En virtud de (54.58), existe tal δ, $0 < \delta < 1$, que para cualesquiera $t \in [-\delta, \delta]$ se cumple la desigualdad

$$\left| h(t) + \frac{t^2}{2} \right| < \varepsilon t^2,$$

es decir,

$$-\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)t^2 < h(t) < -\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)t^2.$$

Consecuentemente (por ser monótona la función e^x), para cualesquiera $s > 0$ se verifica la desigualdad

$$e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}} < e^{sh(t)} < e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}.$$

Integrándola en el segmento $[-\delta, \delta]$, obtendremos

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}} dt \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)}dt \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}} dt. \tag{54.64}$$

Estimemos ahora en cuánto la integral (54.61), que figura en el medio de esta desigualdad, se diferencia de la integral (54.60) que nos interesa. Recordando que la función $\varphi(t) = e^{sh(t)} = e^{-t}(1 + t)$ (véanse (54.55) y (54.57)) crece en el intervalo $[-1, -\delta]$ y decrece en $[\delta, +\infty)$, obtenemos para todos los $s > 1$:

$$0 < \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt - \int_{-\delta}^{\delta} e^{sh(t)}dt =$$
$$= \int_{-1}^{-\delta} e^{(s-1)h(t)}e^{h(t)}dt + \int_{\delta}^{+\infty} e^{(s-1)h(t)}e^{h(t)}dt \leqslant$$
$$\leqslant e^{(s-1)h(-\delta)} \int_{-1}^{-\delta} e^{h(t)}dt + e^{(s-1)h(\delta)} \int_{\delta}^{+\infty} e^{h(t)}dt \leqslant$$
$$\leqslant [e^{(s-1)h(-\delta)} + e^{(s-1)h(\delta)}] \int_{-1}^{+\infty} e^{h(t)}dt \leqslant C_1e^{-\alpha_1 s}, \tag{54.65}$$

donde

$$\alpha_1 = -\max\{h(-\delta), h(\delta)\} > 0,$$

$$C_1 = (e^{-h(-\delta)} + e^{-h(\delta)}) \int_{-1}^{+\infty} e^{h(t)}dt < +\infty.$$

Observemos que la función $h(t)$ (véase (54.56)) alcanza un máximo estricto en el punto $t = 0$, con la particularidad de que $h(0) = 0$; por ello, $h(-\delta) < 0$ y $h(\delta) < 0$.

De la manera semejante se estiman también las integrales extremas en la desigualdad (54.64). Al realizar el cambio de la variable de integración

$u = t\sqrt{\dfrac{(1+2\varepsilon)s}{2}}$, obtendremos (véase (54.63))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt = \sqrt{\frac{2}{(1+2\varepsilon)s}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}}.$$

Ahora, por analogía con (54.65), tendremos

$$0<\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}} - \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt - \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)st^2}{2}}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)t^2}{2}} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt +$$

$$+ \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)t^2}{2}} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt + \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(1+2\varepsilon)t^2}{2}}dt\right) =$$

$$= e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{1+2\varepsilon}}\left(\int_{-\infty}^{-\delta\sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{2}}} e^{-u^2}du + \int_{\delta\sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{2}}}^{+\infty} e^{-u^2}du\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{1+2\varepsilon}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{(1+2\varepsilon)(s-1)\delta^2}{2}}\sqrt{2\pi} \leqslant C_2e^{-\alpha_2 s}, \qquad (54.66)$$

donde $\alpha_2 = \dfrac{(1+2\varepsilon)\delta^2}{2} > 0$, $C_2 = e^{\frac{(1+2\varepsilon)\delta^2}{2}}\sqrt{2\pi}$.

Del mismo modo se obtiene también la estimación

$$0<\sqrt{\frac{2}{(1-2\varepsilon)s}} - \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{(1-2\varepsilon)st^2}{2}}dt \leqslant C_3e^{-\alpha_3 s}, \qquad (54.67)$$

donde $\alpha_3 = \dfrac{(1-2\varepsilon)\delta^2}{2} > 0$, $C_3 = e^{\frac{(1-2\varepsilon)\delta^2}{2}}\sqrt{2\pi}$.

Al poner $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ y sustituir (54.65), (54.66) y (54.67) en (54.64), obtendremos, para las constantes correspondientes $C_4 > 0$ y $C_5 > 0$ (dependientes de ε):

$$\sqrt{\frac{2\pi}{(1+2\varepsilon)s}} + C_4e^{-\alpha s} \leqslant \int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{(1-2\varepsilon)s}} + C_5e^{-\alpha s}.$$

Dividamos la desigualdad obtenida por $\sqrt{2\pi/s}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon}} + C_4e^{-\alpha s}\sqrt{\frac{s}{2\pi}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}}\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}} + C_5e^{-\alpha s}\sqrt{\frac{s}{2\pi}}.$$

Por consiguiente, pasando al límite para $s \to +\infty$, tendremos, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \leqslant \lim_{s\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}}\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}}.$$

Al hacer tender aquí ε hacia cero, obtendremos

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{s}}}\int_{-1}^{+\infty} e^{sh(t)}dt = 1,$$

o, que es lo mismo, la igualdad asintótica buscada

$$\int_{-1}^{+\infty} [e^{-t}(1+t)]^s dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}}, \quad s \to +\infty.$$

Al multiplicar ambos miembros de la igualdad por $e^{-s}s^{s+1}$, en virtud de (54.54), obtendremos la fórmula asintótica

$$\Gamma(s+1) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-s} s^{s+\frac{1}{2}}, \quad s \to +\infty, \tag{54.68}$$

llamada *fórmula de Stirling para la función gamma*. Esta fórmula es, evidentemente, una generalización de la fórmula de Stirling para el factorial de números naturales (véase el p. 37.8), que se obtiene de (54.68), si ponemos en ésta $s = n$, pues $\Gamma(n + 1) = n!$ (véase el p. 54.5).

54.8*. SERIES ASINTÓTICAS

En el p. 37.10* estudiábamos los desarrollos de las funciones en series de potencias asintóticas cuando $x \to +\infty$. Recordemos que la serie

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots$$

se denomina *desarrollo asintótico de la función* f para $x \to +\infty$, si las sumas parciales de dicha serie

$$S_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$$

satisfacen la condición

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \to +\infty.$$

El concepto de desarrollo asintótico de una función se generaliza del modo natural a las series según los sistemas de funciones que forman las así llamadas *sucesiones asintóticas.*

Definición 3. *Una sucesión de funciones* $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, *definidas en cierto entorno reducido del punto* a *(finito o infinito) lleva el nombre de sucesión asintótica para* $x \to a$, *si para cualquier* $n = 0, 1, 2, \dots$, *tiene lugar la correlación*

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a. \tag{54.69}$$

Son ejemplos de sucesiones asintóticas para $x \to a$ las expresiones $\varphi_n(x) = (x - a)^n$, si a es un punto finito, y $\varphi_n(x) = x^{-n}$, si $a = +\infty$ o bien $a = -\infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Definición 4. *Sea* $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, *una sucesión asintótica para* $x \to a$. *La serie*

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) + \dots \tag{54.70}$$

se llama serie asintótica (o desarrollo asintótico) para $x \to a$ *de la función dada* f, *definida en cierto entorno reducido del punto* a, *si sus sumas parciales*

$$S_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) \tag{54.71}$$

satisfacen la condición: para cualquier $n = 0, 1, 2, \dots$ *se verifica la igualdad asintótica*

$$f(x) - S_n(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a. \tag{54.72}$$

Lema 2. *Sea* $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, *una sucesión asintótica para* $x \to a$. *Para que la serie* (54.70) *sea un desarrollo asintótico de la función* f *para* $x \to a$, *es necesario y suficiente que se verifique*

$$f(x) - S_n(x) = O(\varphi_{n+1}(x)), \quad x \to a, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{54.73}$$

En otras palabras, la serie (54.70) es un desarrollo asintótico de la función f para $x \to a$ cuando, y sólo cuando, su suma parcial $S_n(x)$ sirva de valor aproximado de la función $f(x)$ con la exactitud de hasta $O(\varphi_{n+1}(x))$ para $x \to a$, es decir, el orden del error no supere el orden del primer término que se desecha.

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD DE LA CONDICIÓN (54.73). La correlación (54.72) para $n = 1, 2, \dots$ puede escribirse en la forma

$$f(x) - S_{n-1}(x) - a_n\varphi_n(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a,$$

de donde

$$f(x) - S_{n-1}(x) = a_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)) = O(\varphi_n(x)), \quad x \to a, \quad n = 1, 2, \dots$$

es decir, se cumple la condición (54.73). □

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA DE LA CONDICIÓN (54.73). En virtud de (54.73) y (54.69), tenemos

$$f(x) - S_n(x) = O(\varphi_{n+1}(x)) = O(o(\varphi_n(x))) = o(\varphi_n(x)), \quad x \to a,$$
$$n = 0, 1, 2, \dots ,$$

lo que coincide con (54.72). □

Resulta curioso notar que si para cualquier $n = 0, 1, 2, \dots$, se cumple la condición

$$f(x) - S_n(x) = O(\varphi_n(x)), \quad x \to a, \tag{54.74}$$

más débil comparada con la (54.72), se deduce de ella, en virtud de (54.69), la igualdad asintótica (54.72). En otras palabras, el cumplimiento de la condición (54.74) para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ significa que la serie (54.70) es un desarrollo asintótico de la función f para $x \to a$. En efecto, de (54.74) tenemos para $n = 1, 2, \dots$,

$$f(x) - S_{n-1}(x) = a_n\varphi_n(x) + O(\varphi_n(x)) = O(\varphi_n(x)) =$$
$$= O(o(\varphi_{n-1}(x))) = o(\varphi_{n-1}(x)), \quad x \to a,$$

es decir, la condición (54.72).

Si la sucesión asintótica $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, es de tal índole que existe un entorno reducido del punto a, en el que para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ tiene lugar la desigualdad $\varphi_n(x) \neq 0$, entonces por analogía con el caso de las series asintóticas de potencias de las funciones obtenemos:

si una función f *se desarrolla para* $x \to a$ *en la serie asintótica* (54.70), *este desarrollo es único y sus coeficientes se determinan sucesivamente según las fórmulas*

$$a_0 = \lim_{x\to a} f(x), \quad a_n = \lim_{x\to a} \frac{1}{\varphi_n(x)}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\varphi_k(x)\right],$$
$$n = 1, 2, \ldots .$$

No obstante, para la búsqueda práctica de los desarrollos asintóticos de las funciones dadas dicha fórmula no es siempre cómoda. Resulta más fácil a menudo obtener el desarrollo necesario por otro medio, en particular, en el caso de las integrales, integrando por partes. En este último caso la sucesión asintótica $\{\varphi_n(x)\}$ no se predetermina, por regla general, de antemano, sino que se construye, partiendo de las propiedades de la función dada en el entorno del punto a.

Ejemplo. Desarrollemos en serie asintótica, para $x \to +\infty$, la función

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}dt, \quad x > 0, \tag{54.75}$$

($\alpha > 0$ es un parámetro), eligiendo la sucesión asintótica correspondiente. Por cuanto

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}dt + i\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^\alpha}dt,$$

entonces, de acuerdo con el criterio de Dirichlet (véase el p. 33.6), las partes imaginaria y real de la función $F(x, \alpha)$ representan en sí, para $x > 0$, las integrales convergentes. Por eso converge también la integral (54.75). Ha de notarse que las partes real e imaginaria de la integral $\frac{1}{2}F\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$ las constituyen las integrales incompletas de Fresnel (véase § 34)

$$\int_x^{+\infty} \cos\theta^2 d\theta, \quad \int_x^{+\infty} \operatorname{sen}\theta^2 d\theta.$$

Con el fin de convencerse de esto, basta realizar el cambio de la variable de integración $t = \theta^2$ en la integral $\frac{1}{2}F\left(x^2, \frac{1}{2}\right)$.

Integrando por partes (54.75), obtendremos

$$F(x, \alpha) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}dt = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha\int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}dt = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha + 1).$$

Aplicando sucesivamente esta fórmula a los valores de la función F, que se obtienen en el segundo miembro, tendremos

$$F(x, \alpha) = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha F(x, \alpha + 1) = \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - i\alpha\left[\frac{ie^{ix}}{x^{\alpha+1}} - i(\alpha + 1)F(x, \alpha + 2)\right] =$$

$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha} - \frac{\alpha i^2 e^{ix}}{x^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha + 1)i^3 e^{ix}}{x^{\alpha+2}} + \ldots + \frac{(-1)^n\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n - 1)i^{n+1}e^{ix}}{x^{\alpha+n}} +$$
$$+ (-i)^{n+1}\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n)F(x, \alpha + n + 1) =$$
$$= \frac{ie^{ix}}{x^\alpha}\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + k - 1)}{(ix)^k} + \frac{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n)}{i^{n+1}} \times$$
$$\times F(x, \alpha + n + 1). \tag{54.76}$$

La serie

$$\frac{ie^{ix}}{x^\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n - 1)}{(ix)^n} \tag{54.77}$$

es un desarrollo asintótico de la función $F(x, \alpha)$ para $x \to +\infty$. En efecto, la sucesión de funciones $\varphi_n(x) = e^{ix}x^{-n-\alpha}$, $n = 0, 1, \ldots$, es, como es fácil de comprobar, asintótica, y para las sumas parciales $S_n(x, \alpha)$ de la serie (54.77) tenemos, en virtud de (54.76):

$$|F(x, \alpha) - S_n(x, \alpha)| = \left|\frac{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n)}{i^{n+1}}F(x, \alpha + n + 1)\right| =$$
$$= \alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n)\left|\int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+n+1}}dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+n+1}} =$$
$$= \frac{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n - 1)}{x^{\alpha+n}} = O\left(\frac{e^{ix}}{x^{\alpha+n}}\right), \quad x \to \infty,$$

es decir, se cumple la condición (54.74), y, por tanto, la serie (54.77) es, de hecho, un desarrollo asintótico de la función $F(x, \alpha)$ para $x \to +\infty$.

54.9 *. DESARROLLO ASINTÓTICO DE LA FUNCIÓN GAMMA INCOMPLETA

Cualquiera que sea $x > 0$, para la función gamma $\Gamma(s)$ se tiene

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = \int_0^{x} t^{s-1}e^{-t}dt + \int_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt.$$

La función

$$\Gamma(s,x) \overset{\text{def}}{=} \int_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt, \quad x > 0, \tag{54.78}$$

se denomina función gamma incompleta. Está definida para todos los valores reales del parámetro s. Hallemos su desarrollo asintótico para $x \to +\infty$. Realizando en el segundo miembro de (54.78) la integración por partes, obtendremos

$$\Gamma(s,x) = \int_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt =$$

$$= x^{s-1}e^{-t} + (s-1)\int_x^{+\infty} t^{s-2}e^{-t}dt = x^{s-1}e^{-t} + (s-1)\Gamma(s-1,x).$$

Aplicando sucesivamente esta fórmula a los valores de la función gamma incompleta, que se obtienen en el segundo miembro, tendremos

$$\Gamma(s,x) = x^{s-1}e^{-x} + (s-1)x^{s-2}e^{-x} + \ldots$$

$$\ldots + (s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)x^{s-n}e^{-x} + (s-1)(s-2)\ldots$$

$$\ldots(s-n)\Gamma(s-n,x) = e^{-x}x^s \sum_{k=0}^{n} \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{x^k} +$$

$$+ (s-1)(s-2)\ldots(s-n)\Gamma(s-n,x).$$

De aquí, para $n > s - 1$ tenemos

$$\left|\Gamma(s,x) - e^{-x}x^s \sum_{k=0}^{n} \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{x^k}\right| =$$

$$= |(s-1)(s-2)\ldots(s-n)\Gamma(s-n,x)| \leqslant$$

$$\leqslant |(s-1)\ldots(s-n)| \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n-s+1}}dt \leqslant$$

$$\leqslant |(s-1)(s-2)\ldots(s-n)| \frac{1}{x^{n-s-1}} \int_x^{+\infty} e^{-t}dt =$$

$$= |(s-1)\ldots(s-n)| \frac{e^{-x}}{x^{n-s-1}} = O\left(\frac{e^{-x}}{x^{n-s-1}}\right), \quad x \to +\infty,$$

es decir, para las sumas parciales de la serie

$$e^{-x}x^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{x^n} \tag{54.79}$$

y para la sucesión $\varphi_n(x) = x^{-n+s+1}e^{-x}$, que es asintótica (lo que se comprueba con facilidad), la condición (54.73) se cumple cuando $x \to +\infty$. De este modo, la serie (54.79) es un desarrollo asintótico de la función gamma incompleta $\Gamma(s, x)$ para $x \to +\infty$.

En el p. 54.7* se ha encontrado el primer término del desarrollo asintótico de la función gamma $\Gamma(s+1)$ para $s \to +\infty$. Se pueden hallar también los términos siguientes, es decir, desarrollar la función gamma en una serie asintótica. Esta serie tendrá la siguiente forma

$$\Gamma(s+1) \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-s}s^{s+\frac{1}{2}}\left(1 + 3c_3\frac{2!}{1!2^2}\frac{2}{s} + \right.$$

$$\left. + 5c_5\frac{4!}{2!2^4}\left(\frac{2}{s}\right)^2 + \ldots\right), \quad s \to +\infty. \tag{54.80}$$

Aquí $\{c_k\}$ es una sucesión de coeficientes del desarrollo en una serie de potencias (en el entorno de cero) de la función $t = t(z)$ definida mediante la igualdad $\frac{1}{2}z^2 = -h(t)$, donde $h(t)$ viene dada por la fórmula (54.56).

Puede obtenerse también el desarrollo asintótico para el logaritmo natural de la función gamma. El desarrollo citado tiene por expresión

$$\ln\Gamma(s) \sim \left(s - \frac{1}{2}\right)\ln s - s + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)s^{2n-1}},$$

$$s \to +\infty \tag{54.81}$$

y se denomina *serie de Stirling*. Aquí, B_{2n} son los así llamados *números de Bernoulli* que se definen mediante la igualdad

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} C_{n+1}^j B_j m^{n+1-j}$$

(todos los números de Bernoulli impares, salvo $B_1 = -\frac{1}{2}$, son nulos).

De la fórmula (54.81) podemos obtener (por potenciación) el desarrollo asintótico para la función gamma en el que los coeficientes serán expresados en forma explícita. El desarrollo tiene por expresión

$$\Gamma(s) \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-s}s^{s-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} - \frac{139}{51840s^3} + \ldots\right\}, \quad s \to +\infty.$$

La demostración de las fórmulas (54.80) y (54.81) sale de los márgenes de este libro. La descripción de los métodos por cuyo intermedio se obtienen los desarrollos semejantes se dan en el libro de M. V. Fedoriuk "Método del punto de ensilladura" M., 1977.

54.10. OBSERVACIONES SOBRE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Hemos considerado más arriba las integrales "unidimensionales" dependientes de un parámetro, es decir, el caso en que tanto la variable de integración como el parámetro eran variables numéricas. Esta teoría se generaliza para el caso de las integrales múltiples que dependen de un parámetro "unidimensional" o "multidimensional", es decir, de las integrales de la forma

$$F(y) = \int f(x, y) dG. \tag{54.82}$$

Aquí la función $f(x, y)$ está definida respecto de la variable x en el conjunto abierto $G \subset R^n$ y es integrable según Riemann en cualquier conjunto D abierto y medible según Jordan de tal género que $\bar{D} \subset G$. El parámetro y recorre cierto conjunto Y, el cual puede representarse, por ejemplo, por un subconjunto del espacio m-dimensional R^m, mientras que la integral (54.82) se entiende, en el caso general, en el sentido impropio.

La integral (54.82) se denomina *convergente*, si para todo $y_0 \in Y$ fijo converge la integral

$$\int f(x, y_0) dG.$$

Cuando $n \geqslant 2$, esto, como se sabe (véase el p. 48.3), es equivalente a la condición de convergencia de la integral

$$\int |f(x, y_0)| dG.$$

A la integral convergente (54.82) (como también a toda sucesión de conjuntos abiertos medibles según Jordan G_k, $k = 1, 2, \ldots$, que agota de manera monótona el conjunto G) se le confronta del modo natural una serie de cuya suma sirve la misma:

$$\int f(x, y) dG = \int f(x, y) dG_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int f(x, y) d(G_{k+1} \setminus \bar{G}_k). \tag{54.83}$$

Por analogía con el caso unidimensional se define también la integral uniformemente convergente.

Definición 5. *La integral convergente* (54.82) *se llama uniformemente convergente, si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un compacto* $A \subset G$ *tal que para cualquier conjunto* D, *abierto y medible según Jordan, para el cual* $A \subset D \subset \bar{D} \subset G$ *se verifica la desigualdad*

$$\left| \int f(x, y) d(G \setminus \bar{\Gamma}) \right| < \varepsilon.$$

Esta definición es equivalente a la siguiente:

Definición 5'. *La integral convergente* (54.82) *se llama uniformemente convergente, si, cualquiera que sea la sucesión de conjuntos abiertos y medibles según Jordan* G_k, $k = 1, 2, \ldots$, *que agota de manera monótona el conjunto abierto* G, *y el número* $\varepsilon > 0$, *existe un número* k_ε, *dependiente de la sucesión dada y del número* ε, *tal que para todo número* $k \geqslant k_\varepsilon$ *y todos los* $y \in Y$ *se verifica la desigualdad*

$$\left| \int f(x, y) d(G \setminus \bar{G}_k) \right| < \varepsilon.$$

Si la integral (54.82) converge uniformemente en el conjunto G con relación al parámetro $y \in Y$, entonces la serie (54.83) es también uniformemente convergente en G.

Para las integrales múltiples dependientes de un parámetro quedan vigentes los teoremas sobre su continuidad, derivabilidad e integrabilidad, análogos a los demostrados anteriormente. Esta afirmación se comprueba con facilidad y no será el objeto de nuestra consideración detallada.

Se encuentran integrales que dependen de un parámetro de un modo más complejo: en las integrales citadas no sólo la función subintegral f depende de un parámetro, sino también el conjunto G, según el cual se realiza la integración, es decir, $G = G(y)$:

$$F(y) = \int_{G(y)} f(x, y) dx. \tag{54.84}$$

A título de ejemplo de tal integral en el caso unidimensional sirve la integral

$$F(y) = \int_a^b \frac{dx}{|x - y|^\alpha}, \quad a \leqslant y \leqslant b.$$

Aquí $G(y)$ se compone de dos (salvo el caso $y = a$ e $y = b$) intervalos (a, y) y (y, b) que varían con el cambio del parámetro y.

Examinemos un ejemplo análogo en el espacio n-dimensional. Sea G un conjunto abierto en R^n, y supongamos que $\mu = \mu(x)$ es continua en G, $\rho = \rho(x, y)$ constituye la distancia entre los puntos x e y, $x \in G$, $y \in R^n$, y α es un cierto número. Las integrales de la forma

$$u(y) = \int \frac{\mu(x) dG}{\rho^\alpha} \tag{54.85}$$

se llaman *potenciales* y se relacionan al tipo (54.84), puesto que en calidad de conjunto, según el cual se realiza la integración, sirve en dichas integrales el conjunto $G \setminus \{y\}$, dependiente de y (el dominio de integración en la fórmula (54.85) se ha denotado, como lo hacemos siempre, simplemente con G). Si $\alpha = 1$ y $n = 3$, la función (54.85) recibe el nombre de *potencial newtoniano*.

Problema 34. Demuéstrese que si G es un conjunto abierto medible según Jordan y la función $\mu = \mu(x)$ es continua en su clausura $\bar{G}$, entonces la integral (54.85) será, para $\alpha < n$, continua en todo el espacio.

CAPÍTULO VII

SERIES DE FOURIER. INTEGRAL DE FOURIER

§ 55. SERIES TRIGONOMÉTRICAS DE FOURIER

55.1. DEFINICIÓN DE LA SERIE DE FOURIER. PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS FUNDAMENTALES

Definición 1. *La serie de la forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx, \tag{55.1}$$

donde $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *son sucesiones de números reales, se denomina serie trigonométrica.*

Sus sumas parciales son combinaciones lineales de las funciones que componen el sistema

$$1) \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots . \tag{55.2}$$

Definición 2. *El conjunto de las funciones* (55.2) *se llama sistema trigonométrico.*

Lema 1. *El sistema trigonométrico* (55.2) *posee las siguientes propiedades:*

1) *Una integral, extendida al segmento* $[-\pi, \pi]$, *del producto de dos funciones distintas que integran el sistema es nula (esta propiedad lleva el nombre de ortogonalidad*) del sistema* (55.2)), *es decir,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx dx = 0, \quad n \neq m, \tag{55.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx dx = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx dx = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{55.4}$$

*) El origen del término "ortogonalidad" se explicará en el p. 58.1.

DEMOSTRACIÓN. Para cualesquiera m, n enteros y no negativos, siendo $m \neq n$, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(n-m)x}{2(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\operatorname{sen}(n+m)x}{2(n+m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

De modo análogo se demuestran también las otras dos igualdades (55.3).

Demostremos ahora (55.4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)dx = \pi. \ \square$$

Teorema 1. *Sea*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \tag{55.5}$$

y supongamos que la serie en el segundo miembro de esta igualdad converge uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$. *Entonces*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{55.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto la serie, que figura en el segundo miembro de la igualdad (55.5), converge uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$, mientras que todos sus términos representan funciones continuas en dicho segmento, entonces la suma $f(x)$ de la serie es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y la propia serie puede ser integrada término a término (véase el p. 36.4) entre los límites de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right)dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx dx = \pi a_0.$$

De aquí proviene la primera de las fórmulas (55.6).

Si la serie (55.5) se multiplica, término a término, por $\cos nx$ y $\operatorname{sen} nx\,(n = 1, 2, \ldots)$, las series obtenidas serán también uniformemente convergentes en el segmento $[-\pi, \pi]$ (véase la propiedad 2° en el p. 36.3).

Integrando término a término estas series y utilizando la propiedad de ortogonalidad (55.3) del sistema trigonométrico y las igualdades (55.4), tendremos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx\,dx = \pi a_n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \pi b_n.$$

De las correlaciones obtenidas se infiere directamente la fórmula (55.6). □

Hemos de notar ahora que las integrales (55.6) tienen sentido no sólo para las funciones continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$, sino también, por ejemplo, para funciones, la integral de las cuales converge absolutamente en este segmento.

Recordemos que el concepto de integral absolutamente convergente (como también el de integral simplemente convergente) se ha introducido sólo para las funciones definidas en cierto intervalo (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, que tienen tal número finito de puntos x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_k \leqslant b$, que la función f es integrable según Riemann en cualquier segmento $[\xi_i, \eta_i]$, donde $x_{i-1} < \xi_i < \eta_i < x_i$. En este caso, si $a = -\infty$, entonces $x_0 = -\infty$, y si $b = +\infty$, entonces $x_k = +\infty$. Los números $x_0, x_1, \ldots, x_k$ se denominan *puntos singulares de la función f*.

Si, asumidas estas suposiciones, la integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, siempre tiene sentido y converge también la integral $\int_a^b f(x)dx$ (véase el p. 33.5).

Las funciones se llaman *absolutamente integrables* en un segmento, si la integral del valor absoluto de dichas funciones converge en el mismo segmento.

Observemos que si una función es integrable según Riemann en cierto segmento, su valor absoluto es también integrable según Riemann en el mismo (véase el p. 28.1) y, por consiguiente, una función integrable según Riemann en un segmento es absolutamente integrable en él.

Si la integral de la función f converge absolutamente en el segmento $[-\pi, \pi]$, todas las integrales (55.6) para dicha función son también convergentes, puesto que representan en sí las integrales del producto de la función absolutamente integrable $f(x)$ por una función acotada (seno o coseno) y, de acuerdo con el lema 2 en el p. 33.5, tales integrales son absolutamente convergentes.

Definición 3. *Supongamos que la función $f(x)$ es absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$. La serie trigonométrica* (55.1), *cuyos coeficientes se determinan por la fórmula (55.6), se denomina serie de Fourier**) *o, en forma más detallada, serie trigonométrica de Fourier, mientras que los números a_n y b_n se llaman coeficientes de Fourier de la función f.*

*) J. B. Fourier (1768—1830), físico y matemático francés.

En este caso se escribe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Las sumas parciales de orden n de esta serie se designarán mediante $S_n(x, f)$ o, de forma más breve, $S_n(x)$. Subrayemos que aquí el signo $\sim$ no es una igualdad asintótica, sino simplemente una correspondencia: a una función se le asigna su serie de Fourier.

El teorema 1 puede parafrasearse en términos mencionados del modo siguiente. *Toda serie trigonométrica uniformemente convergente es la serie de Fourier de su suma.*

Ejercicios. 1. Supongamos que la función f es absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ y sea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

En este caso, si la función f es par, se tiene $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, si, en cambio, f es una función impar, entonces $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. ¿Será la serie trigonométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$$

una serie de Fourier?

En este párrafo se estudiarán las funciones periódicas, es decir, tales funciones f, para cada una de las cuales existe un $T > 0$ tal que, cualquiera que sea x perteneciente al dominio de definición de la función f, los valores $x + T$ y $x - T$ pertenecen también a este campo y se verifica la igualdad

$$f(x + T) = f(x).$$

Las funciones de este género se llaman T-periódicas.

Ejercicio 3. Muéstrese que la función f que es igual a cero en todo punto racional y a uno en todos los puntos irracionales, tiene como su período cualquier número racional y ninguno de los números irracionales puede ser su período.

Sea f absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ y, por consiguiente, se le puede asignar una serie de Fourier. Si la serie citada converge en cierto conjunto, converge hacia una función 2π-periódica, puesto que todos sus términos son 2π-periódicos. Resulta pues cómodo que la propia función f sea "prolongada periódicamente" con el período de 2π. Las comillas se deben a que en la realidad la función f puede ser prolongada periódicamente sólo en el caso en que $f(-\pi) = f(\pi)$.

Si esta condición no se cumple, llamaremos *prolongación de la función f* una función 2π-periódica $\tilde{f}$ que se obtendrá bajo el supuesto de que para cualquier punto $x \in [-\pi, \pi)$ en el que queda definida la función f (recordemos que en virtud de la integrabilidad absoluta de la función f en el segmento $[-\pi, \pi]$ ésta queda definida en todos los puntos del segmento, a excepción, quizás, de su conjunto finito); tenemos

$$\bar{f}(x + 2\pi k) = f(k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Para el caso cuando $f(-\pi) \neq f(\pi)$, tal prolongación conduce a que los valores de las funciones f y $\bar{f}$, para $x = \pi$, no coinciden. No obstante, por cuanto los coeficientes de Fourier de la función se determinan con ayuda de las integrales (55.6), esto no llevará a su cambio y, por lo tanto, las series de Fourier de la función dada f y de la prolongada $\bar{f}$ coinciden.

Diremos que en la mencionada prolongación periódica la función $\bar{f}$ puede no ser continua en los puntos $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, si la función f es continua para $x = -\pi$ y $x = \pi$. La función prolongada f será continua en los puntos $2\pi k$, si f es continua en $x = -\pi$ y $x = \pi$, con la particularidad de que $f(-\pi) = f(\pi)$. La continuidad en otros puntos se conserva cuando tiene lugar la prolongación periódica: si f es continua en el punto $x \in (-\pi, \pi)$, $\bar{f}$ será continua en cualquier punto $x + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

La función prolongada $\bar{f}$ se denotará con frecuencia mediante el mismo símbolo f que caracteriza la función prolongable.

Si la función f es 2π-periódica, al calcular sus coeficientes de Fourier (véase (55.6)), la integración puede realizarse en cualquier segmento de longitud 2π, por ejemplo, en el segmento $[0, 2\pi]$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nx dx.$$

Efectivamente, si una función φ tiene período igual a T y para cierto número $a \in \boldsymbol{R}$ es integrable sobre el segmento $[a, a + T]$, entonces, cualquiera que sea $b \in \boldsymbol{R}$, será integrable también en el segmento $[b, b + T]$, con la particularidad de que

$$\int_b^{b+T} \varphi(x)dx = \int_a^{a+T} \varphi(x)dx,$$

es decir, la integral $\int_a^{a+T} \varphi(x)dx$ no depende de cómo se elige el número $a \in \boldsymbol{R}$. Esta propiedad de las funciones periódicas se demuestra fácilmente por cambio de variable de integración y recomendamos que el mismo lector lleve a cabo la demostración.

En el § 58 generalizaremos el concepto de serie trigonométrica de Fourier, a saber, definiremos y estudiaremos las series de Fourier referidas a un sistema ortogonal arbitrario de funciones. Ahora, en el párrafo presente, sólo se estudiarán las series trigonométricas de Fourier de las funciones absolutamente integrables (véase también el p. 58.6).

Ante todo se estudiará la cuestión sobre las condiciones que garantizan la convergencia de la serie de Fourier. En el caso de que la serie de Fourier de una función dada $f(x)$ converja bajo ciertas condiciones, se aclarará a qué es igual su suma $S(x)$ y, en particular, cuando coincide con la función $f(x)$. Se estudiará la "velocidad" de convergencia de las series de Fourier y las condiciones de que ésta depende. Se mostrará que incluso en el caso cuando la serie de Fourier de una función continua diverge en ciertos puntos (ejemplos de tales series existen), a base de la serie puede restablecerse la propia función en todos los puntos. Veremos, en fin, que desde cierto punto de vista resulta natural considerar la convergencia de las series de Fourier no sólo en el sentido habitual (como convergencia de una sucesión de las sumas parciales en un punto o convergencia uniforme), sino de manera sumamente diferente, a saber, en el sentido de la media cuadrática (véanse los pp. 55.8 y 55.9).

55.2. COEFICIENTES DE FOURIER QUE TIENDEN A CERO

Es de gran importancia en la teoría de las series trigonométricas el hecho de que los coeficientes de Fourier de una función absolutamente integrable tienden hacia cero cuando $n \to \infty$. Se deduce el hecho de una afirmación algo más general que se demuestra abajo y se emplea frecuentemente en las investigaciones concernientes a las series de Fourier y los problemas contiguos.

Teorema 2 (de Riemann). *Si la función f es absolutamente integrable en el intervalo (a, b), sea éste finito o infinito, entonces*

$$\lim_{\nu \to \infty}\int_a^b f(x)\cos \nu x dx = \lim_{\nu \to \infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}\,\nu x dx = 0.$$

Corolario. *Los coeficientes de Fourier* (55.6) *de una función absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ tienden hacia cero cuando $n \to \infty$.*

Antes de demostrar estas afirmaciones, introduzcamos algunas nociones que en adelante serán de empleo frecuente.

Definición 4. *Para cualquier función f, definida en todo el eje numérico, la clausura de un conjunto de puntos en los cuales $f(x) \neq 0$ lleva el nombre de portador de la función y se designa* supp f*).

Definición 5. *Una función f, definida en todo el eje numérico, se denomina finita, siempre que su portador está contenido en cierto segmento finito.*

Definición 6. *Para todo conjunto X dispuesto en una recta numérica, la función*

$$\chi(x) = \chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in X, \\ 0, & \text{si} \quad x \notin X, \end{cases}$$

recibe el nombre de función característica del conjunto X.

---

*) Proviene de la palabra latina supportus.

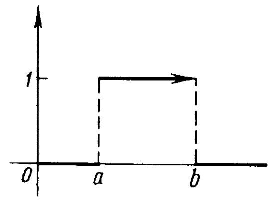


Fig. 230

En la fig. 230 se expone la función característica de un semiintervalo del tipo $[a, b)$.

Definición 7. *Una función f, definida en todo el eje numérico, se llama escalonada finita, siempre que es combinación lineal de un número finito de funciones características de los semiintervalos disjuntos dos a dos $[a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, es decir, si puede ser representada en la forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_i(x) \tag{55.7}$$

(fig. 231), *donde $\chi_i(x)$ es la función característica del intervalo $[a_i, b_i)$ y λ_i, $i = 1, \dots, m$, son ciertos números reales.*

No es difícil convencerse de que si no se requiere que los semiintervalos $[a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, sean disjuntos dos a dos, se obtendrá una definición equivalente. Esto se deduce de que la intersección de un número finito de los semiintervalos acotados en consideración es también un semiintervalo del mismo tipo.

Evidentemente, toda función de la forma (55.7) es finita.

Una función escalonada finita f es integrable en todo el eje numérico y, además, si está dada por la fórmula (55.7), entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_i(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{a_i}^{b_i} dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - a_i).$$

Ejercicio 4. Demuéstrese que cualquier función continua en un segmento es el límite de una sucesión uniformemente convergente de las funciones escalonadas finitas cuyos portadores pertenecen al mismo segmento.

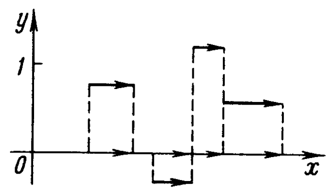


Fig. 231

Lema 2. *Para cualquier función f, absolutamente integrable en un intervalo finito o infinito de extremos a y b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, existe una sucesión de tales funciones escalonadas finitas φ_n, $n = 1, 2, \dots$, que*

1°) $\operatorname{supp} \varphi_n \subset (a, b)$,

2°) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx = 0.$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función f es absolutamente integrable en un intervalo cuyos extremos son a y b. Admitamos, para concretar, que es integrable en cualquier segmento

$$[\xi, \eta], \quad -\infty \leqslant a < \xi < \eta < b \leqslant +\infty$$

(el caso general de una función absolutamente integrable, véase el p. 55.1, se reduce con facilidad al caso que se considera). Entonces, de acuerdo con la definición de integral impropia, para cualquier número fijo $\varepsilon > 0$ existen tales números ξ y η que

$$\int_a^{\xi} |f(x)| dx + \int_{\eta}^{b} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{55.8}$$

La función f es integrable según Riemann en el segmento $[\xi, \eta]$ y, por consiguiente, si designamos con s_τ la suma inferior de Darboux de la función f, correspondiente a cierta partición τ del segmento $[\xi, \eta]$, tendremos

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \int_{\xi}^{\eta} f(x)dx,$$

donde δ_τ es la finura de la partición τ. Por ello, existe una partición $\tau_0 = \{x_i\}_{i=1}^{i=k}$ del segmento $[\xi, \eta]$ tal que si s_{τ_0} es la suma inferior de Darboux para la función f, correspondiente a la partición τ_0, es decir, si

$$s_{\tau_0} = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

entonces

$$0 \leqslant \int_{\xi}^{\eta} f(x)dx - s_{\tau_0} < \frac{\varepsilon}{2},$$

donde ε es el número fijado anteriormente.

Pongamos

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_i, & \text{si } x_{i-1} \leqslant x < x_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ 0, & \text{si } x < \xi \text{ ó } x \geqslant \eta. \end{cases} \tag{55.9}$$

Evidentemente, $\varphi(x)$ es la función escalonada finita,

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [\xi, \eta] \subset (a, b) \quad \text{y} \quad \int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = s_{\tau_0}.$$

Por consiguiente,

$$\int\limits_{\xi}^{\eta} \Big[f(x) - \varphi(x)\Big]dx = \int\limits_{\xi}^{\eta} f(x)dx - \int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{55.10}$$

con la particularidad de que por cuanto $\varphi(x) \leqslant f(x)$, $\xi \leqslant x < \eta$, entonces

$$f(x) - \varphi(x) = |f(x) - \varphi(x)| \geqslant 0.$$

De las desigualdades (55.8) y (55.10) tenemos:

$$\int\limits_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx = \int\limits_a^{\xi} |f(x)|dx + \int\limits_{\xi}^{\eta} [f(x) - \varphi(x)]dx + \int\limits_{\eta}^{b} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Suponiendo, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ y denotando las correspondientes funciones escalonadas finitas φ mediante φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, obtendremos una sucesión de funciones escalonadas finitas φ_n, para la cual se cumple la afirmación del lema. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sea $\chi(x)$ la función característica del semiintervalo $[\xi, \eta)$. Para todo intervalo $(a, b) \supset [\xi, \eta]$ tendremos

$$\lim_{\nu\to\infty} \int\limits_a^b \chi(x) \operatorname{sen} \nu x dx = \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\xi}^{\eta} \operatorname{sen} \nu x dx = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu} = 0,$$

pues

$$\left|\frac{\cos \nu\xi - \cos \nu\eta}{\nu}\right| \leqslant \frac{|\cos \nu\xi| + |\cos \nu\eta|}{\nu} \leqslant \frac{2}{\nu} \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Por cuanto cualquier función escalonada finita es una combinación lineal de un número finito de funciones características de los semiintervalos del tipo considerado, la afirmación del teorema queda válida también para toda función escalonada finita.

Ahora, si la función f es absolutamente integrable sobre el intervalo de extremos a y b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, para cualquier número $\varepsilon > 0$, con arreglo al lema, existe una función escalonada finita φ tal que

$$\int\limits_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para esta función escalonada (por cuanto para las funciones escalonadas el teorema ya ha sido demostrado) existe tal ν_ε que con $|\nu| \geqslant \nu_\varepsilon$

$$\left|\int\limits_a^b \varphi(x) \operatorname{sen} \nu x dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por ello, al hacer uso de la identidad $f(x) = [(f(x) - \varphi(x)] + \varphi(x)$, para $|\nu| \geqslant \nu_\varepsilon$ obtendremos

$$\left|\int\limits_a^b f(x) \operatorname{sen} \nu x dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b [f(x) - \varphi(x)] \operatorname{sen} \nu x dx\right| +$$
$$+ \left|\int\limits_a^b \varphi(x) \operatorname{sen} \nu x dx\right| \leqslant \int\limits_a^b \Big|f(x) - \varphi(x)\Big| dx +$$
$$+ \left|\int\limits_a^b \varphi(x) \operatorname{sen} \nu x dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto es indicio de que $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_a^b f(x) \operatorname{sen} \nu x dx = 0$.

De modo análogo se demuestra que

$$\lim_{\nu\to\infty} \int\limits_a^b f(x) \cos \nu x dx = 0. \quad \square$$

55.3. INTEGRAL DE DIRICHLET. PRINCIPIO DE LOCALIZACIÓN

Sea la función $f(x)$ absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$. Hallemos una expresión, cómoda para investigar, de la suma parcial $S_n(x; f)$ de la serie de Fourier de la función f, llamada también simplemente *suma de Fourier de n-ésimo orden*, $i = 0, 1, 2, \ldots$, *de dicha función*. Al sustituir en $S_n(x; f)$ la expresión para los coeficientes de Fourier (55.6), obtendremos

$$S_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx)\ dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t - x)\right] dt. \tag{55.11}$$

Pongamos

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt, \tag{55.12}$$

entonces la fórmula (55.11) se escribirá en la forma

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t - x) f(t)dt. \tag{55.13}$$

La función $D_n(t)$ se llama *núcleo de Dirichlet* y la integral que figura en el segundo miembro de la igualdad (55.13), *integral de Dirichlet*.

Lema 3. *El núcleo de Dirichlet*:

1) *es una función par continua* 2π-periódica, con la particularidad de que

$$D_n(0) = n + \frac{1}{2};$$

2) *satisface la condición*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1; \tag{55.14}$$

3) *cuando* $t \neq 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$D_n(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}. \tag{55.15}$$

DEMOSTRACIÓN. La continuidad, la paridad y la existencia de un *período*, igual a 2π, para el núcleo de Dirichlet $D_n(t)$ se desprenden inmediatamente de su definición, es decir, de la fórmula (55.12). De la misma fórmula se infiere también la igualdad (55.14): para obtenerla, es suficiente integrar en el segmento $[-\pi, \pi]$ ambos miembros de la igualdad (55.12):

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dt = \pi,$$

pues, cuando $k = 1, 2, \ldots$: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dt = 0$.

Demostremos ahora la fórmula (55.15). Tenemos:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\left[\operatorname{sen}\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{sen}\frac{2k+1}{2}t - \operatorname{sen}\frac{2k-1}{2}t\right)\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}, \quad t \neq 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Observemos que por ser par el núcleo de Dirichlet,

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)dt = \int_{0}^{\pi} D_n(t)dt,$$

por lo cual

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 2\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt.$$

De aquí y de la propiedad 2° del núcleo de Dirichlet se deduce que

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt = 1. \tag{55.16}$$

Indiquemos, además, que el segundo miembro de la igualdad (55.15) tiene sentido sólo cuando $t \neq 2\pi k$, siendo k entero. Pero, como

$$\lim_{t\to 2k\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 2k\pi} D_n(t) = n + \frac{1}{2},$$

la función $\dfrac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$ puede ser definida adicionalmente para $t = 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, considerando que su valor en cada uno de estos puntos es igual, por definición, a $n + \frac{1}{2}$. Una función, definida adicionalmente de este modo, es continua para $t = 2\pi k$, cualquiera que sea k entero.

Volvamos a considerar la función f, absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$. Para nosotros será de interés, en particular, el límite de la sucesión de sumas parciales $S_n(x)$ de su serie de Fourier. Hemos de notar que el paso directo al límite, para $n \to \infty$, en el segundo miembro de la igualdad (55.13), es decir, el paso al límite bajo el signo de integral, no es posible, puesto que el límite del núcleo de Dirichlet para $n \to \infty$ no existe. Prolongamos la función f desde el semiintervalo $[-\pi, \pi)$ en una función 2π-periódica y designémosla también con f (véase en el p. 55.1 la información más detallada sobre la prolongación periódica).

Demostremos el siguiente lema.

Lema 4. *Para la suma parcial de Fourier* $S_n(x; f)$ *de una función* 2π*-periódica absolutamente integrable* f *son válidas las fórmulas*

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x + t)dt \tag{55.17}$$

y

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt. \tag{55.18}$$

Corolario. *Para cualesquiera $\delta \in (0, \pi)$, $x \in [-\pi, \pi]$ la suma parcial $S_n(x;f)$ de la serie de Fourier de una función 2π-periódica absolutamente integrable f posee la siguiente representación integral asintótica:*

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt + o(1), \quad n \to \infty. \tag{55.19}$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Realicemos en la integral de Dirichlet (55.13) el cambio de variable de integración $u = t - x$:

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u)f(x+u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du. \tag{55.20}$$

Aquí hemos aprovechado otra vez la circunstancia de que la integral de una función periódica extendida al segmento cuya longitud es igual al período de la función, no depende de la posición de dicho segmento en el eje real (véase el p. 55.1) y hemos aplicado esta propiedad a la función $D_n(u)f(x+u)$ que es 2π-periódica según u. Así pues, la fórmula (55.17) queda demostrada.

Con el objeto de demostrar la fórmula (55.18), representemos el segundo miembro de la igualdad (55.20) en forma de una suma de dos integrales cuyos intervalos de integración son $[-\pi, 0]$ y $[0, \pi]$; en la primera integral realicemos el cambio de variable $u = -t$ y hagamos uso de que el núcleo de Dirichlet es par:

$$D_n(-u) = D_n(u)$$

(véase el lema 3). Como resultado tendremos:

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u)f(x+u)du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)f(x-t)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt.$$

La fórmula (55.18) también queda demostrada. □

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Fijemos un número δ, $0 < \delta < \pi$, y representemos el segundo miembro de (55.18) como una suma de dos integrales de la manera siguiente:

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}. \tag{55.21}$$

Por cuanto la función $\dfrac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$ es continua y, por lo tanto, acotada en el segmento $[\delta, \pi]$ $\left(\text{a saber, para todo } t \in [\delta, \pi]: 0 < \dfrac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \leqslant \dfrac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}}\right)$, mientras la función $f(x+t)+f(x-t)$, para cualquier $x \in [-\pi, \pi]$ fijo es 2π-periódica según t y absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$, entonces en $[\delta, \pi]$ será absolutamente integrable también el producto de dichas funciones $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$. Por esta razón, de acuerdo con el teorema de Riemann (véase el teorema 2 en el p. 55.2), la segunda integral en el segundo miembro de la igualdad (55.21) tiende hacia cero cuando $n \to \infty$, es decir,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = o(1), \quad n \to \infty.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (55.21), obtendremos la (55.19). □

De la fórmula (55.19) se infiere una propiedad importante de las series de Fourier, llamada principio de localización. Enunciémoslo en forma de un teorema.

Teorema 3 (principio de localización). *Si f es una función 2π-periódica absolutamente integrable, la existencia y el valor del límite de la sucesión de sus sumas parciales de Fourier $S_n(x;f)$ en todo punto $x_0 \in [-\pi, \pi]$ depende sólo de la existencia y del valor del límite, para $n \to \infty$ de la integral*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} D_n(t)[f(x_0+t)+f(x_0-t)]dt,$$

donde δ es un número positivo tan pequeño como se quiera.

Subrayemos que en la expresión subintegral de la integral citada figuran sólo los valores de la función f en el segmento $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ y, de este modo, la existencia y el valor del límite de las sumas parciales de la serie de Fourier de la función f sólo dependen de sus propiedades en el entorno del punto x_0, o, como suele decirse, de sus propiedades locales en las cercanías del punto x_0.

Del principio de localización proviene que si en un entorno, tan pequeño como se quiera, del punto x_0 las funciones f y g coinciden, entonces los límites $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_0; f)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_0; g)$ existen o no simultáneamente con la particularidad de que si dichos límites existen, son iguales. Es de interés particular que las series de Fourier de tales funciones son, en el caso general, diferentes, pues en las fórmulas para los coeficientes de Fourier figuran los valores de la función en todo el segmento $[-\pi, \pi]$.

55.4. CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER EN UN PUNTO

En este punto se considerarán las funciones 2π-periódicas absolutamente integrables en un segmento de longitud 2π, las cuales tienen sólo puntos de discontinuidad de primera especie, a consecuencia de lo cual en todo punto x_0 del eje numérico existen límites unilaterales:

$$\lim_{h\to+0} f(x_0+h) = f(x_0+0), \quad \lim_{h\to+0} f(x_0-h) = f(x_0-0).$$

Definición 8 (de Lebesgue *)). *Un punto x_0 se llama punto regular de la función f, si*

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Evidentemente, todo punto de continuidad de una función es su punto regular.

Si x_0 es un punto de discontinuidad de primera especie, a título de sus derivadas unilaterales $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$ intervendrán los límites

$$f'_+(x) = \lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h},$$

$$f'_-(x) = \lim_{h\to+0}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h}.$$

En aquel caso cuando la función es continua en el punto x, y, por ende, $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$, la definición enunciada de las derivadas unilaterales coincide con la aducida anteriormente (véase el p. 9.1).

Para que la enunciación del teorema sobre la convergencia de la serie de Fourier sea más cómoda, introduzcamos una designación

$$f_x^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0). \tag{55.22}$$

Es obvio que en el punto regular x la función $f_x^*(t)$ tiene por expresión

$$f_x^*(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x).$$

---

*) H. L. Lebesgue (1875—1941), matemático francés.

Nos hará falta el siguiente lema sencillo.

Lema 5. *Para la función f, 2π-periódica y absolutamente integrable en el segmento de longitud 2π, las integrales*

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt, \quad 0<\delta\leqslant\pi, \quad y \quad \int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\,\text{sen}\frac{t}{2}}\,dt \tag{55.23}$$

convergen o divergen simultáneamente.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, para cualquier δ, $0<\delta<\pi$ la función $\dfrac{1}{2\,\text{sen}\frac{t}{2}}$ es continua y, por ende, integrable según Riemann en el segmento $[\delta, \pi]$. Entre tanto, la función $f_x^*(t)$ (x es fijo) es absolutamente integrable en dicho segmento y, por consiguiente, el producto $\dfrac{f_x^*(t)}{2\,\text{sen}\frac{t}{2}}$ es también absolutamente integrable en el segmento $[\delta, \pi]$, es decir, para cualquier δ, $0<\delta<\pi$, la integral

$$\int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\,\text{sen}\frac{t}{2}}\,dt \tag{55.24}$$

converge (véase el lema 2 en el p. 33.5).

Elijamos ahora un $\delta>0$ de modo tal que en el segmento $[0, \delta]$ la función $f_x^*(t)$ no tenga puntos singulares (véase el p. 55.1), a excepción, quizás, del punto $t=0$, es decir, que para todo ε, $0<\varepsilon<\delta$, sea integrable según Riemann en el segmento $[\varepsilon, \delta]$; esto es siempre factible, puesto que la supuesta integrabilidad absoluta de la función f estipula que f y, por consiguiente, también f_x^* sólo disponen de un número finito de puntos singulares (véase de nuevo el p. 55.1).

Ahora diremos que las funciones $\dfrac{f_x^*(t)}{t}$ y $\dfrac{f_x^*(t)}{2\,\text{sen}\frac{t}{2}}$ son equivalentes para $t\to 0$, pues

$$\lim_{t\to 0}\frac{2\,\text{sen}\frac{t}{2}}{t} = 1;$$

por lo cual, de acuerdo con el criterio de convergencia de las integrales, llamado criterio de comparación (véase el corolario del teorema 1 en el p. 33.3), aplicado a las magnitudes absolutas de las funciones en consideración, las integrales

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt, \quad \int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{2\,\text{sen}\frac{t}{2}}\,dt$$

convergen o divergen simultáneamente. Siendo convergente la integral (55.24), de aquí se deduce de inmediato que las integrales (55.23) también convergerán o divergerán simultáneamente. □

Teorema 4 (criterio de Dini). *Supongamos que una función 2π-periódica f es absolutamente integrable en un segmento de longitud 2π.*

En este caso, si x es punto de continuidad o punto de discontinuidad de primera especie y, para cierto δ, $0 < \delta < \pi$, la integral

$$\int_0^\delta \left| \frac{f_x^*(t)}{t} \right| dt \tag{55.25}$$

converge, entonces la serie de Fourier de la función f converge en el punto x hacia el valor

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{55.26}$$

Corolario 1. *Cumplidas las condiciones del teorema, en cualquier punto regular de la función f (en particular, en todos los puntos de continuidad de f) la serie de Fourier de dicha función converge hacia su valor en el punto que se considera.*

Corolario 2. *Si f es una función 2π-periódica absolutamente integrable en un segmento de longitud 2π y si en el punto x existen $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$, entonces la serie de Fourier de la función converge en el punto dado hacia el valor* (55.26).

Corolario 3. *La serie de Fourier de una función f, continuamente derivable a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$, converge en todo punto del intervalo $(-\pi, \pi)$ hacia el valor* (55.26), *y en los puntos $x = -\pi$ y $x = \pi$, al valor*

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \tag{55.27}$$

Corolario 4. *La serie de Fourier de una función continua derivable a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ converge en todo punto del intervalo $(-\pi, \pi)$ hacia el valor de la función en este punto y en los puntos $x = -\pi$ y $x = \pi$, al valor* (55.27).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Al utilizar las fórmulas (55.18) y (55.16), tendremos

$$S_n(x; f) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \tag{55.28}$$

Supongamos que la integral (55.25) es convergente. En este caso, según el lema 5, converge también la integral

$$\int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt,$$

en otras palabras, la función $\dfrac{f_x^*(t)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$ es absolutamente integrable en el segmento $[0, \pi]$. Por eso, de acuerdo con el teorema de Riemann (véase el p. 55.2),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0,$$

por consiguiente, en virtud de (55.28):

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x; f) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \ \square$$

El corolario 1 proviene inmediatamente del teorema, en virtud de la definición de punto regular de una función. □

Demostraremos el corolario 2. De conformidad con el teorema 4, basta probar que si existen los límites $f(x+0)$, $f(x-0)$ y las derivadas unilaterales $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, la integral (55.25) converge para cierto $\delta > 0$. Ante todo, debido a la existencia del límite finito

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_x^*(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} + \right.$$
$$\left. + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right] = f'_+(x) - f'_-(x),$$

la función $\dfrac{f_x^*(t)}{t}$ está acotada en cierto entorno del punto $t = 0$. Por eso existe tal δ, $0 < \delta < \pi$, que en el segmento $[0, \delta]$ la función $\dfrac{f_x^*(t)}{t}$ está acotada y, por lo tanto, no tiene puntos singulares, a consecuencia de lo cual es integrable según Riemann en este segmento (véase el p. 33.1, como también la observación 4 en el p. 44.7). Una función, integrable según Riemann es integrable absolutamente, razón por la cual la integral (55.25) es finita. □

Con el fin de demostrar el corolario 3, prolongamos la función f, definida en el segmento $[-\pi, \pi]$, de una manera periódica con el período igual a 2π desde el semiintervalo $[-\pi, \pi)$ a todo el eje numérico y designemos la función obtenida con $\bar f$. Por definición de la derivabilidad a trozos (véase la definición 1 en el p. 30.2), la función $\bar f$ satisface las condiciones del corolario 2. De conformidad con este corolario, la serie de Fourier de la función $\bar f$, que coincide, evidentemente, con la serie de

Fourier para f, converge en todo punto x hacia

$$\frac{\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)}{2}.$$

Si $x \in (-\pi, \pi)$, se tiene $\bar{f}(x \pm 0) = f(x \pm 0)$ y, por lo tanto, $\dfrac{\bar{f}(x+0)+\bar{f}(x-0)}{2} = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Cuando $x = -\pi$, la serie mencionada converge hacia $\dfrac{\bar{f}(-\pi+0)+\bar{f}(-\pi-0)}{2}$, y si $x = \pi$, hacia el valor $\dfrac{\bar{f}(\pi+0)+\bar{f}(\pi-0)}{2}$. Dado que $\bar{f}$ es periódica, se tiene

$$\bar{f}(-\pi-0) = \bar{f}(\pi-0) = f(\pi-0), \bar{f}(\pi+0) = \bar{f}(-\pi+0) = f(-\pi+0).$$

Por esto

$$\frac{\bar{f}(-\pi+0)+\bar{f}(-\pi-0)}{2} = \frac{\bar{f}(\pi+0)+\bar{f}(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \ \square$$

El corolario 4 proviene directamente de los corolarios 1 y 3. $\square$

Ha de ser notado que en las fórmulas (55.26) y (55.27) la suma de la serie de Fourier de la función f viene expresada en términos de la propia función f, definida en el segmento $[-\pi, \pi]$, y no mediante su prolongación periódica $\bar{f}$ a todo el eje numérico.

Si la función f satisface las condiciones del corolario 4, es decir, es continua y derivable a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ y, además, $f(-\pi) = f(\pi)$ (es decir, su prolongación periódica a todo el eje numérico coincide con ella en todo punto de $[-\pi, \pi]$, incluidos los extremos), entonces en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ la función f es igual a la suma de su serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Por esta razón tal función en todo punto del segmento $[-\pi, \pi]$ puede ser representada con cualquier grado de precisión por la suma parcial de su serie de Fourier, es decir, por una combinación lineal de senos y cosenos de los arcos múltiples (suele decirse también que la función citada se aproxima por la suma de armónicos sencillos *)). El hecho de que en el caso dado el período es igual precisamente a 2π no es esencial: el caso en que el período arbitrario $T > 0$ se reduce con facilidad al considerado, simplemente por cambio de variable (véase el p. 55.12).

Ejemplos. 1. Hallemos la serie de Fourier de la función $\operatorname{ch} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

*) Se llama armónico sencillo (en la física, principalmente) una expresión de la forma $A \cos nx + B \operatorname{sen} nx$, donde A y B son unas constantes, n es un número natural.

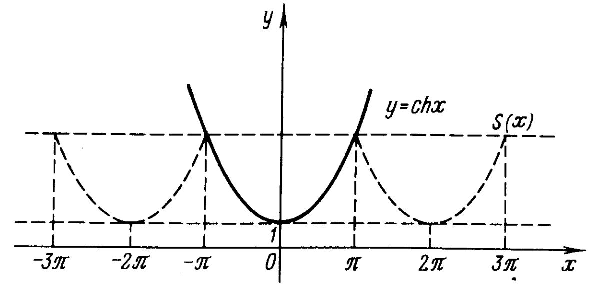


Fig. 232

Calculemos sus coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x\,dx = \left.\frac{\operatorname{sh} x}{\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx\,dx = (-1)^n \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

De lo que la función $\operatorname{ch} x$ es par se deduce que para ella $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. La función $\operatorname{ch} x$ es continuamente derivable y, por lo tanto, satisface las condiciones del corolario 4 del teorema 4; además, la función toma valores iguales en los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$, por lo cual su serie de Fourier en todos los puntos del segmento $[-\pi, \pi]$ converge hacia la propia función $\operatorname{ch} x$:

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\pi} (-1)^n \frac{1}{1+n^2}\cos nx\right).$$

Esta serie converge uniformemente, lo que se desprende de su comparación con la serie numérica convergente $\displaystyle\sum_{n=0}^{\pi} \frac{1}{1+n^2}$.

Las gráficas de la función $\operatorname{ch} x$ y de la suma $S(x)$ de la serie de Fourier correspondiente se exponen en la fig. 232.

2. Hallemos la serie de Fourier de la función $\operatorname{sh} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

En virtud de que esta función es impar, tenemos

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

y, luego,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \operatorname{sen} nx\,dx = (-1)^{n-1} \frac{2n \operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

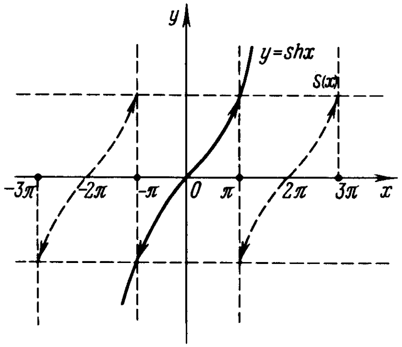


Fig. 233

La función sh x es continuamente derivable y satisface las condiciones del corolario 4 del teorema 4, pero sh $(-\pi) \neq$ sh π; por eso, en todos los puntos del intervalo $(-\pi, \pi)$ la serie de Fourier de la función sh x converge hacia la propia función:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{1+n^2} \operatorname{sen} nx, \quad -\pi < x < \pi$$

y en los puntos $x = -\pi$ y $x = \pi$, hacia el valor $\dfrac{\operatorname{sh}(-\pi) + \operatorname{sh}\pi}{2} = 0$.

La serie de Fourier de la función sh x ya no converge uniformemente hacia la función en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ (en efecto, de lo contrario su suma debería ser continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, mientras que ella tiene discontinuidades en sus extremos). Las gráficas de las funciones sh x y de la suma $S(x)$ de su serie de Fourier están expuestas, para la comparación, en la fig. 233.

3. Desarrollemos la función

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$

en la serie de Fourier.

Aunque la función f parece ser algo artificial, su serie de Fourier es de la forma muy sencilla y permite obtener toda una serie de fórmulas interesantes.

Prolongamos, de manera 2π-periódica, la función f desde el semiintervalo $[0, 2\pi)$ a todo el eje numérico. De resultas se obtendrá una función impar, en virtud de lo cual todos sus coeficientes de Fourier a_n serán nulos; $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Calculemos los coeficientes b_n. Integrando por partes, obtendremos

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \operatorname{sen} nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = \frac{1}{n}.$$

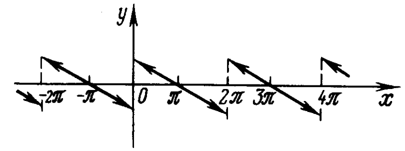


Fig. 234

Así pues,

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}. \tag{55.29}$$

En virtud del corolario 4 del teorema 4, para $0 < x < 2\pi$ tiene lugar la igualdad

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}. \tag{55.30}$$

Cuando $x = 0$, esta igualdad, evidentemente, no se verifica, puesto que la suma de la serie obtenida para $x = 0$ es nula y $f(0) \neq 0$.

La gráfica de la suma de la serie (55.29) va expuesta en la fig. 234. Diremos que esta serie a ciencia cierta no converge uniformemente en el segmento $[0, 2\pi]$, puesto que su suma no es en éste una función continua (la convergencia uniforme de la serie (55.29) se ha investigado en el p. 36.3).

Al sustituir en (55.30) x por $2x$ y dividir ambos miembros de la igualdad obtenida por 2, obtendremos

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2kx}{2k}, \quad 0 < x < \pi. \tag{55.31}$$

Sustrayamos esta igualdad de (55.30):

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k-1)x}{2k-1}, \quad 0 < x < \pi. \tag{55.32}$$

Al sustituir la expresión obtenida para $\dfrac{\pi}{4}$ en (55.31), obtenemos

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Esta igualdad es justa ya para $x = 0$, y, en virtud de que ambos miembros de la igualdad son impares, también para $-\pi < x < 0$, es decir, en todo el intervalo $(-\pi, \pi)$, pero, por supuesto, no en sus extremos, donde la suma de la serie es igual a cero.

Señalemos, además, que al poner en (55.32) $x = \frac{\pi}{2}$, obtendremos la así llamada serie de Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

con la gue ya hemos chocado antes (véase el p. 37.7, ejemplo 2).

Ejercicios. 5. Hállese la serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, y con ayuda de esta serie calcúlese la suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

6. Hállese la serie de Fourier para las funciones
a) $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;
b) $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;
c) $f(x) = x^2$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, y al semiintervalo $[-\pi, 0)$ la función f se ha prolongado de manera impar.

Con ayuda de los desarrollos obtenidos calcúlense las sumas de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

55.5*. CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER PARA FUNCIONES QUE SATISFACEN LA CONDICIÓN DE HÖLDER

En este punto daremos a conocer una condición suficiente más débil, en comparación con la de derivabilidad unilateral (véase el corolario 2 del teorema 4 en el p. 55.4), que también asegura la convergencia de la integral (55.25) y, por lo tanto, la convergencia de la serie de Fourier de la función f hacia el valor (55.26), siendo f 2π-periódica absolutamente integrable en el segmento de longitud igual al período.

Definición 9. *Una función f, definida en el intervalo (x_0, b), lleva el nombre de función que satisface a la derecha la condición de Hölder de exponente α en el punto x_0, siempre que existen el límite finito a la derecha $f(x_0 + 0)$ y unas constantes $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que para cualquier h, que satisfaga la condición $0 < h < \delta$, se verifica la desigualdad*

$$|f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)| < Mh^{\alpha}. \tag{55.33}$$

Una función f, definida en el intervalo (a, x_0) se llama función que satisface a la izquierda la condición de Hölder de exponente α en el punto x_0, siempre que existen el límite finito a la izquierda $f(x_0 - 0)$, y unas constantes $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que para cualquier h que satisfaga la condición $0 < h < \delta$, se verifica la desigualdad

$$|f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)| < Mh^{\alpha}. \tag{55.34}$$

Una función f, que satisface en el punto x_0 la condición de Hölder de cierto exponente tanto a la derecha como a la izquierda, se denomina función que satisface la condición de Hölder de exponente dado en el punto que se considera.

Una función, definida en cierto segmento, se llama función que satisface la condición de Hölder de exponente dado en dicho segmento, si en todo punto de éste satisface la condición de Holder de exponente citado, y además, en todo punto interior del segmento tanto a la derecha como a la izquierda; en el extremo izquierdo del segmento a la derecha, y en el extremo derecho, a la izquierda.

Observemos que la así llamada condición clásica de Hölder de exponente dado consiste en lo siguiente: *de la función f se dice que ella satisface en el punto x la condición clásica de Hölder de exponente $\alpha > 0$, si existen tales $\delta > 0$ y $M > 0$ que para cualesquiera h, $|h| < \delta$, se verifica la desigualdad*

$$|f(x + h) - f(x)| \leqslant M|h|^{\alpha}.$$

Es obvio que en este caso, gracias a la condición $\alpha > 0$, la función f es siempre continua en el punto x: de $\lim\limits_{h \to 0} |h|^{\alpha} = 0$, $\alpha > 0$, se deduce que $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$.

Análogamente se determinan las condiciones clásicas unilaterales de Hölder.

Así pues, la diferencia de la condición de Hölder en consideración de la clásica consiste, particularmente, en que, de conformidad con nuestra definición, una función que satisface la condición de Hölder en un punto puede ser discontinua en el mismo.

La condición de Hölder de exponente uno se llama, comúnmente, *condición de Lipschitz**).

Ejercicios. 7. Demuéstrese que si una función satisface en cierto punto la condición de Hölder de exponente α, entonces para $0 < \beta < \alpha$ satisface también en el mismo punto la condición de Hölder de exponente β.

8. Demuéstrese que si una función tiene en cierto segmento una derivada acotada, satisface en el mismo la condición de Lipschitz con una misma constante M.

9. Demuéstrese que si una función satisface en cierto segmento la condición clásica de Hölder de exponente $\alpha > 1$, es en este segmento constante.

10. Demuéstrese que la función $f(x) = x^{\alpha}$, $x \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, satisface en el punto $x = 0$ la condición de Hölder de exponente α, y no satisface en el mismo ninguna condición de Hölder de exponente $\beta > \alpha$.

Teorema 5. *Supongamos que la función f es absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$. Si satisface en el punto $x \in (-\pi, \pi)$ la condición de Hölder de exponente α, $\alpha > 0$, entonces su serie de Fourier converge en este punto y su suma es igual a*

$$\frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2};$$

en particular, si la función, además, es continua en el punto $x \in (-\pi, \pi)$, su serie de Fourier converge al valor de la función en el mismo punto:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) = f(x).$$

*) R. Lipschitz (1832 — 1903), matemático alemán.

Si la función f satisface la condición de Hölder a la derecha en el punto $x = -\pi$, y a la izquierda en el punto $x = \pi$, entonces su serie de Fourier converge en estos puntos y su suma en los mismos es igual a

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Elijamos δ, $0 < \delta < \pi$, de modo tal que, primero, en el segmento $[0, \delta]$ no haya otros puntos singulares de la función $\frac{f_x^*(t)}{t^\alpha}$, a excepción, quizás, del punto $x = 0$, y, segundo, que para cualesquiera h, $|h| < \delta$, la función f satisfaga las condiciones de Hölder (55.33) y (55.34) en el punto x. Entonces, en vista de la fórmula (55.22), para la función $f_x^*(t)$, tendremos

$$\left|\frac{f_x^*(t)}{t}\right| \leqslant \left|\frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t}\right| + \left|\frac{f(x - t) - f(x - 0)}{t}\right| \leqslant \frac{2M}{t^{1 - \alpha}}.$$

Por cuanto la integral $\int\limits_0^\delta \frac{dt}{t^{1 - \alpha}}$, $\alpha > 0$, converge, entonces, en virtud del criterio de comparación, converge también en nuestro caso la integral (55.25). Por ello, el teorema 5 proviene del teorema 4. □

Como conclusión observemos que si la función f tiene en el punto x una derivada derecha f'_+, entonces f satisface en este punto a la derecha la condición de Hölder de exponente 1. Efectivamente, del hecho de que el límite finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x + 0)}{h} = f'_+(x)$$

existe, se deduce que se encontrará tal $\delta > 0$ que para cualesquiera h, $|h| < \delta$, se verificará la desigualdad

$$\left|\frac{f(x + h) - f(x + 0)}{h} - f'_+(x)\right| < 1,$$

de donde, al poner $M \overset{\text{def}}{=} |f'_+(x)| + 1$, obtendremos

$$-M < \frac{f(x + h) - f(x + 0)}{h} < M;$$

por consiguiente,

$$|f(x + h) - f(x + 0)| \leqslant M|h|, \quad |h| < \delta.$$

La afirmación análoga es lícita también para las derivadas a la izquierda.

Problema 35. Una función f, definida en el segmento $[a, b]$, se llama *función de la clase de Hölder $H^\alpha(M)$* en dicho segmento, si para cualquier par de puntos x y $x + h$ del mismo, $x \in [a, b]$, $x + h \in [a, b]$, se cumple la desigualdad

$$|f(x + h) - f(x)| \leqslant M|h|^\alpha,$$

en otras palabras, si la función f satisface la condición clásica de Hölder de un mismo exponente α y con una misma constante M en todos los puntos del segmento $[a, b]$.

Demuéstrese que si una función 2π-periódica y absolutamente integrable en un segmento de longitud 2π pertenece en cierto segmento $[a, b]$ a la clase de Hölder $H^\alpha(M)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $M > 0$, entonces en todo segmento $[a', b']$, contenido en el intervalo (a, b): $0 < a < a' < b' < b < 2\pi$, la serie de Fourier de la función f converge hacia esta función uniformemente.

55.6. SUMACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER POR EL MÉTODO DE MEDIAS ARITMÉTICAS

Supongamos que la función f es absolutamente integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisface la condición $f(-\pi) = f(\pi)$, y, por lo tanto, es prolongable de modo 2π-periódico a todo el eje real. Sean $S_n(x)$ sus sumas de Fourier y $D_n(x)$, los núcleos de Dirichlet, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (véanse (55.11) y (55.12)).

Consideraremos las medias aritméticas:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n + 1},$$

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \ldots + D_n(x)}{n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{55.35}$$

La suma $\sigma_n(x)$ se llama *suma de Fejer**) de n-ésimo orden de la función f, mientras que $\Phi_n(x)$ es el *núcleo de Fejer* de n-ésimo orden.

De la fórmula

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x + u)\,du$$

(véase (55.17)), obtenemos

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) f(x + u)\,du. \tag{55.36}$$

Analicemos el comportamiento de las sumas $\sigma_n(x)$ cuando $n \to \infty$, es decir, examinemos la sumación de la serie de Fourier por el *método de medias aritméticas* (véase el p. 35.15).

Estudiaremos ante todo las propiedades del núcleo de Fejer.

Lema 6. *El núcleo de Fejer posee las siguientes propiedades.*

1°. *La función $\Phi_n(x)$ es par, continua y 2π-periódica, con la particularidad de que*

$$\Phi_n(0) = \frac{n + 1}{2}; \tag{55.37}$$

2°. *Para todo t el núcleo de Fejer es no negativo*: $\Phi_n(t) \geqslant 0$;

3°. $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1$;

*) L. Fejer (1880 — 1959), matemático húngaro.

4°. *Cuando* $t \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$\Phi_n(t) = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1)\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}.$$

Corolario. *Para todo δ fijo,* $0 < \delta < \pi$, *tiene lugar la igualdad*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) = 0. \tag{55.38}$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos al principio la propiedad 1°. La paridad, la continuidad y el carácter periódico del núcleo de Fejer provienen inmediatamente, en virtud de la fórmula (55.35), de las mismas propiedades del núcleo de Dirichlet (véase el lema 3 en el p. 55.3). Luego, por cuanto $D_k(0) = k + \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, entonces

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(0) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2}.$$

Demostremos la propiedad 3°.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)dt = 1.$$

Por cuanto el núcleo $\Phi_n(t)$ es par, de aquí se infiere que

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = 1.$$

Demostraremos ahora la propiedad 4°, de la cual se deduce, evidentemente, la propiedad 2°. Para $t \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tenemos

$$(n+1)\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{4\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} [\cos kt - \cos(k+1)t] =$$

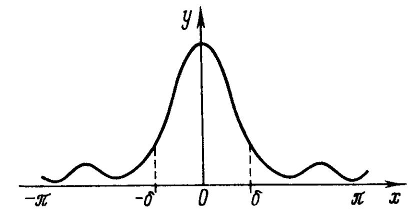


Fig. 235

$$= \frac{1 - \cos(n+1)t}{4\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{n+1}{2}t}{2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}. \quad \square$$

Observemos que la fórmula (55.37) puede obtenerse, además de la propiedad 4°, pasando al límite y haciendo tender t hacia cero y este procedimiento es factible en vista de que el núcleo de Fejer es continuo.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Haciendo uso de la propiedad 4° del núcleo de Fejer, obtenemos

$$0 \leqslant \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\operatorname{sen}^2\frac{n+1}{2}t}{\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{2(n+1)\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}}.$$

Por cuanto el segundo miembro de la desigualdad obtenida tiende a cero para $n \to \infty$, de la estimación obtenida se deduce directamente (55.38). $\square$

La forma aproximada de la gráfica del núcleo de Fejer está expuesta en la fig. 235.

En este punto sólo se considerarán aquellas funciones f que son continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toman en sus extremos valores iguales: $f(-\pi) = f(\pi)$. Es obvio que toda función de tal índole puede ser prolongada de modo 2π-periódico desde el segmento $[-\pi, \pi]$ a todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$. La función que se obtendrá, la designaremos con $\bar{f}$, será continua en todo el eje $\boldsymbol{R}$.

La función de partida f, como cualquiera función continua en un segmento, es acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ que $|f(x)| \leqslant M$, $x \in [-\pi, \pi]$. Está claro que en este caso

$$|\bar{f}(x)| \leqslant M, \quad x \in \boldsymbol{R},$$

es decir, la función $\bar{f}$ está acotada en todo el eje $\boldsymbol{R}$.

Además, la función $\bar{f}$ es uniformemente continua en todo el eje $\boldsymbol{R}$. Efectivamente, siendo continua en cualquier segmento finito, por ejemplo, en $[0, 4\pi]$, es en dicho segmento uniformemente continua (véase el teorema 5 en el p. 19.7). Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe tal δ, $0 < \delta < 2\pi$ que para cualesquiera $x_1 \in [0, 4\pi]$, $x_2 \in [0, 4\pi]$, $|x_2 - x_1| < \delta$, se verifica la desigualdad

$$|\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Pero, para x_1' y x_2' arbitrarios de tal género que $|x_2' - x_1'| < \delta$, se encontrarán unos números enteros n y m, para los cuales $x_1 \overset{\text{def}}{=} x_1' - 2\pi n \in [0, 4\pi]$, $x_2 \overset{\text{def}}{=} x_2' - 2\pi m \in [0, 4\pi]$ y $|x_1 - x_2| < \delta$, y, por cuanto $\bar{f}(x_1) = \bar{f}(x_1')$, $\bar{f}(x_2) = \bar{f}(x_2')$ son 2π-periódicas, entonces

$$|\bar{f}(x_2') - \bar{f}(x_1')| = |\bar{f}(x_2) - \bar{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Esto precisamente es indicio de que la función $\bar{f}$ es uniformemente continua en todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$.

En lo que sigue, una función prolongada de modo periódico se designará con el mismo símbolo f que la función prolongable.

Teorema 6 (de Fejer). *Si una función es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toma en sus extremos valores iguales, la sucesión de sus sumas de Fejer converge uniformemente en este segmento hacia la misma función.*

Corolario. *Si la serie de Fourier de una función, que es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toma en sus extremos valores iguales, converge en cierto punto, converge hacia el valor de la función en dicho punto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función f es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y $f(-\pi) = f(\pi)$. Prolonguémosla de modo 2π-periódico a todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$. Estimemos la diferencia $f(x) - \sigma_n(x)$ entre la función f y su suma de Fejer σ_n, empleando con este fin la representación de la suma de Fejer en la forma (55.36) y las propiedades del núcleo de Fejer demostradas en el lema 6 y en su corolario. Elijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Tenemos

$$|f(x) - \sigma_n(x)| = \left|\frac{f(x)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)f(x+t)dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)[f(x) - f(x+t)]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}, \quad (55.39)$$

donde $\delta > 0$ se ha elegido de una manera tal que el valor del módulo de continuidad $\omega(\delta; f)$ de la función f satisface la desigualdad

$$\omega(\delta; f) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Esto es bien posible; puesto que la función f es uniformemente continua en todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$. Por eso, para todo $x \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt \leqslant \frac{\omega(\delta; f)}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\Phi_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (55.40)$$

Las dos integrales restantes se estiman de un modo igual: la función f está acotada en toda la recta numérica, es decir, existe tal constante $M > 0$ que para cualesquiera $x \in \boldsymbol{R}$ tiene lugar la desigualdad

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Por consiguiente, para todo $x \in \boldsymbol{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)[|f(x)| + |f(x+t)|]dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)dt \leqslant \frac{2M}{\pi}\max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi}\Phi_n(t)\int_{\delta}^{\pi}dt =$$

$$= \frac{2M(\pi - \delta)}{\pi}\max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi}\Phi_n(t) < 2M\max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi}\Phi_n(t).$$

De acuerdo con el corolario del lema 6, el segundo miembro de la desigualdad obtenida tiende hacia cero cuando $n \to \infty$, por lo cual existe tal n_0 que para cualesquiera $n \geqslant n_0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (55.41)$$

Por analogía, para todo $x \in \boldsymbol{R}$ y cualesquiera $n \geqslant n_0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\Phi_n(t)|f(x) - f(x+t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (55.42)$$

De (55.39), (55.40), (55.41) y (55.42) tenemos para $x \in \boldsymbol{R}$ arbitrario y todos los $n \geqslant n_0$:

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

es decir, la sucesión $\{\sigma_n\}$ converge uniformemente en todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$ hacia la función f. $\square$

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Cualquier serie convergente se suma por el método de medias aritméticas a su suma (véase el p. 35.15). Por ello, si la serie de Fourier de una función, que es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toma en sus extremos los valores iguales, converge en cierto punto hacia algún número A, entonces el límite de la sucesión de medias aritméticas de las sumas parciales, es decir, de las sumas de Fejer es también igual a A: si $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x_0; f) = A$, se tiene $\lim\limits_{n \to \infty}\sigma_n(x_0) = A$.

Pero, según el lema demostrado, $\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$, por consiguiente, también $\lim_{n \to \infty} S_n(x_0; f) = f(x_0)$. □

Subrayemos que la serie de Fourier de una función, que es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toma en sus extremos los valores iguales, puede divergir en algunos puntos. No obstante, de acuerdo con lo demostrado, si la serie converge en cierto punto, converge necesariamente hacia el valor de la misma función en dicho punto.

Observemos en conclusión que para una función, que es continua en un segmento y toma en sus extremos valores iguales, la serie de Fourier, sea convergente o divergente en los puntos aislados, permite restablecer unívocamente la función indicada: resulta suficiente formar, sirviéndose de sus sumas parciales, las sumas de Fejer; la sucesión de las últimas ya converge y, además, uniformemente hacia la propia función. De este modo, incluso el estudio de la serie divergente puede resultar útil.

55.7. APROXIMACIÓN DE LAS FUNCIONES CONTINUAS POR MEDIO DE LOS POLINOMIOS

Definición 10. *Las funciones de la forma*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx A_n^2 + B_n^2 > 0$$

se llaman polinomios trigonométricos de n-ésimo orden, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *).

Teorema 7 (de Weierstrass). *Si la función f es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y $f(-\pi) = f(\pi)$, entonces para todo número $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico $T(x)$ tal que*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

En efecto, en virtud del teorema 6 (véase el p. 55.6), a título de tal polinomio trigonométrico puede tomarse, por ejemplo, la suma correspondiente de Fejer $\sigma_n(x)$, que es, evidentemente, un polinomio trigonométrico de orden no superior a n.

Teorema 8 (de Weierstrass). *Si la función f es continua en el segmento $[a, b]$, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal polinomio algebraico $P(x)$ que*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos linealmente el segmento $[0, \pi]$ sobre otro segmento $[a, b]$:

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

y sea $f^*(t) = f\left(a + \dfrac{b-a}{\pi} t\right)$. La función f^* está definida por esta fórmula en $[0, \pi]$. Prolongámosla de modo impar al segmento $[-\pi, 0]$, es decir, pongamos

$$f^*(t) = f^*(-t), \quad \text{si} \quad t \in [-\pi, 0].$$

*) Aquí se considera que $B_0 = 0$.

La función f^*, obtenida de esta manera, es continua en $[-\pi, \pi]$ (¿por qué?) y $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$. Por eso, de acuerdo con el teorema 7, para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico $T(t)$ tal que

$$|f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como se sabe, $\cos kt$ y $\operatorname{sen} kt$, $k = 1, 2, \ldots$, y, por lo tanto, también el polinomio trigonométrico $T(t)$ son funciones analíticas, a consecuencia de lo cual se desarrollan en las series de potencias que convergen en toda la recta real y, por consiguiente, convergen uniformemente en todo segmento finito (véase el § 37):

$$T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Si $P_n(t)$ son sumas parciales de esta serie, debido a su convergencia uniforme en el segmento $[-\pi, \pi]$, existe tal número n_ε que para $n \geqslant n_\varepsilon$ se tiene

$$|T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

Al tomar, para concretar, $n = n_\varepsilon$ y suponer $P(t) = P_{n_\varepsilon}(t)$, tenemos

$$|f^*(t) - P(t)| \leqslant |f^*(t) - T(t)| + |T(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Volviendo a la variable x, es decir, suponiendo $t = \pi \dfrac{x-a}{b-a}$ obtendremos

$$\left| f(x) - P\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

donde $P\left(\pi \dfrac{x-a}{b-a}\right)$ es, evidentemente, un polinomio. □

OBSERVACIÓN. Supongamos que la función f es continua en el segmento $[a, b]$. Elijamos una sucesión de los números $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, que tiende hacia cero $\left(\text{por ejemplo, } \varepsilon_n = \dfrac{1}{n}\right)$; entonces, de acuerdo con el teorema 8, para todo $n = 1, 2, \ldots$ existe un polinomio $P_n(x)$ (aquí n es número de orden y no el grado del polinomio), tal que

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{55.43}$$

Es evidente que para $n \to \infty$ se tiene $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

Así pues, toda función continua en un segmento sirve de límite para la sucesión de polinomios uniformemente convergente en dicho segmento. Anteriormente (véase el teorema 8′ en el p. 36.4) ya se ha demostrado la afirmación recíproca, es decir, toda función que sirve de límite para una sucesión de polinomios uniformemente convergente en cierto segmento (y más aún, para una sucesión de cualesquiera funciones continuas) es continua en dicho segmento.

De este modo, el teorema de Weierstrass establece la propiedad característica de las funciones continuas, y sólo continuas.

Resulta curioso notar que el concepto original de continuidad de una función fue introducido en la forma general abstracta; este concepto de ningún modo estaba ligado con las clases concretas de funciones elementales, en particular, con los polinomios y, consecuentemente, con ningunas representaciones analíticas de las funciones en términos de los polinomios.

El teorema de Weierstrass muestra que la clase de funciones continuas introducida de este modo no está lejos, en cierto sentido, de la clase de polinomios. A saber, cualquiera que sea la función f, continua en un segmento, y por pequeño que sea el número $\varepsilon > 0$, prefijado de antemano, siempre existe un polinomio que en todo el segmento se diferencia de la función f a lo sumo en ε, es decir, un polinomio que aproxima la función con cualquier grado de exactitud dado de antemano. No es difícil obtener también la representación analítica en forma de una serie de polinomios para la función continua en un segmento. De (55.43) tenemos

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{55.44}$$

o bien

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(x) - P_n(x)] \tag{55.45}$$

($P_n(x)$ son los polinomios), con la particularidad de que en el segmento $[a, b]$ los polinomios $P_n(x)$ en (55.44) tienden a su límite uniformemente y también uniformemente converge la serie (55.45) en dicho segmento. En este caso, tanto la existencia del límite (55.44), como la del desarrollo (55.45) constituyen una condición necesaria y suficiente de la continuidad de la función f en el segmento citado. Esto justifica la idea intuitiva sobre una función como expresión analítica compuesta de una variable independiente y unas constantes por medio de las operaciones algebraicas y analíticas.

Observaciones análogas pueden hacerse también sobre el primer teorema de Weierstrass (teorema 7).

55.8. COMPLETITUD DEL SISTEMA TRIGONOMÉTRICO Y DEL SISTEMA DE POTENCIAS ENTERAS NO NEGATIVAS DE X EN UN ESPACIO DE FUNCIONES CONTINUAS

En este punto se parafrasearán los teoremas demostrados anteriormente y se deducirán de éstos algunos corolarios sencillos.

Definición 11. *Sea X un conjunto de las funciones definidas en el segmento $[a, b]$. Un sistema de funciones*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{55.46}$$

se llama completo para el conjunto X en el sentido de aproximación uniforme, si, cualquiera que sea la función $f \in X$, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal número finito de funciones $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_k}$, pertenecientes al sistema (55.46), y tales números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ que

$$|f(x) - [\lambda_1\varphi_{n_1}(x) + \lambda_2\varphi_{n_2}(x) + \ldots + \lambda_k\varphi_{n_k}(x)]| < \varepsilon$$

para cualesquiera $x \in [a, b]$.

En otras palabras, el sistema de funciones (55.46) forma un sistema completo para el conjunto X, si toda función de X puede ser aproximada con la exactitud requerida mediante las combinaciones lineales de funciones del sistema (55.46).

Haciendo uso del concepto de completitud de un sistema, los teoremas 7 y 8 del párrafo precedente pueden parafrasearse del modo siguiente.

Teorema 7′. *El sistema de funciones trigonométricas* (55.2) *es completo, en el sentido de aproximación uniforme, para el conjunto de funciones que son continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toman en sus extremos valores iguales.*

Teorema 8′. *Un sistema de las potencias enteras no negativas de x, es decir, el sistema*

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{55.47}$$

es completo, en el sentido de aproximación uniforme, para el conjunto de todas las funciones que son continuas en cualquier segmento dado.

Definición 12. *Supongamos que las funciones f y g vienen definidas en el segmento $[a, b]$. El número*

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$$

se denomina desviación estándar en el segmento $[a, b]$ de la función f de la g. *)

Definición 13. *El sistema de funciones* (55.46) *se llama completo, en el sentido de la aproximación media cuadrática, para cierto conjunto X de funciones definidas en el segmento $[a, b]$, si, cualquiera que sea la función $f \in X$, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal combinación lineal finita de funciones del sistema* (55.46) *que su desviación estándar en el segmento $[a, b]$ de la función f es inferior a ε.*

Teorema 9. *El sistema de funciones trigonométricas* (55.2) *es completo en el sentido de la aproximación media cuadrática en un conjunto de las funciones que son continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$ y toman en los puntos π y $-\pi$ un mismo valor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, con la particularidad de que $f(\pi) = f(-\pi)$. De conformidad con el teorema 7′, para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico $T(x)$ tal que

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

De aquí para la desviación estándar de este polinomio de la función f tenemos

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \varepsilon. \ \square$$

En lo que sigue veremos (véase el p. 58.6) que la acotación $f(\pi) = f(-\pi)$, utilizada por nosotros en la demostración del teorema 9 (sólo en este caso se podría referir al teorema 7′), no es esencial. A saber, el sistema trigonométrico (55.2) es completo en el sentido de la media cuadrática en todo el conjunto de funciones con-

*) Podemos decir también "desviación de la función g de la f", por cuanto la expresión en consideración no cambia su valor, si f y g cambian de lugar.

tinuas en el segmento $[-\pi, \pi]$, y, más aún, se puede mostrar que es completo también en el sentido de la media cuadrática en el conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$.

Observemos que el sistema trigonométrico (55.2) es incompleto a ciencia cierta en el conjunto de todas las funciones continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$ en el sentido de la aproximación uniforme, es decir, en el sentido de la definición 11. En efecto, si f es una función tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico T_ε de tal índole que

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

entonces de la condición $T_\varepsilon(\pi) = T_\varepsilon(-\pi)$ para $\varepsilon \to 0$ proviene que $f(\pi) = f(-\pi)$.

En la aproximación de las funciones en el sentido de la media cuadrática mediante los polinomios trigonométricos desempeñan un papel especial las sumas parciales de la serie de Fourier de la función que se aproxima. En el punto que sigue se mostrará que la suma parcial de n-ésimo orden tiene desviación estándar mínima de la función dada en comparación con cualquier polinomio trigonométrico de grado n.

En fin, se puede mostrar que si la función f posee el cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$, entonces la desviación, que experimentan sus sumas parciales de Fourier $S_n(x)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, o, como suele decirse, la función f de cuadrado integrable es un límite, en el sentido de la media cuadrática, de sus sumas parciales de Fourier (véase el p. 58.6). Todas estas circunstancias atestiguan en favor del estudio de la aproximación de funciones en el sentido de la desviación estándar.

Por analogía con el teorema 9 se demuestra el teorema siguiente.

Teorema 10. *El sistema de potencias enteras y no negativas de x, es decir, el sistema (55.47) es completo en el sentido de la aproximación media cuadrática en un conjunto de funciones continuas sobre cualquier segmento dado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función continua en cierto segmento $[a, b]$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, de acuerdo con el teorema 8′, existe tal polinomio P que

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

de donde

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx} < \varepsilon. \ \square$$

55.9. PROPIEDAD MINIMAL DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER. DESIGUALDAD DE BESSEL E IGUALDAD DE PARSEVAL

En este punto examinaremos las series de Fourier para unas funciones integrables cuyo cuadrado es también integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ (la integrabilidad aquí se entiende, por regla general, en el sentido impropio). Es importante indicar que si la función f es de tal género que tiene un número finito de puntos singu-

lares (véase el p. 55.1) en el segmento $[-\pi, \pi]$, es integrable según Riemann en cualquier segmento que no contiene ningún punto singular y el cuadrado de ésta f^2 es integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$, entonces de la desigualdad

$$|f| \leqslant \frac{1 + |f|^2}{2}$$

se infiere que la función f es integrable en el segmento citado. Lo recíproco, en el caso general, no es cierto. Existen funciones positivas $\left(\text{por ejemplo, la función } \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$, integrables en el segmento $[-\pi, \pi]$ cuyo cuadrado, no obstante, ya no es integrable en el mismo.

De este modo, el conjunto citado de funciones de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ constituye un subconjunto propio del conjunto de todas las funciones absolutamente integrables en el segmento $[-\pi, \pi]$.

Observemos que análogamente se introduce también el concepto de función de cuadrado integrable para cualquier intervalo finito.

Teorema 11. *Sea f una función de cuadrado integrable en el segmento* $[-\pi, \pi]$. *Entonces, si* $S_n(x)$ *es su suma de Fourier de n-ésimo orden, se tiene*

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx, \tag{55.48}$$

donde el mínimo en el segundo miembro de la igualdad se toma según todos los polinomios trigonométricos T_n *de orden no superior a* n.

Si $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$, *son coeficientes de Fourier de la función f, se verifica la desigualdad*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx, \tag{55.49}$$

*que lleva el nombre de Bessel**).

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx,$$

en este caso, abriendo los corchetes en la expresión

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \tag{55.50}$$

y haciendo uso del lema 1 del p. 55.1 (en particular, la ortogonalidad del sistema trigonométrico), obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\right) -$$

*) F. Bessel (1784 — 1846), matemático y astrónomo alemán.

$$- 2\left[\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n} A_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + \right.$$

$$\left. + B_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx\right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + B_k^2\right) -$$

$$- 2\pi\left[\frac{a_0A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_kA_k - b_kB_k\right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx +$$

$$+ \pi\left[\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2\right] -$$

$$- \pi\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right]. \qquad (55.51)$$

De la expresión obtenida se ve que la magnitud (55.50) adquiere el valor mínimo cuando $A_0 = a_0, A_k = a_k, B_k = b_k, k = 1, 2, \ldots$, es decir, cuando $T_n(x)$ es la suma de Fourier $S_n(x)$ de orden n de la función f. La primera afirmación del teorema queda demostrada.

Si $T_n(x)$ es la suma de Fourier de orden n, de (55.51) se desprende que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right], \qquad (55.52)$$

de donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0.$$

Esta desigualdad es lícita para cualquier n natural. Pasando en la misma al límite para $n \to \infty$, obtendremos una desigualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right] \geqslant 0,$$

la que, obviamente, es equivalente a la desigualdad (55.49). □

De la desigualdad de Bessel se deduce que para una función de cuadrado integrable la serie

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

converge. El término general de la serie convergente tiende a cero, por lo cual en el caso dado $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

De este modo hemos establecido nuevamente que los coeficientes de Fourier tienden a cero (véase el p. 55.2), pero esta vez para una clase de funciones más estrecha (como lo indicamos al principio de este punto) que antes, a saber, para la clase de funciones de cuadrado integrable.

En el punto 58.6 se mostrará que en realidad la fórmula (55.49) queda lícita con *el signo de igualdad*. Por ahora demostraremos este hecho sólo para el caso en que la función f es continua y 2π-periódica.

Teorema 12. *Supongamos que la función f es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ y $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$, son sus coeficientes de Fourier. En este caso se verifica la igualdad*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

llamada igualdad de Parseval).*

DEMOSTRACIÓN. Debido a la completitud en el sentido de aproximación media cuadrática del sistema de funciones trigonométricas (55.2) en la clase de funciones continuas que toman valores iguales en los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$, siendo todo $\varepsilon > 0$, existe para la función f un polinomio trigonométrico $T(x)$ de cierto orden k tal que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2dx < \varepsilon. \qquad (55.53)$$

Con arreglo al teorema 11 (véase (55.48)), para la suma de Fourier $S_k(x)$ del mismo orden k se cumple la desigualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_k(x)]^2dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2dx.$$

De aquí y de las fórmulas (55.52) y (55.53) obtenemos:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + b_n^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_k(x)]^2dx \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 < \varepsilon.$$

*) M. Parseval (1755 — 1836), matemático francés.

Por cuanto esta desigualdad es válida para cualquier $\varepsilon > 0$, su primer miembro es igual a cero. □

Corolario. *Cumplidas las suposiciones del teorema, tenemos*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0.$$

En efecto, en virtud del teorema 12, para $n \to \infty$ el segundo miembro de la igualdad (55.52) tiende a cero. □

55.10. CARÁCTER DE CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER. DERIVACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER TÉRMINO A TÉRMINO

Analicemos la relación que existe entre las series de Fourier de una función y la derivada de ésta.

Teorema 13. *Sea f una función continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ y supongamos que*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Si la función f es continuamente derivable a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ (véase la definición 1 en el p. 30.2), entonces

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \operatorname{sen} nx + nb_n \cos nx,$$

es decir, la serie de Fourier de la derivada se obtiene de la serie de Fourier de la misma función por derivación formal término a término [*].

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx.$$

Teniendo presente que $f(\pi) = f(-\pi)$ e integrando por partes, obtenemos

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)dt = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos nt\, dt = \frac{1}{\pi} f(t) \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt = nb_n,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \operatorname{sen} nt\, dt = f(t) \operatorname{sen} nt \Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

[*] Sin suposiciones algunas acerca de la convergencia de la serie de Fourier de la derivada.

$$- \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt = -na_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \;\square$$

Pasemos al estudio de la velocidad de convergencia de la serie de Fourier en dependencia de la suavidad de las funciones. Previamente demostremos el lema.

Lema 7. *Supongamos que la función f tiene en un segmento derivadas continuas de orden hasta $k - 1$ inclusive y una derivada continua a trozos de orden k $(k \geqslant 1)$* [*]*, con la particularidad de que*

$$f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi), \quad j = 0, 1, \ldots, k - 1,$$

y sea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

En este caso

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde $\varepsilon_n > 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ converge.

DEMOSTRACIÓN. Al aplicar sucesivamente el teorema 13 k veces, obtendremos

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx,$$

donde o bien

$$\alpha_n = \pm n^k a_n, \quad \beta_n = \pm n^k b_n, \tag{55.54}$$

o bien

$$\alpha_n = \pm n^k b_n, \quad \beta_n = \pm n^k a_n, \tag{55.55}$$

con la particularidad de que, según la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f^{(k)}(x)]^2 dx. \tag{55.56}$$

Pongamos $\varepsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$. En virtud de la desigualdad (55.56), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2$ converge.

[*] Decimos que cierta función tiene derivada continua a trozos en el segmento dado, si dicha función es continuamente derivable a trozos en el mismo (véase la definición 1 en el p. 30.2). De este modo, si la función tiene derivada continua a trozos en un segmento, puede suceder que en un número finito de puntos del mismo segmento ella no tenga en absoluto derivada. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ en el segmento $[-1, 1]$ tiene derivada continua a trozos, mientras que en el punto $x = 0$ no la tiene.

Si es lícita (55.54), se tiene

$$|a_n| = \frac{|\alpha_n|}{n^k} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}}{n^k} = \frac{\varepsilon_n}{n^k}.$$

Análogamente,

$$|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

De manera semejante esta estimación se obtiene para el caso (55.55). □

Teorema 14. *Supongamos que la función f tiene en el segmento $[-\pi, \pi]$ derivadas continuas hasta el orden $k - 1$ inclusivo y una derivada continua a trozos de orden $k (k \geqslant 1)$, con la particularidad de que $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, k - 1$. Entonces, la serie de Fourier de la función f converge uniforme y absolutamente en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ a la propia función f y*

$$|f(x) - S_n(x; f)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k - 1/2}},$$

donde $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$ ($\{\eta_n\}$ es una sucesión numérica), y $S_n(x; f)$ es la suma de Fourier de n-ésimo orden de la función f.

De este modo podemos decir que en el segmento $[-\pi, \pi]$ se cumple uniformemente la estimación

$$f(x) - S_n(x; f) = o\left(n^{-k + \frac{1}{2}}\right), \quad n \to \infty.$$

Observemos preliminarmente que si $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son las sucesiones de números no negativos de tal índole que

$$\sum_{n=1} u_n^2 < +\infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2}. \tag{55.57}$$

En efecto, esta igualdad se obtiene inmediatamente, pasando al límite, de la desigualdad de Cauchy — Schwartz $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{N} u_n^2} \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{N} v_n^2}$ cuando $N \to \infty$ (véase el p. 18.1 y 35.8*) (indiquemos que la desigualdad (55.57) es un caso particular de la desigualdad (35.33) del p. 35.8* para $p = q = 2$).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 14. Sea

$$f(x) \sim \frac{a}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx, \tag{55.58}$$

$$S_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx.$$

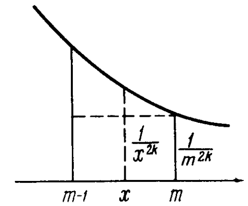


Fig. 236

Según el lema,

$$|a_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \quad |b_m| \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m^k}, \tag{55.59}$$

donde ε_m son de tal género que la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m^2 \tag{55.60}$$

converge.

Aplicando las desigualdades (55.57) y (55.59), estimemos el resto $r_n(x)$ de la serie (55.58):

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m^k} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{2}{m^{2k}}}. \tag{55.61}$$

Pongamos

$$\varkappa_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \varepsilon_m^2.$$

Ya que la serie (55.60) es convergente, tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \varkappa_n = 0. \tag{55.62}$$

Luego, indiquemos que en el segmento $[m - 1, m]$ se verifica la desigualdad $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \frac{1}{x^{2k}}$ (fig. 236) y, por consiguiente, $\frac{1}{m^{2k}} \leqslant \int\limits_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}}$. Por esto

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}} \leqslant \sum_{m=m+1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}} = \frac{1}{(2k - 1)n^{2k - 1}}.$$

De este modo, de (55.61) se desprende la estimación

$$|r_n(x)| \leqslant 2\sqrt{\frac{x_n}{2k-1}}\,\frac{1}{\sqrt{n^{2k-1}}}. \tag{55.63}$$

Pongamos, por fin, $\eta_n = \dfrac{2}{\sqrt{2k-1}}\sqrt{x_n}$; en virtud de (55.62) $\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n = 0$. Por ello, de la igualdad (55.63) obtenemos

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^{k-\frac{1}{2}}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y aquí el infinitésimo η_n no depende del punto x.

De conformidad con el corolario 4 del teorema 4 (el p. 55.4), la serie (55.58) converge hacia la función $f(x)$, por consiguiente, $r_n(x) = f(x) - S_n(x, f)$ y, de este modo la convergencia uniforme de la serie de Fourier con la estimación mencionada queda demostrada.

Su convergencia absoluta también se demuestra, puesto que hemos obtenido la estimación (véase (55.61))

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| + |b_m| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}},$$

de la que se deduce que la serie de Fourier de la función f no sólo es absolutamente convergente, sino que una serie formada de las magnitudes absolutas de sus términos y, más aún, una serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| + |b_m|$$

converge con la misma "velocidad" $\dfrac{\eta_n}{n^{k-\frac{1}{2}}}$. □

El teorema 14 enseña que cuanto más suave es la función f (es decir, cuanto mayor es el número de derivadas que tiene f), tanto mayor es la velocidad de convergencia hacia ella de la serie de Fourier. En este caso la desigualdad (53.63) hace posible estimar el error que se obtiene al sustituir la serie de Fourier por su n-ésima suma parcial.

De este teorema proviene, en particular, para $k = 1$, que la serie de Fourier de toda función periódica de período 2π, continua y continuamente derivable a trozos (véase el p. 30.2), converge uniformemente sobre todo el período hacia la misma función.

Ejercicios. 11. ¿Será uniformemente convergente la serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$? ¿Convergirá uniformemente una serie obtenida por derivación término a término de la serie de Fourier de esta función?

12. Muéstrese que la serie de Fourier de una función continua periódica lineal a trozos (la definición de la función lineal a trozos véase en el ejercicio 6 del p. 19.7) converge hacia esta función uniformemente.

13. Sirviéndose del resultado del ejercicio antecedente y del resultado del ejercicio 6, p. 19.7, demuéstrese el teorema 7 del p. 55.7 sobre la aproximación uniforme de funciones periódicas continuas mediante los polinomios trigonométricos.

55.11. INTEGRACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER TÉRMINO A TÉRMINO

En este punto se probará que las series de Fourier pueden integrarse término a término.

Teorema 15. *Sea f una función continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y supongamos que*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \tag{55.64}$$

es su serie de Fourier. Tenemos en este caso

$$\int_0^t f(x)dx = \int_0^t \frac{a_0 dx}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)dx =$$

$$= \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt), \tag{55.65}$$

y la serie que figura a la derecha converge uniformemente.

Diremos que la afirmación sobre la convergencia (incluso de la convergencia uniforme) de la serie (55.65) tiene lugar sin suposiciones algunas sobre la convergencia de la serie de partida (55.64).

DEMOSTRACIÓN. Examinemos una función

$$F(t) = \int_0^t \left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right] dx. \tag{55.66}$$

Esta función es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y tiene en éste una derivada continua $F'(t) = f(t) - \dfrac{a_0}{2}$ y

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \pi a_0 = 0.$$

Por eso, en virtud del teorema 14, su serie de Fourier converge hacia ella y, además, uniformemente. Designemos sus coeficientes de Fourier mediante A_0, A_n, B_n, $n = 1, 2, \ldots$. Entonces, en vista de lo dicho

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt. \tag{55.67}$$

Hallemos los coeficientes de esta serie. Integrando por partes, obtendremos

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi} F(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - $$

$$- \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\operatorname{sen} nt\,dt = -\frac{b_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Por analogía,

$$B_n = \frac{a_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Para hallar A_0, pongamos en (55.67) $t = 0$. Al notar que $F(0) = 0$, obtendremos

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0, \quad \text{de donde} \quad \frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

Así pues,

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\operatorname{sen} nt + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nt).$$

De aquí y también de (55.66) proviene precisamente la fórmula (55.65) y la convergencia uniforme de la serie (55.65) es el resultado de la convergencia uniforme de la serie (55.67). □

Problema 36. Demuéstrese que la serie trigonométrica convergente $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{\ln n}$ no es una serie de Fourier de ninguna función absolutamente integrable.

Indiquemos que si $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ y, por ende, $a_0 = 0$, entonces como resultado de la integración término a término de la serie de Fourier de la función f se obtiene de nuevo una serie de Fourier de cierta función F, a saber, como se deduce de lo demostrado,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Dado que para cualquier función primitiva Φ de la función f, continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, es válida la fórmula de Newton — Leibniz

$$\Phi(\pi) - \Phi(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

la condición $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ será equivalente a que todas las funciones primitivas de f toman en los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$ valores iguales.

55.12 SERIES DE FOURIER PARA EL CASO DE UN INTERVALO ARBITRARIO. NOTACIÓN COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER

La teoría de las series trigonométricas de Fourier de las funciones 2π-periódicas se extiende fácilmente al caso de funciones periódicas de cualquier periodo $2l$. Para ello resulta suficiente aplicar el segmento $[-l, l]$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ mediante la aplicación lineal:

$$y = \frac{\pi}{l}x, \quad -l \leqslant x \leqslant l, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi,$$

y el problema se reducirá al caso ya considerado. Se denomina serie de Fourier de la función f de período $2l$ respecto de la variable de partida x una serie de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l},$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

En particular, si la función f es par, se tiene

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

donde

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

y si f es impar, entonces

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l},$$

donde

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Como conclusión, indiquemos, además, la así llamada *notación compleja* de las series de Fourier que es de uso frecuente en las matemáticas y sus aplicaciones. Sea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\operatorname{sen} nx. \tag{55.68}$$

Como se sabe (véase el p. 37.6),

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{nxi} + e^{-nxi}), \tag{55.69}$$

$$\operatorname{sen} nx = \frac{1}{2i}(e^{nxi} - e^{-nxi}) = \frac{i}{2}(e^{-nxi} - e^{nxi}). \tag{55.70}$$

Al sustituir (55.69) y (55.70) en (55.68), obtendremos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - b_n i)e^{nxi} + \frac{1}{2}(a_n + b_n i)e^{-nxi}.$$

Suponiendo

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i),$$

tenemos

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{55.71}$$

donde, evidentemente, $c_{-n} = \bar{c}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Al recordar que $\cos\alpha \pm i\operatorname{sen}\alpha = e^{\pm i\alpha}$ (véase el p. 37.6), tendremos

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\operatorname{sen} nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,^{*)}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

o bien, al reunir ambas fórmulas y añadir el caso de $n = 0$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{55.72}$$

*) Véase en el p. 54.6 la definición de la integral de una función de valores complejos.

Al sustituir (55.72) en (55.71), obtendremos

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt. \tag{55.73}$$

Así pues, hemos escrito la serie de Fourier en la forma compleja y se han obtenido las expresiones para sus coeficientes.

Sólo nos resta aclarar el concepto de convergencia de la serie de forma (55.73).

Se denomina suma parcial de n-ésimo orden de la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \tag{55.74}$$

la suma $S_n = \sum_{k=-n}^{n} z_k$. La serie (55.74) se llama convergente, si existe $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, en este caso S se denomina suma de la serie y se escribe

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n.$$

§ 56. INTEGRAL DE FOURIER Y TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

56.1. REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN EN FORMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

Supongamos que la función f es absolutamente integrable en todo el eje real. Escribamos para ella una integral, correspondiente, en cierto sentido, a la serie de Fourier en la que la sumación según el índice n se ha sustituido por la integración respecto de cierto parámetro:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\operatorname{sen} xy]\,dy, \tag{56.1}$$

donde

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \tag{56.2}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen} yt\,dt. \tag{56.3}$$

Las fórmulas (56.2) y (56.3) recuerdan las fórmulas para los coeficientes de Fourier.

Definición 1. *La integral* (56.1) *se llama integral de Fourier de la función* f.

Substituyendo (56.2) y (56.3) en la integral (56.1), transformemos esta última del modo siguiente:

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\operatorname{sen} xy]\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos ty \cos xy + \operatorname{sen} ty \operatorname{sen} xy)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.4)$$

Así como la suma de una serie de Fourier de una función es igual, en ciertas condiciones, a la misma función, la integral de Fourier representa también la función de partida.

Teorema 1. *Supongamos que*

1) *la función f es continua a trozos en cada segmento finito y absolutamente integrable en toda la recta real;*

2) *en el punto x existe una derivada a la derecha $f'_+(x)$ y una derivada a la izquierda $f'_-(x)$. Entonces, para el punto citado x se verifica la fórmula*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \qquad (56.5)$$

La fórmula (56.5) lleva el nombre de Fourier.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una integral

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \qquad (56.6)$$

donde $\eta > 0$, y x es un punto fijo en el que existen derivadas unilaterales $f'_+(x)$ y $f'_-(x)$.

Es obvio que la integral de Fourier

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt \qquad (56.7)$$

será el límite para la función (56.6) cuando $\eta \to +\infty$, es decir, $S(\eta)$ es en este sentido un análogo de las sumas parciales de las series de Fourier.

De conformidad con el teorema sobre la integración de integrales dependientes de un parámetro (véase el p. 53.1), para todo número $\xi > 0$ tenemos

$$\int_0^{\eta} dy \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\cos y(x-t)\,dt = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\,dt \int_0^{\eta} \cos y(x-t)\,dy =$$

$$= \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\frac{\operatorname{sen}\eta(x-t)}{x-t}\,dt. \qquad (56.8)$$

En efecto, ya que la función $f(t)$ es continua a trozos, sirviéndonos de las rectas paralelas al eje Oy, podemos dividir el rectángulo $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, en un número finito de rectángulos, en cada uno de los cuales la función $f(t)\cos y(x-t)$ ya será continua, como función de dos variables, hasta la frontera (si en la frontera de los rectángulos mencionados por valores de la función f se toman, cuando sea necesario, sus límites unilaterales, es decir, $f(t+0)$ o bien $f(t-0)$). Al aplicar el teorema 3 del p. 53.1 a todo rectángulo y sumar los resultados obtenidos, obtendremos precisamente la fórmula (56.8).

De la desigualdad obvia

$$|f(t)\cos y(x-t)| \leqslant |f(t)|$$

y de la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ proviene la convergencia uniforme, en el segmento $[0, \eta]$ respecto del parámetro y, de la integral

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \qquad (56.9)$$

es decir,

$$F(y, \xi) = \int_{-\xi}^{\xi} f(t)\cos y(x-t)\,dt$$

tiende al límite (56.9), para $\xi \to +\infty$, uniformemente en el segmento $[0, \eta]$.

Luego, la función $F(y, \xi)$ es continua respecto de y. Efectivamente, la función f está acotada en el segmento $[-\xi, \xi]$: $|f(t)| \leqslant M$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Designemos con $\omega(\delta)$ el módulo de continuidad de la función $\cos y(x-t)$, $0 \leqslant y \leqslant \eta$, $-\xi \leqslant t \leqslant \xi$. Entonces, $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, y, por eso

$$|F(y+\Delta y, \xi) - F(y, \xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\xi}^{\xi} |f(t)|\,|\cos(y+\Delta y)(x-t) - \cos y(x-t)|\,dt \leqslant 2M\xi\omega(\Delta y) \to 0$$

cuando $\Delta y \to 0$.

En virtud del teorema 2 del p. 53.1, en el primer miembro de la igualdad (56.8) podemos pasar al límite bajo el signo de la integral para $\xi \to +\infty$.

Como resultado tendremos

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\operatorname{sen}\eta(x-t)}{x-t}\,dt.$$

Esta integral es finita, pues (véanse (56.6) y (56.9)) es igual $\int_0^{\eta} F(y)\,dy$, donde la función $F(y)$ es continua como un límite, para $\xi \to +\infty$, de una familia de funciones $F(y, \xi)$ convergentes según y.

La integral $S(\eta)$ es un análogo de la integral de Dirichlet para las series de Fourier. Al poner $u = t - x$ (compárese con (55.17)), obtendremos

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u + x) \frac{\operatorname{sen} \eta u}{u} du.$$

Representando la integral obtenida como una suma de dos integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}$$

y realizando en la primera de ellas la sustitución $u = -t$, obtenemos

$$S(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} [f(x + t) + f(x - t)] \frac{\operatorname{sen} \eta t}{t} dt.$$

Al recordar (véase el p. 54.4) que para $\eta > 0$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \eta t}{t} dt = \frac{\pi}{2},$$

obtenemos

$$S(\eta) - \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{-\infty} [f(x + t) + f(x - t)] \frac{\operatorname{sen} \eta t}{t} dt -$$

$$- [f(x + 0) + f(x - 0)] \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \eta t}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t} \operatorname{sen} \eta t \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{f(x - t) - f(x - 0)}{t} \operatorname{sen} \eta t \, dt. \quad (56.10)$$

Consideremos, por ejemplo, la primera integral que figura en el segundo miembro de esta igualdad. Dividámosla en dos integrales:

$$\int_{0}^{+\infty} = \int_{0}^{1} + \int_{1}^{\infty}.$$

Por cuanto

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t} = f'_{+}(x),$$

entonces $\frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t}$ es una función continua a trozos de la variable t en el segmento $[0, 1]$, por lo cual, en virtud del teorema 2 del p. 55.2.

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_{0}^{1} \frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t} \operatorname{sen} \eta t \, dt = 0. \quad (56.11)$$

La función $\frac{f(x + t)}{t}$ es también continua a trozos en cualquier segmento del semieje $t \geqslant 1$, y, como

$$\left|\frac{f(x + t)}{t}\right| \leqslant |f(x + t)|,$$

se tiene

$$\int_{1}^{+\infty} \left|\frac{f(x + t)}{t}\right| dt \leqslant \int_{1}^{+\infty} |f(x + t)| \, dt = \int_{x+1}^{+\infty} |f(s)| \, ds \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| \, ds \leqslant +\infty,$$

es decir, $\frac{f(x + t)}{t}$ es absolutamente integrable en este semieje, y, por lo tanto, en virtud del mismo teorema.

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_{1}^{+\infty} \frac{f(x + t)}{t} \operatorname{sen} \eta t \, dt = 0. \quad (56.12)$$

Por fin, de la convergencia de la integral $\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dt$ (véase el p. 33.6), al realizar el cambio de la variable $u = \eta t$, obtenemos

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_{1}^{+\infty} \frac{f(x + 0)}{t} \operatorname{sen} \eta t \, dt = f(x + 0) \lim_{\eta \to +\infty} \int_{\eta}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u} du = 0. \quad (56.13)$$

De (56.11), (56.12) y (56.13) se deduce que

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{f(x + t) - f(x + 0)}{t} \operatorname{sen} \eta t \, dt = 0.$$

De modo análogo se demuestra que

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{f(x - t) - f(x - 0)}{t} \operatorname{sen} \eta t \, dt = 0.$$

De aquí, en virtud de (56.10), obtendremos

$$\lim_{\eta \to +\infty} S(\eta) = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}.$$

Por cuando el límite en el primer miembro es igual a la integral de Fourier (56.7), la igualdad (56.5) queda demostrada. □

Los requisitos impuestos sobre la función en este teorema pueden debilitarse al exigir, por ejemplo, que la función sea absolutamente integrable en todo el eje numérico y satisfaga en todo punto la condición generalizada de Hölder. No lo hemos hecho para hacer la demostración más simple (compárese con la demostración del teorema 4 y sus corolarios en el p. 55.4).

Ejercicio 1. Demuéstrese que si la función f es, en adición a las restricciones impuestas sobre ella en el teorema 1, par o impar, entonces quedan válidas las siguientes fórmulas: para una función par

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos yx\,dy\int_0^{+\infty}f(t)\cos yt\,dt,$$

para una función impar

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\operatorname{sen} yx\,dy\int_0^{+\infty}f(t)\operatorname{sen} yt\,dt.$$

56.2. DIFERENTES FORMAS DE NOTACIÓN DE LA FÓRMULA DE FOURIER

Para simplificar las notaciones se considerará en adelante que la función f es absolutamente integrable en todo el eje numérico $\boldsymbol{R}$ y en todos los puntos de éste es continua y tiene derivadas unilaterales. En este caso para cualquier $x \in \boldsymbol{R}$, de acuerdo con el teorema 1, resulta lícita la fórmula de Fourier

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)dt,$$

y, por cuanto la función subintegral es par respecto de la variable y, entonces

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)dt. \tag{56.14}$$

Por ser obvia la desigualdad

$$|f(t)\operatorname{sen} y(x-t)| \leqslant |f(t)|,$$

siendo vigentes las restricciones impuestas sobre la función f, existe también la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\operatorname{sen} y(x-t)dt,$$

con la particularidad de que, en virtud del criterio de Weierstrass (véase el p. 54.1), converge uniformemente en todo el eje numérico de la variable y y, por consiguiente, es una función continua de y. Por eso para cualquier número η existe una integral

$$\int_{-\eta}^{\eta}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\operatorname{sen} y(x-t)dt, \tag{56.15}$$

y es, además, nula, puesto que la función subintegral es impar respecto de y. Sin embargo, asumidas las suposiciones referentes a la función f, no se puede garantizar la existencia de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\operatorname{sen} y(x-t)dt. \tag{56.16}$$

Para obtener las fórmulas necesarias, hemos de introducir una generalización más del concepto de integral.

56.3. VALOR PRINCIPAL DE UNA INTEGRAL

Introduzcamos la siguiente definición.

Definición 2. *Sea φ una función integrable en cualquier segmento finito. Si existe un límite finito*

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)dx, \quad \eta>0,$$

se denominará valor principal de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ y se designará brevemente v.p.

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)dx. \tag{56.17}$$

Subrayemos que la diferencia de esta definición de la que caracteriza una integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$, en el sentido de la definición dada en el p. 33.1, consiste en que para la función φ, integrable en cualquier segmento finito, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ se definía como un límite de las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$, cuando tendían independientemente ξ hacia $-\infty$ y η hacia $+\infty$. En el caso que se considera ahora sólo se exige la existencia del límite de las integrales citadas $\int_{\xi}^{\eta}\varphi(x)dx$ para un caso particular en que $\xi=-\eta$ y $\eta\to+\infty$.

De este mismo modo se determina también el valor principal de la integral impropia en un punto: supongamos que $a<c<b$ y la función φ es integrable según Riemann, para cualquier $\varepsilon>0$, en los segmentos $[a, c-\varepsilon]$ y $[c+\varepsilon, b]$ (se supone, naturalmente, que $a<c-\varepsilon$ y $c+\varepsilon<b$); entonces el valor principal de la

integral $\int_a^b \varphi(x)dx$ en el punto c se determinará mediante la fórmula

$$v.p. \int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \varphi(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b \varphi(x)dx \right].$$

A veces, cuando ello no pueda llevar a las equivocaciones, la integral en el sentido del valor principal se designa simplemente con el símbolo integral, omitiéndose las letras $v.p.$

Si para una cierta función existe la integral impropia, dicha función dispone también del valor principal de la integral y éste coincide con la integral impropia de la función. Lo recíproco no es cierto: para una función puede existir (y, por consiguiente, ser finito) el valor principal de la integral, mientras que la integral impropia es divergente.

Por ejemplo, las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ y $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ no existen como impropias, no obstante existen en el sentido del valor principal, el cual en ambos casos es igual a cero.

56.4. NOTACIÓN COMPLEJA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

Volveremos a la fórmula de Fourier (56.14) y la escribiremos en otra forma, sirviéndonos del concepto de valor principal de la integral. Puesto que la función subintegral en la integral (56.16) es impar respecto de y, con arreglo a la definición enunciada del valor principal de la integral, tenemos

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen} y(x - t)dt = 0. \tag{56.18}$$

Al multiplicar ambos miembros de esta igualdad por $\frac{i}{2\pi}$ y sumar con la integral (56.14), obtendremos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt, \tag{56.19}$$

donde la integral exterior se entiende en el sentido del valor principal. La fórmula (56.19) lleva el nombre de *notación compleja de la integral de Fourier.*

56.5. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

Si ponemos

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt,$$

la fórmula (56.19) tendrá por expresión

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y) e^{ixy} dy. \tag{56.20}$$

Definición 3. *La función Φ que se pone en correspondencia con la función f por la fórmula*

$$\Phi(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt, \tag{56.21}$$

se denomina transformación de Fourier de la función f y se designa $F[f]$ o bien $\hat{f}$.

En esta definición $f(t)$ es, en el caso general, una función de valores complejos del argumento real. Notemos que la función $\Phi = F[f]$ puede adquirir valores esencialmente complejos incluso cuando la función f toma sólo valores reales.

La transformación de Fourier está definida, en particular, para todas las funciones absolutamente integrables. Por ejemplo, empleando para la transformación de Fourier de la función f la designación $\hat{f}$, podemos escribir la fórmula (56.20) en la forma

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy. \tag{56.20'}$$

Esta fórmula permite restablecer la propia función f, si se sabe su transformación de Fourier $\hat{f}$. Se denomina *fórmula de inversión.*

Definición 4. *La función Ψ que se pone en correspondencia con la función f mediante la fórmula*

$$\Psi(y) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt} dt, \tag{56.22}$$

se llama transformación inversa de Fourier de la función f y designa por $F^{-1}[f]$.

La transformación de Fourier y la transformación inversa de Fourier están definidas en un conjunto de funciones, para las cuales las integrales (56.21) y (56.22) existen en el sentido del valor principal. Este conjunto contiene dentro de sí, en particular, el conjunto de todas las funciones absolutamente integrables en todo el eje real, para las cuales las integrales en las fórmulas (56.21) y (56.22) pueden entenderse como integrales impropias ordinarias y no sólo como integrales en el sentido del valor principal. El término "transformación inversa de Fourier" se justifica por lo que la transformación F^{-1} convierte la transformación de Fourier F. Con más precisión, es válido el siguiente lema.

Lema 1. *Si una función f, continua y absolutamente integrable en todo el eje, tiene en cada punto derivadas unilaterales finitas, entonces*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

DEMOSTRACIÓN. La primera fórmula de inversión, es decir, la fórmula $F^{-1}[F[f]] = f$ es simplemente otra notación de la fórmula ya demostrada (56.19).

Probemos la validez de la segunda fórmula de inversión. Por cuanto el coseno es una función par, podemos en (56.14) cambiar de lugares t y x;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t - x)dt,$$

y, por ser impar el seno (compárese con (56.18)),

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\operatorname{sen} y(t - x)dt = 0.$$

Por eso, a la par con la fórmula (56.19), tenemos también

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(t - x)}dt,$$

o bien

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ity}dt\right] e^{ixy}dy,$$

donde la integral exterior se toma en el sentido del valor principal. Esta fórmula puede ser escrita en la forma

$$F[F^{-1}[f]] = f. \ \square$$

Indiquemos que la validez de las fórmulas de inversión puede demostrarse también para restricciones más débiles impuestas sobre la función en comparación con aquellas que prevén la existencia en cada punto de las derivadas unilaterales.

Lema 2. *Supongamos que para las funciones* f_1 *y* f_2 *existe la transformación de Fourier (la transformación inversa de Fourier, respectivamente). Entonces, cualesquiera que sean los números* λ_1 *y* λ_2, *para las funciones* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *también existe la transformación de Fourier (la transformación inversa de Fourier, respectivamente), con la particularidad de que*

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2]$$

$$(F^{-1}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F^{-1}[f_1] + \lambda_2 F^{-1}[f_2], \textit{ respectivamente}).$$

Esta propiedad lleva el nombre de *linealidad de la transformación de Fourier* (de la transformación inversa de Fourier, respectivamente). Ella proviene inmediatamente de la linealidad de la integral y de las fórmulas (56.21) y (56.22).

Corolario. $F[0] = F^{-1}[0] = 0$.

En efecto, por ejemplo,

$$F[0] = F[0 \cdot 0] = 0 \cdot F[0] = 0.$$

Esta última propiedad se deduce, naturalmente, asimismo de las fórmulas (56.21) y (56.22).

Lema 3. *La transformación de Fourier* F, *al igual que la transformación inversa de Fourier* F^{-1}, *son las aplicaciones biunívocas de un conjunto de funciones continuas absolutamente integrables en todo el eje real, que tienen en cada punto derivadas unilaterales, en otro conjunto de funciones, para las cuales las integrables (56.21) y (56.22) existen en el sentido del valor principal.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar sólo la biunivocidad de las aplicaciones F y F^{-1}, puesto que lo demás ya ha sido demostrado más arriba. Demostremos, por ejemplo, la biunivocidad de la aplicación F. Sea $F[f_1] = F[f_2]$; entonces

$$F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]].$$

De aquí, de acuerdo con el lema 1, se desprende que

$$f_1 = f_2. \ \square$$

En todo caso la transformación de Fourier está definida para las funciones absolutamente integrables. En los puntos que siguen se estudiarán las propiedades de esta transformación. Más adelante aún se mostrará como la transformación de Fourier se generaliza a las clases más amplias de funciones, a saber, a las funciones de cuadrado integrable (el p. 58.7*) y las así llamadas funciones generalizadas.

56.6. INTEGRALES DE LAPLACE

Hallemos la transformación de Fourier $\hat{f}$ de la prolongación par de la función e^{-ax}, $a > 0$, desde la semirecta $x \geqslant 0$ a toda la recta numérica, es decir, hablando sencillamente, la transformación de Fourier de la función $f(x) = e^{-a|x|}$, $-\infty < x < +\infty$:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-ixy}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-ax}e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-(a - iy)x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-(a + iy)x}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a - iy} + \frac{1}{a + iy}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + y^2}.$$

La aplicación de la transformación inversa de Fourier a la función obtenida da la función de partida

$$e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + y^2} e^{ixy}dy, \quad x \geqslant 0.$$

Recordando que $e^{ixy} = \cos xy + i \operatorname{sen} xy$ y notando que, en virtud de que la función subintegral de la integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} xy}{a^2 + y^2}\, dy = 0$ obtendremos

$$e^{-ax} = \frac{a}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2}\, dy = \frac{2a}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2}\, dy, \ x \geqslant 0.$$

Hallemos ahora la transformación de Fourier $\hat{f}$ de la prolongación impar de la función e^{-ax}, $a > 0$, desde el semieje positivo $x > 0$, es decir, la transformación de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0, \\ -e^{ax} & x < 0. \end{cases}$$

Tenemos

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} (-e^{ax}) e^{-ixy} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{ixy} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(- \frac{1}{a - iy} + \frac{1}{a + iy} \right) = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{a^2 + y^2}\, i.$$

Al aplicar nuevamente la fórmula de inversión de la transformación de Fourier, obtendremos

$$e^{-ax} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{a^2 + y^2}\, i \right) e^{ixy} dy = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{y \operatorname{sen} xy}{a^2 + y^2}\, dy, \quad x > 0.$$

Así pues, hemos logrado no sólo hallar la transformación de Fourier de las funciones en consideración, sino también obtener directamente de la fórmula de inversión (56.20′) los valores de dos integrales

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2 + y^2}\, dy = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}, \quad x \geqslant 0,$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{y \operatorname{sen} xy}{a^2 + y^2}\, dy = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad x > 0.$$

Estas últimas se llaman *integrales de Laplace.*

56.7. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES DE FOURIER DE LAS FUNCIONES ABSOLUTAMENTE INTEGRABLES

En este punto y en los que siguen serán consideradas algunas propiedades de la transformación de Fourier de la función f, la cual se designará, como hasta ahora, mediante $\hat{f}$ o $F[f]$. Se supondrá, además, que la función f toma, en el caso general, los valores complejos, mientras que su argumento es, como siempre, real.

Lema 4. *Si la función f es absolutamente integrable en todo el eje numérico, su transformación de Fourier $\hat{f}(y)$ está acotada en todo el eje, con la particularidad de que*

$$|\hat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx. \tag{56.23}$$

Corolario. *Si una sucesión de las funciones absolutamente integrables $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, y una función absolutamente integrable $f(x)$ son de tal género que*

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0,$$

entonces la sucesión $\{\hat{f}_n(y)\}$ converge uniformemente en todo el eje numérico hacia la función $\hat{f}(y)$.

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad (56.23) se infiere de la fórmula (véase (56.21))

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dy, \tag{56.24}$$

si se tiene presente que $|e^{-ixy}| = 1$. □

El corolario se deduce inmediatamente de la desigualdad (56.23) y la linealidad de la transformación de Fourier, pues

$$|\hat{f}_n(y) - \hat{f}(y)| = |\widehat{f_n(x) - f(x)}| \underset{(56.23)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx. \ \square$$

Lema 5. *Si la función f es absolutamente integrable en todo el eje numérico, su transformación de Fourier $\hat{f}(y)$ es continua y*

$$\lim_{y \to \pm\infty} \hat{f}(y) = 0. \tag{56.25}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(x) = u(x) + iv(x)$, donde $u(x)$ y $v(x)$ son unas funciones reales absolutamente integrables. Por cuanto $\hat{f}(x) = \hat{u}(x) + i\hat{v}(x)$, para demostrar la continuidad de la función $\hat{f}(y)$ es suficiente demostrar la continuidad de las funciones $\hat{u}(x)$ y $\hat{v}(x)$. Aquí $u(x)$ y $v(x)$ son, como siempre, las funciones de valores reales de un argumento real, mientras que $\hat{u}(x)$ y $\hat{v}(x)$ son, en el caso general, funciones de valores complejos de un argumento real.

De acuerdo con el lema 2 del p. 55.2, para cualquier función $f(x)$, que es real y absolutamente integrable en todo el eje, existe una sucesión de funciones escalonadas finitas $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, tales que

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

En virtud del corolario 4, la sucesión $\{\hat{\varphi}_n(y)\}$ converge uniformemente hacia la función $\hat{f}(y)$. Para convencerse de que la función $\hat{f}(y)$ es continua, es sufuciente demostrar que las funciones $\hat{\varphi}_n(y)$ son continuas (véase el teorema 8′ en el p. 36.4). Mostrémoslo. Toda función escalonada finita es una combinación lineal de funciones de un solo escalón (véase el p. 55.2), con más precisión, de funciones características de los semiintervalos de tipo $[a, b)$. Por eso, debido a la linealidad de la transformación de Fourier, la continuidad de la función $\hat{f}$ será demostrada, si probamos que para la función característica de cualquier semiintervalo $[a, b)$ su transformación de Fourier es continua.

Sea ω una función característica del semiintervalo $[a, b)$, es decir, $\omega(x) = 1$, si $a \leqslant x < b$, y $\omega(x) = 0$, si $x < a$ ó $x \geqslant b$. Entonces, en virtud de (56.21), para $y \neq 0$, tenemos

$$\hat{\omega}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ixy} dx = -\frac{1}{iy\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ixy} d(-ixy) = \frac{i}{y\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{i(e^{-iby} - e^{-iay})}{y\sqrt{2\pi}}.$$

En el caso de $y = 0$, en vista de la misma fórmula (56.21),

$$\hat{\omega}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b dx = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}.$$

Así pues,

$$\hat{\omega}(y) = \begin{cases} \dfrac{i(e^{-iby} - e^{-iay})}{y\sqrt{2\pi}} & \text{para } y \neq 0, \\ \dfrac{b-a}{\sqrt{2\pi}} & \text{para } y = 0. \end{cases}$$

Es evidente que el segundo miembro de esta igualdad es una función continua para cualquier $y \neq 0$. Probemos que es también continua cuando $y = 0$.

$$\lim_{y \to 0} \frac{i(e^{-iyb} - e^{-iya})}{y\sqrt{2\pi}} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} [(1 - iby + o(y)) - (1 - iay + o(y))] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{y \to 0} \left[b - a + \frac{o(y)}{y} \right] = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}},$$

es decir: la función $\hat{\omega}(y)$ es realmente continua en el punto $y = 0$.

De este modo queda demostrada la continuidad en todo el eje numérico de la transformación de Fourier $\hat{f}$ de una función f absolutamente integrable en todo el eje numérico que toma valores reales. De aquí, según lo dicho anteriormente, proviene inmediatamente la continuidad de la transformación de Fourier $\hat{f}$ de la función $f = u + iv$ absolutamente integrable en todo el eje numérico, es decir, de una función que, en el caso general, toma también valores complejos.

La igualdad (56.25) se infiere del teorema 2, p. 55.2. En efecto, supongamos nuevamente al principio que la función f es absolutamente integrable en todo el eje numérico y toma sólo valores reales, entonces

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos xy \, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} xy \, dx \right],$$

donde, en virtud del teorema citado, las partes real e imaginaria y, por consiguiente, la propia función $\hat{f}(y)$ tienden a cero cuando $y \to \pm\infty$.

Ahora, si $f = u + iv$, entonces, según lo demostrado $\lim_{y \to \pm\infty} \hat{u}(y) = \lim_{y \to \pm\infty} \hat{v}(y) = 0$, por consiguiente, $\lim_{y \to \pm\infty} \hat{f}(y) = 0$.

56.8. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER DE LAS DERIVADAS

Teorema 2. *Supongamos que una función f, absolutamente integrable en todo el eje numérico, tiene n derivadas absolutamente integrables y continuas en todo el eje. Entonces,*

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f], \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{56.26}$$

y existe una constante $M > 0$ tal que

$$|F[f]| \leqslant \frac{M}{|y^n|}. \tag{56.27}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que la función f admite sólo valores reales. Si f es absolutamente integrable en todo el eje junto con su derivada f' y esta derivada es continua, entonces

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

Dado que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)| \, dt$ converge de conformidad con la hipótesis del teorema, entonces converge también la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt$, por lo cual, en virtud de la definición de convergencia de una integral, existen los límites $\lim_{x \to \pm\infty} \int_0^x f'(t) dt$ y, por consiguiente, los límites $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. Además, de la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ se deduce que los límites citados son iguales a cero: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Al aplicar la integración por partes a la fórmula de la transformación de Fourier, obtendremos:

$$F[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx = iyF[f].$$

De este modo, la derivación de una función conduce a la multiplicación de su transformación de Fourier por el factor iy.

Si ahora $f = u + iv$, donde u y v son funciones reales, y esta vez de nuevo f es absolutamente integrable junto con su derivada $f' = u' + iv'$ y esta última es continua, entonces

$$F[f'] = F[u' + iv'] = F[u'] + iF[v'] = iyF[u] - yF[v] =$$
$$= iyF[u + iv] = iyF[f].$$

La fórmula (56.26) queda demostrada para $n = 1$. Para n arbitrario ésta se obtiene por inducción.

La función $F[f^{(n)}]$ está acotada (véase el lema 4), por lo cual la cota superior $M = \sup\limits_{-\infty < y < +\infty} F[f^{(n)}]$ es finita y, por consiguiente, la estimación (56.27) se desprende de la fórmula (56.26) para $k = n$. □

Así pues, cuanto mayor es el número de las derivadas absolutamente integrables que tiene la función f, tanto más rápido tiende a cero en el infinito su transformación de Fourier.

Ha de notarse que el teorema 2, al igual que su demostración, quedan en vigor también en el caso cuando la derivada de n-ésimo orden de la función en consideración no es continua, sino que tiene un número finito de discontinuidades de primera especie (véase el p. 5.1), conservándose sin cambios otras suposiciones. En efecto, en el caso dado la derivada citada es, en cualquier segmento finito, una función continua a trozos (véase el p. 28.3) y por esta razón la integración por partes, a la que se recurre en la demostración, es lícita (véanse los pp. 30.2 y 33.2)

Ejercicio 2. Demuéstrese que la transformación de Fourier $F(y)$ de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|^3}$ es igual a $O\left(\dfrac{1}{y^3}\right)$ cuando $y \to \infty$.

56.9. CONVOLUCIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

Supongamos que las funciones φ y ψ están definidas en todo el eje real. En diferentes problemas matemáticos se emplea a menudo la así llamada *convolución de las funciones* φ y ψ, la que se designa por $\varphi * \psi$ o, si x es el argumento de la convolución, mediante $(\varphi * \psi)(x)$ y se determina con la igualdad

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt. \tag{56.28}$$

En este punto supondremos, para simplificar, que las funciones en consideración $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ admiten sólo los valores reales. La integral (56.28) existe a ciencia cierta, si ambas funciones están acotadas y son absolutamente integrables*). Además, la integral (56.28) y, más aún, la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\,dt$$

son uniformemente convergentes en todo el eje real. Efectivamente, en virtud de que la función ψ está acotada se tiene $|\psi| \leqslant M$, donde M es una constante, por lo cual para cualquiera x y t

$$|\varphi(t)\psi(x - t)| \leqslant M|\varphi(t)|$$

y la afirmación enunciada se deduce, en virtud de la integrabilidad absoluta de la función φ, del criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de integrales (véase el p. 54.1). De los razonamientos aducidos se desprende, además, que si las funciones φ y ψ están acotadas y son absolutamente integrables y continuas, su convolución f es también continua, acotada y absolutamente integrable. En efecto, la continuidad de la función f proviene de la convergencia uniforme de la integral (56.28) y el carácter acotado, de la estimación

$$|(\varphi * \psi)(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\,dt \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt.$$

Demostremos la integrabilidad absoluta de la convolución. Sea $f = \varphi * \psi$; tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x - t)|\,dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(s)|\,ds. \tag{56.29}$$

El cambio del orden de integración en este caso es posible en virtud de que (véase el teorema 7 del p. 54.3) la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\,dt$ converge uniformemente en todo el eje, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\,dx = |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x - t)|\,dx$ converge uniformemente en cualquier segmento finito (¿por qué?), y la integral reiterada $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)\psi(x - t)|\,dt$ existe, según se pone de manifiesto de la última igualdad de la fórmula (56.29).

*) La existencia de la integral (56.28) puede garantizarse también para las condiciones más generales, sin embargo no nos detendremos en esto.

De este modo, asumidas las suposiciones especificadas, podemos aplicar a la función $f = \varphi * \psi$ la operación de convolución con una función continua acotada y absolutamente integrable (como resultado, se obtendrá nuevamente una función de la misma clase) o la transformación de Fourier.

La operación de convolución de las funciones es *conmutativa y asociativa* en la clase de funciones en consideración. En efecto, al realizar en la integral (56.28) el cambio de la variable $x - t = s$, obtendremos

$$\varphi * \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - s)\psi(s)ds = \psi * \psi$$

Luego, realizando en la integral que viene abajo el cambio de la variable $t = y - \xi$, cambiando el orden de integración y haciendo la sustitución $x - y + \xi = \eta$, obtendremos

$$(\varphi * \psi) * \chi = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(y - x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(y - x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - y + \xi)\chi(y - x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\eta)\chi(\xi - \eta)d\eta = (\psi * \chi) * \varphi = \varphi * (\psi * \chi).$$

La posibilidad de cambiar el orden de integración en este caso también se desprende del teorema 7d el p. 54.3. En efecto, investiguemos la convergencia uniforme de las integrales

$$\chi(y - x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)d\xi, \tag{56.30}$$

$$\varphi(y - \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - y + \xi)\chi(y - x)dx. \tag{56.31}$$

Puesto que las funciones ψ y χ son acotadas, se tiene $|\psi| \leqslant M$, $|\chi| \leqslant M$, donde M es una constante, por lo cual

$$|\chi(y - x)\varphi(y - \xi)\psi(x - x + \xi)| \leqslant M^2|\varphi(y - \xi)|,$$

$$|\varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)\chi(y - x)| \leqslant M^2|\chi(y - x)|.$$

De estas igualdades y del hecho de que las funciones φ y χ son absolutamente integrables se deduce, de acuerdo con el criterio de Weierstrass, que las integrales (56.30) y (56.31) convergen uniformemente respecto de las variables x y ξ, respectivamente (la variable y está fija) en cualquier segmento finito (¿por qué?). Por fin, existe una integral reiterada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(y - x)\varphi(y - \xi)\psi(x - y + \xi)|\, d\xi = (|\varphi| * |\psi|) * |\chi|.$$

De este modo, todas las condiciones del teorema mencionado 7 del p. 54.3 están cumplidas.

Cabe notar que al considerar las convoluciones de las funciones, se pueden debilitar considerablemente las restricciones que se imponen sobre las funciones de convolución. No obstante, la demostración de las propiedades de convoluciones en este caso exigiría, ante todo, unos teoremas más delicados sobre el cambio del orden de integración. No lo hicimos aquí con el fin de simplificar la exposición.

Procedamos ahora al estudio de la transformación de Fourier de la convolución de dos funciones. Transformemos, para la comodidad, la definición de la convolución $\varphi * \psi$, añadiendo el factor adicional $1/\sqrt{2\pi}$:

$$\varphi * \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt.$$

Teorema 3. *Sean φ y ψ las funciones acotadas, continuas y absolutamente integrables en todo el eje numérico. En este caso tenemos*

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]F[\psi].$$

DEMOSTRACIÓN. Las funciones φ y ψ son acotadas, continuas y absolutamente integrables y por ello la función $\varphi * \psi$ posee las mismas propiedades, en particular, es absolutamente integrable y para ella puede considerarse la transformación de Fourier

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x - t)dt.$$

Cambiando aquí el orden de integración (lo que es posible en virtud del teorema 7 del p. 54.3) y realizando el cambio de la variable $x = t + s$, obtendremos

$$F[\varphi * \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - t)e^{-ixy}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-ity}dt \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s)e^{-isy}ds = F[\varphi]F[\psi],$$

es decir, la transformación de Fourier de una convolución de dos funciones es igual al producto de las transformaciones de Fourier de dichas funciones. □

El teorema 3 puede ser demostrado también para restricciones más débiles impuestas sobre las funciones en consideración, pero no nos detendremos en esto.

56.10. DERIVADA DE LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN

Teorema 4. *Si la función $f(x)$ es continua y las funciones $f(x)$, $xf(x)$, . . . , $x^n f(x)$ son absolutamente integrables en todo el eje numérico , entonces la transfor-*

mación de Fourier de la función f será una función n veces derivable en todo el eje numérico y

$$i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que la función f toma sólo valores reales. Derivando formalmente la integral

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

respecto del parámetro y y observando que $|xf(x)e^{-ixy}| = |xf(x)|$, obtendremos la integral absoluta e uniformemente convergente

$$-i \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) e^{-ixy} dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Por consiguiente (véase el p. 54.3, teorema 8) en este caso la transformación de Fourier $F[f]$ de la función f es una función derivable e

$$iF'[f] = F[xf].$$

Si, ahora, $f = u + iv$, donde u y v son unas funciones reales obtenemos

$$F'[f] = F'[u + iv] = \{F[u] + iF[v]\}' = F'[u] + iF'[v] =$$
$$= -iF[xu] + F[xv] = -iF[xu + ixv] = -iF[xf].$$

A continuación, por inducción obtenemos que la transformación de Fourier $F[f]$ de la función f tiene derivadas hasta el orden n inclusive e $i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f]$, $k = 0, 1, \ldots, n$. □

Corolario. *Si las suposiciones del teorema están cumplidas, todas las derivadas $F^{(k)}[f]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, son continuas y tienden a cero cuando su argumento tiende al infinito.*

En vista del lema 5, el corolario se deduce inmediatamente, ya que las derivadas $F^{(k)}[f]$ son las transformaciones de Fourier de las funciones absolutamente integrables.

Se puede mostrar que si los productos del tipo $e^{a|x|^\alpha} f(x)$ son absolutamente integrables, asumidas ciertas restricciones impuestas sobre $a > 0$ y $\alpha > 0$, esto conduce a que la transformación de Fourier se hace aún más suave, a saber, la transformación mencionada pertenece ya a unas u otras clases de funciones analíticas.

La fórmula que determina la transformación inversa de Fourier se diferencia de la que da la transformación directa de Fourier (véanse (56.21) y (56.22)) sólo en que el número e bajo el signo integral tiene i sustituido por $-i$ en el exponente de la potencia, razón por la cual para la transformación inversa de Fourier son válidas las propiedades análogas a las demostradas para la transformación directa de Fourier.

Ejercicios. 3. Demuéstrese que la transformación de Fourier de la función $f(x) = \frac{1}{1 + x^4}$ es dos veces derivable en todo el eje numérico.

4. Demuéstrese que la transformación de Fourier de la función $f(x) = xe^{-|x|}$ es infinitamente derivable en todo el eje numérico.

§ 57. ESPACIOS FUNCIONALES

57.1. ESPACIOS MÉTRICOS

Definición 1. *El conjunto $X = \{x, y, z, \ldots\}$ se llama espacio métrico X, si en un conjunto de pares ordenados (x, y) de elementos de este conjunto viene definida una función no negativa $\rho(x, y)$, llamada distancia (o métrica), tal que:*
1) $\rho(x, y) = 0$ *cuando, y sólo cuando,* $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $x \in X$, $y \in X$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Las condiciones 1, 2 y 3 se denominan *axiomas de distancia.*

Los elementos del espacio métrico llevan el nombre de *puntos.*

Ejemplos. 1. Una totalidad de todos los números reales $\boldsymbol{R}$ forma un espacio métrico, siempre que la distancia entre los números reales se define como valor absoluto de la diferencia entre ellos:

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad y \in \boldsymbol{R}.$$

2. Un conjunto de todos los números complejos $\boldsymbol{C}$ forma también un espacio métrico, si la distancia entre los elementos del conjunto se define según la fórmula $\rho(z, z') = |z - z'|$, $z \in \boldsymbol{C}$, $z' \in \boldsymbol{C}$.

3. Un espacio euclídeo R^n de dimensión n (véase el p. 18.1) es un espacio métrico, si la distancia entre sus puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ se determina por la fórmula (véase (18.1))

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

4. Sea X cierto conjunto. Consideraremos un conjunto de funciones numéricas que son acotadas en X y que toman valores reales (o complejos). Para dos funciones de esta índole φ y ψ pongamos

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in X} |\varphi(t) - \psi(t)|. \tag{57.1}$$

Se comprueba con facilidad que la función $\rho(\varphi, \psi)$ es una métrica. La validez de las propiedades 1 y 2 de la distancia se ve claramente. Comprobemos la validez de la propiedad 3. Supongamos que φ, ψ y χ son unas funciones acotadas definidas en el conjunto X. Para todo elemento $t \in X$ tenemos

$$|\varphi(t) - \chi(t)| = |[\varphi(t) - \psi(t)] + [\psi(t) - \chi(t)]| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(t) - \psi(t)| + |\psi(t) - \chi(t)|,$$

por lo cual

$$|\varphi(t) - \chi(t)| \leqslant \sup_X |\varphi(t) - \psi(t)| + \sup_X |\psi(t) - \chi(t)|,$$

de donde

$$\sup_X |\varphi(t) - \chi(t)| \leqslant \sup_X |\varphi(t) - \psi(t)| + \sup_X |\psi(t) - \chi(t)|,$$

es decir,

$$\rho(\varphi, \chi) \leqslant \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

5. Sea G un conjunto abierto medible según Jordan del espacio euclídeo n-dimensional R^n. Un conjunto X de las funciones continuas en la clausura $\bar{G}$ del conjunto G forma un espacio métrico, si la distancia entre las funciones $\varphi \in X$ y $\psi \in X$ se determina mediante la fórmula

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |\psi(x) - \varphi(x)| \, dG.$$

En efecto, si $\rho(\varphi, \psi) = 0$, es decir, si $\int |\psi(x) - \varphi(x)| \, dG = 0$, entonces, en virtud del corolario de la propiedad 9° de las integrales múltiples (véase el p. 44.6), $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in G$ y, por ende, para todo $x \in \bar{G}$. La propiedad 2° de la distancia es, en este caso, evidente, y la propiedad 3° se comprueba con facilidad: si φ, ψ y χ son continuas en $\bar{G}$, se tiene

$$\rho(\varphi, \psi) = \int |\varphi(x) - \chi(x)| \, dG = \int |[\varphi(x) - \psi(x)] - [\psi(x) - \chi(x)]| \, dG \leqslant$$
$$\leqslant \int |\varphi(x) - \psi(x)| \, dG + \int |\psi(x) - \chi(x)| \, dG = \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \chi).$$

En el caso en que $n = 1$ y $\bar{G} = [a, b]$, la métrica introducida para las funciones continuas en el segmento $[a, b]$ tiene por expresión

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)| \, dx. \qquad (57.2)$$

Un espacio semejante también se introduce del modo natural para las funciones que están definidas en un intervalo infinito. Por ejemplo, cuando $a = -\infty$, $b = +\infty$, la distancia para dos funciones continuas y absolutamente integrables en todo el eje numérico, φ y ψ, se determina según la fórmula

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \psi(x)| \, dx. \qquad (57.3)$$

Todo subconjunto de un espacio métrico X es, a su vez, un espacio métrico respecto de la misma métrica y se llama *subespacio del espacio* X.

Definición 2. *Dos espacios métricos X y X' se llaman isométricos, si entre dos puntos suyos existe una correspondencia biunívoca f que mantiene inalterable la distancia, es decir, una correspondencia tal que si*

$$x' = f(x), \quad y' = f(y), \quad x \in X, \quad y \in X, \quad x' \in X', \quad y' \in X',$$

entonces $\rho(x, y) = \rho(x', y')$ (tales correspondencias se denominan isométricas).

Definición 3. *Sea X un espacio métrico; la sucesión de sus puntos $\{x_n\}$ se denomina convergente al punto $x \in X$, si $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$, es decir, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que para cualesquiera números $n \geqslant n_\varepsilon$ se verifica la*

desigualdad $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. En este caso se escribe $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, o bien $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, y se dice que el punto x es el límite de la sucesión dada.

Por ejemplo, la convergencia en los espacios métricos considerados en los casos 1 y 2 significa una convergencia ordinaria de las sucesiones numéricas (reales o complejas, respectivamente). En el ejemplo 3 la convergencia de la sucesión está representada por la convergencia de una sucesión de puntos en el espacio n-dimensional con la que ya nos hemos encontrado anteriormente (véase el p. 18.1). Es un espacio métrico de las funciones definidas y acotadas en cierto conjunto, donde la distancia entre las funciones se determina según la fórmula (57.1), la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ converge hacia la función φ, si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in X} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| = 0,$$

es decir, si la sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en el conjunto X hacia la función φ (véase el t. 1; p. 36.2).

Por fin, el ejemplo 5 proporciona el tipo de convergencia de las funciones en el sentido de cierta métrica integral. Cuando $n = 1$, la convergencia es similar a la que se ha encontrado en el p. 55.2 (lema 2) y en el p. 56.7 (corolario del lema 4).

Ejercicio 1. El conjunto E de un espacio métrico X se llama acotado, si

$$d(E) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in E, y\in E} \rho(x, y) < +\infty,$$

la magnitud $d(E)$ se denomina diámetro del conjunto E. Demuéstrese que toda sucesión convergente de un espacio métrico es acotada.

Definición 4. *La sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico X se llama fundamental, si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe tal número n_ε que se cumple la desigualdad*

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$.

Lema 1. *Si la sucesión $\{x_n\}$ converge, es fundamental.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. En este caso para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe tal número n_ε que para todos los números $n \geqslant n_\varepsilon$ se verifica la desigualdad

$$\rho(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente, si $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$, entonces

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \ \square$$

Definición 5. *Un espacio métrico se llama completo, si toda sucesión fundamental de sus puntos converge hacia un punto que pertenece al mismo espacio.*

Es evidente que un espacio métrico que es isométrico respecto del espacio completo es también un espacio métrico completo.

Ejemplos. 6. Los espacios métricos de los números reales y complejos representan los ejemplos de espacios métricos completos. El espacio euclídeo n-dimensional R^n (véase el p. 18.1) es también completo. Los números racionales ofrecen un ejemplo de espacio métrico incompleto.

7. Consideraremos un espacio métrico de las funciones definidas y acotadas en el conjunto X, donde la distancia entre las funciones se determina mediante la fórmula (57.1). En este espacio la sucesión de funciones φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, es fundamental, siempre que para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que se verifica la desigualdad

$$\rho(\varphi_n, \varphi_m) = \sup_X |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$$

cualesquiera que sean los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant m_\varepsilon$, es decir, si la sucesión $\{\varphi_n\}$ satisface el criterio de Cauchy sobre la convergencia uniforme de la sucesión en el conjunto X (véase el p. 36.2). En vista de este criterio, la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en el conjunto X hacia cierta función φ, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |\varphi(x) - \varphi_n(x)| = 0. \tag{57.4}$$

Mostremos que esta función φ es también acotada y, por lo tanto, pertenece al espacio en consideración. En efecto, en virtud de (57.4), para todo número $\varepsilon > 0$, en particular para $\varepsilon = 1$, existe un número n_1 tal que se verifica la desigualdad

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < 1;$$

cualesquiera que sean $n \geqslant n_1$ y $x \in E$, razón por la cual

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi_{n_1}(x)| + |\varphi_{n_1}(x)| < 1 + \sup_X |\varphi_{n_1}(x)|.$$

Puesto que la función φ_{n_1} está acotada, lo es también la función φ. Hemos demostrado de este modo que el espacio de funciones que se considera es completo.

Se puede probar que el espacio métrico de funciones consideradas en el ejemplo 5 no es completo.

Para cualquier espacio métrico X se introduce de modo natural el concepto de ε-entorno $U(x, \varepsilon)$ del punto $x \in X$, $\varepsilon > 0$:

$$U(x, \varepsilon) = \{y : y \in R, \quad \rho(y, x) < \varepsilon\},$$

y luego textualmente, al igual que para el espacio n-dimensional R^n (véase el t. 1, p. 18.2), se introducen los conceptos de punto adherente de un conjunto, de puntos límites y aislado, de puntos interior y de frontera, el concepto de clausura $\bar{A}$ del conjunto A, el de conjuntos cerrado y abierto.

Para los espacios métricos arbitrarios son válidos también los lemas 3, 4, 5 y 6, demostrados en el p. 18.2, para los conjuntos abiertos y cerrados de los espacios euclídeos n-dimensionales, con la particularidad de que las demostraciones aducidas en el p. 18.2, quedan en vigor también en el caso general.

Definición 6. *El conjunto A de un espacio métrico X se llama denso en el espacio X, si la clausura $\bar{A}$ del conjunto A coincide con el espacio X: $\bar{A} = X$.*

Por ejemplo, un conjunto de los números racionales es denso en el conjunto de números reales.

Es evidente que la propiedad de un conjunto de ser denso en el espacio se conserva cuando se realizan las aplicaciones isométricas de este espacio.

Definición 7. *El espacio métrico completo X^* se llama completación del espacio métrico X, si en el espacio X^* existe un subconjunto X', denso en X^* e isométrico respecto del espacio X.*

Por ejemplo, el conjunto de números reales es una completación del conjunto de números racionales.

A veces resulta cómodo "identificar" los elementos de los espacios X y X' que corresponden uno al otro en la correspondencia isométrica de los espacios X y X', y considerar, de este modo, el conjunto X como un subconjunto de su completación X^*. Explicaremos más detalladamente la operación de identificación de los elementos de dos espacios isométricos X e Y. Sean X e Y^* unos espacios métricos, $Y \subset Y^*$, y f: $X \to Y$, la aplicación isométrica. Examinemos el conjunto $X^* = X \cup (Y^* \setminus Y)$, que se obtiene del espacio X por adición a este último del conjunto $Y^* \setminus Y$. De este modo: $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Definamos para los puntos $x \in X^*$ e $y \in X^*$ el concepto de distancia $\rho_{X^*}(x, y)$. Introduzcamos, con el fin de comodidad, la aplicación F: $X^* \to Y^*$, que se da por la fórmula

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x \in X, \\ x, & \text{si} \quad x \in X^* \setminus X. \end{cases}$$

Está claro que F es una aplicación biunívoca (biyección) del conjunto X^* sobre Y^*.

Ahora, para cualesquiera $x \in X^*$ e $y \in Y^*$ pongamos

$$\rho_{X^*}(x, y) = \rho(F(x), F(y)).$$

Es fácil comprobar que la función $\rho_{X^*}(x, y)$, definida del modo indicado, satisface tres axiomas de distancia y, por lo tanto, X^* es un espacio métrico, mientras que la aplicación F aplica isométricamente el espacio X^* sobre Y^*, con la particularidad de que, realizándose dicha aplicación, el conjunto X se convierte en Y. Por eso, si el conjunto Y fue denso en el espacio Y^*, entonces el conjunto X será denso en el espacio X^*.

Cuando decimos "identifiquemos en el espacio Y^* el conjunto X con el espacio Y, que es isométrico respecto de X", sobreentendemos el estudio del espacio X^* en lugar de Y^*.

Mostremos que para cualquier espacio métrico incompleto existe su completación, es decir, probemos que todo espacio métrico incompleto es un subconjunto denso en cierto espacio métrico completo.

Teorema 1. *Para todo espacio métrico existe su completación.*

DEMOSTRACIÓN.

I. ESTRUCTURA DE LA COMPLETACIÓN X^* DEL ESPACIO MÉTRICO DADO X.

Dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de elementos del espacio X se llamarán *equivalentes*, si

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0. \tag{57.5}$$

La equivalencia entre dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ se designa mediante el símbolo $\{x_n\} \sim \{y_n\}$; la equivalencia posee las siguientes propiedades:

1°. Cualquier sucesión $\{x_n\}$ es equivalente a sí misma: $\{x_n\} \sim \{x_n\}$.

2°. Si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, entonces $\{y_n\} \sim \{x_n\}$.

3°. Si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ e $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, entonces $\{x_n\} \sim \{z_n\}$.

Para nosotros serán de interés sólo las sucesiones fundamentales del espacio X. El conjunto de éstas se descompone en las clases disjuntas de las sucesiones equivalentes entre sí. Designemos estas clases por $x^*, y^*, z^*, \ldots$, y su totalidad mediante X^*. Si una sucesión fundamental $\{x_n\}$ está contenida en la clase x^*, esto se escribirá, como siempre, de la manera siguiente: $\{x_n\} \in x^*$.

II. DETERMINACIÓN DE LA DISTANCIA $\rho^*(x^*, y^*)$ EN X^*.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones fundamentales del espacio métrico X. La sucesión numérica $\rho(x_n, y_n)$ será también fundamental, es decir, satisfará la condición de Cauchy (véase el p. 4.7). En efecto, para cualesquiera números n y m

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$$

y, por lo tanto, en virtud de la simetría de los índices n y m,

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \tag{57.6}$$

De lo que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son fundamentales se deduce que para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número n_ε tal que se cumplen las desigualdades

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{57.7}$$

cualesquiera que sean los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$. De (57.6) y (57.7), para $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$, obtenemos

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, la sucesión numérica $\{\rho(x_n, y_n)\}$ es fundamental, es decir, satisface la condición de Cauchy y, por ende, es convergente.

Sea $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$. Pongamos, por definición, $\rho^*(x^*, y^*) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n)$. En virtud de lo demostrado, el límite mencionado existe. Mostremos que la función $\rho^*(x^*, y^*)$, definida de esta forma, no depende de la elección de las sucesiones fundamentales $\{x_n\} \in x^*$ e $\{y_n\} \in y^*$ y satisface los axiomas de distancia.

Sea $\{x_n\} \in x^*$, $\{x_n'\} \in x^*$, $\{y_n'\} \in y^*$, $\{y_n'\} \in y^*$. En este caso

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_n') + \rho(x_n', y_n') + \rho(y_n, y_n')$$

y

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n', y_n')| \leqslant \rho(x_n, x_n') + \rho(y_n, y_n').$$

Por ser equivalentes las sucesiones $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$, y, respectivamente, $\{y_n\}$, $\{y_n'\}$, obtendremos (véase (57.5)):

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x_n') = \lim_{n \to \infty} \rho(y_n, y_n') = 0$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n', y_n').$$

III. COMPROBACIÓN DE LOS AXIOMAS DE DISTANCIA PARA $\rho^*(x^*, y^*)$.

Sea $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$. Si es que $\rho^*(x^*, y^*) = 0$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, es decir, las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son equivalentes lo que implica la coincidencia de los elementos x^* e y^*: $x^* = y^*$. De la igualdad $\rho(x_n, y_n) = \rho(y_n, x_n)$, pasando al límite para $n \to \infty$, obtendremos $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^*(y^*, x^*)$, y de la desigualdad $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$ obtenemos

$$\rho^*(x^*, y^*) \leqslant \rho^*(x^*, z^*) + \rho^*(z^*, y^*).$$

Así pues, X^* es un espacio métrico.

IV. CONSTRUCCIÓN DE UN SUBESPACIO DEL ESPACIO X^*, ISOMÉTRICO RESPECTO DEL ESPACIO X.

Sea $x \in X$. La sucesión $x_n = x$, $n = 1, 2, \ldots$, es obviamente fundamental. Pongamos en correspondencia a todo $x \in X$ un punto $x^* \in X^*$ tal que $\{x\} \in x^*$. Si, asumida la correspondencia citada, al punto x le corresponde el punto x^*, y al punto y, el punto y^*, entonces, evidentemente, para $x \neq y$ tendremos $x^* \neq y^*$, con la particularidad de que $\rho^*(x^*, y^*) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x, y) = \rho(x, y)$, es decir, dicha correspondencia realiza una correspondencia isométrica biunívoca entre el espacio X y un cierto subconjunto X' del espacio X^*.

El punto x^* del espacio X^*, correspondiente al punto $x \in X$ en la correspondencia analizada lo denotaremos también, para simplificar, mediante x, y el espacio X', mediante X. Se puede considerar que los puntos correspondientes de los espacios X y X' quedan simplemente identificados (véase la observación que sigue la definición 7). En estas designaciones se tiene una inclusión isométrica

$$X \subset X^*.$$

V. DEMOSTRACIÓN DE LA DENSIDAD DE X EN X^*.

Probemos que todo punto x^* del espacio X^* es un punto de adherencia del conjunto X. Con este fin basta mostrar que para cualquier punto $x^* \in X^*$ existe una sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, que converge hacia x^*.

Sean $x^* \in X^*$ y $\{x_n\} \in x^*$, $x_n \in X$. Un punto del espacio X^*, que contiene una sucesión fundamental cuyos términos son todos iguales a un mismo punto x_n, lo designaremos, de acuerdo con el convenio asumido anteriormente, también mediante x_n. Demostremos que la sucesión $\{x_n\}$, $x_n \in X^*$, converge al punto $x^* \in X^*$. Fijemos el número $\varepsilon > 0$. De lo que la sucesión $\{x_n\}$ es fundamental se deduce que existe un número n_ε tal que se cumple la desigualdad

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{57.8}$$

cualesquiera que sean los números $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$. Observando que según la definición de distancia en X^*

$$\rho^*(x^*, x_n) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_m, x_n),$$

de la desigualdad (57.8) obtenemos, para $n \geqslant n_\varepsilon$,

$$\rho^*(x^*, x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x^*, x_n) = 0,$$

lo que implica que x^* es un punto de adherencia del conjunto X. Así pues, $\bar{X} = X^*$.

VI. DEMOSTRACIÓN DE LA COMPLETITUD DEL ESPACIO X^*.

Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión fundamental de puntos del espacio X^*, $x_n \in X$ y $\rho^*(x_n^*, x_n) < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Tales puntos x_n existen en vista de que X es denso en X^*.

La sucesión $\{x_n\}$ es fundamental. Efectivamente, notando que

$$\rho^*(x_n, x_m) \leqslant \rho^*(x_n, x_n^*) + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, x_m) < \frac{1}{n} + \rho^*(x_n^*, x_m^*) + \frac{1}{m},$$

elijamos el número n_ε de modo tal que sea

$$\rho^*(x_n^*, x_m^*) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$$

para cualesquiera $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$. Entonces

$$\rho(x_n, x_m) = \rho^*(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \tag{57.9}$$

para cualesquiera $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ es fundamental.

Denotemos mediante x^* la clase de sucesiones equivalentes a la que pertenece la sucesión $\{x_n\}$. Es obvio que

$$\rho^*(x^*, x_n^*) \leqslant \rho^*(x^*, x_n) + \rho^*(x_n, x_n^*) = \rho^*(x^*, x_n) + \frac{1}{n}.$$

Pero, de (57.9) obtenemos, cuando $m \to \infty$ y $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\rho^*(x^*; x_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x^*, x_n) = 0,$$

por lo cual también

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x^*, x_n^*) = 0.$$

De este modo, hemos demostrado que la sucesión fundamental dada $\{x_n^*\}$ converge en X^*. La completitud de X^* queda demostrada. □

Ejercicio 2. Demuéstrese que la completación de un espacio métrico es única salvo unos espacios isométricos.

Definición 8. *Una función numérica f (de valores reales o complejos), definida en el conjunto A del espacio métrico X, se llama continua en el punto $x_0 \in A$ (o, más detalladamente, continua respecto del conjunto A en el punto $x_0 \in A$), si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que se cumple la desigualdad*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

cualesquiera que sean los puntos $x \in U(x_0, \delta) \cap A$.

Definición 9. *Una función f, definida en el conjunto A del espacio métrico X, se denomina continua en el conjunto $B \subset A$, si es continua respecto del conjunto A en todo punto $x_0 \in B$.*

Ejercicio 3. Enúnciese, con ayuda del concepto de sucesión, la definición de la continuidad en el punto x_0 de la función f, definida en el conjunto $A \ni x_0$, y demuéstrese que esta definición es equivalente a la definición 8.

Al igual que en el p. 36.4 (véase el t. 1), se demuestra textualmente que el límite de una sucesión de funciones continuas convergente uniformemente en el espacio métrico es una función continua.

Ejemplo. Consideremos un espacio métrico de funciones f, acotadas y continuas en cierto *espacio métrico X*, la distancia entre las cuales se determina según la fórmula (57.1). Por cuanto el carácter fundamental de la sucesión $\{f_n\}$ en el sentido de la métrica (57.1) significa que esta sucesión satisface la condición de Cauchy de convergencia uniforme en el conjunto X, entonces toda sucesión fundamental de las funciones continuas $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia cierta función f. Esta función f es, según lo dicho anteriormente, continua y, de acuerdo con lo demostrado más arriba en este punto, acotada en X, es decir, pertenece al espacio de funciones que se considera.

De este modo, un *espacio de funciones acotadas y continuas en el espacio métrico X es espacio métrico completo.* Es, evidentemente, un subespacio de todas las funciones acotadas en X cuya distancia se ha determinado según la fórmula (57.1).

En particular, ya que toda función continua en cierto compacto A, dispuesto en el espacio euclídeo n-dimensional R^n, está acotada (véase el p. 19.4), entonces el espacio de funciones continuas en el compacto A con la distancia definida según la fórmula (57.1) es completo.

Definición 10. *Sea X un espacio métrico. La función f, definida en un conjunto de pares ordenados (x, y), donde $x \in A$, $y \in B$, $A \subset X$, $B \subset X$, se llama continua en el punto (x_0, y_0), $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se verifica la desigualdad $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ cualesquiera que sean los pares (x, y) de tal género que $x \in U(x_0, \delta) \cap A$, $y \in U(y_0, \delta) \cap B$.*

Una función, continua en todo punto (x, y) de cierto conjunto de pares, se denomina continua en este conjunto.

Ejercicios. 4. Compruébense los axiomas de distancia para la función $\rho(\varphi, \psi)$ definida mediante la fórmula (57.3) para el espacio de funciones absolutamente integrables y continuas en todo el eje numérico.

5. Dése un ejemplo de sucesión de las funciones continuas que converge en cierto segmento en el sentido de la distancia (57.2), pero no converge en el mismo segmento en el sentido de convergencia en un punto (es decir, en el sentido de la definición 3, el p. 36.1).

6. Dése un ejemplo de sucesión que converge en cierto segmento en el sentido de convergencia en un punto, pero que no converge en el mismo segmento en el sentido de la distancia (57.2).

7. Demuéstrese que un espacio de las funciones continuas en el segmento $[a, b]$, la distancia entre las cuales se determina por la fórmula (57.2), no es completo.

57.2. ESPACIOS LINEALES

Definición 11. *Un conjunto* $X = \{x, y, z, \ldots\}$ *se llama espacio lineal real (o espacio vectorial sobre un campo de números reales), si:*

a todo par ordenado (x, y) *de elementos* $x \in X$ *e* $y \in X$ *se le ha puesto en correspondencia un elemento del espacio* X*, llamado suma de* x *e* y *y denotado por* $x + y$;

a todo elemento $x \in X$ *y a todo número real* λ *se les ha puesto en correspondencia el único elemento del espacio* X*, llamado producto de* λ *por* x *y denotado mediante* λx.

En este caso se cumplen los siguientes grupos de axiomas:

1. a) $x + y = y + x$ *para cualesquiera* $x \in X$ *e* $y \in X$;

b) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *para cualesquiera* $x \in X, y \in X$ *y* $z \in X$;

c) *en* X *existe un elemento, llamado nulo y denotado por* 0, *tal que* $x + 0 = x$ *para cualquier* $x \in X$;

d) *para todo* $x \in X$ *existe un elemento del conjunto* X*, llamado opuesto al elemento* x*, que se designa mediante* $-x$ *y es tal que* $x + (-x) = 0$.

2. a) $1x = x$ *para cualquier* $x \in X$;

b) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ *para todo* $x \in X$ *y cualesquiera números reales* λ *y* μ.

3. a) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ *para todo* $x \in X$ *y cualesquiera números reales* λ *y* μ;

b) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ *para cualesquiera* $x \in X, y \in Y$ *y cualquier número real* λ.

Para todo par de elementos $x \in X$ *e* $y \in Y$ el elemento $x + (-y)$ se llama diferencia de los elementos x e y, y se denota mediante $x - y$.

Si en la definición aducida de espacio lineal real se sustituyen todos los números reales por los complejos: $\lambda, \mu \in C$; se obtendrá, entonces, la definición del *espacio lineal complejo.*

Ejemplos. 1. El conjunto de todos los números reales (complejos) forma un espacio lineal real (complejo).

2. Sea X cierto conjunto. La totalidad $F(X)$ de todas las funciones $f: X \to R$ ($f: X \to C$, respectivamente), para la definición natural de su sumación y multiplicación por los números reales (complejos):

$$(f_1 + f_2)(x) \overset{\text{def}}{=} f_1(x) + f_2(x), \quad (\lambda f)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda(f(x)),$$
$$f_1 \in F(X), \quad f_2 \in F(X), \quad f \in F(X), \quad \lambda \in R \quad \text{o bien} \quad \lambda \in C,$$

será un espacio lineal real (complejo).

3. El conjunto de todos los polinomios de una variable con coeficientes reales (complejos) es un espacio real (complejo) lineal.

4. El conjunto de todos los polinomios de grados, no superiores a n natural, de una variable con los coeficientes reales (complejos) es un espacio lineal real (complejo).

5. Un espacio de toda clase de sucesiones numéricas $\{x_n\}$, $x_n \in R$ (o bien $x_n \in C$), $n \in N$, para la definición natural de la operación de su sumación y multiplicación por un número (véase el p. 4.9) es también espacio lineal.

Definición 12. *Un conjunto* X', *contenido en el espacio lineal* X *(real o complejo), se llama subespacio de este espacio, si todas las combinaciones lineales de elementos del conjunto* X' *se contienen en él.*

En otras palabras, el conjunto $X' \subset X$ es un subespacio del espacio X, si para cualesquiera dos elementos $x \in X'$, $y \in X'$ y cualesquiera números $\lambda \in R$, $\mu \in R$ ($\lambda \in C$, $\mu \in C$, respectivamente) tiene lugar la inclusión

$$\lambda x + \mu y \in X'.$$

Es evidente que el subespacio X' del espacio lineal X es, a su vez, un espacio lineal.

Si X es un espacio lineal y $x \in X$, entonces la totalidad de todos los elementos del espacio X del tipo λx, donde λ son números cualesquiera, sirve de ejemplo de subespacio del espacio X.

El conjunto de las funciones de valores reales y continuas en cierto conjunto $X \subset R^n$ es un subespacio del espacio de todas las funciones de valores reales, definidas en X.

Los elementos de los espacios lineales se llaman, comúnmente, *puntos* o *vectores.*

Definición 13. *Un sistema finito de vectores* $x_1, \ldots, x_n$ *del espacio lineal* X *(real o complejo) se llama linealmente dependiente, si existen tales números* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *(reales o complejos, respectivamente), no todos iguales a cero, que*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

En el caso contrario, es decir, cuando de la igualdad citada se deduce que todos los números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *son nulos, el sistema de vectores* $x_1, \ldots, x_n$ *se denomina linealmente independiente.*

Definición 14. *Un sistema de vectores* x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ *(* $\mathfrak{A}$ *es un conjunto de índices), del espacio lineal* X *se llama linealmente independiente, si cualquiera de sus subsistemas finitos* $x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ *es linealmente independiente.*

Ejercicios. 8. Demuéstrese que si el sistema x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, es linealmente independiente, entonces $x_\alpha \neq 0$ para cualesquiera $\alpha \in \mathfrak{A}$.

9. Demuéstrese que para que un sistema finito de vectores sea linealmente dependiente, es necesario y suficiente que por lo menos uno de los vectores sea una combinación lineal de los demás.

Definición 15. *Sea dado un conjunto* $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *de vectores del espacio lineal* X*. La totalidad de toda clase de combinaciones lineales finitas de los elementos de este conjunto, es decir, la totalidad de toda clase de vectores del tipo*

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_k x_{\alpha_k},$$

donde $x_{\alpha_j} \in \{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *y* λ_j *son los números,* $j = 1, 2, \ldots, k$*, lleva el nombre de cápsula lineal del conjunto* $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Definición 16. *Si en el espacio X (real o complejo) se tiene un sistema de n vectores linealmente independientes cuya cápsula lineal está representada por el espacio X, entonces dicho espacio se denomina n-dimensional y se denota por R^n, mientras que todo sistema ordenado de n vectores linealmente independientes cuya cápsula lineal está representada por el espacio R^n, se llama base del espacio.*

En otras palabras, los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son la base del espacio R^n, si:

1) los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son linealmente independientes;

2) para todo $x \in R^n$ existen tales números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ que $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$.

Los elementos del espacio R^n se denominan vectores n-dimensionales (reales o complejos, respectivamente).

Cualquier espacio n-dimensional se llama espacio de dimensión finita.

Ejercicios. 10. Demuéstrese que en un espacio n-dimensional cualquier sistema de vectores linealmente independientes, cuya cápsula lineal está representada por todo el espacio, se compone de n vectores.

11. Demuéstrese que todo sistema de n vectores linealmente independientes en un espacio n-dimensional es la base de éste.

Un ejemplo de espacio real n-dimensional lo constituye el espacio vectorial aritmético n-dimensional (véase el p. 18.4).

Por analogía con este último espacio puede construirse un espacio aritmético complejo n-dimensional C^n. Se denominan puntos de este espacio los sistemas ordenados de n números complejos: $x = (x_1, \ldots, x_n)\, x_j \in C, j = 1, 2, \ldots, n$. En este caso, si $x \in C^n$, $\lambda \in C$, se tiene

$$\lambda x \overset{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

y para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^n$

$$x + y \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

La base en este espacio la constituyen los vectores $e_i = \{\delta^i_1, \ldots, \delta^i_n\}$, donde δ^i_j es el así llamado *símbolo de Kronecker* *)

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Es evidente que $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Como otro ejemplo de espacio lineal de dimensión finita interviene el espacio $\mathcal{P}^n$ de los polinomios de grados no superiores a n natural. Es $(n + 1)$-dimensional: su dimensión es igual al número de coeficientes que tienen los polinomios en consideración.

Definición 17. *La aplicación f de un espacio lineal X en otro espacio lineal Y se denomina aplicación lineal (o, que es lo mismo, operador lineal), si para cualesquiera dos elementos y cualesquiera números λ y μ se verifica la igualdad*

*) L. Kronecker (1823 — 1891), matemático alemán.

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

El conjunto de todos los operadores lineales $f: X \to Y$, que aplican el espacio lineal X en el espacio lineal Y, se designará mediante $\mathcal{L}(X, Y)$. Por comprobación inmediata nos convencemos con facilidad de que el conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$, para la definición natural de sumación de sus elementos y multiplicación de ellos por un número, es decir, para la definición de estas operaciones según las fórmulas

$$(f_1 + f_2)(x) \overset{\text{def}}{=} f_1(x) + f_2(x), \quad f_1 \in \mathcal{L}(X, Y), \quad f_2 \in \mathcal{L}(X, Y),$$

$$(\lambda f)(x) \overset{\text{def}}{=} \lambda(f(x)), \quad f \in \mathcal{L}(X, Y), \quad \lambda \in \boldsymbol{R} \text{ o } \lambda \in \boldsymbol{C}$$

$$x \in X,$$

forma también un espacio lineal (real, si los espacios X e Y eran espacios lineales reales, o complejo, si X e Y eran complejos).

Definición 18. *Si $f: X \to Y$ e Y es un espacio lineal, entonces el conjunto $\{x: f(x) = 0\} \subset X$ se llama núcleo de la aplicación f y se denota mediante $\ker f$* *):

$$\ker f \overset{\text{def}}{=} \{x: f(x) = 0\}.$$

Lema 2. *Para que la aplicación lineal $f: X \to Y$ de un espacio lineal X en otro espacio lineal Y sea una aplicación biunívoca de X en Y, es decir, sea una inyección, es necesario y suficiente que su núcleo se componga sólo en un elemento nulo:*

$$\ker f = 0.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Evidentemente, cualquier operador lineal f hace pasar cero en cero, pues para todo $x \in X$ tenemos: $f(0) = f(0x) = 0f(x) = 0$. Por eso, si f es una inyección, no existe $x \neq 0$ tal que sea $f(x) = 0$. Esto precisamente es un testimonio de que $\ker f = 0$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Sea $\ker f = 0$ y $f(x) = f(y)$. Entonces, por ser lineal la aplicación f, se tiene $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, es decir, $x - y \in \ker f$ y, como $\ker f = 0$, se tiene $x - y = 0$. Por consiguiente $x = y$. Esto significa que f es una inyección. □

Como ejemplos de aplicaciones lineales biunívocas sirven las transformaciones directa e inversa de Fourier en los correspondientes espacios lineales de funciones (véanse los lemas 2 y 3 en el p. 56.5).

Definición 19. *Sean X e Y unos espacios lineales. La aplicación lineal biunívoca del espacio X sobre el espacio Y se denomina aplicación isomorfa o isomorfismo de los espacios lineales.*

Si para los espacios lineales X e Y existe una aplicación isomorfa de X sobre Y, se denominan isomorfos.

Dos espacios isomorfos pueden diferenciarse sólo en la naturaleza de sus elementos y no en las propiedades del espacio lineal en sí, por eso en lo que sigue los espacios lineales isomorfos no se distinguirán.

*) De la palabra inglés kernel (núcleo).

Ejercicio 12. Demuéstrese que todos los espacios lineales n-dimensionales son isomorfos entre sí.

Definición 20. *Un espacio lineal que no es de dimensión finita se llama espacio de dimensión infinita.*

Es obvio que un espacio lineal es de dimensión infinita cuando, y sólo cuando, no tiene una base finita.

Un ejemplo del espacio de dimensión infinita lo representa un espacio lineal de todos los polinomios de una sola variable. En efecto, este espacio está privado, a ciencia cierta, de base finita: cualquier combinación lineal del sistema finito dado de polinomios es un polinomio de grado no superior al del polinomio mayor del sistema citado, a consecuencia de lo cual los polinomios de grados superiores no pueden obtenerse por el procedimiento mencionado.

La tentativa de generalizar el concepto de base en el caso de los espacios de dimensión infinita lleva a sumas infinitas, es decir, a las series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Para que haya sentido de hablar de su suma en el espacio X, en éste ha de ser definido el concepto de convergencia de las sucesiones. El punto que sigue está dedicado a la consideración de uno de los espacios de este género.

57.3. ESPACIOS NORMALIZADOS Y SEMINORMALIZADOS

Definición 21. *Un espacio lineal X (real o complejo) se denomina normalizado, si en el conjunto de sus puntos está definida una función real, llamada norma y denotada con $\|x\|_X$, o, en la forma más breve, $\|x\|$, $x \in X$, y que posee las siguientes propiedades:*

1°) $\|x\| \geqslant 0$, $x \in X$;
2°) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $x \in X$, λ *es un número;*
3°) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $x \in X$, $y \in X$;
4°) *si* $\|x\| = 0$, *se tiene* $x = 0$.

Indiquemos que de la propiedad 2° se deduce que si $x = 0$, entonces $\|x\| = 0$. En efecto, fijando un elemento $x \in X$ arbitrario, obtendremos

$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0\|x\| = 0.$$

Definición 22. *Si en el conjunto de puntos de un espacio lineal X está definida una función real $\|x\|$, $x \in X$, que satisface sólo las propiedades* 1°, 2°, 3°, *entonces el espacio X se llama seminormalizado y la función $\|x\|$, seminorma.*

La propiedad 2° de la norma (seminorma) se llama *homogeneidad* de la norma (seminorma) y la propiedad 3°, *desigualdad triangular.*

Demos a conocer que todo subconjunto de un espacio lineal seminormalizado (en particular, normalizado) que representa un subespacio del espacio lineal es, a su vez, un espacio lineal seminormalizado (normalizado, respectivamente).

Ejercicio 13. Aclárese si serán ¿norma? ¿seminorma? ¿para qué funciones? ¿para qué n? las expresiones $\sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |f^{(n)}t|$, $\int_a^b |f^{(n)}(t)| \, dt$.

57.4. EJEMPLOS DE ESPACIOS NORMALIZADOS Y SEMINORMALIZADOS

1. El conjunto de números reales y el de números complejos, si se toma por norma en ellos el valor absoluto de los números, forman espacios lineales normalizados.

2. Si en un espacio n-dimensional aritmético real R^n la norma del vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ se define como su longitud (véase el p. 18.4)

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

entonces R^n será un espacio lineal normalizado.

3. Un espacio n-dimensional aritmético complejo C^n (véase el p. 57.2) será normalizado, si ponemos

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n.$$

4. En un espacio n-dimensional aritmético real R^n puede introducirse no sólo la norma coincidente con la longitud $|x|$ de sus elementos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Por ejemplo, pongamos

$$\|x\|_p \overset{\text{def}}{=} (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|.$$

Es evidente que la longitud del vector coincide con la norma $\|x\|_2$. Comprobemos el cumplimiento de los axiomas de las normas para $\|x\|_r$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$. Para $r = 1$, según la propiedad del valor absoluto de números se tiene

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Apliquemos la desigualdad de Minkowski para el caso en que $1 < p < +\infty$ (véase el p. 35.8*):

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Para $\|x\|_\infty$ tenemos

$$\|x + y\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i + y_i| \leqslant \max_{i=1,2,\ldots,n} (|x_i| + |y_i|) \leqslant \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i| + \max_{i=1,2,\ldots,n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Las demás propiedades de las normas para $\|x\|_r$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, se comprueban de una manera más fácil.

Ejercicio 14. Demuéstrese que $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p$, $x \in R^n$.

Definición 23. *Dos normas $\|x\|$ y $\|x\|^*$ en un espacio lineal normalizado X se llaman equivalentes, si existen unas constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tales, que para cualesquiera $x \in X$ se verifica la desigualdad*

$$c_1\|x\| \leqslant \|x\|^* \leqslant c_2\|x\|.$$

Teorema 2. *En un espacio lineal de dimensión finita todas las normas son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio lineal de dimensión finita. Por consiguiente, existe en él una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ compuesta de cierto número $n \in N$ de sus elementos y para cualquier $x \in X$ se tiene una, y sólo una, base

$$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n.$$

Sea $\|x\|$ una norma en el espacio X. Mostremos que es equivalente a la norma cuadrática

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Por cuanto dos normas, cada una de las cuales es equivalente a la tercera, son también equivalentes entre sí, de esto se deducirá que todas las normas de cualquier espacio de dimensión finita son equivalentes.

Hemos de notar, ante todo, que $c_1 \overset{\text{def}}{=} \|e_1\| + \ldots + \|e_n\| > 0$, pues para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, se verifica la desigualdad $e_k \neq 0$, y, por ende, $\|e_k\| > 0$. Luego, de la desigualdad evidente

$$|x_k| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|_2, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

obtenemos, sirviéndose de la propiedad de la norma, la desigualdad

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \ldots + x_ne_n\| \leqslant |x_1|\,\|e_1\| + \ldots + |x_n|\,\|e_n\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|e_1\| + \ldots + \|e_n\|)\|x\|_2 = c_1\|x\|_2.$$

Así pues, existe tal $c_1 > 0$ que para todo $x \in X$ se tiene

$$\|x\| \leqslant c_1\|x\|_2.$$

Demostremos ahora que existe tal $c_2 > 0$ que

$$\|x\| \geqslant c_2\|x\|_2.$$

Por cuanto, siendo $x = 0$, esta desigualdad se cumple, evidentemente, para cualquier $c_2 > 0$, será suficiente demostrarla sólo para el caso en que $x \neq 0$. Elijamos una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en el espacio X de manera tal que se componga de los vectores unidad en el sentido de la norma cuadrática

$$\|e_1\|_2 = \ldots = \|e_n\|_2 = 1.$$

Esto es siempre factible, puesto que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base del espacio lineal y $\|\cdot\|$ es una norma en dicho espacio, entonces

$$\left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}$$

será también su base, con la particularidad de que la norma de todos los elementos suyos será igual a 1:

$$\left\|\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\| = \frac{1}{\|e_k\|}\|e_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

El espacio X provisto de la base elegida puede considerarse como un espacio n-dimensional aritmético (véase el p. 18.4). Para esto es suficiente asignar a todo su vector $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ un surtido ordenado de n números $(x_1, \ldots, x_n)$ que representan sus coordenadas respecto de la base citada. En este caso la norma cuadrática $\|x\|_2$ será la longitud del vector x:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |x|.$$

La esfera unitaria $S^{n-1} = \{x: x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$ de este espacio es, como se sabe (véase el p. 18.3 y 18.4), un compacto. Consideraremos en dicha esfera una función

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \|x\|.$$

De la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| = |\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\|^{*)} \leqslant$$
$$\leqslant c_1\|x - y\|_2 = c_1|x - y|, \quad x \in X, \quad y \in X,$$

se infiere que dicha función es continua en todo el espacio X y, por lo tanto, en la esfera S^{n-1}.

Por cuanto para cualquier punto $x \in S^{n-1}$ tenemos $\|x\|_2 = 1$, entonces $x \neq 0$, por lo cual, en virtud de la propiedad 4° de la norma, la función f satisface en la esfera S^{n-1} la desigualdad $f(x) = \|x\| > 0$. De acuerdo con el teorema de Weierstrass, toda función continua en un compacto alcanza en éste su valor mínimo. Supongamos que la función f admite su mínimo en la esfera S^{n-1} en el punto $x_0 \in S^{n-1}$. Pongamos

$$c_2 \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in S^{n-1}} f(x) = f(x_0) > 0.$$

En este caso para cualquier $x \in S^{n-1}$ tendremos:

$$\|x\| = f(x) \geqslant f(x_0) = c_2.$$

Ahora, al observar que para todo $x \in X$, $x \neq 0$, el punto $\dfrac{x}{\|x\|_2}$ se dispone en la esfera S^{n-1}:

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_2 = \frac{1}{\|x\|_2}\|x\|_2 = 1$$

---

*) Hemos aprovechado aquí la desigualdad $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$. Es válida para cualesquiera elementos de un espacio seminormalizado y se deduce fácilmente de la propiedad 3° de la seminorma en la definición 21 (véase más abajo el lema 4 en el p. 57.5).

y, por lo tanto, para él se verifica $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geqslant c_2$, obtendremos

$$\|x\| = \left\| \|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_2} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \|x\|_2 \geqslant c_2 \|x\|_2,$$

es decir,

$$\|x\| \geqslant c_2 \|x\|_2, \quad x \in X, x \neq 0.$$

La equivalencia de las normas $\|x\|$ y $\|x\|_2$ queda demostrada. □

5. Sea nuevamente $1 \leqslant p < +\infty$. Consideremos un subespacio lineal de todas las sucesiones $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_n \in R$ (o bien $x_n \in C$), compuesto de tales sucesiones, para las cuales

$$\|x\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < +\infty. \tag{57.10}$$

La función $\|x\|_p$ es una norma, lo que se comprueba por analogía con el caso finito (véase el ejemplo 4), puesto que, en particular, la desigualdad de Minkowski es lícita también para las sumas infinitas.

Cuando todos los elementos de las sucesiones en consideración son números reales, su espacio con la norma (57.10) se denota con l_p.

6. En el p. 41.6 para el operador lineal $A: R^n \to R^m$ se ha introducido la norma según la fórmula (véase 41.41))

$$\|A\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Ax|, \quad x \in R^n.$$

Es realmente una norma, en el sentido de la definición del p. 57.3, en el espacio lineal $\mathscr{L}(R^n, R^m)$, lo que se deducirá de los razonamientos a seguir.

Supongamos que X e Y son espacios normalizados lineales arbitrarios y $A: X \to Y$ es un operador lineal. Pongamos

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\|, \tag{57.11}$$

donde $\|x\| = \|x\|_X$ y $\|Ax\| = \|Ax\|_Y$.

Cuando los espacios lineales X e Y se eligen arbitrariamente, puede suceder que la cota superior $\|A\|$, determinada por la igualdad (57.11), no será finita para todo operador lineal $A: X \to Y$.

Sea $\mathscr{L}(X, Y)$, como siempre (véase el p. 57.2), un conjunto de todos los operadores lineales A que aplican el espacio X en el Y y sea $\mathscr{L}_c(X, Y)$ un conjunto de aquellos de los operadores citados, para los cuales $\|A\| < +\infty$. Probemos que $\mathscr{L}_c(X, Y)$ es también un espacio lineal y $\|A\|$, la norma en él. Si $A \in \mathscr{L}_c(X, Y)$ y $B \in \mathscr{L}_c(X, Y)$, entonces

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A + B)x\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax + Bx\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| < +\infty,$$

y, por lo tanto, $A + B \in \mathscr{L}_c(X, Y)$. Para cualquier $\lambda \in R$ (o bien $\lambda \in C$, en el caso de espacios complejos)

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\lambda| \, \|Ax\| =$$

$$= |\lambda| \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = |\lambda| \, \|A\| < +\infty$$

y, por consiguiente, $\lambda A \in \mathscr{L}_c(X, Y)$. De este modo $\mathscr{L}_c(X, Y)$ de hecho es un espacio lineal.

Luego, es evidente que de (57.11) proviene inmediatamente que $\|A\| > 0$. Además, si $\|A\| = 0$, es decir, si $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = 0$, entonces para todo x tal que $\|x\| < 1$ tiene lugar la igualdad $\|Ax\| = 0$, y, por lo tanto, también $Ax = 0$. Mas, en este caso, en general, para todo $x \in X$ tenemos también $Ax = 0$. En efecto, si x es un elemento del espacio X tal que $\|x\| > 1$, entonces, a ciencia cierta, $x \neq 0$, quiere decir,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1.$$

Por eso, en virtud de lo demostrado, $A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$. De aquí $\frac{1}{\|x\|} Ax = 0$, y, por ende, $Ax = 0$, cualquiera que sea $x \in X$. Esto significa que $A = 0$. Así pues, $\|A\|$ es realmente una norma en el espacio $\mathscr{L}_c(X, Y)$.

Si el valor de $\|A\|$, definido por la fórmula (57.11), es infinito: $\|A\| = +\infty$, diremos que la norma del operador A es infinita.

La norma $\|A\|$ (tanto finita como infinita) puede obtenerse también por un método un tanto diferente. A saber, resulta que

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in X. \tag{57.12}$$

Para demostrar esta fórmula indiquemos que

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|. \tag{57.13}$$

Efectivamente, por una parte es evidente que

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|,$$

pues, al aumentar un conjunto numérico, su cota superior sólo puede crecer. Por otra parte, para cualquier elemento $x \in X$, tal que $0 < \|x\| \leqslant 1$, pongamos $y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{\|x\|}$; entonces $\|y\| = 1$ y $\|Ay\| = \frac{1}{\|x\|} \|Ax\| \geqslant \|Ax\|$. De aquí

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\|.$$

De las desigualdades obtenidas se deduce precisamente la igualdad (57.13).

Ahora tenemos:

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|y\| = 1} \|Ay\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|Ay\| = \|A\|,$$

es decir, la fórmula (57.12) queda también demostrada. De esta fórmula se deduce con toda la evidencia que para cualquier $x \in X$, $x \neq 0$,

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leqslant \|A\|,$$

y, por consiguiente, para cualquier $x \in X$ tiene lugar la desigualdad.

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|,$$

donde $\|x\|$ es la norma en el espacio X, $\|Ax\|$, la norma en el espacio Y, y $\|A\|$, la norma en el espacio $\mathscr{L}(X, Y)$. Esta igualdad es, obviamente, una generalización de la desigualdad (41.42) del p. 41.6.

Existe un enfoque más al concepto de norma de un operador, relacionado con el concepto de los así llamados operadores acotados.

Definición 24. *Un operador $A: X \to Y$ se denomina acotado, si existe una constante $c > 0$ tal que para todos los elementos $x \in X$ se verifica la desigualdad.*

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\|.$$

Si A es un operador lineal acotado, todas las constantes $c > 0$ que poseen la propiedad citada están acotadas inferiormente por cero, por lo cual su conjunto cuenta con una cota inferior finita no negativa. Designémosla mediante c_0:

$$c_0 = \inf\{c\colon \|Ax\| \leqslant c\|x\|, x \in X\}.$$

Mostremos que

$$c_0 = \|A\|.$$

Ante todo indiquemos que para cualquier elemento $x \in X$ la desigualdad

$$\|Ax\| \leqslant c_0\|x\|$$

es lícita. Efectivamente, si se encontrara un elemento $x_0 \in X$ tal que sea $\|Ax_0\| > c_0\|x_0\|$, existiría cierto $\varepsilon > 0$, para el cual se verificaría la desigualdad $\|Ax_0\| > (c_0 + \varepsilon)\|x_0\|$. Sin embargo, esto no es posible, puesto que con arreglo a la definición de cota interior existe un número $c > 0$ tal que $c < c_0 + \varepsilon$ y para todo $x \in X$ se cumple la desigualdad $\|Ax\| < c\|x\|$. En particular, $\|Ax_0\| \leqslant c\|x_0\| < (c_0 + \varepsilon)\|x_0\|$. De este modo, la cota inferior c_0 satisface también la desigualdad, mediante la cual se determina la acotación del operador A. Por ello, en la definición de la constante c_0 la cota inferior puede ser sustituida por un mínimo

$$c_0 = \min\{c\colon \|Ax\| \leqslant c\|x\|, x \in X\}.$$

De la desigualdad $\|Ax\| \leqslant c_0\|x\|$, para $x \neq 0$, tenemos

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant c_0,$$

de donde

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant c_0, \quad x \in X.$$

El caso de la desigualdad estricta

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0, \quad x \in X,$$

no es posible, pues en tal caso existiría un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0 - \varepsilon$$

y, por consiguiente, para todo $x \in X$, $x \neq 0$, sería válida con mayor razón la desigualdad

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} < c_0 - \varepsilon, \quad \text{o bien} \quad \|Ax\| < (c_0 - \varepsilon)\|x\|, \quad x \in X,$$

lo que contradiría la elección de c_0 en calidad de una constante mínima que posee la propiedad $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$, $x \in X$.

Así pues,

$$c_0 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Hablando metafóricamente, esta igualdad significa que el operador A está acotado cuando, y sólo cuando, tiene norma finita. De este modo, el conjunto de operadores acotados constituye el espacio $\mathscr{L}_c(X, Y)$.

En el p. 41.6 fue mostrado que todo operador lineal $A: X \to Y$ tiene una norma finita en el caso cuando los espacios normalizados lineales X e Y sean de dimensión finita y a título de normas en dichos espacios se hayan tomado normas cuadráticas $\|x\|_2$ e $\|y\|_2$, $x \in X$, $y \in Y$. Por cuanto en los espacios lineales de dimensión finita todas las normas son equivalentes (véase el teorema 2 en el ejemplo 4), de aquí se deduce que

todo operador lineal A, que aplica el espacio lineal de dimensión finita A en otro espacio lineal, también de dimensión finita Y, está acotado, cualesquiera que sea la elección de las normas en estos espacios, es decir, en este caso

$$\mathscr{L}(X, Y) = \mathscr{L}_c(X, Y).$$

7. Un espacio lineal de todas las funciones reales acotadas, definidas en el conjunto arbitrario X, que representa un subespacio del espacio $F(X)$ de todas las funciones reales $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ (véase el p. 57.2) se convierte en un espacio normalizado, siempre que se introduce en él una norma según la siguiente fórmula

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in X} |f(t)|. \tag{57.14}$$

Designemos este espacio mediante $S(X)$. En el caso en que X sea un espacio métrico, el subespacio del espacio $S(X)$, compuesto de las funciones f continuas en X, se designará con $C(X)$*), y la norma (57.14) en dicho espacio se denotará, asimismo, mediante $\|f\|_C$.

Si X es un compacto en R^n, entonces (véase el teorema 3 en el p. 19.6)

$$\|f\|_C = \sup_{t \in X} |f(t)| = \max_{t \in X} |f(t)|.$$

En particular, esto es cierto para el espacio $C[a, b]$ de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ de la recta numérica.

8. Sea fijado un número p, $1 \leqslant p < +\infty$. Estudiemos un conjunto de funciones f definidas en cierto segmento $[a, b]$ y tales que la integral

$$\int_a^b |f(x)|^p dx$$

converge. Es fácil comprobar que este conjunto forma un espacio lineal que se denota mediante $RL_p[a, b]$**).

Pongamos

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p}. \tag{57.15}$$

Mostremos que (57.15) es una seminorma en $RL_p[a, b]$. Es evidente que de la fórmula (57.15) se deduce inmediatamente que $\|f\|_p \geqslant 0$. Con ello, de la condición $\|f\|_p = 0$ no se desprende que $f = 0$. En efecto, consideremos por ejemplo una función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = a, \\ 0 & \text{para } x \in (a, b]. \end{cases}$$

Está claro que $\|f\|_p = 0$, pero la función f no es idénticamente nula en el segmento $[a, b]$, razón por la cual no es cero del espacio lineal $RL_p[a, b]$.

Comprobemos la homogeneidad de la expresión (57.14): para cualesquiera $f \in RL_p[a, b]$ y cualquier $\lambda \in \boldsymbol{R}$ (o bien $\lambda \in \boldsymbol{C}$) tenemos

$$\|\lambda f\|_p = \left[\int_a^b |\lambda f(t)|^p dt\right]^{1/p} = |\lambda| \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} = |\lambda|\, \|f\|_p.$$

Demostremos para (57.15) la desigualdad triangular. Cualesquiera que sean las funciones $f \in RL_p[a, b]$ y $g \in RL_p[a, b]$, de acuerdo con la desigualdad de Minkowski para las integrales (véase el p. 28.4*), obtendremos:

$$\|f + g\|_p = \left[\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt\right]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(t)|^p dt\right]^{1/p} = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

*) C es la primera letra de la palabra latina "continuum".

**) R es la primera letra del apellido B. Riemann; L, la primera letra del apellido H. Lebesgue.

Así pues, $\|f\|_p$ es, de hecho, una seminorma (que no es una norma) en el espacio lineal $RL_p[a, b]$.

Una construcción análoga es válida también para los intervalos infinitos; los correspondientes espacios seminormalizados se designarán también mediante RL_p.

9. Analicemos un conjunto de todas las funciones continuas en el segmento $[a, b]$. Es un espacio lineal. Ya sabemos que se puede introducir en él la norma $\|f\|_C$, definida en el ejemplo 7 de este punto. Se puede también considerar en dicho espacio la seminorma (57.15), con la particularidad de que la seminorma (57.15) ya será en él una norma.

En efecto, si la función f es continua en el segmento $[a, b]$ y $\|f\|_p = 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, y, por consiguiente,

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = 0,$$

entonces de lo que la función $|f(x)|^p$, $x \in [a, b]$, es no negativa y continua se infiere (véase la propiedad 9 de la integral en el punto 28.1) que $f(x) \equiv 0$ en $[a, b]$.

Un espacio de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ *provisto de la norma* (57.15) *se denota mediante* $CL_p[a, b]$.

De un modo semejante se construyen los espacios análogos para los intervalos no acotados, como también para las funciones de varias variables.

Si un mismo conjunto pertenece a diferentes espacios lineales seminormalizados o normalizados (por ejemplo, los espacios $C[a, b]$ y $CL_p[a, b]$ se componen de unas mismas funciones), entonces resulta útil con frecuencia estimar una norma (una seminorma) de estos elementos en términos de la otra. Los teoremas que expresan las estimaciones de esta índole se denominan *teoremas de encaje*.

Expliquemos lo dicho con un ejemplo enunciado en forma de un lema.

Lema 3. *Sea* $-\infty < a < b < +\infty$, $1 < p < +\infty$. *Si* $f \in RL_p[a, b]$, *se tiene*

$$\|f\|_1 \leqslant (b - a)^{1/q} \|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{57.16}$$

y si $f \in RL_p[a, b] \cap S[a, b]$, *entonces*

$$\|f\|_p \leqslant (b - a)^{1/p} \|f\|_\infty. \tag{57.17}$$

DEMOSTRACIÓN. Teniendo presente que la seminorma $\|f\|_p$ se determina según la fórmula (57.15), obtenemos, haciendo uso de la desigualdad de Hölder (véase el p. 28.4*):

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \cdot 1 dt \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} \left[\int_a^b dx\right]^{1/q} = (b - a)^{1/q} \|f\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

con lo cual queda demostrada (57.16). La desigualdad (57.17) también se deduce directamente de las definiciones (57.14) y (57.15) de las normas correspondientes:

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} \leqslant \left\{\int_a^b \left[\sup_{[a, b]} |f(t)|\right]^p dt\right\}^{1/p} = \|f\|_\infty \left(\int_a^b dt\right)^{1/p} =$$

$$= (b - a)^{1/p} \|f\|_\infty. \quad \square$$

Ejercicio 15. Denotemos con $C^1L_2[a, b]$ un subconjunto del espacio $CL_2[a, b]$, compuesto de las funciones continuamente derivables en el segmento $[a, b]$. Demuéstrese que

1) $C^1L_2[a, b]$ es un espacio lineal normalizado, si como norma de la función $f \in C^1L_2[a, b]$ se entiende su norma en el espacio $CL_2[a, b]$;

2) el operador de derivación D es un operador lineal no acotado $D: C^1L_2[a, b] \to CL_2[a, b]$.

Indicación: conviene examinar las funciones $\operatorname{sen} nx \in C^1L_2[-\pi, \pi]$.

57.5. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS SEMINORMALIZADOS

En los espacios seminormalizados se puede introducir el concepto de sucesión convergente y el de su límite.

Definición 25. *Si la sucesión de elementos $\{x_n\}$ de un espacio lineal seminormalizado (en particular, normalizado) X es de tal género que existe un elemento $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ se llama convergente en la seminorma (norma, respectivamente) hacia el elemento x y en este caso se escribe* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Introduciendo, en algún espacio lineal de funciones, diferentes seminormas (en particular, normas), obtendremos diferentes conceptos de convergencia de las sucesiones de funciones. Por ejemplo, la convergencia en el sentido de la norma (57.14) significa una convergencia uniforme; la convergencia en el sentido de la seminorma (57.15) ya es una convergencia de otro género; se denomina *convergencia en media* o, más detalladamente, en el sentido de p-media (a veces se habla simplemente de la convergencia en el sentido del espacio L_p). Ya nos encontramos con el caso particular de la convergencia de este género: para $p = 1$ (véanse el lema 2 en el p. 55.2, el corolario del lema 4 en el p. 56.7 y la métrica (57.2)), y para $p = 2$ (véase el corolario del teorema 12 del p. 55.9). Para $p = 2$ la convergencia en media se denomina también convergencia en el *sentido de la media cuadrática*.

Las desigualdades (57.16) y (57.17) entre diferentes seminormas de las funciones permiten establecer la relación entre diferentes tipos de convergencia de las sucesiones de funciones.

Por ejemplo, supongamos que la sucesión de funciones f_n, $n = 1, 2, \ldots$ y la función f son de tal género que

1°. La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en el segmento $[a, b]$ hacia la función f.

2°. Para todo $n = 1, 2, \ldots : f_n - f \in S[a, b] \cap RL_p[a, b]$.

Entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge a la función f en el segmento $[a, b]$ también en el sentido de p-media, $1 \leqslant p < +\infty$.

En efecto, en virtud de (57.17), se verifica la desigualdad

$$\|f_n - f\|_p \leqslant (b - a)^{1/p}\|f_n - f\|_\infty.$$

La convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ a la función f en el segmento $[a, b]$ significa que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Ejercicio 16*. Constrúyase un ejemplo de sucesión de funciones continuas no negativas en un segmento que sea convergente en media, pero que no converja en ninguno de los puntos.

Cabe prestar atención en que en un espacio seminormalizado el límite para la sucesión convergente no es, en el caso general, único. Además, si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, entonces la seminorma de la diferencia de dos límites es nula: $\|a - b\| = 0$. Esto se deduce inmediatamente de la desigualdad

$$\|a - b\| \leqslant \|a - x_n\| + \|x_n - b\|.$$

Lema 4. *Para cualesquiera dos elementos x e y de un espacio lineal seminormalizado X se verifica la desigualdad*

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\|. \tag{57.18}$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|,$$

se tiene

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$$

y, análogamente,

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

De las dos últimas desigualdades proviene la desigualdad (57.18). □

Definición 26. *Sea X un espacio lineal seminormalizado (en particular, normalizado). Un conjunto $E \subset X$ se denomina acotado, o, más detalladamente, acotado en seminorma (en norma, respectivamente), si existe una constante $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ se verifica la desigualdad $\|x\| \leqslant M$.*

Lema 5. *Si la sucesión $\{x_n\}$ converge en seminorma en X, es acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$; ya que la sucesión es convergente, existe tal n_0 que si $n \geqslant n_0$, entonces $\|x_n - x\| \leqslant 1$, y, por lo tanto

$$\|x_n\| = \|(x_n - x) + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\| \leqslant \|x\| + 1.$$

Pongamos $M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n_0-1}\|, \|x\| + 1\}$; en este caso, evidentemente, para todo $n = 1, 2, \ldots$ se verifica la desigualdad $\|x_n\| \leqslant M$. □

En un espacio lineal provisto de seminorma puede definirse el concepto de función continua. En lo que sigue (véase el p. 57.9) nos hará falta el concepto de continuidad de la función de una y dos variables en un espacio seminormalizado. Definamos estos conceptos.

Sea X un espacio seminormalizado. Una función f, real o compleja, definida en X, se llama *continua en el punto* $x_0 \in X$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que para todos los $x \in X$, que satisfagan la condición $\|x - x_0\| < \delta$, se verifica la desigualdad

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Sea Y también un espacio seminormalizado. Una función f, real o compleja, definida en el producto $X \times Y$, se denomina *continua en el punto* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que para cualesquiera $(x, y) \in X \times Y$, que satisfagan las desigualdades $\|x - x_0\| < \delta$, $\|y - y_0\| < \delta$, se verifica la desigualdad

$$|f(x, y) - f(x_0 y_0)| < \varepsilon.$$

Si la función f es continua en todo punto de cierto conjunto, se llama *continua* en dicho conjunto.

Por supuesto, la definición de continuidad para los espacios seminormalizados puede enunciarse también con ayuda de sucesiones de los elementos del espacio.

Por ejemplo, una función numérica f, definida en el espacio seminormalizado X, se denomina continua en el punto x_0, si para toda sucesión $\{x_n\}$, que converge hacia x_0 en la seminorma del espacio X: $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ se verifica la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

La equivalencia de las dos definiciones, enunciadas arriba, del límite de una función se demuestra según el mismo esquema que se ha usado en el caso en que X representaba un conjunto de números reales (véase el p. 5.7).

Lema 6. *La seminorma* $\|x\|$ *es una función continua en el espacio seminormalizado* X.

DEMOSTRACIÓN. Sean dados un elemento $x_0 \in X$ y un número $\varepsilon > 0$. En virtud del lema 4, para todos los x tales que $\|x - x_0\| < \varepsilon$, tenemos $|\|x\| - \|x_0\|| < |\|x - x_0\| < \varepsilon$, es decir, la condición de continuidad de la función en X se cumple con la elección de $\delta = \varepsilon$. □

Definición 27. *Sean X e Y los espacios lineales seminormalizados (en particular, normalizados). Se denomina aplicación isomorfa o isomorfismo de los espacios seminormalizados (normalizados) X e Y una aplicación f que aplica de modo isomorfo el espacio X, en su calidad de espacio lineal, sobre el espacio Y (véase la definición 19) y que es de tal género que para cualquier $x \in X$ se verifica la igualdad*

$$\|x\|_X = \|f(x)\|_Y.$$

Si para los espacios lineales seminormalizados (normalizados) X e Y existe una aplicación isomorfa de X sobre Y, dichos espacios se denominan isomorfos.

Dos espacios isomorfos seminormalizados (normalizados) pueden diferir uno del otro sólo en la naturaleza de sus elementos y no en las propiedades del espacio. Por ello, en lo que sigue no vamos a distinguir a menudo los espacios isomorfos seminormalizados (normalizados) compuestos de diferentes elementos: tales espacios pueden "identificarse".

Expliquemos esto con detalles. Sean X e Y los espacios lineales seminormalizados, $Y \subset Y^*$, y sea $f: X \to Y$ una aplicación isomorfa. Consideraremos un conjunto $X^* = X \cup (Y^* \setminus Y)$ que se obtiene del espacio X por adición a éste del conjunto $Y^* \setminus Y$. De este modo, $X^* \setminus X = Y^* \setminus Y$. Definamos para los elementos del conjunto X^* las operaciones de adición y multiplicación por un número y, además, la norma: se acompañarán ellas de índice X^*. Introduzcamos, con los fines de comodidad, la aplicación $F: X^* \to Y^*$, definida por la fórmula

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X, \\ x & \text{si } x \in X^* \setminus X. \end{cases} \tag{57.19}$$

Está claro que F es una aplicación biunívoca (biyección) del conjunto X^* sobre el Y^*.

Ahora, para cualesquiera $x \in X^*$, $y \in X^*$ y cualesquiera números λ, μ pongamos

$$(\lambda x + \mu y)_{X^*} \overset{\text{def}}{=} F^{-1}[\lambda F(x) + \mu F(y)],$$
$$\|x\|_{X^*} \overset{\text{def}}{=} \|F(x)\|.$$

El espacio X^*, definido de este modo, es lineal, seminormalizado (normalizado), isomorfo al espacio Y^* y contiene X en calidad de su subconjunto. Cuando decimos "identifiquemos en el espacio Y^* el conjunto Y con el espacio X isomorfo a Y", entendemos precisamente la consideración del espacio X^* mencionado anteriormente (compárese con la identificación de los espacios métricos isométricos en el p. 57.1).

Ejercicios. 17. Sea X un espacio lineal seminormalizado. Los elementos $x \in X$ e $y \in X$ se denominan *equivalentes*, si $\|x - y\| = 0$. Denotemos por $\tilde{X}$ un conjunto cuyos elementos son las clases de elementos equivalentes del espacio X. Sean $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, λ, un número cualquiera. Definamos $\tilde{x} + \tilde{y}$ como elemento de $\tilde{X}$ que contiene $x + y$, y $\lambda\tilde{x}$, como un elemento de $\tilde{X}$ que contiene λx. Pongamos $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}} = \|x\|_X$. Demuéstrese que las definiciones dadas son correctas, es decir, no dependen de la elección de los elementos $x \in \tilde{x}$ e $y \in \tilde{y}$, y que $\tilde{X}$ es un espacio lineal normalizado provisto de la norma $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}$.

18. Demuéstrese que las funciones $x + y$ e λx son continuas en todo espacio lineal seminormalizado X (x e y son los elementos de este espacio y λ es un número), en otras palabras, que las operaciones de adición y multiplicación por un número son continuas en el espacio mencionado.

57.6. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS NORMALIZADOS

En el espacio lineal *normalizado* X puede introducirse, de modo natural, la distancia entre los elementos de dicho espacio. A saber, resulta válida la siguiente afirmación.

Lema 7. *El espacio lineal normalizado X es un espacio métrico provisto de la métrica*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \tag{57.20}$$

con la particularidad de que la convergencia de las sucesiones en el espacio X en dicha métrica coincide con la convergencia en la norma.

DEMOSTRACIÓN. La función $\rho(x, y)$, definida según la fórmula (57.20), es realmente una distancia: las propiedades de la distancia (véase el p. 57.1) se deducen de las propiedades de la norma 1° – 4° (compruébese). La segunda afirmación del lema es obvia. □

Diremos que la *métrica* (57.20) *se engendra por la norma dada del espacio X*. Por ejemplo, una métrica engendrada por la norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ en un espacio lineal aritmético de los vectores reales n-dimensionales $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la métrica del espacio euclídeo R^n definida mediante la fórmula (18.1).

Una sucesión de puntos del espacio X, fundamental respecto de la métrica (57.20), se llama *fundamental respecto de la norma* dada en el espacio X.

Ejercicio 19. Demuéstrese que un conjunto en el espacio lineal normalizado está acotado en norma (véase la definición 26 en el p. 57.5) cuando, y sólo cuando, está acotado como conjunto de un espacio métrico en el sentido de la métrica (57.20) (véase el ejercicio 1 en el p. 57.1).

Ejemplo. Examinemos el espacio l_p de sucesiones de números reales con la norma (57.10). Designemos mediante $\{e_n\}$ una sucesión cuyo n-ésimo término es igual a la unidad, mientras que todos los términos restantes son nulos. Es evidente que para $n \neq m$

$$\|e_n - e_m\| = (1 + 1)^{1/p} = 2^{1/p}.$$

Por eso la sucesión de elementos e_n, $n = 1, 2, \ldots$, del espacio l_p no puede contener una subsucesión fundamental ni tampoco, por consiguiente, una que sea convergente.

La sucesión $\{e_n\}$ está acotada, pues para todo n tenemos $\|e_n\| = 1$. Forma un conjunto cerrado en l_p, puesto que el conjunto $\{e_n\}$ no tiene puntos límites en l_p (de lo contrario, en la sucesión se encontraría una subsucesión convergente).

De este modo, en un espacio de dimensión finita existen sucesiones acotadas, de las cuales no se puede separar una que sea convergente. Existen también conjuntos cerrados acotados en los cuales no toda sucesión de sus puntos permite que de ella sea separada una convergente.

OBSERVACIÓN 1. Si en el espacio lineal X están definidas dos normas de elementos $\|\cdot\|^{(1)}$ y $\|\cdot\|^{(2)}$ y estas normas son equivalentes (véase la definición 23 en el p. 57.4), entonces la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, converge hacia el elemento $x \in X$ en el sentido de la norma $\|\cdot\|^{(1)}$ cuando, y sólo cuando, converge a x en el sentido de la norma $\|\cdot\|^{(2)}$.

En efecto, en vista de que las normas $\|\cdot\|^{(1)}$ y $\|\cdot\|^{(2)}$ son equivalentes, existen unas constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tales que se verifican las desigualdades

$$c_1\|x_n - x\|^{(2)} \leqslant \|x_n - x\|^{(1)} \leqslant c_2\|x_n - x\|^{(2)}.$$

De estas desigualdades deriva directamente la equivalencia de las convergencias de la sucesión $\{x_n\}$ hacia x en el sentido de las normas $\|\cdot\|^{(1)}$ y $\|\cdot\|^{(2)}$.

De la equivalencia, demostrada en el teorema 2 del p. 57.4, de todas las normas en un espacio de dimensión finita se infiere que las convergencias de las sucesiones de sus puntos en todas las normas son equivalentes. Por cuanto la convergencia en norma cuadrática $\|x\|_2$ es equivalente a la convergencia en coordenadas (véanse los pp. 18.1 y 18.4), la convergencia de la sucesión de puntos en un espacio de dimensión finita en cualquier norma es equivalente a la convergencia de las sucesiones numéricas de las coordenadas de los puntos en consideración respecto de una base arbitraria.

OBSERVACIÓN 2. Observemos que en el caso cuando una seminorma no es norma, incluso una función simple como la lineal, en un espacio seminormalizado lineal de dimensión finita puede resultar no continua. Consideremos, por ejemplo, un espacio aritmético bilineal X de los vectores $x = (x_1, x_2)$ con la seminorma $\|x\| = \|x_1\|$. Es realmente una seminorma, puesto que $\|x\| = |x_1| \geqslant 0$. Además, para cualquier número λ se tiene $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$, por lo cual $\|\lambda x\| = |\lambda x_1| = |\lambda|\,|x_1| = |\lambda|\,\|x\|$. Por fin, si $y = (y_1, y_2)$ es también un elemento de X, entonces $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, por consiguiente, $\|x + y\| = |x_1 + y_1| \leqslant |x_1| + |y_1| = \|x\| + \|y\|$. De este modo, todas las propiedades de la seminorma están cumplidas.

Mostremos que la función lineal $f(x) = x_2$ no es continua en X. En efecto, para la sucesión $x^{(n)} = (1/n, 1)$ cualquier punto del tipo $x = (0, x_2)$ (x_2 es arbitrario) es el límite para dicha sucesión en el sentido de la seminorma en consideración:

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

En particular, el punto $O = (0, 0)$ es el límite de la sucesión $\{x^{(n)}\}$. Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = 1 \neq 0 = f(O).$$

Esto es indicio de que la función $f(x) = x_2$ no es continua en la seminorma $\|x\| = |x_1|$,

Subrayemos, no obstante, que si en un espacio de dimensión finita la seminorma es una norma, entonces toda función lineal será continua respecto de esta norma. Efectivamente, sea X un espacio lineal normalizado n-dimensional y sea f una funcional lineal en X. Supongamos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base en X y, por consiguiente, todo elemento $x \in X$ es representable, y además, de manera unívoca, en la forma $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Por cuanto f es una funcional lineal, se tiene

$$f(x) = f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

donde $a_k = f(e_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ son los números fijos para f. Recordando que la convergencia de una sucesión de puntos en cualquier norma en un espacio de dimensión finita es equivalente a la convergencia de dicha sucesión en coordenadas, nos convencemos en seguida de que la continuidad de la función f deriva realmente de la fórmula obtenida $f(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.

Lema 8. *La norma es una función continua en un espacio lineal normalizado en el sentido de la métrica* (57.20).

En virtud de la igualdad (57.20), esta afirmación se deduce de lo que una seminorma es continua respecto de otra seminorma (véase el lema 6 en el p. 57.5).

Definición 28. *Un espacio lineal normalizado se denomina completo, si es espacio métrico completo en el sentido de la métrica engendrada por la norma de dicho espacio.*

Todo espacio lineal normalizado completo se llama espacio de Banach)*.

*) S. Banach (1892 — 1945), matemático polaco.

El espacio lineal normalizado $C[a, b]$ de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ dotado de la norma (57.14) es un espacio de Banach. Nos hemos convencido de esto en el p. 57.1, al considerar un espacio métrico de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ con la distancia (57.1) la que se engendra precisamente por la norma (57.14). Hemos visto que la completitud del espacio $C[a, b]$ se desprende de lo que la convergencia de la sucesión en este espacio significa la convergencia uniforme de la misma en el segmento $[a, b]$.

Teorema 3. *Todo espacio lineal normalizado está contenido, y además, es denso en cierto espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el teorema 1 en el p. 57.1, es suficiente mostrar que a la completación X^* de un espacio lineal normalizado X (considerado como un espacio métrico provisto de la métrica (57.20)) pueden ser prolongadas desde X las operaciones algebraicas y la norma. Es posible hacerlo con ayuda del paso al límite. Al igual que en la demostración del teorema 1, convengamos en considerar que $X \subset X^*$, en otras palabras, identifiquemos el espacio X con un subespacio, isométrico a éste, de la completación X^* construida en X.

Sea, por ejemplo, $x \in X^*$ e $y \in X^*$. Siendo X denso, existen en X^* las sucesiones $x_n \in X$ e $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Probemos que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ converge. En efecto,

$$\rho(x_n + y_n, x_m + y_m) = \|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| = \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m).$$

De la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ se desprende que ellas son fundamentales, por lo cual la sucesión $\{x_n + y_n\}$ es también fundamental y, por lo tanto, siendo X^* completo, convergente.

Pongamos, por definición,

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n).$$

Análogamente se determina también, pasando al límite, λx, $x \in X^*$.

Es fácil comprobar que las operaciones algebraicas $x + y$, λx, definidas de esta forma para los elementos de la completación X^*, no dependen de cómo se eligen las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tales que $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$. Tampoco es difícil convencerse de que en el caso cuando los elementos pertenezcan al espacio de partida X, las operaciones algebraicas, definidas por nosotros, coinciden con las dadas.

Determinemos ahora la norma para $x \in X^*$. Sea $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Mostremos que la sucesión numérica $\{\|x_n\|\}$ es fundamental. En efecto, de la desigualdad (57.18) tenemos, para cualesquiera n y m naturales:

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leqslant \|x_n - x_m\| = \rho(x_n, x_m). \tag{57.21}$$

La sucesión $\{x_n\}$, siendo convergente, es, además, fundamental, por lo cual de la desigualdad (57.21) se deduce que la sucesión numérica $\{\|x_n\|\}$ es también fundamental y, por lo tanto, convergente.

Pongamos, por definición,

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

La norma $\|x\|$, $x \in X^*$, definida de esta manera, no depende de cómo se elige la sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, tal que $x_n \to x$. Es fácil comprobar también, pasando al límite, que para la función $\|x\|$, $x \in X^*$, se cumplen las propiedades de la norma 1° – 4° y que para $x \in X$ obtenemos la norma anterior. □

A título de ejemplo indiquemos el espacio lineal normalizado $CL_p[a, b]$ de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ provisto de la norma (57.15). Cuando $p = 1$, esta norma engendra la métrica (57.2). Se puede mostrar que un espacio métrico de funciones continuas provisto de la métrica (57.2) no es completo. De acuerdo con el teorema demostrado, dicho espacio lineal normalizado de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ puede ser completado hasta que se obtenga un espacio completo. Este espacio de Banach se designa mediante $L[a, b]$.

Definición 29. *Un sistema de elementos x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ es cierto conjunto de índices), del espacio lineal seminormalizado X se denomina completo en dicho espacio, si para todo elemento $x \in X$ y cada número $\varepsilon > 0$ existen tales elementos $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ del sistema dado y tales números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que se verifica la desigualdad*

$$\|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n})\| < \varepsilon. \tag{57.22}$$

Enunciemos esta definición en una forma algo diferente, introduciendo previamente una noción más.

Definición 30. *Un conjunto $A \subset X$ se llama denso en el espacio seminormalizado X, si para todo elemento $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ se encontrará tal elemento $a \in A$ se verifique*

$$\|x - a\| < \varepsilon.$$

Si X es un espacio normalizado y, por lo tanto, métrico, entonces, en virtud de (57.20), la definición 30 conduce a la misma noción de densidad de un conjunto que la definición 6 del p. 57.1. Ahora podemos decir:

Un sistema $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, es completo en el espacio X, si el conjunto de todas las combinaciones lineales de sus elementos, es decir, su cápsula lineal (véase la definición 15 en el p. 57.2) *forma un conjunto denso en X.*

Si X es un espacio normalizado, tiene sentido en él, como en cualquier otro espacio métrico, el concepto de clausura de un conjunto, y por cuanto la densidad de cierto conjunto en un espacio métrico significa que la clausura del conjunto citado coincide con el mismo espacio (véase la definición 6 en el p. 57.1), entonces la definición 30 en este caso puede parafrasearse del modo siguiente:

un sistema de elementos x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ es cierto conjunto de índices), del espacio lineal normalizado X se llama completo, si la clausura de su cápsula lineal (véase el p. 57.2) *coincide con todo el espacio X.*

Con el caso particular del concepto de completitud para un sistema de funciones ya nos hemos encontrado en el p. 55.8.

Definición 31. *Si en el espacio lineal normalizado X existe un conjunto numerable de elementos que forma un sistema completo del espacio X, este último se denomina separable.*

En conclusión de este punto introduzcamos el concepto de base, y, ante todo, el de serie en el espacio X.

Definición 32. *Sea x_n, $n = 1, 2, \ldots$, una sucesión de elementos del espacio lineal normalizado X. Pongamos $s_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n = 1, 2, \ldots$; un par de sucesiones $\{x_n\}$, $\{s_n\}$ se llama serie (con el término general x_n) y se designa*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n; \tag{57.23}$$

los elementos s_n se denominan n-ésimas sumas parciales de la serie (57.23).

Si la sucesión s_n, $n = 1, 2, \ldots$, converge en el espacio X, la serie (57.23) se llama *convergente*. En este caso el límite $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ de la sucesión s_n, $n = 1, 2, \ldots$, se llama *suma de la serie* (57.23) y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s.$$

De este modo, al igual que en el caso de las series numéricas, el mismo símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ se empleará para designar tanto la propia serie, como también su suma, si la serie converge.

Lo mismo que para las series numéricas, para las series en los espacios lineales normalizados subsisten las siguientes afirmaciones.

Si la serie (57.23) *converge, converge también la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$, con la particularidad de que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = s$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda s$.*

Si en el espacio X convergen dos series, converge también una serie cuyo término es igual a la suma de sus términos generales y la suma de esta última serie es igual a la suma de las sumas de las series dadas.

Definición 33. *La sucesión de elementos e_n, $n = 1, 2, \ldots$ de un espacio lineal normalizado se llama base, si, cualquiera que sea el elemento x, existe una sucesión, y sólo una, de los números λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n. \tag{57.24}$$

De este modo, si la sucesión $\{e_n\}$ es una base del espacio X, para todo elemento $x \in X$ existe una, y sólo una, sucesión de los números $\{\lambda_n\}$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene tal número n_ε que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ se verifica la desigualdad

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon. \tag{57.25}$$

La fórmula (57.24) se denomina desarrollo del elemento x según la base $\{e_n\}$.

No es difícil convencerse de que si el sistema de elementos $\{e_n\}$ forma una base, es linealmente independiente. Esto proviene en seguida de la unicidad del desarrollo de los elementos del espacio según la base. En efecto, si los elementos e_n, $n = 1, 2, \ldots$, resultaran ser linealmente dependientes, se encontraría entre ellos un conjunto finito de tales $e_{n_1}, \ldots, e_{n_k}$, que para ciertos números $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, no todos iguales a cero, tendría lugar la igualdad $\lambda_1 e_{n_1} + \ldots + \lambda_k e_{n_k} = 0$, es decir, se obtendría un desarrollo del cero según los elementos de la base con coeficientes que no son todos nulos. Por cuanto para el cero se tiene un desarrollo trivial $0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 e_n$, queda con esto perturbada la condición de unicidad del desarrollo de los elementos según la base.

Si un espacio lineal normalizado dispone de una base compuesta por un conjunto finito o numerable de elementos, este espacio es separable. En efecto, no es difícil comprobar que el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de las bases citadas con coeficientes racionales es numerable y denso en todo el espacio.

OBSERVACIÓN. Recalquemos la diferencia que existe entre la sucesión de elementos que forman un sistema completo y la sucesión de elementos que forman una base. En el primer caso los coeficientes λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, en la desigualdad (57.22) dependen, en el caso general, no sólo de la elección del elemento $x \in X$, sino también de la elección del número ε. Por el contrario, en el segundo caso los coeficientes λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, en la desigualdad (57.25) se determinan sólo por el mismo elemento (se llaman *coeficientes del desarrollo del elemento x según la base dada*, o bien *coordenadas del elemento x para la base dada*) y es sólo su cantidad, es decir, el número n_ε, el que depende de la elección de ε.

Existen espacios de Banach separables en los que no hay base. En el punto que sigue será considerada una clase más estrecha de los espacios, donde la base siempre existe.

57.7. ESPACIOS LINEALES PROVISTOS DE PRODUCTO ESCALAR

Definición 34. *Una función real, definida en el conjunto de los pares ordenados de elementos de un espacio lineal real y denotada por (x, y), $x \in X$, $y \in X$, se llama multiplicación escalar, si satisface las siguientes condiciones:*

1°) $(x, y) = (y, x)$, $x \in X$, $y \in X$;

2°) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$, $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$, *λ y μ son unos números reales;*

3°) $(x, x) \geqslant 0$, $x \in X$;

4°) *si* $(x, x) = 0$, *entonces* $x = 0$.

Observemos que de la propiedad 2° se desprende que para todo $x \in X$ se verifica la igualdad

$$(x, 0) = 0.$$

En efecto, $(x, 0) = (x, 0 \cdot 0) = 0(x, 0) = 0$.

Definición 35. *Una función real (x, y), definida en el conjunto de los pares ordenados de un espacio lineal real X, $x \in X$, $y \in X$, y que satisface sólo las condiciones* 1°, 2°, 3°, *se llama multiplicación semiescalar.*

De un modo análogo se introduce también el concepto de multiplicación semiescalar (en particular, escalar) en el espacio lineal complejo $\boldsymbol{R}$. En este caso la función de valores complejos (x, y) lleva el nombre de multiplicación semiescalar (escalar, respectivamente), si satisface la propiedad 2° para cualesquiera números complejos λ y μ, la propiedad 3° y la propiedad

$$1'°)\ (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad x \in X, \quad y \in X,$$

donde, como siempre, la raya por encima del número significa un número complejo conjugado de él.

En adelante, por espacio lineal se entenderá un espacio lineal real, si no se especifica alguna otra cosa.

El resultado de una multiplicación escalar (semiescalar) de dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$ se denomina *producto escalar (semiescalar)* (x, y). Los espacios lineales, para cuyos elementos está definida la operación de multiplicación escalar (semiescalar), se llaman *espacios lineales provistos de producto escalar (semiescalar)*.

Lema 9. *Para cualquier par de vectores x e y de un espacio lineal X provisto de producto semiescalar se verifica la desigualdad*

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y), \tag{57.26}$$

llamada desigualdad de Cauchy — Schwartz.

DEMOSTRACIÓN. Para todo número real λ, en virtud de la propiedad 3° de la multiplicación semiescalar, se tiene

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \geqslant 0.$$

Al aplicar las propiedades 1° y 2° de la multiplicación semiescalar, obtendremos:

$$\lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0.$$

Si $(x, x) = 0$, entonces $2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0$. Por cuanto esto es cierto para cualquier λ real, $(x, y) = 0$, y, por consiguiente, la desigualdad (57.26) es lícita: sus ambos miembros se reducen a cero. En cambio, si $(x, x) \neq 0$, entonces el discriminante del trinomio obtenido, cuadrático respecto de λ, es no positivo:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0,$$

lo que es equivalente a la condición (55.26).

Corolario. *Para cualquier par de vectores de un espacio lineal provisto de producto semiescalar se verifica la desigualdad*

$$\sqrt{(x + y, x + y)} \leqslant \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}, \quad x \in X, \quad y \in X.$$

En efecto, al aplicar la desigualdad de Cauchy — Schwartz, obtendremos:

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} + (y, y) = [\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}]^2. \ \square$$

Ejercicio 20. Demuéstrese que en el espacio lineal complejo X provisto de producto semiescalar se verifica la desigualdad

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y), \quad x \in X, \quad y \in X.$$

Si en un espacio lineal X provisto de producto semiescalar se pone

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in X, \tag{57.27}$$

entonces la función $\|x\|$ satisface las propiedades 1° — 3° de la seminorma. La propiedad 1° de la seminorma proviene de la propiedad 3°, de la multiplicación semiescalar, la propiedad 2°, de la propiedad 2° y la propiedad 3° de la seminorma, del corolario del lema 9.

Cuando la multiplicación semiescalar es escalar, la seminorma (57.27) es una norma. En efecto, la propiedad 4° de la norma deriva de la propiedad 4° de la multiplicación escalar. De este modo, se ha demostrado la siguiente afirmación.

Lema 10. *Todo espacio lineal provisto de producto escalar (semiescalar, respectivamente) es un espacio normalizado (seminormalizado, respectivamente) con una norma (seminorma, respectivamente) determinada por la fórmula* (57.27) *y, por consiguiente, un espacio métrico con la métrica* (57.20).

La seminorma (57.27) se llamará *seminorma* (*norma*, respectivamente) *engendrada por el producto semiescalar (escalar) dado*. La distancia (57.20), engendrada por la norma (57.27) de un espacio lineal dotado de producto escalar, se llamará también *distancia engendrada por el producto escalar dado*.

Al aplicar la designación de la seminorma, podemos escribir la desigualdad (57.26) en la forma

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|. \tag{57.28}$$

57.8. EJEMPLOS DE ESPACIOS LINEALES PROVISTOS DE PRODUCTO ESCALAR

1. En el conjunto de números reales R una operación ordinaria de multiplicación es también multiplicación escalar en el sentido de la definición 34.

En el conjunto de números complejos C *el producto escalar* de los números x e y está representado por el producto $x\bar{y}$.

2. El espacio vectorial real aritmético n-dimensional R^n, donde el producto escalar de los vectores $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$ se determina según la fórmula (véase (18.32) en el p. 18.4)

$$(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

es un espacio lineal provisto de producto escalar en el sentido de la definición 34 del p. 57.7. En este caso la norma del elemento $x \in R^n$ coincide con su longitud $|x|$ (véase el p. 57.4, ejemplo 2):

$$\|x\| = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

y la métrica correspondiente, con la distancia en el espacio puntual aritmético n-dimensional:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Recordemos que para este espacio la desigualdad de Cauchy — Schwartz ha sido demostrada antes (véanse el lema 1 en el p. 18.1 y la desigualdad (18.39) en el p. 18.4).

En el espacio complejo aritmético C^n (véase el p. 57.2) el producto escalar se introduce por medio de la fórmula

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n, x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^n, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^n.$$

3. Analicemos el espacio lineal seminormalizado $RL_2[a, b]$ (del ejemplo 8, el p. 57.4), compuesto de las funciones de cuadrado integrable (por regla general, en el sentido impropio) en el segmento $[a, b]$, es decir, de tales funciones f, para las cuales

$$\int_a^b f^2(t)dt < +\infty.$$

Sea $f \in RL_2[a, b]$ y $g \in RL_2[a, b]$. Recordemos que el producto de las funciones que son integrables según Riemann en cierto segmento es también integrable según Riemann en dicho segmento. Por eso, en cualquier segmento $[\xi, \eta] \subset [a, b]$ que no contiene puntos singulares de las funciones f y g (véase el p. 55.1), el producto fg es también integrable según Riemann y, por lo tanto, hay sentido en considerar la integral impropia

$$\int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{57.29}$$

Por cuanto, además, en cualquier punto x, que no sea singular para las funciones f y g, es válida la desigualdad

$$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{f^2(t) + g^2(t)^{*)}}{2},$$

entonces la integral (57.29) converge y, además, absolutamente.

El producto semiescalar en este espacio se determina por la fórmula

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{57.30}$$

Las propiedades 1°, 2°, 3° del producto semiescalar se comprueban con facilidad. El espacio obtenido, provisto de producto semiescalar (57.30), se designará también mediante $RL_2[a, b]$.

Observemos que la desigualdad (57.26) en este caso puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)dt\int_a^b g^2(t)dt;$$

representando en sí un caso particular de la desigualdad de Hölder (véase el p. 28.4*) para $p = q = 2$ y llevando el nombre de desigualdad de Cauchy — Buniakovski**).

---

*) Dicha desigualdad proviene de la siguiente desigualdad evidente: $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geqslant 0$.

**) V. Ya. Buniakovski (1804 — 1889), matemático ruso.

La seminorma engendrada por el producto semiescalar (57.30) tiene, evidentemente, la forma

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}, \tag{57.31}$$

es decir, coincide con la seminorma (57.15) examinada en el ejemplo 8, del p. 57.4, para $p = 2$. De aquí se deduce que el producto semiescalar (57.30) no es escalar, puesto que en el p. 57.4 se ha establecido que la seminorma (57.15) no es una norma, para todo $p \geqslant 1$.

Sin embargo, en el subespacio $CL_2[a, b]$ del espacio $RL_2[a, b]$, que se compone sólo de las funciones continuas en el segmento $[a, b]$, el producto semiescalar (57.30) ya es escalar, pues, según se ha demostrado en el ejemplo 9 del p. 57.4, en este caso

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}, \quad f \in CL_2[a, b]$$

es no sólo una seminorma, sino también una norma.

Para la distancia entre dos funciones continuas f y g en este espacio obtenemos la fórmula

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \left\{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2dx\right\}^{1/2}. \tag{57.32}$$

Ya nos hemos encontrado con la convergencia de las funciones en el sentido de esta métrica: véase, por ejemplo, el corolario del teorema 12 en el p. 55.9.

Todo lo dicho se extiende de modo natural a las funciones definidas en cualquier intervalo infinito, en particular, en todo el eje.

Ejercicio 21. Sea X un espacio lineal provisto de producto semiescalar. Los elementos $x \in X$ e $y \in Y$ se llaman *equivalentes*, si $\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = 0$. Designemos mediante $\tilde{X}$ un conjunto cuyos elementos están constituidos por las clases de elementos equivalentes del espacio X. Sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}$, $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$, sean λ y μ unos números. Definamos $\lambda\tilde{x} + \mu\tilde{y}$ como un elemento del conjunto $\tilde{X}$ que contiene $\lambda x + \mu y$, y pongamos $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$. Demuéstrese que estas definiciones son correctas, es decir, no dependen de la elección de los elementos $x \in \tilde{x}$ e $y \in \tilde{y}$, y que *$\tilde{X}$ es un espacio lineal, mientras que $(\tilde{x}, \tilde{y})$ es el producto escalar en $\tilde{X}$.*

57.9. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS LINEALES PROVISTOS DE PRODUCTO ESCALAR. ESPACIOS DE HILBERT

Un espacio lineal provisto de producto semiescalar es también, de acuerdo con (57.27), seminormalizado. Por eso, para él están definidos el concepto de sucesión convergente, de su límite y el de función continua (véase el p. 57.5).

Lema 11. *El producto semiescalar* (x, y) *es una función continua* (véase el p. 57.5) *de sus argumentos x e y en el conjunto $X \times X$, $x \in X$, $y \in X$.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, para cualesquiera $x_0 \in X$, $y_0 \in X$, $x \in X$ e $y \in X$ se verifica la desigualdad

$$|(x_0, y_0) - (x, y)| = |(x_0 - x, y_0)| + (x, y_0 - y)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_0 - x\| \|y_0\| + \|x\| \|y - y_0\|, \tag{57.33}$$

de la cual proviene inmediatamente la citada continuidad del producto semiescalar. En efecto, si $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$, entonces, al observar que $\|x\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0\| < \|x_0\| + \delta$, de (57.33) obtenemos

$$|(x_0, y_0) - (x, y)| < \delta\|y_0\| + (|x_0| + \delta)\delta.$$

De aquí se infiere que para cualquier $\varepsilon > 0$ fijo siempre podemos elegir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de modo tal que para $x \in U(x_0, \delta)$, $y \in U(y_0, \delta)$ se verifique la desigualdad $|(x_0, y_0) - (x, y)| < \varepsilon$; para ello basta elegir $\delta > 0$ de tal manera que sea $\delta\|y_0\| + (\|x_0\| + \delta)\,\delta < \varepsilon$, lo que, evidentemente, es siempre posible. □

En el espacio X provisto de producto semiescalar podemos hablar sobre la convergencia de las series en seminorma engendrada por el producto semiescalar: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, $x = 1, 2, \ldots$, se llama *convergente*, si la sucesión de sus sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_n$ converge en la seminorma mencionada hacia cierto elemento $s \in X$, el cual se denomina suma de la serie: $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Indiquemos que la suma de una serie en el espacio provisto de producto semiescalar no está definida unívocamente. No obstante, si $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $s^* = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, es decir, si s y s^* son las sumas de una misma serie, entonces $\|s^* - s\| = 0$ (véase el p. 57.5), por lo cual para cualquier elemento $a \in X$ tiene lugar la igualdad $(s^*, a) = (s, a)$. En efecto, en virtud de la desigualdad de Cauchy — Schwartz, para un producto semiescalar tenemos

$$|(s^*, a) - (s, a)| = |(s^* - s, a)| \leqslant \|s^* - s\|\,\|a\| = 0.$$

De la continuidad del producto semiescalar en todo el espacio se desprende, por ejemplo, que las series en un espacio provisto de producto escalar pueden multiplicarse término a término no sólo por los factores numéricos, sino también por los elementos del mismo espacio. Demostrémoslo.

Lema 12. *Supongamos que en el espacio X provisto de producto semiescalar está dada una serie convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s, \quad x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Entonces para cada elemento $a \in X$ una serie numérica que se obtiene de la dada multiplicándola término a término por a es también convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = (s, a).$$

En otras palabras, para la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y cualquier elemento $a \in X$ se verifica la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, a\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, a) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k, a) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k, a\right) = \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k, a\right) = (s, a).$$

Ejemplo. Consideraremos el espacio $RL_2[a, b]$ del ejemplo 3 en el p. 57.8. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ de funciones $f_n \in RL_2[a, b]$ converge en este espacio a la función $f \in RL_2[a, b]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

es decir, la sucesión de las sumas parciales

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$$

de esta serie converge a la función f en el sentido de la media cuadrática:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [f(t) - s_n(t)]^2 dt = 0.$$

Entonces, de acuerdo con el lema 12, para toda función $\varphi(x) \in RL_2[a, b]$ tenemos

$$(f, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, \varphi),$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\varphi(x)dx.$$

En particular, cuando $\varphi = 1$,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

En otras palabras,

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Así pues, *si una serie de funciones de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$ converge en éste en el sentido de la media cuadrática hacia cierta función, también* *de cuadrado integrable en $[a, b]$, entonces la serie puede integrarse término a término.*

Por cuanto de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones continuas se deduce la convergencia de dicha sucesión a la misma función también en el sentido de la media cuadrática (véase el p. 57.4), de la afirmación aquí demostrada proviene que

si la serie de funciones continuas converge en un segmento uniformemente, se puede integrarla término a término.

Este mismo resultado se ha obtenido por otro procedimiento antes, en el capítulo sobre las series (véase el teorema 9 en el p. 36.4).

Definición 36. *Dos espacios lineales X e Y con producto escalar (semiescalar) se llaman isomorfos, si son isomorfos como espacios lineales, y la aplicación f, que aplica el espacio X sobre el espacio Y y realiza este isomorfismo, conserva el producto escalar (producto semiescalar), es decir, para cualesquiera dos elementos $x \in X$ e $y \in X$ se verifica la igualdad*

$$(x, y) = (f(x), f(y)).$$

Dos espacios lineales isomorfos provistos de producto escalar (semiescalar) pueden diferenciarse sólo en la naturaleza de sus elementos y no en las propiedades métricas, razón por la cual en adelante muy a menudo los espacios lineales isomorfos provistos de producto escalar (semiescalar) no se destinguirán.

Aclaremos esto con un ejemplo. Sean X e Y^* unos espacios lineales provistos de producto escalar (semiescalar) y sea f la aplicación isomorfa del espacio X en un conjunto $Y \subset Y^*$. En este caso, "al identificar" los elementos del espacio X con los elementos correspondientes del conjunto Y, podemos considerar el espacio X como un subespacio del espacio Y^*. Se entiende (compárese con las construcciones correspondientes en el p. 57.1 y p. 57.5) el estudio del espacio lineal X^* compuesto de los elementos del espacio X y los del conjunto $Y^* \setminus Y$. Las operaciones de sumación de los elementos y su multiplicación por un número en el espacio X^* se introducen igual que en el p. 57.5 (después de la definición 27), mientras que el producto escalar (semiescalar) $(x, y)_{X^*}$, $x \in X^*$, $y \in X^*$, se determina en el espacio a través del producto escalar (semiescalar) en el espacio Y^* mediante la biyección $F: X^* \to Y^*$, que viene definida por la fórmula (57.19) de la manera siguiente:

$$(x, y)_{X^*} = (F(x), F(y)),$$

donde en el segundo miembro figura el producto escalar (semiescalar) en el espacio Y^*. Es fácil comprobar que el espacio X^* es isomorfo al espacio Y^*.

Ejercicios. 22. Demuéstrese que todos los espacios lineales n-dimensionales provistos de producto escalar son isomorfos entre sí.

22. Demuéstrese que todo espacio lineal n-dimensional provisto de producto escalar es completo en el sentido de la métrica engendrada por el producto escalar.

Definición 37. *Un espacio lineal provisto de producto escalar, completo en el sentido de la métrica engendrada por el producto escalar dado, se llama espacio de Hilbert.* *)

*) D. Hilbert (1862 — 1943), matemático alemán.

Un espacio simplemente lineal provisto de producto escalar lo llaman también *prehilbertiano*. Esta denominación se justifica por el siguiente teorema.

Teorema 4. *Todo espacio prehilbertiano X se contiene y, además, es denso, en cierto espacio de Hilbert X^*.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con los teoremas 1 del p. 57.1 y 3 del p. 57.6, basta mostrar que a la completación X^* del espacio lineal normalizado X puede prolongarse desde X un producto escalar, conservando las propiedades $1° \div 4°$. Esto se puede hacer pasando al límite. En efecto, por cuanto $\overline{X} = X^*$, para cualquier par de puntos $x \in X^*$ e $y \in X^*$ existen las sucesiones de puntos $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, de tal género que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

Probemos que existe $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$. Efectivamente, de la desigualdad (57.33) se infiere que para cualesquiera m y n naturales

$$|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)| \leqslant \|x_m - x_n\| \|y_m\| + \|x_n\| \|y_m - y_n\|.$$

Puesto que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, siendo convergentes, están acotadas en norma y son fundamentales, de la desigualdad mencionada proviene que la sucesión numérica $\{(x_n, y_n)\}$ es también fundamental y, por consiguiente, converge.

Pongamos, por definición, $(x, y) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$. Es fácil comprobar, pasando al límite, que esta definición no depende de la elección de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ que $x_n \to x$, $y_n \to y$, y que para la función (x, y), definida de este modo se cumplen las propiedades $1° - 4°$ del producto escalar. □

El espacio obtenido de Hilbert se llama *completación del espacio prehilbertiano de partida.*

Como ejemplo de espacio de Hilbert interviene el espacio euclídeo n-dimensional (véase (57.8)). Otros ejemplos serán considerados más abajo.

Ejercicio 23. Demuéstrese que un espacio prehilbertiano, isomorfo al espacio de Hilbert, es un espacio de Hilbert.

57.10. ESPACIO L_2

Recordemos (véase el ejemplo 3 en el p. 57.8) que un espacio lineal de funciones continuas en el segmento $[a, b]$ provisto de producto escalar, definido según la fórmula (57.30), se denota mediante $CL_2[a, b]$.

La norma en el espacio $CL_2[a, b]$ se determina mediante la fórmula (57.31).

Lema 13. *Es espacio $CL_2[a, b]$ no es de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN. Para convencerse de que todo espacio $CL_2[a, b]$ no es completo, basta considerar el espacio $CL_2[a, b]$ para cierto segmento fijo (¿por qué?). Elijamos, para concretar, el segmento $[-1, 1]$ y demos un ejemplo de la sucesión de funciones fundamental en el espacio $CL_2[-1, 1]$ que no converge en dicho espacio.

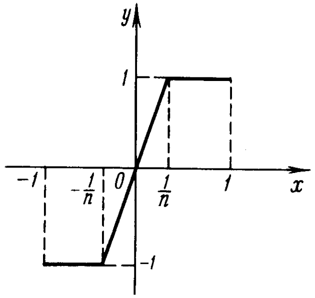


Fig. 237

Pongamos

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{n}, \\ nx, & \text{si} \quad -\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{57.34}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

(fig. 237). Es evidente que las funciones $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, son continuas en el segmento $[-1, 1]$. Observando luego que $|f_n(x)| \leqslant 1$, tenemos para $m > n$

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1/n}^{1/n} [|f_n(x)| + |f_m(x)|]^2 dx \leqslant 4 \int_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{8}{n}$$

de donde, evidentemente, se deduce que la sucesión (57.34) es fundamental en el espacio $CL_2[a, b]$.

Efectivamente, si está dado $\varepsilon > 0$, entonces, al elegir n_0 de modo tal que sea $8/n_0 < \varepsilon$, para todos los $n \geqslant n_0$ y cualesquiera $m > n$ tendremos $\|f_n - f_m\| < \dfrac{8}{n} \leqslant \dfrac{8}{n_0} < \varepsilon$. Como

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0, \\ 1 & \text{para} \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

es natural esperar que si la sucesión $\{f_n\}$ converge en el sentido de la media cuadrática, converge hacia la misma función, a la que converge puntualmente, es decir, hacia la función (véase fig. 238):

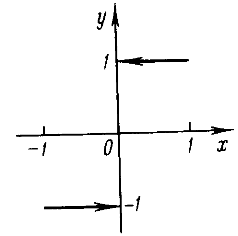


Fig. 238

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \\ 1 & \text{para} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Sin embargo, esta función f es discontinua, por lo cual $f \notin CL_2[0, 1]$. Por consiguiente, es natural esperar que la sucesión $\{f_n\}$ no tiene límite en el espacio $CL_2[a, b]$. Probémoslo.

No es difícil de convencerse de que la sucesión (57.34) converge en el segmento $[-1, 1]$ en el sentido de la seminorma (57.31) hacia la función f. En efecto,

$$\|f - f_n\|^{2*)} = \int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|^2 dx =$$

$$= \int_{-1/n}^{1/n} |f(x) - f_n(x)|^2 dx \leqslant \int_{-1/n}^{+1/n} [|f(x)| + |f_n(x)|^2] dx \leqslant$$

$$\leqslant 4 \int_{-1/n}^{+1/n} dx = \frac{8}{n} \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty, \tag{57.35}$$

pues, $|f(x)| \leqslant 1$, $|f_n(x)| \leqslant 1$, $x \in [-1, 1]$.

El límite según la seminorma no es único y por eso surge la cuestión: ¿existe o no, además, una función continua que también sirva de límite de la sucesión $\{f_n\}$ en el sentido de la media cuadrática? Mostremos que tal función no existe. Admitamos lo contrario. Supongamos que existe una función $g(x)$, continua en el segmento $[-1, 1]$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|g - f_n\| = 0. \tag{57.36}$$

En este caso

$$\|f - g\| = \|(f - f_n) + (f_n - g)\| \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n - g\|,$$

*) Por cuanto $f - f_n$ ya no es una función continua, el símbolo $\|\varphi\|$ significa aquí la seminorma (57.31) de la función φ. Esto debe tomarse en consideración también en los razonamientos que siguen.

donde ambos sumandos del segundo miembro, en virtud de (57.35) y (57.36), tienden a cero cuando $n \to \infty$, mientras que el primer miembro no depende de n, por consiguiente,

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx = \|f - g\|^2 = 0;$$

y, con mayor razón,

$$\int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0, \quad \int_{0}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0. \tag{57.37}$$

Examinemos, por ejemplo, el caso de $x \geqslant 0$. Dado que las funciones f y g son continuas en el intervalo (0, 1), entonces, en virtud de (57.37), coinciden en dicho intervalo (véase la propiedad 9 de la integral definida en el p. 28.1). Por eso

$$g(+0) = \lim_{x \to +0} g(x) = \lim_{x \to +0} f(x) = 1.$$

Por analogía, considerando el caso cuando $x \leqslant 0$, tendremos

$$g(-0) = \lim_{x \to -0} f(x) = -1,$$

es decir, g es una función discontinua.

La contradicción obtenida demuestra precisamente la afirmación. □

Así pues, el espacio lineal $CL_2[a, b]$ no es completo. No obstante, sabemos que todo espacio prehilbertiano puede ser complementado hasta que se obtenga un espacio completo, en particular, esto es cierto con relación al espacio en consideración. Volveremos a este problema un poco más abajo y ahora mismo analizaremos un espacio más.

Trataremos de abarcar una clase de funciones más amplia que las funciones continuas, a saber, consideraremos el espacio lineal $RL_2[a, b]$ de las funciones de cuadrado integrable en cierto segmento $[a, b]$ (véase el ejemplo 3 en el p. 57.8) y provisto de producto semiescalar que viene definido mediante la fórmula (57.30) y construyamos, valiéndonos de este espacio, otro espacio dotado de producto escalar.

Definición 38. *Dos funciones f y g de cuadrado integrable en el segmento* $[a, b]$ *las llamaremos equivalentes, si la seminorma* (57.31) *de su diferencia es igual a cero*:

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx} = 0. \tag{57.38}$$

La equivalencia de las funciones en el sentido de esta definición se designará por el símbolo.

$$f \sim g. \tag{57.39}$$

El empleo en este caso del mismo símbolo que se ha usado para designar la igualdad asintótica de las funciones, es decir, designar su equivalencia en el sentido del orden de su variación (véase la definición 3 en el p. 8.2), no nos llevará a equivocaciones algunas, puesto que cada vez quedará claro de qué equivalencia entre las funciones se trata en el caso dado.

La relación de equivalencia (57.39) posee las siguientes propiedades:

1°) $f \sim f$;

2°) si $f \sim g$, también $g \sim f$;

3°) si $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces $f \sim h$.

Un conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$, es decir, el espacio $RL_2[a, b]$ lo dividiremos en clases de las funciones equivalentes entre sí. Dichas clases se llamarán clases de equivalencia y se denotarán por letras latinas mayúsculas $F, G, H, \ldots$, y la totalidad de ellas, por $\mathfrak{F}$. Toda función f, perteneciente a la clase de equivalencia F, se denominará representante de dicha clase. Expresando brevemente el proceso de construcción del conjunto $\mathfrak{F}$, suele decirse que dicho conjunto se obtiene del conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable por "identificación" de sus elementos equivalentes. Así pues, ahora cada conjunto de las funciones equivalentes se considera como un único elemento del conjunto $\mathfrak{F}$.

Para todo $F \in \mathfrak{F}$ y cada número real λ el elemento λF se determina de la manera siguiente. Elijamos un representante $f \in F$, entonces la función λf será también una función de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$, y por lo tanto, pertenece a cierta clase de equivalencia, es decir, será un representante de cierto elemento, perteneciente a $\mathfrak{F}$, el cual se determina precisamente como elemento λF.

Con el fin de mostrar que esta definición es correcta, conviene demostrar que el elemento λF no depende de cómo se elige la función $f \in F$. En efecto, si $f \in F$ y $f_1 \in F$, entonces $f_1 \sim f$, es decir, $\|f_1 - f\| = 0$. Por consiguiente, $\|\lambda f_1 - \lambda f\| = |\lambda| \, \|f_1 - f\| = 0$, lo que quiere decir que $\lambda f_1 \sim \lambda f$. I or esta razón las funciones λf_1 y λf pertenecen a una misma clase de equivalencia, es decir, a un mismo elemento del conjunto $\mathfrak{F}$.

Definamos ahora la operación de adición de los elementos del conjunto $\mathfrak{F}$. Sea $F \in \mathfrak{F}$ y $G \in \mathfrak{F}$. Elijamos unas funciones $f \in g$ y $f \in G$. Un elemento $F + G$ lo definamos como una clase de equivalencia que contiene el elemento $f + g$. Esta definición es unívoca, pues, si

$$f \in F, \quad f_1 \in F, \quad g \in G, \quad g_1 \in G$$

y, por consiguiente,

$$f_1 \sim f, \quad g_1 \sim g,$$

entonces

$$\|f_1 - f\| = 0, \quad \|g_1 - g\| = 0.$$

Por esto

$$0 \leqslant \|(f_1 + g_1) - (f + g)\| \leqslant \|f_1 - f\| + \|g_1 - g\| = 0,$$

es decir,

$$f_1 + g_1 \sim f + g$$

y, de este modo, la función $f_1 + g_1$ pertenece a la misma clase de equivalencia que la función $f + g$.

Así pues, para sumar los elementos del conjunto $\mathfrak{F}$ o multiplicarlos por un número, se deben elegir sus representantes, sobre los cuales ha de realizarse la operación indicada; de resultas se obtendrá cierta función; la clase de equivalencia, de cuyo representante es la citada función, será precisamente el resultado de la operación que se considera.

El conjunto $\mathfrak{F}$ con las operaciones introducidas λF y $F + G$ forma un espacio lineal. En efecto, para dichas operaciones se cumplen las propiedades 1°, 2°, 3° de la definición 11 en el p. 57.2. Comprobemos, por ejemplo, que para cualesquiera $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$ y todo número λ se verifica la desigualdad

$$\lambda(F + G) = \lambda F + \lambda G. \tag{57.40}$$

Si $f \in F$ y $g \in G$, entonces, de acuerdo con la definición de adición de elementos del conjunto $\mathfrak{F}$, obtendremos $f + g \in F + G$, $\lambda(f + g) \in \lambda(F + G)$. Por cuanto f y g son los elementos del espacio lineal, entonces $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$. En virtud de la regla de multiplicación de los elementos de $\mathfrak{F}$ por un número y de adición de estos elementos

$$\lambda f \in \lambda F, \quad \lambda g \in \lambda G, \quad \lambda f + \lambda g \in \lambda F + \lambda G.$$

De este modo, las clases de equivalencia $\lambda(F + G)$ y $\lambda F + \lambda G$ contienen un elemento común $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$, y, por lo tanto, coinciden. La igualdad (57.40) queda demostrada.

Análogamente se comprueba también el cumplimiento de las demás propiedades de los espacios lineales (véase la definición 11 en el p. 57.2) para las operaciones de adición y multiplicación por un número de los elementos pertenecientes al conjunto $\mathfrak{F}$.

Indiquemos que la clase de equivalencia que contiene una función idénticamente igual a cero en el segmento $[a, b]$ representa el cero del espacio lineal obtenido $\mathfrak{F}$. Esta clase se compone de aquellas, y sólo aquellas, funciones f que son equivalentes a cero, en otras palabras, para las cuales la seminorma (57.31) es igual a cero: $\|f\| = 0$, es decir,

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0.$$

Definamos ahora en el espacio lineal $\mathfrak{F}$ la multiplicación escalar. Sea $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{F}$; elijamos, en las clases F y G, ciertas representantes $f \in F$ y $g \in G$ y pongamos

$$(F, G) \overset{\text{def}}{=} (f, g). \tag{57.41}$$

De este modo, para multiplicar escalarmente los elementos del espacio $\mathfrak{F}$, es preciso elegir sus representantes y multiplicarlos escalarmente uno por otro (en el sentido del producto semiescalar (57.30)). El resultado obtenido será precisamente igual al producto escalar de los elementos en consideración del conjunto $\mathfrak{F}$.

La definición (57.41) tampoco depende de la elección de las funciones en las clases de equivalencia. En efecto, si

$$f \in F, \quad f_1 \in F, \quad g \in G, \quad g_1 \subset G,$$

entonces

$$f_1 \sim f, \quad g_1 \sim g$$

y, por consiguiente,

$$\|f_1 - f\| = 0, \; \|g_1 - g\| = 0.$$

Por eso, haciendo uso de la desigualdad de Cauchy — Schwarz (57.28), obtendremos

$$0 \leqslant |(f_1, g_1) - (f, g)| = |[(f_1, g_1) - (f, g_1)] + [(f, g_1) - (f, g)]| \leqslant$$
$$\leqslant |(f_1 - f_1, g_1)| + |(f_1, g_1 - g)| \leqslant \|f_1 - f\| \|g_1\| + \|f\| \|g_1 - g\| = 0.$$

De este modo $(f_1, g_1) = (f, g)$.

La función (57.41) satisface todas las propiedades de la multiplicación escalar. Efectivamente, sea $f \in F \in \mathfrak{F}$, $g \in G \in \mathfrak{F}$, $h \in H \in \mathfrak{F}$, y sean λ y μ unos números, entonces

$$(\lambda F + \mu G, H) = (\lambda f + \mu g, h) = \lambda(f, h) + \mu(g, h) = \lambda(F, H) + \mu(G, H),$$
$$(F, G) = (f, g) = (g, f) = (G, F),$$
$$(F, F) = (f, f) \geqslant 0.$$

Por fin, si $(F, F) = 0$, esto es testimonio de que para cualquier función $f \in F$ se tiene $(f, f) = \|f\|^2 = 0$, es decir, $f \sim 0$, que, de acuerdo con lo dicho anteriormente, significa precisamente que el elemento F es el elemento nulo del espacio $\mathfrak{F}$.

Definición 39. *El espacio lineal* $\mathfrak{F}$ *provisto de producto escalar* (57.41) *lleva el nombre de espacio* $\widetilde{RL}_2 = \widetilde{RL}_2[a, b]$.

Indiquemos que la norma $\|F\|_{\widetilde{RL}_2}$ del elemento F en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ se determina, de conformidad con (57.27) y (57.41), en términos de la seminorma $\|f\|_{RL_2}$ de la función $f \in F$ según la fórmula

$$\|F\|_{\widetilde{RL}_2} = \|f\|_{RL_2} = \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{1/2}, \quad f \in F, \tag{57.42}$$

con la particularidad de que, en virtud de la univocidad demostrada de la definición de producto escalar, la definición 39 es unívoca, es decir, no depende de la elección de la función $f \in F$.

OBSERVACIÓN 1. Los elementos del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ están constituidos por las clases de funciones equivalentes; no obstante, en la literatura matemática se encuentra a menudo la expresión "función del espacio $\widetilde{RL}_2$". Esta expresión convencional significa simplemente que se trata de una función de cuadrado integrable la que, por consiguiente, pertenece a una de las clases de funciones equivalentes que se consideran, es decir, es el representante de esta clase. Dicha expresión es cómoda, puesto que las operaciones de sumación, de multiplicación por un número y de multiplicación escalar de las clases de funciones equivalentes se reducen a la operación correspondiente sobre sus representantes, con la particularidad de que el resultado no depende de la elección de los representantes mencionados. Esta circunstancia justifica en cierto sentido una expresión de uso frecuente "el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ se compone de las funciones de cuadrado integrable", en este caso el espacio $\widetilde{RL}_2$ se designa a menudo simplemente mediante RL_2.

Toda función continua en el segmento $[a, b]$, siendo función de cuadrado integrable en este segmento, pertenece a cierta clase de equivalencia, es decir, a cierto elemento del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$. Además, en la clase indicada no hay otra función continua, pues si las funciones continuas son equivalentes, son también iguales.

Estudiaremos una aplicación que a toda función continua $f \in CL_2[a, b]$ le pone en correspondencia la clase de equivalencia $F \in \widetilde{RL}_2[a, b]$, a la que esta función pertenece: $f \in F$. Esta aplicación se denomina *aplicación natural* de $CL_2[a, b]$ en $\widetilde{RL}_2[a, b]$. En virtud de la propia definición de las operaciones de sumación de elementos (que son las clases de equivalencia), de su multiplicación por un número y su producto escalar en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ que se reducen a las mismas operaciones sobre los representantes de las clases de equivalencia, la aplicación natural es lineal y conserva el producto escalar. Es la aplicación biunívoca (inyección) del espacio $CL_2[a, b]$ en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, puesto que si, realizándose esta aplicación, dos funciones continuas se aplicaran en un mismo elemento del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, es decir, en la misma clase de equivalencia, entonces ambas pertenecerían a esta clase. Lo último es posible, de acuerdo con lo afirmado más arriba, sólo en el caso en que representan una misma función continua.

Con el fin de estudiar las propiedades restantes de la aplicación natural, demostremos tres lemas sobre la aproximación de las funciones. Para abreviar, en lugar de $\|\cdot\|_{RL_2}$ escribiremos en estos lemas simplemente $\|\cdot\|$.

Lema 14. *Supongamos que el cuadrado de la función f es integrable en un intervalo, finito o infinito, cuyos extremos son a y b,* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. *En este caso para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe tal función* φ (véase el p. 55.2), *finita, escalonada e igual a cero fuera del intervalo mencionado, que*

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para simplificar, que la función f es integrable según Riemann en cualquier segmento $[\xi, \eta]$, $a < \xi < \eta < b$, es decir, dentro del segmento en consideración con los extremos a y b no hay puntos singulares de la función f (véase el p. 55.1). El caso general se reduce fácilmente a éste.

Sea dado $\varepsilon > 0$. Fijemos ξ y η de modo tal que sea

$$\int_a^\xi f^2(x)dx + \int_\eta^b f^2(x)dx < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{57.43}$$

Esto es posible, puesto que la integral extendida al segmento $[a, b]$ de la función f^2 es convergente. La función f, siendo integrable según Riemann en el segmento $[\xi, \eta]$, está acotada en él:

$$|f(x)| \leqslant M, \xi \leqslant x \leqslant \eta, \tag{57.44}$$

donde M es una constante.

De acuerdo con el lema 2 del p. 55.2, para $\varepsilon > 0$ dado existe una función escalonada finita φ tal que su portador supp φ está contenido en el segmento $[\xi, \eta]$, es decir, supp $\varphi \subset [\xi, \eta]$,

$$|\varphi(x)| \leqslant M, \quad x \in [\xi, \eta] \tag{57.45}$$

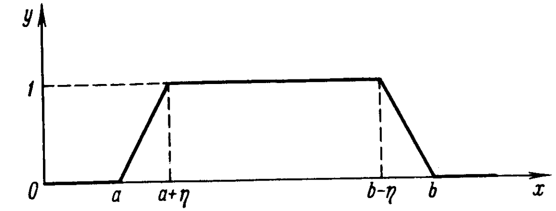


Fig. 239

(esto proviene de la fórmula (55.9)) y

$$\int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon^2}{4M}. \tag{57.46}$$

Al aplicar sucesivamente las desigualdades (57.43), (57.44), (57.45) y (57.46), obtendremos:

$$\|f - \varphi\|^2 = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = \int_a^\xi f^2(x)dx + \int_\eta^b [f^2(x)dx +$$

$$+ \int_\xi^\eta [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} + \int_\xi^\eta [|f(x)| + |\varphi(x)|]\,|f(x) - \varphi(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} + 2M \int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon^2}{2} + 2M\frac{\varepsilon^2}{4M} = \varepsilon^2.$$

De aquí se deduce que $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. □

Lema 15. *Sea* φ *una función escalonada finita, igual a cero fuera del segmento* $[a, b]$; *entonces, para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe una función g, finita, continua en todo el eje numérico e igual a cero fuera del segmento citado, de tal índole que*

$$\|g - \varphi\| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Será suficiente considerar el caso de la función característica del semiintervalo, pues toda función escalonada finita es una combinación lineal finita de las funciones semejantes (véase el p. 55.2). Así pues, sea dada una función

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad a \leqslant x < b, \\ 0 & \text{para} \quad x < a \text{ y } x \geqslant b, \end{cases}$$

y dado también $\varepsilon > 0$. Tomemos un $\eta > 0$ de modo tal que se cumplan las desigualdades

$$\eta < \frac{\varepsilon^2}{8}, \quad \eta < \frac{b - a}{2},$$

y consideremos la función $g(x)$ cuya gráfica está expuesta en la fig. 239.

Dicha función puede ser escrita analíticamente del modo siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \text{ y } x > b, \\ \dfrac{x-a}{\eta} & \text{para } a \leqslant x \leqslant a + \eta, \\ 1 & \text{para } a + \eta < x < b - \eta, \\ \dfrac{b-x}{\eta} & \text{para } b - \eta \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Es evidente que $g(x)$ es una función finita continua en todo el eje numérico. Por cuanto $|\chi(x)| \leqslant 1$, $|g(x)| \leqslant 1$, $-\infty < x < +\infty$, entonces

$$\|\chi - g\|^2 = \int_a^b [\chi(x) - g(x)]^2 dx = \int_a^{a+\eta} [\chi(x) - g(x)]^2 dx +$$

$$+ \int_{b-\eta}^{b} [\chi(x) - g(x)]^2 dx \leqslant \int_a^{a+\eta} [|\chi(x)| + |g(x)|]^2 dx +$$

$$+ \int_{b-\eta}^{b} [|\chi(x)| + |g(x)|]^2 dx \leqslant 4 \int_a^{a+\eta} dx + 4 \int_{b-\eta}^{b} dx < 8\eta < \varepsilon^2,$$

es decir, $\|\chi - g\| < \varepsilon$. $\square$

Lema 16. *Si f es una función de cuadrado intergable en el segmento $[a, b]$, constituye en este segmento el límite, en el sentido de la media cuadrática, para la sucesión de funciones finitas y continuas en todo el eje numérico f_n, $n = 1, 2, \ldots$, cuyos portadores se disponen en el segmento $[a, b]$:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \tag{57.47}$$

DEMOSTRACIÓN. Cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, en virtud del lema 14, existe tal función finita escalonada φ, igual a cero fuera del segmento $[a, b]$, que

$$\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y, en virtud del lema 15, para esta función escalonada φ se encontrará tal funcion g, continua en todo el eje numérico e igual a cero fuera del segmento $[a, b]$, que

$$\|\varphi - g\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y, por lo tanto, (fig. 240)

$$\|f - g\| \leqslant \|f - \varphi\| + \|\varphi - g\| < \varepsilon.$$

Al elegir ahora una sucesión numérica ε_n que tiende a $+0$ cuando $n \to \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, y designar por f_n una función continua en todo el eje numérico que, en virtud de la construcción citada, corresponde al número ε_n y es igual a cero fuera del segmento $[a, b]$, obtendremos la sucesión buscada $\{f_n\}$ que satisface la condición (57.47) (la definición del límite de la sucesión de funciones en el sentido de la media

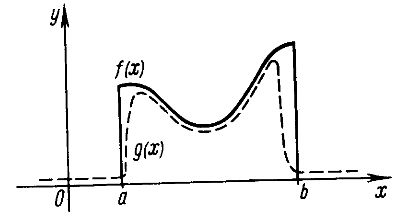


Fig. 240

cuadrática véase en el p. 57.5) y es tal que supp $f_n \subset [a, b]$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. $\square$

Definición 40. *Un subconjunto del espacio $CL_2[a, b]$, compuesto de las funciones f que se reducen a cero en los extremos del segmento $[a, b]$: $f(a) = f(b) = 0$, se llama espacio $\mathring{C}L_2[a, b]$.*

Obviamente, el lema 16 significa que toda función de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$ puede aproximarse, con cualquier grado de precisión en el sentido de la media cuadrática, mediante las funciones pertenecientes a $\mathring{C}L_2[a, b]$. Está claro que $\mathring{C}L_2[a, b]$ es un espacio lineal prehilbertiano y

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b]. \tag{57.48}$$

Volveremos ahora a la aplicación natural

$$CL_2[a, b] \to \widetilde{RL}_2[a, b].$$

Teorema 5. *La aplicación natural $CL_2[a, b] \to \widetilde{RL}_2[a, b]$, es decir, aquella que a toda función continua en el segmento $[a, b]$ le pone en correspondencia una clase de equivalencia a la que dicha función pertenece, es la aplicación isomorfa del espacio $CL_2[a, b]$ en $\widetilde{RL}_2[a, b]$, con la particularidad de que la imagen del espacio, $\mathring{C}L_2[a, b]$ (y, por consiguiente, en virtud de (57.48), de todo el espacio $CL_2[a, b]$ también) es densa en $\widetilde{RL}_2[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5. Designemos con Φ la aplicación natural del espacio $CL_2[a, b]$ en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, es decir, aquella que a toda función f, continua en el segmento $[a, b]$, le pone en correspondencia una clase de funciones equivalentes de cuadrado integrable en dicho segmento a la que f pertenece, en otras palabras, la clase de equivalencia, de cuyo representante interviene la propia f. De este modo, si

$$f \in CL_2[a, b] \quad \text{y} \quad f \in F \in \widetilde{RL}_2[a, b],$$

entonces $\Phi(f) = F$.

Sea $F = \Phi(f) = 0$; en este caso $\|F\| = 0$, pero $f \in F$, por lo cual, también $\|f\| = \theta$. De conformidad con la propiedad de la norma, de aquí se deduce que $f = 0$, es decir, el núcleo de la aplicación Φ se compone sólo del elemento nulo. Por cuanto la aplicación natural Φ es lineal, aplica biunívocamente el espacio $CL_2[a, b]$ en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ (véase el lema 2 en el p. 57.2).

Mostremos que la imagen del espacio $\mathring{C}L_2[a, b]$ en esta aplicación es un conjunto denso en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$. Supongamos que $F \in \widetilde{RL}_2[a, b]$ y la función f es el representante del segmento F, es decir, $f \in F$. Como f es una función de cuadrado integrable en el segmento $[a, b]$, entonces, de acuerdo con el lema 3, es el límite en el sentido de la media cuadrática para cierta sucesión de las funciones f_n, continuas en el segmento $[a, b]$, que se reducen a cero en los extremos de éste (véase (57.47)), es decir $f_n \in \mathring{C}L_2[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$. Si $f_n \in F_n \in \widetilde{RL}_2[a, b]$, entonces, según la definición de norma en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, obtenemos

$$\|F_n - F\|_{\widetilde{RL}_2} = \|f_n - f\|_{RL_2},$$

donde a la derecha figura, como siempre, la seminorma (57.31). De aquí, en virtud de la igualdad (57.47), se obtiene

$$\lim_{n \to \infty} \|F_n - F\| = 0. \qquad (57.49)$$

Por cuanto la clase de equivalencia F ha sido un elemento fijo arbitrario del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, y $F_n = \Phi(f_n)$, donde f_n es una función continua en el segmento $[a, b]$ que se reduce a cero en los extremos de este segmento y, por lo tanto, $F_n \in \Phi(\mathring{C}L_2[a, b])$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces la igualdad (57.49) significa precisamente la densidad de la imagen del conjunto $\mathring{C}L_2[a, b]$ en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ en el transcurso de la aplicación Φ.

Para demostrar la densidad de la imagen del conjunto $CL_2[a, b]$ en la aplicación natural de éste en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, observemos que de la inclusión (57.48) se infiere, evidentemente, que

$$\Phi(\mathring{C}L_2[a, b]) \subset \Phi(CL_2[a, b]) \subset \widetilde{RL}_2[a, b].$$

Mientras tanto, si en algún espacio métrico X es denso el conjunto A, es decir, si $\bar{A} = X$ y $A \subset B \subset X$, entonces, por supuesto, el conjunto B es también denso en X, pues $\bar{A} \subset \bar{B} \subset X$, y, como $\bar{A} = X$, se tiene también que $\bar{B} = X$. Por eso, de la densidad del conjunto $\Phi(\mathring{C}L_2[a, b])$ en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ se desprende que el conjunto $\Phi(CL_2[a, b])$ es también denso en él. □

Identificando toda función continua $f \in CL_2[a, b]$ con la clase de funciones equivalentes $F \in \widetilde{RL}_2[a, b]$ a la que la función f pertenece: $f \in F$, es decir, identificando f con su imagen en la aplicación natural Φ, llegamos a que $CL_2[a, b]$ es un subconjunto del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$:

$$CL_2[a, b] \subset \widetilde{RL}_2[a, b]. \qquad (57.50)$$

Esta inclusión lleva el nombre de *encaje natural* del espacio CL_2 en el espacio $\widetilde{RL}_2$.

Así pues, en virtud de (57.48) y (57.50), resultan lícitas las inclusiones

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset \widetilde{RL}_2[a, b],$$

con la particularidad de que, de acuerdo con el teorema 5,

$$\overline{\mathring{C}L_2[a, b]} = \widetilde{RL}_2[a, b],$$

es decir, $\mathring{C}L_2[a, b]$, y, por ende, $CL_2[a, b]$, son densos en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$.

Se puede mostrar que el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ no es completo, es decir, no es espacio de Hilbert.

Problema 37. Demuéstrese que el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ no es completo.

En el p. 57.9 se ha demostrado que todo espacio prehilbertiano puede ser completado hasta que se obtenga un espacio completo, es decir, un espacio de Hilbert. En el caso particular, esto puede realizarse con relación al espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$.

Definición 41. *La completación del espacio prehilbertiano $\widetilde{RL}_2 = \widetilde{RL}_2[a, b]$ se denomina espacio $L_2 = L_2[a, b]$.*

Por definición de la completación tenemos

$$\widetilde{RL}_2[a, b] \subset L_2[a, b] \qquad (57.51)$$

y $\widetilde{RL}_2[a, b]$ es denso en el espacio $L_2[a, b]$, es decir,

$$\overline{\widetilde{RL}_2[a, b]} = L_2[a, b].$$

En virtud de las inclusiones (57.48), (57.50) y (57.51) tienen lugar los encajes naturales

$$\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset \widetilde{RL}_2[a, b] \subset L_2[a, b]. \qquad (57.52)$$

Resulta que no sólo $\widetilde{RL}_2$ es denso en el espacio L_2, sino que $\mathring{C}L_2$ es también denso en L_2.

Teorema 6. *El espacio $\mathring{C}L_2[a, b]$ es denso en el espacio $L_2[a, b]$.*

Corolario. *El espacio $CL_2[a, b]$ es denso en el espacio $L_2[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6. Sea $f \in L_2[a, b]$ y sea arbitrariamente fijado $\varepsilon > 0$. Para simplificar, todos los elementos del espacio $L_2[a, b]$ se designarán por letras latinas minúsculas, aunque dichos elementos no son, en el caso general, funciones. Por cuanto el espacio $L_2[a, b]$ es una completación del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$, existe obligatoriamente tal elemento $g \in \widetilde{RL}_2[a, b]$ que

$$\|f - g\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De conformidad con la inclusión (57.52) y densidad del conjunto $\mathring{C}L_2[a, b]$, en el espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ existe tal elemento $h \in \mathring{C}L_2[a, b]$, que

$$\|g - h\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por eso

$$\|f - h\|_{L_2} \leqslant \|f - g\|_{L_2} + \|g - h\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto precisamente implica que el conjunto $\mathring{C}L_2[a, b]$ es denso en el espacio $L_2[a, b]$. □

El corolario se deduce naturalmente del teorema, puesto que (como se ha probado en la demostración del teorema 5) si un subconjunto A de cierto conjunto B, $A \subset B$, es denso en algún espacio métrico $X \supset B$, entonces el mismo conjunto B es, con mayor razón, denso en X. En el caso dado $\mathring{C}L_2[a, b] \subset CL_2[a, b] \subset L_2[a, b]$ y $\mathring{C}L_2[a, b]$ es denso en $L_2[a, b]$. Por eso, $CL_2[a, b]$ es también denso en $L_2[a, b]$. □

Ejercicio 24. Demuéstrese que si X es un espacio métrico, $A \subset B \subset X$, el conjunto A es denso en el conjunto B, y si el conjunto B es denso en el espacio X, entonces el conjunto A es también denso en el espacio X.

OBSERVACIÓN 2. Si consideramos $L_2[a, b]$ como un espacio que se obtiene del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ mediante la construcción (descrita en los teoremas 1, 3, 4 del presente párrafo) de la completación de espacios, entonces, como sus elementos intervendrán las clases de sucesiones fundamentales equivalentes compuestas de las clases de funciones equivalentes de cuadrado integrable. Si, en este caso, realizamos la identificación de los espacios CL_2 y RL_2 con sus imágenes en L_2, según se ha indicado más arriba, y de este modo consideramos que

$$CL_2 \subset \widetilde{RL}_2 \subset L_2,$$

resultará pues que el espacio L_2 queda compuesto de las funciones continuas, de las clases de funciones equivalentes de cuadrado integrable privadas de funciones continuas, y de los "elementos abstractos" que representan las clases indicadas de sucesiones fundamentales. Luego, todos los elementos del espacio $\widetilde{RL}_2$ pueden ser "sustituidos", de modo convencional en el sentido de la observación 1, por unas funciones, esto es, por sus representantes arbitrariamente elegidos. Entonces el espacio L_2 resultará compuesto de las funciones de cuadrado integrable y los mismos elementos abstractos que surgen forzosamente en el transcurso de completación del espacio $\widetilde{RL}_2$, en vista de que no es completo. Esta "sustitución convencional" de los elementos del espacio $\widetilde{RL}_2[a, b]$ por sus representantes refleja una afirmación exacta de que las operaciones sobre las clases de funciones equivalentes se reducen a las operaciones correspondientes con sus representantes en el sentido indicado arriba.

Resulta pues, y esto es muy interesante e importante, que los elementos abstractos mencionados pueden considerarse no como las clases de sucesiones fundamentales de las clases de equivalencia, sino como ciertas funciones, con más precisión, como clases de funciones equivalentes en el sentido de la definición 38, con la particularidad de que el producto escalar para ellas se determina también mediante las fórmulas (57.30) y (57.41) con la única peculiaridad consistente en que la integral en dichas fórmulas conviene entenderla no en el sentido de la integral de Riemann, propia o impropia, sino en el sentido de la así llamada integral de Lebesgue. El análisis de este problema sale, sin embargo, de los márgenes de los métodos que se consideran y no se realizará en el curso dado. Se puede encontrar dicho análisis en el excelente libro de texto "Curso del análisis matemático" de S. M. Nikolski.

OBSERVACIÓN 3. La definición del espacio $L_2[a, b]$ se generaliza también del modo natural al caso de un intervalo infinito. Consideraremos, para concretar, todo el eje numérico. Para dos funciones φ y ψ, continuas e integrables en cuadrado en todo el eje real, el producto escalar se determinará según la fórmula

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)dx. \tag{57.53}$$

Esta definición es correcta, pues la integral que figura en el segundo miembro converge, asumidas las suposiciones respecto de las funciones φ y ψ, y converge, además, absolutamente. Esto proviene inmediatamente de la desigualdad

$$|\varphi(x)\psi(x)| \leqslant \frac{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}{2}.$$

Las propiedades del producto escalar para (57.53) se comprueban fácilmente. Se puede mostrar, por analogía con el caso de un intervalo finito, que el espacio métrico (que se obtiene en este caso) de funciones continuas e integrables en cuadrado, al igual que el espacio prehilbertiano que se obtiene mediante la "identificación" de las funciones equivalentes de cuadrado integrable en todo el eje numérico, no es completo en la métrica engendrada por el producto escalar (57.53). Las completaciones de estos espacios coinciden salvo un isomorfismo, y se designan con $L_2(-\infty, +\infty)$.

Ejercicios. 25. Demuéstrese que la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en el segmento [0, 1] no es un límite, en el sentido de la media cuadrática, de una sucesión de funciones continuas.

26. Demuéstrese que para una sucesión de funciones los conceptos de convergencia en media en el sentido de L_1 y en el sentido de L_2 no son equivalentes.

27. Demuéstrese que si una sucesión de funciones integrables en cierto segmento converge uniformemente en el mismo hacia cierta función integrable en él, entonces dicha sucesión en el segmento mencionado converge hacia la misma función y converge en media tanto en el sentido de L_1, como en el de L_2.

28. Constrúyase un ejemplo de sucesión de funciones, continuas en cierto segmento, que converja en él hacia cierta función continua en media en el sentido de L_2, pero no converja uniformemente en dicho segmento.

29. Constrúyase un ejemplo de sucesión de funciones continuas no negativas en un segmento que converja en él en media, pero no converja en el sentido de la media cuadrática.

Problema 38. Demuéstrese que para cualquier p, $1 \leqslant p < +\infty$, y cualquier intervalo con extremos en los puntos a y b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, el conjunto de funciones continuas en este intervalo es denso en el espacio $\widetilde{RL}_p(a, b)$.

Hemos descrito diferentes tipos de los espacios. En el análisis matemático se estudian, principalmente, los espacios cuyos elementos están constituidos por funciones. Los espacios de este género se denominan *funcionales*.

En los ejemplos citados se consideraban, para simplificar, las funciones de una sola variable. De un modo similar, si tomamos un espacio lineal de funciones continuas en la clausura de cierto conjunto $G \subset R^n$, medible según Jordan, introducimos un producto escalar de acuerdo con la fórmula $(\varphi, \psi) = \int \varphi\psi dG$ y completamos a continuación el espacio obtenido, obtendremos un espacio de Hilbert que se denota con $L_2(G)$.

Se puede mostrar en este caso que todos los espacios $L_2(G)$, obtenidos de este modo, serán espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

El hecho de que el espacio $L_2[a, b]$ es de dimensión infinita será confirmado en el p. 58.2 y la separabilidad de este espacio se demostrará en el p. 58.3 (teorema 2).

En adelante (véase el p. 58.5, teorema 10) demostraremos que todos los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita son isomorfos entre sí. De este modo, al estudiar las propiedades determinadas de las funciones de una o varias variables, se logra formar los espacios L_2 de algunos de los conjuntos de dichas funciones. No obstante, habiéndose convertido en los puntos de estos espacios, las funciones pierden muchas de sus propiedades individuales. En particular, los espacios L_2 no se diferencian uno del otro en lo que se refiere al número de variables, de las cuales dependen las funciones que forman parte de estos espacios. Naturalmente, esta circunstancia no impide de ninguna manera de que los espacios funcionales se empleen con gran éxito tanto en los problemas netamente teóricos, como en las aplicaciones de las matemáticas.

Las numerosas definiciones introducidas en este párrafo se utilizarán en lo que sigue para describir ciertas propiedades de diferentes clases de funciones en términos geométricos habituales y demostrativos (espacio, punto, distancia, vector, base, etc.) y ayudarán a establecer la analogía que existe entre los espacios vectoriales n-dimensionales ordinarios y los de funciones y aclarar, además, las propiedades específicas de los espacios funcionales de dimensión infinita.

§ 58. BASES ORTONORMALIZADAS Y DESARROLLOS SEGÚN ELLAS

58.1. SISTEMAS ORTONORMALIZADOS

Definición 1. *Sea X un espacio lineal con un producto semiescalar. Los elementos $x \in X$ e $y \in X$ se denominan ortogonales, si $(x, y) = 0$, y en este caso se anota también $x \perp y$.*

Definición 2. *Un sistema de elementos x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ es cierto conjunto de índices) del espacio lineal X provisto de producto semiescalar se denomina ortogonal, si dos elementos cualesquiera suyos son ortogonales. Si, además, la norma de todo elemento suyo es igual a la unidad, es decir, $\|x_\alpha\| = 1, \alpha \in \mathfrak{A}$, el sistema se llama ortonormalizado.*

Evidentemente, si el sistema x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, es ortogonal y $x_\alpha \neq 0$, cualquiera que sea $\alpha \in \mathfrak{A}$, aquél se puede "normalizar". Efectivamente, al dividir todo elemento por su norma, es decir, al multiplicar x_α por el número $1/\|x_\alpha\|$, obtendremos un sistema ortonormalizado

$$\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}, \alpha \in \mathfrak{A}\right\}.$$

Recordemos que si X es un espacio con un producto escalar, la condición $\|x\| \neq 0$ es equivalente a que $x \neq 0$.

Lema 1. *Si un sistema $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ de elementos del espacio X provisto de producto semiescalar es ortogonal y $\|x_\alpha\| \neq 0$, para cualquier $\alpha \in A$, dicho sistema es linealmente independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que para ciertos elementos

$$x_{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in \mathfrak{A}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

se tiene

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0.$$

Multipliquemos escalarmente ambos miembros de esta igualdad por x_{α_k}, k está fijado ($k = 1, 2, \ldots, n$), obtendremos

$$\lambda_k (x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) = 0,$$

pues, por ser ortogonal el sistema $(x_{\alpha_j}, x_{\alpha_k}) = 0, j \neq k$. Al observar luego que, por hipótesis, $x_{\alpha_k} \neq 0$, y, por lo tanto, $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$, obtenemos $\lambda_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

La independencia lineal del sistema x_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, está demostrada. □

Demostremos un lema más que expresa el criterio de independencia lineal de las funciones a través de los productos escalares.

Lema 2. *Si para el sistema de elementos $x_1, \ldots, x_n$ del espacio X provisto de producto escalar el determinante*

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1)(x_1, x_2) \ldots (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1)(x_2, x_2) \ldots (x_2, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_n, x_1)(x_n, x_2) \ldots (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

es igual a cero, el sistema es linealmente dependiente.

El determinante $G(x_1, \ldots, x_n)$ recibe el nombre de *determinante de Gram**) para el sistema dado.

DEMOSTRACIÓN. Consideraremos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{58.1}$$

o bien

$$\lambda_1 (x_1, x_i) + \ldots + \lambda_n (x_n, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

El determinante de este sistema será un determinante transpuesto de Gram, el cual, por hipótesis del lema, es igual a cero. Por consiguiente, el sistema (58.1) tiene una solución no trivial $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (es decir, una solución tal que no todas de las λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, son nulas). Multipliquemos la igualdad (58.1) por λ_i y sumemos según i desde 1 hasta n:

$$(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, \quad \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = 0.$$

De aquí, $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$, lo que expresa la dependencia lineal del sistema $x_1, \ldots, x_n$. □

Ejercicios. 1. Demuéstrese que si un sistema finito de elementos de un espacio prehilbertiano es linealmente dependiente, su determinante de Gram es igual a cero.

2. Demuéstrese que si $\{\omega_\alpha\}$ es un sistema ortonormalizado, entonces para cualesquiera dos elementos suyos ω_α y $\omega_{\alpha'}$, tiene lugar la igualdad

$$\|\omega_{\alpha'} - \omega_\alpha\| = \sqrt{2}, \quad \alpha' \neq \alpha.$$

3. Demuéstrese que las funciones $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 3x$, $\operatorname{sen} 5x$, $\operatorname{sen} 7x$, $\operatorname{sen} 9x$ son linealmente independientes sobre cualquier intervalo de longitud positiva.

Ejemplos. 1. El sistema trigonométrico de funciones 1,

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots \tag{58.2}$$

es ortogonal en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$ (véase el p. 57.10). Esto fue demostrado en el lema 1 del p. 55.1.

De las fórmulas (55.4) proviene que $\|\operatorname{sen} nx\| = \sqrt{\pi}$, $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$, $n = 1$,

*) J. P. Gram (1850 — 1916), matemático danés.

2, . . . , por lo cual el sistema ortonormalizado, correspondiente al sistema (58.2), tiene por expresión

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx \ldots .$$

2. Los polinomios

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{58.3}$$

llevan el nombre de *Legendre*. De la fórmula (58.3) se ve que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + \ldots$$

Mostremos que el sistema (58.3) es ortogonal en el espacio $L_2[-1, 1]$. Con este fin demostremos una afirmación más general, a saber, el polinomio de Legendre $P_n(x)$ es ortogonal a todo polinomio $Q_m(x)$ de grado $m < n$. Al notar previamente que la expresión

$$\frac{d^k(x^2-1)^n}{dx^k}$$

se anula, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ tenemos, integrando por partes:

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}dx = Q_m(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\Bigg|_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1} Q_m'(x)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}dx = \ldots = (-1)^m Q_m^{(m)}(x)\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}dx =$$

$$= (-1)^m Q_m^{(m)}(x)\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

De este modo

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m < n;$$

en particular

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

Calculemos ahora la norma de los polinomios de Legendre. Al observar que

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + Q_{n-1}(x),$$

donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado no superior a $n-1$, y hacer uso de la

ortogonalidad de $P_n(x)$ respecto de todos los polinomios de grado inferior, obtendremos:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x)\left[\frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + Q_{n-1}(x)\right]dx =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1} P_n(x)x^n dx = \frac{(2n-1)!!}{n!(2n)!!}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}x^n dx.$$

Integrando sucesivamente por partes, tendremos

$$\int_{-1}^{+} P_n^2(x)dx = \ldots = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{-1}^{1} x d(x^2-1)^n =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}x^2 dx =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}d(x^3) =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-4)!!}\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-2}x^4 dx = \ldots$$

$$\ldots = \int_{-1}^{1} x^{2n}dx = \frac{2}{2n+1}.$$

De este modo,

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

El sistema de polinomios de Legendre, al igual que cualquier sistema ortogonal de elementos no nulos, es linealmente independiente (véase el lema 1) en el espacio $L_2[-1, 1]$. Por cuanto el sistema de funciones que se considera se compone aquí de los polinomios, la independencia lineal de éstos en un segmento (en el caso dado, en el segmento $[-1, 1]$) predetermina su independencia lineal en cualquier otro segmento.

En efecto, si ciertos polinomios $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ son linealmente independientes en el segmento $[a, b]$, entonces, evidentemente, son linealmente independientes también en todo el eje numérico (todo sistema de funciones, linealmente independiente en cierto conjunto, es linealmente independiente también en cualquier conjunto mayor en el cual están definidas todas las funciones del sistema en consideración). Si los polinomios $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ resultaran ser linealmente dependientes en cierto segmento $[\alpha, \beta]$, es decir, si se encontraran tales números $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, no todos iguales a cero, que para cualquier $x \in [\alpha, \beta]$ se verificase la igualdad $\lambda_1 Q_1(x) + \ldots + \lambda_k Q_k(x) = 0$, esto significaría que todos los coeficientes del polinomio $\lambda_1 Q_1(x) + \ldots + \lambda_k Q_k(x)$ son nulos (un polinomio con los coeficientes distintos de cero puede tener sólo un número finito de ceros). Esto es indicio de que los polinomios $Q_1(x), \ldots, Q_k(x)$ son linealmente dependientes en todo el eje numérico. La contradicción obtenida demuestra su independencia lineal en el segmento $[\alpha, \beta]$.

De la independencia lineal de los polinomios de Legendre proviene que todo polinomio de grado no superior a n, es una combinación lineal de los polinomios de Legendre $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$. En efecto, en un espacio $(n + 1)$-dimensional de los polinomios cuyos grados no sobrepasan n cualquier sistema de $n + 1$ polinomios linealmente independientes, en particular, el sistema citado de polinomios de Legendre, forma una base. Por eso todo polinomio de grado mencionado es una combinación lineal de elementos del sistema indicado.

3. El sistema de funciones $\{e^{inx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, es ortogonal en el segmento $[-\pi, \pi]$.

En efecto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx.$$

De aquí, recordando que el período de la función e^z es igual a $2\pi i$ (véase el p. 37.6), para $n \neq m$ obtenemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}dx = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Ejercicio 4. Demuéstrese que la sucesión de funciones $\operatorname{sen}(2n-1)\frac{x}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, forma un sistema ortogonal en el segmento $[0, \pi]$.

58.2. ORTOGONALIZACIÓN

Supongamos nuevamente que X es un espacio prehilbertiano. Consideremos el problema siguiente. Sea dado un sistema numerable linealmente independiente de elementos x_n, $n = 1, 2, \ldots$, del espacio X. Se requiere obtener del sistema dado, con ayuda de combinaciones lineales finitas, un sistema ortogonal. Resulta que este problema siempre tiene solución.

Teorema 1. *Sea*

$$x_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.4}$$

un sistema linealmente independiente de elementos del espacio X. Existe tal sistema ortogonal de elementos y_n, $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, de este espacio que cualquiera de sus elementos y_n, $n = 1, 2, \ldots$, es una combinación lineal de los primeros n elementos del sistema (58.4):

$$y_n = \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n}x_n. \tag{58.5}$$

La construcción del sistema ortogonal $\{y_n\}$ del tipo (58.5), partiendo del sistema linealmente independiente $\{x_n\}$, se denomina, corrientemente, *proceso de ortogonalización del sistema* $\{x_n\}$.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $y_1 = x_1$. Por cuanto el sistema (58.4) es linealmente independiente, entonces $y_1 \neq 0$ (¿por qué?).

Supongamos que existen elementos ortogonales dos a dos $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 1$, que satisfacen la condición (58.5). Buscaremos un elemento y_{k+1}, que sea ortogonal a todos los $y_1, \ldots, y_k$, en la forma

$$y_{k+1} = \beta_{k+1,1}y_1 + \ldots + \beta_{k+1,k}y_k - x_{k+1}. \tag{58.6}$$

De las condiciones de ortogonalidad

$$(y_1, y_{k+1}) = \ldots = (y_k, y_{k+1}) = 0 \tag{58.7}$$

obtenemos

$$(y_1, y_1)\beta_{k+1,1} = (y_1, x_{k+1}), \ldots, (y_k, y_k)\beta_{k+1,k} = (y_k, x_{k+1}). \tag{58.8}$$

De aquí se determinan unívocamente los coeficientes $\beta_{k+1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. El elemento y_{k+1}, prescrito por la representación (58.6) con los coeficientes determinados $\beta_{k+1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, satisface las condiciones (58.7).

Sustituyamos en (58.6) las expresiones para y_n, $n = 1, 2, \ldots, k$ escritas en la forma (58.5); realizada la reducción de los términos semejantes, se obtiene

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k - x_{k+1}. \tag{58.9}$$

De aquí proviene que $y_{k+1} \neq 0$, pues de lo contrario los elementos $x_1, \ldots, x_{k+1}$ resultarían ser linealmente dependientes. □

OBSERVACIÓN. Indiquemos que si un sistema ortogonal de elementos z_n, $z_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, del espacio X es de tal índole que todo elemento z_n es también una combinación lineal de los primeros n elementos del sistema (58.4):

$$z_n = \gamma_{n,1}x_1 + \ldots + \gamma_{n,n}x_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.10}$$

entonces el elemento z_n puede diferir del elemento y_n sólo en cierto factor numérico $\lambda_n \neq 0$:

$$z_n = \lambda_n y_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Demostremos esto. Designemos mediante $L(u_1, \ldots, u_n)$ la cápsula lineal del sistema de elementos $u_1, \ldots, u_n$ (véase el p. 57.2); $L(x_1, \ldots, x_n)$ será un espacio n-dimensional en el cual los elementos $x_1, \ldots, x_n$ forman la base (véase el p. 57.2). Los elementos y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, respectivamente) son linealmente independientes y están contenidos en $L = (x_1, \ldots, x_n)$; por consiguiente, los elementos y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ y los z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, forman también una base en el espacio $L(x_1, \ldots, x_n)$. De este modo, $L(x_1, \ldots, x_n) = L(y_1, \ldots, y_n) = L(z_1, \ldots, z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

El elemento $y_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ es ortogonal al subespacio $L(y_1, \ldots, y_{n-1}) = L(x_1, \ldots, x_{n-1})$, es decir, ortogonal a todo elemento de este subespacio. Mientras tanto, el elemento $z_n \in L(x_1, \ldots, x_n)$ es ortogonal al subespacio $L(x_1, \ldots, z_{n-1}) = L(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Así pues, los elementos y_n y z_n del espacio n-dimensional $L(x_1, \ldots, x_n)$ son ortogonales a un mismo subespacio $(n-1)$-dimensional $L(x_1, \ldots, x_{n-1})$ y, por ende, son colineales: $z_n = \lambda_n y_n$, $\lambda_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ (¿por qué?).

Diremos también que de

$$L(x_1, \ldots, x_n) = L(y_1, \ldots, y_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

se infiere la coincidencia de las cápsulas lineales de los sistemas *infinitos* (58.4) y (58.5).

Analicemos ahora el sistema de potencias de x:

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots. \tag{58.11}$$

Este sistema es linealmente independiente en cualquier segmento (finito o infinito). Efectivamente, si

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n \equiv 0, \tag{58.12}$$

entonces, derivando esta identidad n veces, obtendremos

$$n!\lambda_n = 0,$$

es decir, $\lambda_n = 0$.

Si ya ha sido demostrado que $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, la identidad (59.12) toma la forma

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_k x^k = 0.$$

Derivándola k veces, obtendremos $\lambda_k = 0$. Así pues, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, lo que precisamente significa la independencia lineal de las funciones $1, x, \ldots, x^n$.

Ha de notarse que por cuanto las funciones del sistema (58.11), que se consideran en cierto segmento $[a, b]$, pertenecen a los espacios $C[a, b]$ (véase el ejemplo 7 en el p. 57.4), $CL_2[a, b]$ y $L_2[a, b]$ (véase el p. 57.10), entonces en dichos espacios se tienen sistemas linealmente independientes infinitos. Por consiguiente, los espacios citados son de dimensión infinita, es decir, a ciencia cierta no tienen base compuesta de un número finito de elementos.

Tomemos el sistema (58.11) en el segmento $[-1, 1]$ a título de sistema de partida (58.4) y apliquemos a (58.11) el proceso de ortogonalización (véase (58.5)) en el espacio $L_2[-1, 1]$; en este caso obtendremos una sucesión de polinomios ortogonales de grados $0, 1, 2, \ldots$, respectivamente. De la observación aducida más arriba se deduce que estos polinomios pueden diferir de los de Legendre (58.3), también ortogonales, sólo en un factor constante.

58.3. SISTEMAS COMPLETOS. COMPLETITUD DEL SISTEMA TRIGONOMÉTRICO Y DEL SISTEMA DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

Recordemos (véase el p. 57.6) que un sistema de elementos $\Omega = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, se llama *completo en el espacio seminormalizado X*, si el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de sus elementos es denso en el espacio X en el sentido de la seminorma prescrita en él. En otras palabras, un sistema es completo, si para todo

$x \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existen tales elementos $x_{\alpha_k} \in \Omega$ y números λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, que

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\| < \varepsilon.$$

Definición 3. *Un espacio seminormalizado X se denomina encajado en el espacio seminormalizado Y, si*

1°) $X \subset Y$;

2°) *existe una constante $c > 0$ tal que para todo $x \in X$ tiene lugar la desigualdad*

$$\|x\|_Y \leqslant c\|x\|_X.$$

La constante $c > 0$ se llama *constante de encaje*. El encaje del espacio X en el espacio Y se designa mediante el símbolo

$$X \Subset Y.$$

Es fácil comprobar que si $X \Subset Y$ e $Y \Subset Z$, entonces $X \Subset Z$. Del lema 3, el p. 57.4, se desprende que para cualquier segmento tienen lugar los encajes

$$RL_p[a, b] \Subset RL_1[a, b],$$

$$RL_p[a, b] \cap S[a, b] \Subset RL_p[a, b], \quad 1 \leqslant p < +\infty.$$

Aquí, en el segundo encaje el espacio $RL_p[a, b] \cap S[a, b]$ se considera con la norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir, con la del espacio $S[a, b]$. Si nos limitamos solamente a las funciones continuas, entonces del segundo encaje se desprende un encaje

$$C[a, b] \Subset CL_p[a, b], \quad 1 \leqslant p < +\infty. \tag{58.13}$$

De aquí, recordando que para $p = 2$ el espacio $CL_2[a, b]$ se encaja isométricamente en el espacio $L_2[a, b]$ (véase (57.52)) obtenemos un encaje más

$$C[a, b] \Subset L_2[a, b]. \tag{58.14}$$

Fijemos la atención en que en los encajes (58.13) y (58.14) los espacios que se encajan son densos en los espacios donde vienen encajados: en el caso (58.13) esto proviene de que los conjuntos de puntos de ambos espacios coinciden y en el caso (58.14), del teorema 6 del p. 57.10.

Lema 3. *Si un sistema $\Omega = \{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, es completo en el espacio seminormalizado X, el espacio X está encajado en el espacio seminormalizado Y y el conjunto X es denso en el espacio Y según la seminorma de éste, entonces el sistema Ω será denso en el espacio Y.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un elemento arbitrario $y \in Y$ y cualquier $\varepsilon > 0$. Por ser el conjunto X denso, en el espacio X se encontrará un elemento $x \in X$ tal que

$$\|y - x\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por cuanto el sistema Ω es completo en el espacio X, existe un conjunto finito de elementos $x_{\alpha_k} \in \Omega$ y números λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, tales que

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2c},$$

donde $c > 0$ es una constante del encaje $X \Subset Y$. En virtud de este encaje (véase la definición 3)

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y \leqslant c \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por eso, para el elemento y, elegido inicialmente, obtendremos

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y \leqslant \| y - x \|_Y + \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{\alpha_k} \right\|_Y < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto es precisamente el indicio de que el sistema Ω es denso en el espacio Y. □

EJEMPLOS. 1. Un sistema de potencias

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{58.15}$$

es completo en los espacios $C[a, b]$, $CL_p[a, b]$, $1 \leqslant p < +\infty$, y $L_2[a, b]$ para cualquier segmento $[a, b]$. En efecto, en virtud del teorema de Weierstrass (véase el teorema 8′ en el p. 55.8), el citado sistema de potencias es completo en el espacio $C[a, b]$ que está encajado, de acuerdo con (58.14), en el espacio $L_2[a, b]$ y es denso en éste. Por ello, de conformidad con el lema 3 de este punto, el sistema de potencias (58.15) es completo en el espacio $L_2[a, b]$. Según este mismo lema, el sistema mencionado es completo también en el espacio $CL_p[a, b]$ para cualquier $p \geqslant 1$, pues, $C[a, b]$ está encajado en $CL_p[a, b]$ y es denso en él (véase (58.13)).

Subrayemos que toda base en un espacio lineal normalizado es, evidentemente, un sistema completo linealmente independiente. Lo recíproco no es cierto. Por ejemplo, aunque el sistema de potencias (58.15) forma un sistema completo linealmente independiente en el espacio de Banach $C[a, b]$, no es, sin embargo, una base en él: si una función f en el espacio $C[a, b]$ se desarrolla según el sistema de potencias (58.15), es decir, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, esto implica que la serie de potencias escrita converge uniformemente en el segmento $[a, b]$, y, por lo tanto, la función f es analítica en el intervalo (a, b). Por esta razón, a ciencia cierta, ninguna función continua en el segmento $[a, b]$ puede ser representada en la forma indicada.

2. Un sistema de los polinomios de Legendre

$$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \tag{58.3}$$

es completo en los espacios $C[a, b]$, $CL_p[a, b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ y $L_2[a, b]$ para cualquier segmento $[a, b]$. Esto se infiere inmediatamente de que todo polinomio $Q(x)$ es una combinación lineal de los polinomios de Legendre (véase el p. 58.1):

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x). \tag{58.16}$$

Por eso, si en algún espacio seminormalizado X es completo el sistema de potencias

(58.15), es decir, para todo elemento $f \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $Q = Q(x)$ tal que $\| f - Q \| < \varepsilon$, entonces, en virtud de (58.16),

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k \right\| < \varepsilon.$$

Esto es precisamente el testimonio de que el sistema de los polinomios de Legendre es completo en el espacio X.

3. Designemos con $C^*[-\pi, \pi]$ un subespacio del espacio de funciones continuas $C[-\pi, \pi]$, compuesto de las funciones que en los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$ toman valores iguales:

$$f(-\pi) = f(\pi). \tag{58.17}$$

El sistema trigonométrico

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots, \tag{58.2}$$

es completo en los espacios $C^*[-\pi, \pi]$ y $L_2[-\pi, \pi]$. La completitud del sistema trigonométrico en el espacio $C^*[-\pi, \pi]$ ha sido demostrada anteriormente: véase el teorema 7′ en el p. 55.8.

Denotemos con $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ un subespacio del espacio $C^*[-\pi, \pi]$, compuesto de aquellas funciones f que en los extremos del segmento $[-\pi, \pi]$ toman valores nulos: $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. De acuerdo con el teorema 6, p. 57.10, el conjunto $\mathring{C}[-\pi, \pi]$, y, por ende, también el espacio $C^*[-\pi, \pi] \supset \mathring{C}[-\pi, \pi]$, es denso en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$. Por esta razón, en virtud del encaje (véase (58.14))

$$C^*[-\pi, \pi] \Subset L_2[-\pi, \pi]$$

y del lema 3 de este punto, el sistema trigonométrico (58.2) es completo en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$.

Diremos que por cuanto la condición (58.17) se conserva en el caso de convergencia uniforme y todo polinomio trigonométrico satisface a esta condición, entonces el sistema trigonométrico no es completo, a ciencia cierta, en el espacio $C[-\pi, \pi]$, puesto que éste contiene a todas luces funciones que no satisfacen la condición (58.17).

Como un corolario se desprende de los ejemplos considerados la siguiente afirmación.

Teorema 2. *El espacio de Banach* $C[a, b]$ *y el de Hilbert* $L_2[a, b]$ *son espacios separables.*

Efectivamente, la separabilidad de un espacio significa (véase la definición 31 en el p. 57.6) que en dicho espacio está presente un sistema numerable completo. En los espacios de Banach y de Hilbert en calidad de tal sistema interviene el sistema (58.15) de potencias enteras no negativas de la variable x.

58.4. SERIES DE FOURIER

Sea, al igual que hasta ahora, X un espacio prehilbertiano. Consideremos el siguiente problema. Sea dado un sistema de n vectores linealmente independientes $e_1, e_2, \ldots, e_n$ del espacio X y sea fijado un cierto vector $x \in X$. Se requiere hallar una

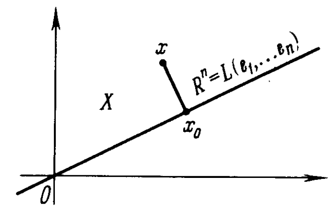


Fig. 241

combinación lineal de la forma

$$a_1e_1 + \ldots + a_ne_n, \tag{58.18}$$

la que ofrece la mejor aproximación en el espacio X del elemento x, es decir, realiza el mínimo de la expresión

$$\|x - (a_1e_1 + \ldots + a_ne_n)\|, \tag{58.19}$$

o, que es lo mismo, el mínimo de la función

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k\right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k, x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k\right) \tag{58.20}$$

de las variables $a_1, \ldots, a_n$.

En el lenguaje geométrico esto significa que en un espacio n-dimensional $R^n = L(e_1, \ldots, e_n)$ tendido sobre los vectores $e_1 \in X, \ldots, e_n \in X$ se busca un elemento que sea menos alejado del elemento dado $x \in X$.

Si el espacio X es n-dimensional y, por consiguiente, los vectores $e_1, \ldots, e_n$ forman una base, siempre pueden elegirse tales coeficientes a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, que se cumpla la igualdad

$$x = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n \tag{58.21}$$

y, por lo tanto, la expresión (58.19) se reduzca a cero. En cambio, si X no es de dimensión finita o es de dimensión finita, pero su dimensión es superior a n, entonces la igualdad (58.21), en el caso general, no es posible de realizarla y el problema consiste en la búsqueda de una combinación lineal (58.18) que dé el valor mínimo a la expresión (58.19).

Mostremos que el problema enunciado siempre tiene una solución x_0 que es única y, además, aclaremos algunas propiedades de esta solución (véase la fig. 241, en la que está expuesto esquemáticamente el problema en consideración). Al emplear, si es necesario, el proceso de ortogonalización (véase el p. 58.2), siempre podemos sustituir el sistema $e_1, \ldots, e_n$ por un sistema ortogonal de vectores distintos de cero. Por eso supondremos que $e_k \neq 0$, $(e_k, e_j) = 0$, $k \neq j$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Haciendo uso de la condición de ortogonalidad, transformemos la función (58.20) del modo siguiente:

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k\right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k, x - \sum_{j=1}^{n} a_je_j\right) =$$

$$= (x, x) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ka_j(e_k, e_j) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(x, e_k) =$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\|e_k\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(x, e_k) =$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\|e_k\| - \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(x, e_k)^2}{\|e_k\|^2}, \tag{58.22}$$

De aquí se desprende*) que el mínimo de la expresión (58.19) se alcanza cuando

$$a_k\|e_k\| - \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

es decir, cuando

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}. \tag{58.23}$$

Los números a_k, definidos por la fórmula (58.23), *se denominan coeficientes de Fourier del elemento x según el sistema $e_1, \ldots, e_n$.*

Si el sistema $e_1, \ldots, e_n$ es ortonormalizado, las fórmulas (58.23) adquieren una forma más sencilla:

$$a_k = (x, e_k). \tag{58.24}$$

En el caso de un espacio n-dimensional, cuando a título de vectores $e_1, \ldots, e_n$ está elegida la base del espacio, los coeficientes de Fourier del vector x son los coeficientes de su desarrollo según la base citada, es decir, las coordenadas del elemento x respecto de esta base. Resulta fácil convencerse de esto, al multiplicar escalarmente la igualdad (58.21) por e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$: como resultado se obtendrá (58.23).

Volveremos ahora a la expresión (58.22). Al tomar en ella, a título de $a_1, \ldots, a_n$, los coeficientes de Fourier (58.23), obtendremos

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2\|e_k\|^2 = \left\|x - \sum_{k=1}^{n} a_ke_k\right\|^2 \geqslant 0. \tag{58.25}$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2\|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{58.26}$$

Así pues, queda demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3. *Supongamos que e_k, $e_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, es un sistema ortogonal de vectores del espacio prehilbertiano X. La mejor aproximación en el espacio X del vector $x \in X$ por medio de las combinaciones lineales del tipo $\sum_{k=1}^{n} \alpha_ke_k$ se*

*) Es obvio que estos razonamientos son una generalización inmediata de la demostración del teorema 11 del p. 55.9.

efectúa cuando α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *son coeficientes de Fourier*: $\alpha_k = a_k$. *En este caso*

$$\inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0.$$

Corolario 1. *El elemento* $x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ *es el de mejor aproximación del elemento* $x \in X$ *en el subespacio* $L(e_1, \ldots, e_n)$ *cuando, y sólo cuando, el elemento* $x - x_0$ *sea ortogonal a* $L(e_1, \ldots, e_n)$, *es decir, cuando* $x - x_0 \perp L(e_1, \ldots, e_n)$.

Efectivamente, la condición $x - x_0 \perp L(e_1, \ldots, e_n)$ es equivalente a la otra: para todos los $k = 1, 2, \ldots, n$ se verifica la igualdad $(x - x_0, e_k) = 0$. Esta, a su vez, es equivalente a la condición $(x, e_k) = (x_0, e_k)$, o bien, por cuanto

$$(x_0, e_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_k \right) = \alpha_k (e_k, e_k),$$

a la condición $(x, e_k) = \alpha_k (e_k, e_k)$. De este modo, las condiciones

$$x - x_0 \perp L(e_1, \ldots, e_n) \quad \text{y} \quad \alpha_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}$$

son equivalentes. Mas, la segunda condición significa que los números α_k son coeficientes de Fourier del elemento x_0, es decir, x_0 es el elemento de la mejor aproximación. □

Sea dada ahora una sucesión (no el sistema finito, como antes) de elementos

$$e_n (e_n \neq 0), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.27}$$

que forman un sistema ortogonal en el espacio X. Los números a_k, $k = 1, 2, \ldots$, determinados por la fórmula (58.23) se llamarán en este caso también *coeficientes de Fourier* del elemento y según el sistema (58.27).

Definición 4. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{58.28}$$

donde a_n, $n = 1, 2, \ldots$ *son los coeficientes de Fourier* (58.23) *del elemento* x *según el sistema* (58.27), *se llama serie de Fourier del elemento* x *según dicho sistema.*

Si la serie (58.28) es la de Fourier del elemento x, se escribe

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Definición 5. *Sean dados un sistema ortogonal* (58.27) *y un elemento* $x \in X$. *Se denomina la mejor aproximación del elemento* x *por medio de las combinaciones lineales del tipo* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_n$ *(n está fijo) al número* $E_n(x)$ *determinado por la igualdad*

$$E_n(x) = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde la cota inferior se toma según toda clase de coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *o, que es lo mismo, según toda clase de combinaciones lineales del tipo* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$.

Por cuanto toda combinación lineal de elementos $e_1, \ldots, e_n$ puede considerarse también como una combinación lineal de elementos $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$, entonces, evidentemente,

$$E_{n+1}(x) \leqslant E_n(x). \tag{58.29}$$

Del teorema 3 se infiere que la cota inferior de que se trata se alcanza, si a título de coeficientes α_k se toman los coeficientes de Fourier y que

$$E_n(x) = \inf_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2},$$

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{58.30}$$

El resultado obtenido lo enunciemos en forma del corolacio del teorema 3.

Corolario 2. *Las sumas parciales*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

de la serie de Fourier del elemento $x \in X$ *realizan la mejor aproximación en el espacio* X *del elemento* $x \in X$ *por medio de las combinaciones lineales del tipo* $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Demos a conocer algunos otros corolarios del teorema 3.

Corolario 3. *Si* s_n *es la suma parcial de la serie de Fourier del elementos* $x \in X$, *la sucesión numérica* $\|x - s_n\|$ *decrece*:

$$\|x - s_{n+1}\| \leqslant \|x - s_n\|, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{58.31}$$

Efectivamente, de acuerdo con (58.30),

$$\|x - s_n\| = E_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Por ello la desigualdad (58.31) es, de hecho, la desigualdad (58.29) escrita en otras designaciones.

Corolario 4. *Para los coeficientes de Fourier* a_n, $n = 1, 2, \ldots$, *de todo elemento* $x \in X$ *se verifica la desigualdad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2 \tag{58.32}$$

llamada desigualdad de Bessel.

La desigualdad (58.32) proviene directamente de la (58.26) cuando $n \to \infty$ (compárese con la desigualdad (55.49) en el p. 55.9).

Corolario 5. *Si existe una constante $c > 0$ tal que $\|e_n\| \geqslant c$ cuando $n = 1, 2, \ldots$, en particular, si el sistema (58.27) es ortonormalizado (en este caso se puede tomar $c = 1$), entonces los coeficientes de Fourier de cualquier elemento $x \in X$ tienden a cero cuando $n \to \infty$*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{58.33}$$

Esto se deduce de la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \frac{\|x\|^2}{c^2},$$

pues el término general de una serie convergente tiende a cero.

Surge naturalmente una cuestión: ¿bajo qué condiciones converge la serie de Fourier del elemento x?

Teorema 4. *Si el espacio X es de Hilbert (es decir, es completo), la serie de Fourier (58.28) de cualquier elemento $x \in X$ según todo sistema ortogonal (58.27) converge en el espacio X. Si x_0 es la suma de la serie:*

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{58.34}$$

el elemento $x - x_0$ es ortogonal a todos los elementos del sistema (58.27).

DEMOSTRACIÓN. Sean $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, $n = 1, 2, \ldots$, las sumas parciales de la serie de Fourier (58.28) del elemento x según el sistema (58.27); entonces

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2,$$

$$n = 1, 2, \ldots, p = 1, 2, \ldots. \tag{58.35}$$

En virtud de la desigualdad de Bessel (58.32) la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2$$

converge y, por lo tanto, en virtud del criterio de Cauchy para la convergencia de una serie numérica, existe, para cada número $\varepsilon > 0$, tal número n_ε que, siendo $n \geqslant n_\varepsilon$ y $p > 0$, se verifica la desigualdad

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon^2,$$

por lo cual, de acuerdo con la desigualdad (58.35) para $n \geqslant n_\varepsilon$ y $p > 0$, tenemos

$$\|s_{n+p} - s_n\| < \varepsilon,$$

es decir, la sucesión $\{s_n\}$ es fundamental en el espacio X y, por cuanto este último es completo, converge.

En las condiciones del teorema la sucesión s_n converge, en el caso general, no hacia el elemento x. Supongamos que su límite es el elemento x_0, es decir, $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, entonces, haciendo uso de la continuidad del producto escalar (véase el p. 57.9) y la fórmula (58.23), obtendremos

$$(x - x_0, e_k) = (x, e_k) - (x_0, e_k) =$$

$$= (x, e_k) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, e_k \right) = (x, e_k) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e_n, e_k) =$$

$$= (x, e_k) - a_k \|e_k\|^2 = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \ \square$$

En lo que se refiere a la condición de convergencia de la serie de Fourier *de cierto elemento suelto* hacia este mismo elemento, puede formularse en la forma siguiente.

Teorema 5. *La serie de Fourier (58.28) del elemento x de un espacio prehilbertiano converge hacia este elemento cuando, y sólo cuando, para dicha serie se cumple la igualdad*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2, \tag{58.36}$$

donde a_n son coeficientes de Fourier del elemento x según el sistema (58.27).

La igualdad (58.36) lleva el nombre de *Parseval.*

En el caso en que el sistema (58.27) sea ortonormalizado, la igualdad de Parseval toma una forma más sencilla:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \ a_n = (x, e_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y representa en sí una generalización del teorema de Pitágoras a los espacios de dimensión infinita.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5. Tuvimos (véase (58.25))

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2.$$

Pasando aquí al límite para $n \to \infty$, obtendremos la equivalencia de la condición

$$\lim_{n \to \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0 \tag{58.37}$$

y de la condición

$$\lim_{n \to \infty} \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \right) = 0,$$

es decir, de la condición

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2\|e_k\|^2. \square \tag{58.38}$$

Recordemos ahora el concepto de sistema completo (véase el p. 57.6), aplicado sólo al caso de sistemas numerables. El sistema de elementos $e_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, se llama completo, si el conjunto de combinaciónes lineales finitas de elementos de este sistema es denso en el espacio X. Esto significa que para todo elemento $x \in X$ y todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $n = n(\varepsilon, x)$ y los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que se verifica la desigualdad

$$\|x - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)\| < \varepsilon. \tag{58.39}$$

La completitud del sistema ortonormalizado constituye una condición que asegura la convergencia de la serie de Fourier de *cualquier elemento* del espacio hacia este mismo elemento. Enunciemos esta condición en forma de un teorema.

Teorema 6. *Una serie de Fourier de cualquier elemento de un espacio prehilbertiano según el sistema ortogonal* (58.27) *converge hacia este mismo elemento cuando, y sólo cuando, el sistema* (58.27) *es completo.*

Corolario. *Para que el sistema ortogonal* (58.27) *de un espacio prehilbertiano X sea completo en el espacio X, es necesario y suficiente que para cualquier elemento $x \in X$ se verifique la igualdad de Parseval* (58.36).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6. Sea X un espacio prehilbertiano y supongamos que el sistema (58.27) es el sistema ortogonal de dicho espacio. Si para cualquier $x \in X$ su serie de Fourier según el sistema (58.27) converge hacia x, es decir,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{58.40}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = 0. \tag{58.41}$$

Por consiguiente, para cada número $\varepsilon > 0$ existe tal suma parcial $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ de la serie de Fourier (58.28), que

$$\|x - s_n\| < \varepsilon, \tag{58.42}$$

es decir, se cumple la condición (58.39)

Viceversa, si la condición (58.39) se cumple para algunos coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, se cumple también a ciencia cierta, de acuerdo con el teorema 3, en el caso en que se toma $\lambda_1 = a_1, \ldots, \lambda_n = a_n$, es decir, en este caso para $\varepsilon > 0$ dado se cumple la condición (58.42) con cierto n, y, por ende, con cualesquiera $m > n$ (véase (58.31)), lo que es equivalente al cumplimiento de la condición (58.41). $\square$

El corolario proviene directamente de los teoremas 5 y 6.

Aclaremos ahora la cuestión sobre la unicidad de un elemento que en calidad de su serie de Fourier tiene la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$.

Teorema 7. *Si el sistema ortogonal* (58.27) *de un espacio prehilbertiano X es completo, el elemento $x \in X$, cuyos coeficientes de Fourier según el sistema* (58.27) *son todos iguales a cero, es por sí mismo nulo.*

Corolario. *Si dos elementos del espacio X según el sistema ortogonal completo* (58.27) *tienen todos los coeficientes de Fourier iguales entonces son iguales los propios elementos.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7. Si el sistema (58.27) es completo, entonces, de acuerdo con el teorema 6, cualquier elemento $x \in X$ interviene como suma de su serie de Fourier: $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Por ello, si $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces también $x = 0$.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO. Si $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ y si, además, sus coeficientes de Fourier son iguales entre sí:

$$\frac{(x_1, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_2, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

entonces para el elemento $x = x_1 - x_2$ todos los coeficientes de Fourier son nulos:

$$\frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_1 - x_2, e_n)}{\|e_n\|^2} = \frac{(x_1, e_n)}{\|e_n\|^2} - \frac{(x_2, e_n)}{\|e_n\|^2} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y, por lo tanto, de acuerdo con el teorema, $x = 0$, es decir, $x_1 = x_2$. $\square$

OBSERVACIÓN. Conviene notar que si en un espacio prehilbertiano X está dado cierto sistema ortogonal $\{e_n\}$, $e_n \neq 0$, y para cierto $x \in X$ existe una representación suya en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

será única y los coeficientes x_n, $n = 1, 2, \ldots$, son los de Fourier. En efecto, si la representación citada existe, para todo $m = 1, 2, \ldots$, obtenemos, en virtud de la ortogonalidad del sistema $\{e_n\}$:

$$(x, e_m) \doteq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, e_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (e_n, e_m) = x_m (e_m, e_m),$$

de donde

$$x_m = \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)},$$

es decir, los coeficientes x_m, $m = 1, 2, \ldots$ se determinan unívocamente y coinciden con los coeficientes de Fourier.

Así pues, si en un espacio prehilbertiano se tiene un sistema ortogonal completo, todo elemento de este espacio se desarrolla en serie según dicho sistema (teorema 6) y, además, de conformidad con la observación citada, de modo único. En otras palabras (véase la definición 33 en el p. 57.6), *todo sistema ortogonal completo* $\{e_n\}$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *en particular, todo sistema completo ortonormalizado de un espacio prehilbertiano constituye la base de éste.*

Por ejemplo, con arreglo a los resultados del p. 58.3, los polinomios de Legendre (58.3) forman la base en el espacio de Hilbert $L_2[-1, 1]$, mientras que el sistema trigonométrico (58.2), la base en el espacio de Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$.

Demos a conocer ahora otro enfoque al concepto de completitud del sistema ortogonal en un espacio completo.

Definición 6. *El sistema ortogonal* (58.27) *se denomina cerrado, si en el espacio* X *no existe un elemento distinto de cero y ortogonal a cualquiera de los elementos del sistema* (58.27).

Teorema 8. *Si el espacio* X *es completo, el sistema ortogonal* (58.27) *será completo cuando, y sólo cuando, sea cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Si el sistema (58.27) es completo, $x \in X$ y x es ortogonal a todos los elementos del sistema (58.27), entonces todos sus coeficientes de Fourier según el sistema (58.27) son nulos (véase (58.23)), por consiguiente (teorema 7), $x = 0$.

Viceversa, sea el sistema (58.27) cerrado, $x \in X$ y $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. De acuerdo con el teorema 4, la serie de Fourier del elemento x converge, y si $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, entonces $x - x_0 \perp e_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Por ello, debido a que el sistema (58.27) es cerrado, $x - x_0 = 0$, es decir, $x = x_0$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Por cuanto x es un elemento arbitrario del espacio X, de aquí proviene, en virtud del teorema 6, la completitud del espacio (58.27). □

Problema 39. Aclárese si son equivalentes o no el concepto de sistema ortogonal completo y el de sistema ortogonal cerrado en cualquier espacio prehilbertiano.

58.5. EXISTENCIA DE LA BASE EN LOS ESPACIOS SEPARABLES DE HILBERT. ISOMORFISMO DE LOS ESPACIOS SEPARABLES DE HILBERT

Teorema 9. *En todo espacio lineal separable* X *provisto de un producto escalar existe una base ortonormalizada* e_n, $n = 1, 2, \ldots$.

DEMOSTRACIÓN. Cuando el espacio X es n-dimensional, el teorema es evidente (véase el p. 18.4 y p. 57.2), razón por la cual se considerará sólo el caso en que X es de dimensión infinita.

Por cuanto X es un espacio separable, existen en él las sucesiones de elementos

$$\varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

que forman un sistema completo. Desechando sucesivamente aquellos de los elementos que son combinaciones lineales de los restantes, obtendremos una sucesión de elementos

$$\psi_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

los cuales tienen la misma cápsula lineal que el sistema de partida $\{\varphi_n\}$ y que son, además, linealmente independientes (¿por qué?). Al aplicar al sistema obtenido el proceso de ortogonalización (véase el p. 58.2) y el de normalización (véase el p. 58.1), obtendremos un sistema ortonormalizado

$$e_k, \quad \|e_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

con la misma cápsula lineal que tiene el sistema $\{\psi_n\}$, y, por consiguiente, también la del sistema $\{\varphi_n\}$. Por cuanto, en virtud de la completitud del sistema $\{\varphi_n\}$, esta cápsula lineal es densa en X, el sistema $\{e_n\}$ es completo. Entre tanto, en el punto antecedente (véase la observación que sigue el teorema 7) se ha probado que todo sistema ortonormalizado completo de elementos de un espacio prohilbertiano constituye la base de dicho espacio. □

Teorema 10. *Todos los espacios separables de Hilbert de dimensión infinita son isomorfos entre sí**).

Demostremos previamente dos lemas. El primero de ellos generaliza la igualdad de Parseval (58.36).

Lema 4. *Supongamos que* X *es un espacio prehilbertiano y* $e_n (e_n \neq 0)$, $n = 1, 2, \ldots$, *un sistema ortogonal completo en* X, $x \in X$, $y \in X$, *y sea*

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad y \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n;$$

entonces

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \|e_n\|^2, \tag{58.43}$$

en particular, si se supone adicionalmente que $\|e_n\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, *se tiene*

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

La fórmula (58.43) generaliza, obviamente, la fórmula para el producto escalar en un espacio de dimensión finita (véase el p. 18.4).

DEMOSTRACIÓN. Segun la definición de los coeficientes de Fourier

$$a_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}, \quad b_k = \frac{(y, e_k)}{\|e_k\|^2};$$

por lo que tenemos

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n} b_k (x, e_k) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} a_k (y, e_k) + \sum_{k=1}^{b} a_k b_k (e_k, e_k) = (x, y) - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \|e_k\|^2. \tag{58.44}$$

*) Véase en el p. 57.2 la definición de espacios de dimensión infinita y en el p. 57.9 (definición 36), la de isomorfismo de los espacios.

Por ser completo el sistema e_n, $n = 1, 2, \ldots$, tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \left(y - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) = 0,$$

por lo cual, debido a la continuidad del producto escalar para $n \to \infty$, el primer miembro de la igualdad (58.44) tiende a cero, por consiguiente, lo mismo subsiste también para el segundo, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \|e_k\|^2 = (x, y).$$

Esto es equivalente a la igualdad (58.43). □

Lema 5. *Supongamos que X es un espacio de Hilbert y e_k, $k = 1, 2, \ldots$, una base ortonormalizada en X; a_k, $k = 1, 2, \ldots$ una sucesión de los números tales que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge. En este caso la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ converge en el espacio X, y si $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, entonces a_k, $k = 1, 2, \ldots$ son los coeficientes de Fourier del elemento x.*

DEMOSTRACIÓN. Si $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, se tiene

$$\|s_{p+p} - s_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k\right) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

y, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente, ella satisface el criterio de Cauchy para las series convergentes. De aquí proviene que la sucesión $\{s_n\}$ es fundamental en el espacio X y, por lo tanto, converge.

Sea

$$x = \lim_{n \to \infty} s_n, \quad \text{es decir} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n;$$

entonces, en virtud de que el desarrollo del elemento de un espacio según la base (véase la observación del teorema 7) es único,

$$(x, e_n) = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir, a_n son los coeficientes de Fourier del elemento x. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 10. Sean X e Y dos espacios separables de Hilbert de dimensión infinita. De acuerdo con el teorema 9, existen en ellos las bases ortonormalizadas e_n, $n = 1, 2, \ldots$, y f_n, $n = 1, 2, \ldots$, respectivamente.

Sea $x \in X$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, entonces a_n son los coeficientes de Fourier del elemento x, y, por consiguiente, según la desigualdad de Parseval, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. Pongamos $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$. Teniendo presente el lema 5, esto tiene sentido.

La aplicación del espacio X en el espacio Y, la cual a todo elemento $x \in X$ le pone en correspondencia el elemento citado $y \in Y$, es precisamente una aplicación que realiza el isomorfismo de dichos espacios. Efectivamente, en las condiciones de esta correspondencia, a los distintos elementos del espacio X les corresponden diferentes elementos del espacio Y, puesto que el desarrollo de los elementos según la base es único. Luego, todo elemento del espacio Y está puesto en correspondencia a cierto elemento del espacio X (es decir, la citada aplicación es una aplicación sobre el espacio Y); en efecto, si $y \in Y$, entonces, al desarrollarlo en Y según la base, obtendremos

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n.$$

Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n$ (tal elemento existe, véase el lema 5). Es evidente que precisamente al elemento x corresponde, en la correspondencia establecida, el elemento y. Mostremos por fin que en dicha correspondencia se conserva el producto escalar. Esto proviene inmediatamente del lema 4. Efectivamente, si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad x' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n,$$

entonces, en virtud del lema mencionado,

$$(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = (y, y'). \ \square$$

En calidad de modelo de un espacio separable de Hilbert de dimensión infinita puede intervenir un espacio, cuyos elementos constituyen las sucesiones de números reales

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

para las cuales la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ converge, es decir, el espacio l_2 (véase el ejemplo 5 en el p. 57.4). El producto escalar en este espacio se introduce según la siguiente regla:

si $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$,

entonces $(x, y) = \sum_{k+1}^{\infty} x_k y_k.$

Esta definición tiene sentido, pues de la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$ se desprende que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ es también convergente. Esto se deduce, por ejemplo, de la desigualdad de Hölder para las series cuando $p = 2$ (en este caso dicha desigualdad lleva, a menudo, el nombre de Cauchy-Schwarz), pero puede obtenerse también de la desigualdad elemental

$$x_k y_k \leqslant \frac{x_k^2 + y_k^2}{2}.$$

La norma en el espacio l_2 se determina de confirmidad con la regla general mediante la fórmula

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}.$$

Teorema 11. *El espacio l_2 es un espacio separable de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN. El espacio l_2 es separable, pues las sucesiones e_k, $k = 1, 2, \ldots$, en las que todos los lugares están ocupados por ceros, a excepción del k-ésimo, donde figura la unidad, forman una base ortonormalizada y, por consiguiente, sus combinaciones lineales finitas con los coeficientes racionales forman un conjunto numerable denso en el espacio l_2 (¿por que?).

La completitud del espacio l_2 se demuestra de una manera un tanto más compleja. Sea

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{58.45}$$

una sucesión fundamental del espacio l_2. Entonces, de la desigualdad

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)})^2} \geqslant$$
$$\geqslant |x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)}|, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y de la sucesión fundamental (58.45) se deduce que para cualquier n fijo la sucesión numérica $x_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, satisface el criterio de Cauchy (véase el p. 4.7) y, por consiguiente, converge. Sea $\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n$. Por ser la sucesión (58.45) fundamental, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal número k_ε que se verifica la desigualdad

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean el número $k \geqslant k_\varepsilon$ y p natural, es decir,

$$\sqrt{\sum_{n+1}^{\infty} (x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)})^2} < \varepsilon.$$

De aquí para todo número natural fijo m tenemos con mayor razón

$$\sum_{n=1}^{m} (x_n^{(k+p)} - x_n^{(k)})^2 < \varepsilon^2.$$

Pasando aquí al límite para $p \to \infty$, obtendremos

$$\sum_{n=1}^{m} (x_n - x_n^{(k)})^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

y, como esto es cierto para cualquier $m = 1, 2, \ldots$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^{(k)})^2 \leqslant \varepsilon^2, \quad k \geqslant k_\varepsilon. \tag{58.46}$$

De este modo, el punto $y^{(k)} = (x_1 - x_1^{(k)}, \ldots, x_n - x_n^{(k)}, \ldots)$, $k \geqslant k_\varepsilon$, pertenece al espacio l_2, mas, en este caso, también le pertenece a l_2 el punto $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) = x^{(k)} + y^{(k)}$, mientras que la condición (58.46) significa que

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x.$$

Hemos demostrado pues que la sucesión (58.46) converge. Por consiguiente, l_2 es un espacio completo. □

En virtud del teorema 10, el espacio l_2 es isomorfo a todo espacio separable de Hilbert.

En el p. 58.3 se ha mostrado que el espacio $L_2[a, b]$ es separable (véase allí el teorema 2) para cualquier segmento $[a, b]$, por consiguiente, es también isomorfo al espacio l_2. Se puede probar que el espacio $L_2(G)$, donde G es un conjunto medible de medida positiva del espacio n-dimensional, también es separable y, por ende, isomorfo a l_2. De este modo, todos los espacios de Hilbert de funciones integrables en cuadrado son isomorfos entre sí, independientemente del número de variable de las cuales dependen las funciones citadas.

58.6. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES DE CUADRADO INTEGRABLE EN SERIE DE FOURIER

En el § 55 se estudiaban las series clásicas de Fourier, es decir, las series de Fourier según el sistema trigonométrico de funciones, para las funciones absolutamente integrables. En el presente punto se obtendrá toda una serie de corolarios, provenientes de la teoría general de las series de Fourier en los espacios de Hilbert y de la propiedad de completitud de un sistema de funciones trigonométricas en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$, para las series trigonométricos de Fourier de una clase más reducida de funciones, en comparación con las funciones absolutamente integrables, a saber, para las funciones de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$, es decir, para las funciones del espacio $RL_2[-\pi, \pi]$ (véase el ejemplo 3 en el p. 57.8).

Observemos, ante todo, que si en el espacio de Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$ se toma, a título de sistema ortogonal, el sistema trigonométrico

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots, \tag{58.2}$$

los coeficientes de Fourier del elemento $f \in L_2[-\pi, \pi]$ según este sistema se determinarán, de acuerdo con (58.23), según las fórmulas

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}(f, 1), \quad a_n = \frac{1}{\pi}(f, \cos nx), \quad b_n = \frac{1}{\pi}(f, \operatorname{sen} nx), \tag{58.47}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

pues $\|1\|_{L_2} = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\|_{L_2} = \|\operatorname{sen} nx\|_{L_2} = \sqrt{\pi}$ (véase el p.58.1).

Si f es una función continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, entonces $f \in CL_2[-\pi, \pi] \subset L_2[-\pi, \pi]$. Comparando las fórmulas (58.47) para los coeficientes de Fourier de la función f con las (55.6) (el producto escalar se define, como siempre, mediante las fórmulas (57.30)), vemos que todas ellas coinciden, salvo la fórmula para el coeficiente a_0, la cual en (58.47) difiere de la en (55.6) en el factor 1/2. Pagando el tributo a la tradición, nos atendremos, en lo que sigue, a la fórmula (55.6) para a_0, es decir, se considerará que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f, 1) \tag{58.48}$$

y la serie trigonométrica de Fourier se escribirá en la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Aplicando el teorema 6 al sistema trigonométrico (58.2) y teniendo presente que dicho sistema es completo en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$ (véase el ejemplo 3 en el p. 58.3), obtendremos el siguiente teorema.

Teorema 12. *Cualquier elemento $f \in L_2[-\pi, \pi]$ se desarrolla en este espacio en una serie de Fourier según el sistema trigonométrico*

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx, \tag{58.49}$$

siendo en este caso válida la igualdad de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Corolario 1. *Toda función $f(x)$ de cuadrado integrable en el sengmento $[-\pi, \pi]$*

1) *es el límite, en el sentido de la media cuadrática (véase el p. 57.5), de sus sumas parciales de Fourier $S_n(x)$ según el sistema trigonométrico de funciones para $n \to \infty$, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0; \tag{58.50}$$

2) *y para ella es lícita la igualdad de Parseval*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{58.51}$$

Corolario 2. *Si la función f de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$ y todos sus coeficientes de Fourier según el sistema trigonométrico (58.2) son iguales a cero, la función es equivalente a cero.*

Aquí los coeficientes de Fourier para $n = 1, 2, \ldots$ se determinan siempre a partir de las fórmulas (58.47), y el coeficiente a_0, según la fórmula (58.48).

Por cuanto el propio teorema 12 se infiere del teorema 6, la demostración se necesita sólo para los corolarios.

Así pues, sea $f(x)$ una función de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$, es decir, $f(x) \in RL_2[-\pi, \pi]$ (véase el ejemplo 8 en el p. 57.4 y el ejemplo 3 en el p. 57.8). Hemos de notar, ante todo, que cualquier función $g(x)$, equivalente a $f(x)$ (véase la definición 38 en el p. 57.10), tiene los mismos coeficientes de Fourier y, por consiguiente, la misma serie de Fourier. Esto proviene de que el producto semiescalar en el espacio $RL_2[-\pi, \pi]$ no varía, si sus factores se sustituyen por los equivalentes (véase la fórmula (57.41)), y por esta razón, si $f \sim g$, se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(f, 1)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g, 1)_{RL_2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}(f, \cos nx)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g, \cos nx)_{RL_2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(f, \operatorname{sen} nx)_{RL_2} = \frac{1}{\pi}(g, \operatorname{sen} nx)_{RL_2},$$

$$n = 1, 2, \ldots^{*)}$$

Por consiguiente, si designamos con F la clase de funciones equivalentes en la que está contenida la función f, entonces, debido a la definición (57.41) de producto escalar de las clases de funciones equivalentes, es decir, de producto escalar en el espacio $\widetilde{RL}_2[-\pi, \pi]$ (véase el p. 57.10), tendremos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(F, 1)_{\widetilde{RL}_2}, \quad a_n = \frac{1}{\pi}(F, \cos nx)_{\widetilde{RL}_2}, \quad b_n = \frac{1}{\pi}(F, \operatorname{sen} nx)_{\widetilde{RL}_2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

es decir, la serie de Fourier del elemento $F \in \widetilde{RL}_2[-\pi, \pi] \subset L_2[-\pi, \pi]$ coincide con la serie de Fourier de toda función $f \in F$. De acuerdo con el teorema 12, en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$ tiene lugar el desarrollo

$$F = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx, \tag{58.52}$$

y se verifica la igualdad de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\|F\|_{L_2}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{58.53}$$

Si $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$ es una suma parcial de la serie de Fourier (58.52), entonces la convergencia de esta serie en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$ hacia

*) El índice en los productos escalares y semiescalares indica en qué espacios se toman los productos en consideración.

el elemento F significa que

$$\lim_{n\to\infty} \|F - S_n(x)\|_{L_2} = 0. \tag{58.54}$$

Si ahora, $f \in F$, se tiene (véase (57.42))

$$\|F - S_n(x)\|_{L_2} = \|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx}, \tag{58.55}$$

donde $\|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2}$ es la seminorma de la función $f(x) - S_n(x)$ en el espacio $RL_2[-\pi, \pi]$, lo que tiene sentido, pues $f(x) - S_n(x) \in F - S_n(x)$. De (58.54) y (58.55) se desprende que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \lim_{n\to\infty} \|f(x) - S_n(x)\|_{RL_2} = 0,$$

es decir, la igualdad (58.50) queda demostrada.

Luego, como, en virtud de la misma fórmula (57.42), tienen lugar las igualdades

$$\|F\|_{L_2} = \|f\|_{RL_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx}$$

y los coeficientes de Fourier de F y f son iguales, entonces (58.51) se desprende inmediatamente de (58.53).

Para demostrar el corolario 2, observemos que si todos los coeficientes de Fourier de la función $f \in RL_2[-\pi, \pi]$ según el sistema trigonométrico son nulos, entonces de la igualdad de Parseval (58.51) proviene que

$$\|f\|^2_{RL_2} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 0,$$

y esto significa, de acuerdo con la definición 38 del p. 57.10 referente a las funciones equivalentes, que

$$f \sim 0.$$

Así, fijemos nuestra atención en que si los coeficientes de Fourier de una función de cuadrado integrable son todos iguales a cero, dicha función no es necesariamente cero idéntico, sino que es equivalente a él.

Ambos corolarios están demostrados.

De la igualdad de Parseval (58.51) se infiere una vez más (independientemente del teorema 2 en el p. 55.2) que los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ tienden a cero (pues el término general de la serie convergente (58.51) siempre tiende a cero) con la peculiaridad de que esto tiene lugar sólo para las funciones de cuadrado integrable en el segmento $[-\pi, \pi]$. Por cuanto toda función, continua en el segmento $[-\pi, \pi]$, es a la vez una función de cuadrado integrable, para ella es también válida la afirmación del primer corolario del teorema 12; esta función se desarrolla en serie de Fourier que converge a ella en el sentido de la media cuadrática y para ella es lícita la igualdad de Parseval (58.51).

Mientras tanto el segundo corolario para las funciones continuas puede ser considerablemente reforzado. Enunciémoslo en forma de un teorema.

Teorema 13. *Si todos los coeficientes de Fourier de una función continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ son iguales a cero, la misma función es idénticamente igual a cero.*

Corolario (teorema sobre la unicidad del desarrollo de una función continua en la serie de Fourier). *Si dos funciones continuas tienen iguales coeficientes de Fourier, son idénticamente iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$ y todos los coeficientes de Fourier de la misma son nulos, de la igualdad de Parseval (58.51) tenemos $\|f\|_{RL_2} = 0$. Pero la seminorma del espacio $RL_2[-\pi, \pi]$ en el conjunto de funciones continuas interviene como una norma (véase el ejemplo 9 en el p. 57.4), por lo cual $f(x) = 0$ para cualquier $x \in [-\pi, \pi]$.

El corolario se desprende de lo que la diferencia de dos funciones, cuyos coeficientes de Fourier son iguales, tiene coeficientes de Fourier nulos y, por ende, es cero idéntico. □

OBSERVACIÓN 1. Los teoremas 12 y 13 se han formulado con referencia al sistema trigonométrico de funciones. Las afirmaciones similares son válidas, por supuesto, para cualquier sistema ortogonal completo de funciones, es decir, para un sistema que forma una base ortogonal en el espacio $L_2[a, b]$. En particular, las afirmaciones análogas subsisten para los desarrollos de las funciones según polinomios de Legendre (véase el ejemplo 2 en el p. 58.3) en el espacio $L_2[-1, 1]$. Por ejemplo, si todos los coeficientes de Fourier de una función continua en el segmento $[-1, 1]$ según el sistema de polinomios de Legendre son nulos, dicha función será igual a cero en todo punto del segmento $[-1, 1]$. Las demostraciones de las afirmaciones semejantes pueden efectuarse siguiendo el mismo esquema que se ha usado anteriormente.

OBSERVACIÓN 2. El hecho esencial y fundamental que ha permitido demostrar el teorema 12 consiste en la completitud del sistema trigonométrico en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$, la cual, a su vez, se basa sobre la posibilidad de aproximar en el segmento $[-\pi, \pi]$, con cualquier grado de precisión en el sentido de la media cuadrática, toda función de cuadrado integrable en dicho segmento por una función continua de período 2π (véase el lema 16 del p. 57.10). Entre tanto, el empleo de la teoría general sobre el desarrollo según sistemas ortogonales en el espacio de Hilbert tenía, de hecho, sólo carácter terminológico y permitía realizar y anotar los razonamientos en una forma más breve e ilustrativa. A título de ejemplo de un concepto que es muy cómodo, al considerar los problemas estudiados, indiquemos, ante todo, el de espacio lineal normalizado (en particular, del espacio prehilbertiano) y, por consiguiente, el concepto de norma. La introducción de estos conceptos permitió exponer la teoría de desarrollos según los sistemas ortonormalizados independientemente de su forma concreta. Estos conceptos tienen también las más diversas aplicaciones en diferentes apartados de las matemáticas.

En conclusión, haciendo uso de los resultados obtenidos, demostremos un teorema más.

Teorema 14. *Supongamos que la función f es continua en el segmento $[-\pi, \pi]$. Si su serie de Fourier converge uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$, la suma de dicha serie será igual a la función f.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

y

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

la suma de la serie de Fourier de la función f.

Ante todo, la función $S(x)$, como una suma de la serie convergente de las funciones continuas, es también continua. Luego, en virtud del teorema 1 del p. 55.1, los números $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$, constituyen los coeficientes de Fourier de la función $S(x)$.

De este modo, dos funciones f y S, continuas en el segmento $[-\pi, \pi]$ tienen coeficientes de Fourier iguales y por esta razón, en virtud de lo dicho anteriormente, coinciden en todos los puntos del segmento $[-\pi, \pi]$: $f(x) = S(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. □

58.7*. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER DE LAS FUNCIONES INTEGRABLES EN CUADRADO. TEOREMA DE PLANCHEREL

Si el cuadrado de la función f es integrable en todo el eje real, la propia función, en el caso general, no es absolutamente integrable en todo el eje, lo que muestra el ejemplo de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Por eso, en virtud de la teoría de transformación de Fourier expuesta en el § 56, no puede afirmarse la existencia de la transformación de Fourier para las funciones del espacio $L_2(-\infty, \infty)$. Mostremos que en este caso se puede definir la transformación de Fourier en cierto sentido generalizado. Previamente nos detendremos en la definición del espacio $L_2(-\infty, \infty)$ para las funciones de valores complejos.

Sean f y g dos funciones continuas de cuadrado integrable del módulo en todo el eje que toman, por regla general, los valores complejos. Su producto escalar se determina en este caso según la fórmula

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Se comprueba con facilidad que todas las propiedades, de las cuales debe disponer un producto escalar en un espacio lineal complejo (véase el p. 57.7), en el caso dado se cumplen.

El espacio $L_2(-\infty, \infty)$, que se considera en este punto, se definirá como complemento de un espacio prehilbertiano de funciones continuas de valores

complejos con cuadrado del módulo integrable en todo el eje y producto escalar indicado (compárese con el teorema 6, p. 57.10). Con $\|f\|$ se designa en este párrafo la norma del elemento $f \in L_2(-\infty, +\infty)$, es decir,

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)},$$

y asimismo la seminorma

$$\|f\| = \sqrt{\int_{+\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}dx}$$

para las funciones f de cuadrado del módulo integrable en todo el eje. Anteriormente se ha asumido sin demostración, para el caso de las funciones reales (véase el p. 57.10), que todo elemento del espacio L_2 puede considerarse como una clase de funciones. La afirmación análoga es válida también para el espacio L_2 de funciones de valores complejos, con la particularidad de que la seminorma $\|f\|$ de las funciones f coincide con la norma del elemento del espacio L_2, al cual pertenece (en el sentido análogo al indicado en el p. 57.10) la función f. No nos detendremos en la demostración de estos hechos y no los utilizaremos en adelante.

Una función de valores complejos $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones reales, $-\infty < x < +\infty$, se llamará función escalonada finita, si lo son las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ (véase la definición 7 en el p. 55.2). En lo que sigue las funciones escalonadas finitas se llamarán, para abreviar, simplemente escalonadas.

Cualesquiera dos funciones escalonadas $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ pueden ser representadas en forma de una combinación lineal finita de las mismas funciones de un escalón (véase el p. 55.2) que toman los valores 1 y 0. Para ello basta tomar toda clase de intersecciones no vacías de los semiintervalos, donde las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ quedan constantes. Dichas intersecciones son también semiintervalos $[x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, donde quedan constantes simultáneamente las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$. Por eso, si

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{k-1} \leqslant x < x_k, \\ 0, & \text{si } x < x_{k-1} \text{ ó } x \geqslant x_k, \end{cases}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

son las correspondientes funciones de un escalón, existen tales números reales λ_k, $\mu_k = 1, 2, \ldots, n$, que

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \omega_k(x).$$

De aquí se deduce que toda función de un escalón de valores complejos $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ es representable en forma de

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \omega_k(x), \tag{58.56}$$

donde $\zeta_k = \lambda_k + i\mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, son números complejos.

Lema 6. *Sea f una función escalonada de valores complejos y sea $F[f]$ su transformación de Fourier, entonces*

$$\|F[f]\| = \|f\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Si la función f viene dada por la fórmula (58.56), se tiene

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(x)}dx =$$

$$= \sum_{j,\,k=1}^{n} \zeta_j\bar{\zeta}_k \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_j(x)\overline{\omega_k(x)}dx = \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2(x_k - x_{k-1}). \qquad (58.57)$$

Sea ahora $0 < \eta < +\infty$; entonces

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\overline{F[f]}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\xi)}e^{i\xi y}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(\xi)}dx\,d\xi \int_{-\eta}^{\eta} e^{iy(\xi - x)}dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{f(\xi)}\,\frac{\operatorname{sen}\eta(\xi - x)}{\xi - x}\,dx\,d\xi. \qquad (58.58)$$

Todas las transformaciones son verídicas aquí, puesto que todas las integrales se calculan, de hecho, dentro de los límites finitos.

Por cuanto las partes real e imaginaria de la función $f(x)$ satisfacen las condiciones del teorema sobre la representación de funciones mediante la integral de Fourier (véase el teorema 1 en el p. 56.1), resulta, pues, que para todo x, a excepción de $x = x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, se tiene (véase la demostración del teorema citado)

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\xi)}\,\frac{\operatorname{sen}\eta(\xi - x)}{\xi - x}\,d\xi = \overline{f(x)}.$$

Se pone de manifiesto que en virtud de lo observado y teniendo presentes nuestras suposiciones acerca de la última integral (58.58), podemos pasar al límite bajo el signo de la integral exterior para $\eta \to +\infty$. No obstante, el teorema correspondiente no fue demostrado en el presente curso, a consecuencia de lo cual nos vemos obligados a realizar ciertos cálculos complementarios. Sustituyendo (58.56) en (58.58), obtenemos

$$\int_{-\eta}^{\eta} F[f]\overline{F[f]}dy = \frac{1}{\pi}\sum_{i,\,k=1}^{n} \zeta_j\bar{\zeta}_k \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\operatorname{sen}\eta(\xi - x)}{\xi - x}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i,\,k=1}^{n} \zeta_j\bar{\zeta}_k \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{\eta(x_{k-1} - x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt. \qquad (58.59)$$

Analicemos el comportamiento de cada sumando de la suma obtenida cuando $\eta \to +\infty$. Si $j = k$, entonces, cambiando el orden de integración (fig. 242) y efec-

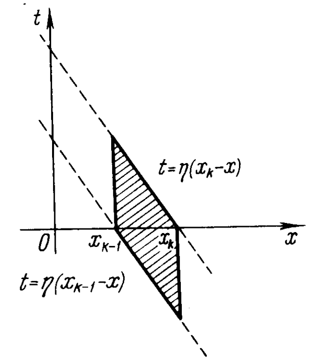


Fig. 242

tuando la integración respecto de la variable x, obtendremos:

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{\eta(x_{k-1} - x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\eta(x_k - x_{k-1})} \left(x_k - x_{k-1} - \frac{t}{\eta}\right)\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-\eta(x_k - x_{k-1})}^{0} \left(x_k - x_{k-1} + \frac{t}{\eta}\right)\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}(x_k - x_{k-1})\int_0^{\eta(x_k - x_{k-1})} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt + \frac{2}{\pi\eta}[1 - \cos\eta(x_k - x_{k-1})].$$

Como

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

(véase el p. 54.4), se tiene

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{2}{\pi}(x_k - x_{k-1})\int_0^{\eta(x_k - x_{k-1})} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = x_k - x_{k-1}.$$

Luego, evidentemente,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{2}{\pi\eta}[1 - \cos\eta(x_k - x_{k-1})] = 0,$$

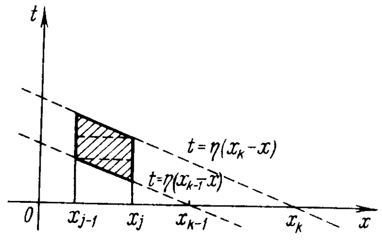


Fig. 243

por lo cual

$$\lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{\eta(x_{k-1} - x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Mostremos ahora que para $j \neq k$

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{\eta(x_{k-1} - x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 0.$$

Sea, para concretar, $x_{j-1} < x_j \leqslant x_{k-1} < x_k$. Para otras disposiciones de los semiintervalos $[x_{j-1}, x_j)$ y $[x_{k-1}, x_k)$, donde las funciones quedan constantes, la demostración es análoga. Cambiando de nuevo el orden de integración y realizando la integración respecto de x (fig. 243) obtendremos, recurriendo a los razonanientos semejantes:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \int_{\eta(x_{k-1} - x)}^{\eta(x_k - x)} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \int_{\eta(x_k - x_j)}^{\eta(x_k - x_{j-1})} \left(x_k - x_{j-1} - \frac{t}{\eta}\right) \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt +$$

$$+ \int_{\eta(x_{k-1} - x_{j-1})}^{\eta(x_k - x_j)} (x_j - x_{j-1}) \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt +$$

$$+ \int_{\eta(x_{k-1} - x_j)}^{\eta(x_{k-1} - x_{j-1})} \left(x_j - x_{k-1} + \frac{t}{\eta}\right) \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \to 0 \quad \text{para} \quad \eta \to \infty.$$

Ahora, de (58.59) tenemos

$$\|F[f]\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} F[f]\overline{F[f]}\, dx = \lim_{\eta \to +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} F[f]F[\bar{f}]\, dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 (x_k - x_{k-1}) = \|f\|^2. \ \square$$

Lema 7. *Sea f una función de valores complejos, continua en el segmento $[a, b]$ e igual a cero fuera de dicho segmento; existe una sucesión de tales funciones escalonadas φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, que*

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Para las funciones reales dicha afirmación se desprende del lema 14, p. 57.10. Supongamos ahora que $\varphi = u + iv$ es una función de valores complejos continua en el segmento $[a, b]$; en este caso las funciones reales u y v son también continuas en el segmento $[a, b]$. Por eso, existen tales sucesiones de funciones escalonadas $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ que $\|u - u_n\| \to 0$ y $\|v - v_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si es que $\varphi_n = u_n + iv_n$, entonces $\|\varphi - \varphi_n\| \leqslant \|u - u_n\| + \|v - v_n\|$, de donde $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. □

Lema 8. *Supongamos que una función de valores complejos φ es continua en el segmento $[a, b]$ y es igual a cero fuera de él, en este caso*

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea φ_n una sucesión de funciones escalonadas de tal género que

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$$

(véase el lema 7), entonces, en virtud de la continuidad de la norma,

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n\| = \|\varphi\|. \tag{58.60}$$

Entre tanto, de la desigualdad de Cauchy — Buniakovski obtenemos

$$\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \leqslant \left(\int_a^b dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= (b - a)^{1/2} \left(\int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx = 0,$$

es decir, la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge en media hacia la función φ y converge en el sentido de L_1. Por esta razón, si

$$\psi = F[\varphi], \quad \psi_n = F[\varphi_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

entonces la sucesión de las funciones continuas $\{\psi_n\}$ (véase el corolario del lema 4 en el p. 56.7) converge uniformemente hacia la función ψ, la cual es, debido a esto, continua en todo el eje numérico. Además, en virtud del lema 6,

$$\|\psi_n\| = \|\varphi_n\|. \tag{58.61}$$

De aquí proviene, en particular, que las funciones continuas ψ_n son funciones de cuadrado integrable del módulo, es decir, pertenecen al espacio $L_2(-\infty, +\infty)$. Ahora, las funciones ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, forman una sucesión fundamental en el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$. Esto se deduce de lo que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge en media en el sentido de L_2 y también de la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(y) - \varphi_m(y)|^2 dy,$$

la cual también proviene del lema 6, pues la diferencia entre las funciones escalonadas es asimismo una función escalonada.

Mostremos que la sucesión $\{\psi_n\}$ converge hacia la función ψ también en el espacio L_2. En efecto, siendo $\varepsilon > 0$ fijo, existe, por ser la sucesión $\{\psi_n\}$ fundamental, tal número n_ε que para todos los $n \geqslant n_\varepsilon$ y $m \geqslant n_\varepsilon$ se cumple la desigualdad

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy < \varepsilon.$$

Con mayor razón, para cualquier número $c > 0$ tendremos

$$\int_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi_m(y)|^2 dy < \varepsilon. \tag{58.62}$$

Cuando n y c son fijos y $m \to \infty$, la expresión subintegral en (58.62) converge uniformemente hacia la función $|\psi_n(y) - \psi(y)|^2$. Por ello, en la desigualdad (58.62) podemos pasar al límite bajo el signo de la integral para $m \to \infty$. De resultas tendremos

$$\int_{-c}^{c} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2 dy \leqslant \varepsilon.$$

Ahora, haciendo tender c hacia $+\infty$, obtendremos que para $n \geqslant n_\varepsilon$ se verifica la desigualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(y) - \psi(y)|^2 dy \leqslant \varepsilon, \tag{58.63}$$

lo que precisamente significa la convergencia en media, en el sentido de L_2, de la sucesión $\{\psi_n\}$ hacia la función ψ.

De lo demostrado se deduce también que $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$. Efectivamente, en virtud de (58.61) y (58.63),

$$\|\psi\| \leqslant \|\psi - \psi_n\| + \|\psi_n\| < +\infty.$$

Por fin, de la desigualdad (57.18) obtenemos, teniendo presente que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n\| = \|\psi\|. \tag{58.64}$$

De (58.60), (58.61) y (58.64) se infiere que

$$\|\psi\| = \|\varphi\|. \ \square$$

Teorema 15 (de Plancherel*)). *Supongamos que φ es una función continua de cuadrado integrable del módulo en todo el eje numérico y sea*

*) M. Plancherel (1885 — 1967), matemático suizo.

$$\psi_M(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} \varphi(x) e^{-ixy} dx, \quad M > 0.$$

Entonces:

1) *la función $\psi_M(y)$ es también continua y de cuadrado integrable en todo el eje numérico;*

2) *cuando $M \to +\infty$, las funciones ψ_M convergen en el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ hacia cierto elemento $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ y*

3) $\|\varphi\| = \|\psi\|$.

DEMOSTRACIÓN. Si

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{si } x \in [-M, M], \\ 0, & \text{si } x \notin [-M, M], \end{cases}$$

será obvio que

$$\psi_M = F[\varphi_M],$$

$$\lim_{M\to+\infty} \varphi_M = \varphi \text{ en } L_2(-\infty, +\infty), \tag{58.65}$$

$$\lim_{M\to+\infty} \|\varphi_M\| = \|\varphi\|. \tag{58.66}$$

De conformidad con el lema 8,

$$\|\psi_M\| = \|\varphi_M\|, \quad M > 0, \tag{58.67}$$

$$\|\psi_{M_1} - \psi_{M_2}\| = \|\varphi_{M_1} - \varphi_{M_2}\|, \quad M_1 > 0, \quad M_2 > 0. \tag{58.68}$$

De (58.65) y (58.68) proviene, en virtud de que el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ es completo, que existe un límite (¿por que?)

$$\lim_{M\to+\infty} \psi_M = \psi \text{ en } L_2(-\infty, +\infty).$$

Por ser continua la norma,

$$\lim_{M\to+\infty} \|\psi_M\| = \|\psi\| \tag{58.69}$$

de (58.66), (58.67) y (58.69) tenemos

$$\|\psi\| = \|\varphi\|. \ \square$$

El elemento $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, obtenido en el transcurso de la demostración, lo llamaremos también *transformación de Fourier* de la función continua dada $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ y anotaremos

$$\psi = F[\varphi]. \tag{58.70}$$

Esta notación es natural, puesto que si la función φ es, además, absolutamente integrable, entonces $\lim\limits_{M\to+\infty} \psi_M$ coincide con la transformación de Fourier ordinaria. En efecto, en este caso

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_M(x) - \varphi(x)|\, dx = 0.$$

Por consiguiente, las funciones $\psi_M = F[\varphi_M]$ convergen uniformemente, cuando $M \to \infty$, hacia la transformación de Fourier $F[\varphi]$ de la función φ. Como vimos, ψ_M converge en media en el sentido de L_2 hacia la función ψ; de aquí no es difícil convencerse de que $\psi = F[\varphi]$ (compárese el razonamiento análogo en la demostración del lema 8).

La transformación de Fourier (58.70) está definida por ahora sólo para aquellos elementos $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$, que representan en sí funciones continuas de cuadrado integrable, sin embargo por su continuidad puede ser extendida a todo el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$. En efecto, sea φ un elemento arbitrario del espacio $L_2(-\infty, +\infty)$. De acuerdo con la definición del espacio $L_2(-\infty, +\infty)$, el conjunto de funciones continuas es denso en él. Por consiguiente, existe una sucesión de funciones continuas

$$\varphi_n \in L_2(-\infty, +\infty), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$.

Sea $F[\varphi_n] = \psi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. En virtud del teorema Plancherel,

$$\|\psi_n - \psi_m\| = \|\varphi_n - \varphi_m\|, \quad n, m = 1, 2, \ldots,$$

por lo cual la sucesión $\{\psi_n\}$ es fundamental en L_2 y, por ende, es convergente. Sea $\psi = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$. Por definición suponemos

$$\psi = F[\varphi]. \tag{58.71}$$

Si $\varphi_n^* \in L_2(-\infty, +\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$, es alguna otra sucesión de funciones continuas que en $L_2(-\infty, +\infty)$ converge al elemento φ, y si $\psi_n^* = F[\varphi_n^*]$, entonces de la igualdad

$$\|\varphi_n - \varphi_n^*\| = \|\psi_n - \psi_n^*\|$$

tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n^* = \psi$. De este modo, la definición (58.71) no depende de cómo se elige la sucesión de funciones continuas que converja hacia el elemento φ.

Para cualquier $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ resulta válida la igualdad

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|,$$

lo cual proviene inmediatamente de que esta igualdad tiene lugar para las funciones continuas $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ y de la continuidad de la norma.

Luego, es fácil comprobar que la transformación de Fourier F es lineal en $L_2(-\infty, +\infty)$, es decir,

$$F[\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2] = \lambda_1 F[\varphi_1] + \lambda_2 F[\varphi_2]$$

para cualesquiera φ_1 y φ_2 de $L_2(-\infty, +\infty)$ y cualesquiera números λ_1 y λ_2. Esto es cierto para las funciones escalonadas. Ellas forman en $L_2(-\infty, +\infty)$ un conjunto denso. De aquí, la igualdad citada se obtiene pasando al límite para cualesquiera elementos del espacio $L_2(-\infty, +\infty)$.

Por fin, la transformación de Fourier aplica el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ *sobre sí mismo*, es decir, cualquiera que sea el elemento $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, existe un elemento $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ tal que $F[\varphi] = \psi$. Con el fin de probarlo, se debe definir, empleando el mismo método que se ha utilizado para la transformación de Fourier, en el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ la transformación de Fourier inversa F^{-1} y mostrar que para todo elemento $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$ se verifica la igualdad $\|F^{-1}[\psi]\| = \|\psi\|$. A continuación, se puede mostrar que

$$F[F^{-1}[\psi]] = \psi \quad \text{y} \quad F^{-1}[F[\psi]] = \psi$$

para cualquier $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, partiendo de que esto es cierto sobre un conjunto de funciones escalonadas que forman en $L_2(-\infty, +\infty)$ un conjunto denso. Si, ahora, tomamos, para el elemento $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$, un elemento $\varphi = F^{-1}[\psi]$, entonces obtendremos $F[\varphi] = \psi$, lo que precisamente significa que la transformación F aplica todo el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ sobre sí mismo.

Al resumir todo lo dicho, llegamos al siguiente teorema.

Teorema 16 (de Plancherel). *La transformación de Fourier F es lineal y aplica biunívocamente el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$ sobre sí mismo, con la particularidad de que para cualquier elemento $\varphi \in L_2(-\infty, +\infty)$ se verifica la igualdad*

$$\|F[\varphi]\| = \|\varphi\|.$$

§ 59. FUNCIONES GENERALIZADAS

59.1. RAZONAMIENTOS GENERALES

Se considerará en este párrafo una generalización del concepto clásico de una función, a saber, el concepto de función generalizada. Ha surgido en el proceso de resolución de ciertos problemas físicos y en los últimos años se ha arraigado en las matemáticas rápida y sólidamente. Con ayuda de este concepto la transformación de Fourier puede extenderse a una clase de funciones más amplia que las funciones absolutamente integrables o de cuadrado integrable. Permite formular en el lenguaje matemático tales nociones idealizadas como, por ejemplo, densidad de una carga puntual, densidad de un punto material, impulso instantáneo, etc.

Explicaremos esto más detalladamente. Al estudiar fenómenos físicos sirviéndonos del aparato matemático, hemos de recurrir inevitablemente a ciertas abstracciones matemáticas, en particular, emplear la noción de punto. Hablamos, por ejemplo, de una masa concentrada en el punto dado de un espacio, de una fuerza aplicada en el momento dado de tiempo (es decir, en el punto dado del eje a lo largo del cual se calcula el tiempo), de una fuente puntual de tal o cual campo físico, etc. Esto resulta ser cómodo al emplear el aparato matemático, aunque en tal caso reproducimos una situación que no es del todo exacta: cualquier masa tiene un volumen bien determinado, toda fuerza actúa durante un determinado lapso, cualquier fuente de un campo tiene dimensiones determinadas, etc. Resulta pues que, para este enfoque del estudio de los fenómentos físicos, los métodos clásicos de las matemáticas son insuficientes. A veces nos vemos obligados a introducir nuevos conceptos matemáticos, crear un aparato matemático nuevo.

Examinemos, a título de ejemplo, la acción de una fuerza "instantánea". Supongamos que en el instante $t = 0$ un cuerpo de masa $m \neq 0$ ha experimentado la acción de una fuerza que le comunicó la velocidad $v \neq 0$, después de lo cual la acción de la fuerza se dio por terminada. Al designar mediante $F(t)$ la fuerza que actúa contra el cuerpo al instante de tiempo t, obtenemos $F(t) = 0$ cuando $t \neq 0$. Trataremos de determinar cuál es la fuerza $F(t)$ cuando $t = 0$. Según la segunda ley de Newton, la fuerza es igual a la velocidad de variación de la cantidad de movimiento respecto del tiempo

$$F(t) = \frac{d(mv)}{dt}$$

y, por consiguiente, para cualquier momento de tiempo τ, $0 < \tau < +\infty$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\tau} F(t)\,dt = mv. \tag{59.1}$$

Como límite inferior de integración se ha elegido $-\infty$; por supuesto, podemos tomar en lugar de $-\infty$ cualquier número $a < 0$, por cuanto hasta el momento de tiempo $t = 0$ el cuerpo se encontraba en reposo.

Fijemos nuestra atención en que desde el punto de vista de la matemática clásica, es decir, desde el punto de vista de aquel concepto de integral que hemos estudiado, la igualdad (59.1) está privada de sentido: la función $F(x)$ es igual a cero en todos los puntos, salvo en $t = 0$, por eso la integral que figura en el primer miembro de la fórmula (59.1) y que se considera como impropia es igual a cero, mientras que el segundo miembro de esta igualdad no es nulo. Por otra parte, partiendo de los razonamientos físicos, es natural esperar que la igualdad escrita tiene un sentido determinado. Esta contradicción significa que nos encontramos fuera de las posibilidades de emplear el aparato matemático conocido y han de introducirse algunas nuevas nociones matemáticas.

Supongamos, para simplificar, que la cantidad de movimiento adquirido por el cuerpo es igual a la unidad, es decir, $mv = 1$. En este caso la fuerza $F(t)$ que actúa contra el cuerpo se designará mediante $\delta(t)$, por lo cual, la fórmula (59.1) tendrá por expresión

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)\,dt = 1, \quad \tau > 0. \tag{59.2}$$

La función $\delta(t)$ se llama corrientemente función delta (función δ) o función de Dirac [*)].

Con el fin de examinar detenidamente la cuestión, supongamos que el cuerpo está accionado no por una fuerza instantánea, sino por cierta fuerza constante que actúa contra el cuerpo durante el lapso de tiempo de $-\varepsilon$ hasta 0 ($\varepsilon > 0$); esta última se designará con $\delta_\varepsilon(t)$. Supongamos también que esta fuerza comunica al cuerpo la misma cantidad de movimiento, igual a la unidad. En otras palabras, distribuyamos

[*)] P. Dirac (n. 1902), físico inglés.

la fuerza buscada $\delta(t)$ por un intervalo de tiempo de longitud ε. Hallemos la fuerza $\delta_\varepsilon(t)$.

De acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento, para cualquier tiempo $\tau \geqslant 0$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt = 1.$$

Por cuanto la fuerza $\delta_\varepsilon(t)$ es nula fuera del segmento $[-\varepsilon, 0]$ y constante dentro del segmento citado, se tiene

$$1 = \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{0} \delta_\varepsilon(t)\,dt = \varepsilon\delta_\varepsilon(t), \quad -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0.$$

Por ello

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{si} \quad -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0 \\ 0, & \text{si} \quad t < -\varepsilon \quad \text{o bien} \quad t > 0. \end{cases} \tag{59.3}$$

Es natural suponer que la fuerza instantánea $\delta(t)$ se obtiene de la "fuerza distribución" $\delta_\varepsilon(t)$, pasando al límite para $\varepsilon \to 0$, es decir,

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t),$$

entonces

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad t = 0, \\ 0, & \text{si} \quad t \neq 0. \end{cases} \tag{59.4}$$

Esta formula no permite obtener la (59.2), haciendo uso de las definiciones conocidas de la integral (propia o impropia). El hecho de que la función es nula en todos los puntos, a excepción de uno, donde ella es igual al infinito, y a la vez otro hecho, consistente en que la integral de dicha función es igual a la unidad, contradicen uno al otro dentro de los marcos de la matemática que hoy día se llama clásica. Esto nos lleva a la conclusión sobre la necesidad de introducir un concepto nuevo, el de "integral" (59.2).

Desde el punto de vista físico es natural considerar que la cantidad de movimiento comunicada al cuerpo por la fuerza instantánea $\delta(t)$, es decir, la integral (59.2), es un límite de la cantidad de movimiento comunicada al cuerpo por las fuerzas $\delta_\varepsilon(t)$ distribuidas en tiempo, cuando el lapso de su accionamiento tiende a cero, es decir, cuando $\varepsilon \to 0$. Por eso pongamos, por definición,

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt, \quad \tau > 0.$$

De aquí, en virtud de la igualdad $\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)\,dt \equiv 1$, $\tau > 0$ para todo $\varepsilon > 0$, proviene precisamente la igualdad (59.2).

De este modo, cuando se dice que la integral (59.2) de una función delta es igual a la unidad, esta integral debe entenderse como límite de las correspondientes integrales ordinarias de las funciones δ_ε cuando $\varepsilon \to +0$.

Resulta útil dar, de un modo análogo, la definición de las "integrales" más generales, a saber, de las integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t)\, dt, \quad -\infty < \tau < +\infty, \tag{59.5}$$

donde $f(t)$ es una función continua. A saber, definamos el símbolo (59.5) mediante la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\, dt. \tag{59.6}$$

Para demostrar que esta definición es correcta, se debe probar que el límite (59.6) siempre existe. Más aún, probemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\, dt = \begin{cases} f(0) & \text{para } \tau \geqslant 0, \\ 0 & \text{para } \tau < 0. \end{cases} \tag{59.7}$$

Sea primero $\tau \geqslant 0$. Al emplear (59.3), obtendremos

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\, dt - f(0) \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} f(t)\, dt - \frac{f(0)}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} |f(t) - f(0)|\, dt. \tag{59.8}$$

Por ser la función $f(x)$ continua cuando $x = 0$, para cualquier $\eta > 0$ existe tal $\varepsilon_\eta > 0$ que para todo t que satisfaga la condición $|t| < \varepsilon_\eta$, se cumple la desigualdad

$$|f(t) - f(0)| < \eta.$$

Por ello, para cualquier $\varepsilon < \varepsilon_\eta$, de la desigualdad (59.8) proviene que

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t)\, dt - f(0) \right| < \frac{\eta}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\tau} dt = \eta.$$

La igualdad (59.7) queda demostrada para $\tau \geqslant 0$. Se demuestra de modo aún más fácil cuando $\tau < 0$.

Así pues, de la definición (59.6) se deduce que para cualquier función continua $f(t)$ es válida la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t)\, dt = \begin{cases} f(0) & \text{para } \tau \geqslant 0, \\ 0 & \text{para } \tau < 0. \end{cases} \tag{59.9}$$

La fórmula (59.2) se desprende de aquí cuando $f(t) \equiv 1$.

Si ponemos

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{para } t < 0, \end{cases} \tag{59.10}$$

la fórmula (59.9), para $f(t) \equiv 1$, se escribirá en la forma

$$\theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)\, dt. \tag{59.11}$$

La función $\theta(t)$ lleva un nombre especial: se llama *función de Heaviside**). Al calcular la derivada de la función $\theta(t)$, de acuerdo con la definición clásica de derivada, de (59.10) obtenemos

$$\theta'(t) = \begin{cases} \infty & \text{para } t = 0, \\ 0 & \text{para } t \neq 0. \end{cases} \tag{59.12}$$

No sería correcto afirmar a base de lo dicho que $\theta'(t)$ es una función delta, puesto que la función $\delta(t)$ se define no sólo por la función (59.4), pues incluso desde el punto de vista físico está claro que de esta sola fórmula no puede provenir que la fuerza $\delta(t)$ comunica al cuerpo en consideración una cantidad de movimiento que es precisamente igual a la unidad. No obstante, es cómodo poner, por definición,

$$\theta'(t) = \delta(t).$$

Aparte de la igualdad (59.12), esto se justifica por el hecho de que en tal caso queda en vigor la fórmula fundamental del cálculo integral que restablece la función a partir de su derivada, o sea, la fórmula de Newton — Leibniz. En efecto, ahora la fórmula (59.11) puede ser escrita en la forma

$$\theta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \theta'(t)\, dt, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

(observemos que $\theta(-\infty) = 0$).

Ha de notarse que no hemos dado la definición matemática precisa de la propia función $\delta(t)$ en su calidad de función de un punto (se ha observado anteriormente que la fórmula (59.4) no constituye tal definición); esto es imposible en general, puesto que la función delta es un concepto de distinta naturaleza. Entre tanto, fue definida por nosotros no la función $\delta(t)$, sino la "integral" (59.5). No es por casualidad. Para varios problemas de física resulta característica una circunstancia consis-

*) O. Heaviside (1850—1925), físico inglés.

tente en que las funciones, introducidas con el objeto de describir uno u otro objeto, sólo tienen sentido en la medida de que el sentido físico inmediato lo tienen ciertas integrales de dichas funciones. Las funciones generalizadas surgen, pues, como cierta generalización de una familia de integrales del producto de dos funciones, una de las cuales es fija y la otra puede elegirse arbitrariamente de cierta totalidad.

Así pues, hemos definido un concepto nuevo, el de integral de la función delta (e, incluso, el concepto más, general de integral del producto de una función continua por la función delta). Esto no es una integral ordinaria, es decir, no es un límite de ciertas sumas integrales, sino el límite de las integrales correspondientes, o bien, hablando metafóricamente, "un límite de los límites de sumas integrales". En otras palabras, para definir la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)\,dx$ se debe añadir al paso límite, que da el valor de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)f(x)\,dx$, un paso límite más para $\varepsilon \to 0$. Aquí se observa una analogía peculiar con la definición de la integral impropia: partiendo de la definición conocida de la integral, obtenemos, con ayuda de un paso límite complementario, el nuevo concepto matemático. Por supuesto, los pasos límite complementarios en estos casos son diferentes, lo que conduce a los distintos conceptos.

Al definir de un modo nuevo el símbolo (59.5), nos encontramos dentro del círculo de las definiciones matemáticas acostumbradas que hacen más amplio el bagaje de conceptos que hemos tratado anteriomente; hemos logrado establecer una propiedad interesante de la función $\delta(t)$ (véase (59.9)): dicha función pone a toda función continua $f(t)$ en correspondencia un número $f(0)$, es decir, $\delta(t)$ puede considerarse como una función definida en el conjunto de todas las funciones continuas. Las aplicaciones cuyos dominios de definición representan en sí ciertos conjuntos de funciones llevan el nombre de *funcionales*. La función delta es precisamente uno de los más simples ejemplos de funcionales. Las funciones generalizadas mencionadas al principio de este punto, se llaman funcionales del tipo determinado (véase el p. 59.2).

Según se vio, las propiedades de la función delta se determinan por las propiedades de las funciones $\delta_\varepsilon(x)$. Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, se obtendrá una sucesión de funciones la cual, al igual que las sucesiones análogas a la mencionada en un sentido determinado, se llama sucesión en delta (la definición precisa de las sucesiones en delta se dará más abajo: véase el ejercicio 6 en el p. 59.3). Cualquier sucesión en delta puede servir para definir la propiedad (59.9) de la función delta. Cabe notar que ya nos encontramos antes con las sucesiones en delta: a título de ejemplo de tal sucesión sirve la sucesión de los núcleos de Fejer $\Phi_n(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Sin embargo, no fijamos nuestra atención en las sucesiones de esta índole, por cuanto ellas no fueron el objeto de estudio especial y desempeñaban un papel auxiliar.

Pasemos ahora al estudio sistemático de las funciones generalizadas. Algunas de las funciones generalizadas han aparecido primeramente en las obras de P. Dirac y otros físicos en calidad de un método simbólico para describir ciertos fenómenos físicos. Con el fin de emplear estos conceptos a título de método de la investigación

teórica, tuvo que surgir la necesidad de crear la teoría de funciones generalizadas, lo que se ha hecho. La teoría de las funciones generalizadas es ahora un aparato matemático muy útil. Con ayuda de esta teoría se ha logrado resolver toda una serie de problemas que no podían ser resueltos mediante los métodos antigous. En el presente las funciones generalizadas se utilizan ampliamente tanto en las inverstigaciones aplicadas como en las matemáticas puras.

En los puntos ulteriores de este párrafo expondremos los fundamentos de la teoría general de las funciones generalizadas, elaborada por S. L. Sóbolev y L. Schwartz*).

59.2. ESPACIOS LINEALES CON CONVERGENCIA. FUNCIONALES. ESPACIOS CONJUGADOS

Definición 1. *Sea X cierto conjunto y supongamos que en la totalidad de todas las sucesiones $\{x_n\}$ de sus elementos, $x_n \in X$, se ha distinguido una clase de sucesiones, llamadas convergentes, y a toda sucesión convergente se le ha puesto en correspondencia un elemento $x \in X$, llamado límite de dicha sucesión.*

Si en este caso se cumplen tres condiciones:

1) cada sucesión de elementos del conjunto X puede tener no más de un límite;

2) toda sucesión del tipo $\{x, x, x, \ldots, x, \ldots\}$ es convergente y el elemento x es su límite;

3) toda subsucesión de una sucesión convergente es también convergente y tiene el mismo límite que toda la sucesión,

entonces el conjunto X se denomina espacio con convergencia.

Las condiciones 1, 2 y 3 se llaman *axiomas de Fréchet***).

Si x es el límite de la sucesión $\{x_n\}$, entonces, como siempre, se escribe

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Definición 2. *Un espacio lineal X se llama espacio lineal con convergencia, si es un espacio con convergencia, respecto de la cual las operaciones de sumación de los elementos del espacio y de su multiplicación por un número son continuas.*

Esto significa que para cualesquiera sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de elementos de X, que tienen por límites $x \in X$ e $y \in X$, respectivamente, y cualesquiera números λ y μ la sucesión $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ es también convergente y

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y.$$

Además, si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión numérica y $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$, entonces $\lim_{n \to \infty} \lambda_n x = \lambda x$ para cualquier $x \in X$.

Como espacios lineas con convergencia pueden indicarse los espacios lineales normalizados; no obstante, existen espacios lineales con convergencia en los que no

*) S. L. Sóbolev (n. 1908), matemático soviético; Schwartz L. (n. 1915), matemático francés.

**) Fréchet M. R. (1878—1973), matemático francés.

puede introducirse una norma que engendra la convergencia dada de sucesiones.

Definición 3. *Las aplicaciones del espcio lineal X en el conjunto de números reales $\boldsymbol{R}$ (o en el conjunto de números complejos C) reciben el nombre de funcionales definidas en dicho espacio o funcionales sobre dicho espacio. El valor de la funcional f en el punto x del espacio lineal X se designa con (f, x), es decir, igual que el producto escalar de los elementos f y x en el espacio lineal X provisto de un producto escalar.*

Esta designación se justifica, en particular, por el hecho de que el producto escalar (y, x) es, cuando el elemento y es fijo, una funcional definida sobre el espacio mencionado X.

Definición 4. *Sea X un espacio lineal. La funcional f definida sobre este espacio, se llama lineal (con más precisión, lineal homogénea), si para cualesquiera elementos $x \in X$, $y \in X$ y cualesquiera números λ, μ se cumple la condición*

$$(f, \lambda x + \mu y) = \lambda(f, x) + \mu(f, y).$$

Definición 5. *La funcional f, definida sobre un espacio lineal X con convergencia, se denomina continua, si para toda sucesión convergente $x_n \in X$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, se cumple la condición*

$$\lim_{n \to \infty} (f, x_n) = (f, x).$$

Las funcionales, como cualesquiera funciones numéricas, pueden sumarse, multiplicarse una por la otra, en particular, por un número. Por ejemplo, si f y g son las funcionales, entonces el valor de la funcional $\alpha f + \beta g$ (α y β son unos números) en el punto $x \in X$ se determina según la fórmula

$$(\alpha f + \beta g, x) = \alpha(f, x) + \beta(g, x).$$

Lema 1. *Las funcionales continuas lineales forman un espacio lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Sean f y g las funciones lineales y sean α y β unos números. Mostremos que $\alpha f + \beta g$ es también una funcional lineal:

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g, \lambda x + \mu y) &= \alpha(f, \lambda x + \mu y) + \beta(g, \lambda x + \mu y) = \\ &= \alpha[\lambda(f, x) + \mu(f, y)] + \beta[\lambda(g, x) + \mu(g, y)] = \\ &= \lambda[\alpha(f, x) + \beta(g, x)] + \mu[\alpha(f, y) + \beta(g, y)] = \\ &= \lambda(\alpha f + \beta g, x) + \mu(\alpha f + \beta g), y),\end{aligned}$$

es decir, $\alpha f + \beta g$ es una funcional lineal.

Supongamos ahora que f y g son funcionales continuas. Probemos que en este caso $\alpha f + \beta g$ es también una funcional continua. Sea $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} (\alpha f + \beta g, x_n) &= \lim_{n \to \infty} [\alpha(f, x_n) + \beta(g, x_n)] = \\ &= \alpha \lim_{n \to \infty} (f, x_n) + \beta \lim_{n \to \infty} (g, x_n) = \alpha(f, x) + \beta(g, x) = (\alpha f + \beta g, x).\end{aligned}$$

De este modo, en un conjunto de funcionales continuas lineales están definidas de un modo natural las operaciones de su sumación y multiplicación por un número.

ro. El cumplimiento, para dichas operaciones, de los axiomas del espacio lineal se comprueba sin dificultades algunas. □

En un espacio lineal de funcionales continuas lineales del espacio X el concepto de convergencia de las sucesiones se determina de la manera siguiente.

Definición 6. *Una sucesión de funcionales f_n, $n = 1, 2, \ldots$ se denomina convergente hacia la funcional f, si la sucesión de los valores de las funcionales f_n converge en todo punto $x \in X$ al valor de la funcional f en este punto, en otras palabras, si para cualquier elemento $x \in X$ la sucesión numérica $\{(f_n, x)\}$ converge hacia el número (f, x).*

De este modo, la afirmación $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ es equivalente a la siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, x) = (f, x) \text{ para todo } x \in X.$$

Definida de este modo la convergencia de las funcionales, las operaciones de su sumación y multiplicación por un número son continuas (esto se deduce inmediatamente de la linealidad de funcionales y de la propiedad de los límites de las sucesiones numéricas), y, por consiguiente, si introducimos el concepto de convergencia de las funcionales conforme a la definición 6, resultará lícita la siguiente afirmación que se enunciará en forma de un lema.

Lema 2. *Las funcionales continuas lineales, definidas sobre un espacio con convergencia, forman también un espacio lineal con convergencia.*

Definición 7. *Un espacio lineal con convergencia cuyos elementos son las funcionales continuas lineales, definidas sobre el espacio X, se llama espacio conjugado de X.*

Sean X e Y los espacios lineales con convergencia, con la particularidad de que todo elemento del espacio X es un elemento del espacio Y y supongamos que cualquier sucesión $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, convergente en X hacia el elemento x, converge hacia x también en el espacio Y. En este caso se escribirá

$$X \hookrightarrow Y.$$

Definición 8. *Se dice que una funcional continua lineal f, definida sobre el espacio $X \hookrightarrow Y$, es prolongable al espacio Y en una funcional continua lineal, si existe tal funcional continua lineal F, definida sobre el espacio Y, que $(F, x) = (f, x)$ para todo $x \in X$ (es decir, $F = f$ en Y). En este caso la funcional F lleva el nombre de prolongación de la funcional f.*

Ejercicio 1. Sean X e Y los espacios lineales con convergencia. Demúestrese que si $X \hookrightarrow Y$ y el conjunto X es denso en el espacio Y (es decir, cada elemento del espacio Y es el límite en este espacio para la sucesión de elementos de X), entonces cualquier funcional continua lineal del espacio X, si se prolonga en una funcional continua lineal del espacio Y, es prolongable de un modo único.

Igual que para las aplicaciones de cualesquiera espacios lineales, para los espacios con convergencia tiene sentido el concepto de aplicación lineal (operator lineal) de un espacio con convergencia en otro espacio de este mismo género (véase la definición 17 en el p. 57.2). Introduzcamos, además, el concepto de aplicación continua de un espacio lineal con convergencia en otro espacio con convergencia.

Definición 9. *Sean X_1 y X_2 dos espacios lineales con convergencia. La aplicación Φ del espacio X_1 en X_2 (en este caso la aplicación se denomina también operador) se llama continua en el punto $x_0 \in X_1$, si, cualquiera que sea la sucesión $x_n \in X_1$, $n = 1, 2, \dots$, convergente en el espacio X_1 hacia el punto x_0, la sucesión $\Phi(x_n) \in X_2$, $n = 1, 2, \dots$, converge en X_2 al elemento $\Phi(x_0)$.*

En otras palabras, la aplicación Φ es continua en el punto x_0, si de $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = n_0$ proviene que $\lim\limits_{n \to \infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0)$.

Lema 3. *Si la aplicación lineal Φ del espacio lineal con convergencia X_1 en el espacio lineal con convergencia X_2 es continua en el cero del espacio X_1, será continua en todo punto de X_1.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in X$ y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$; entonces $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - x_0) = 0$. Por cuanto la aplicación Φ es continua en el cero,

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(x_n - x_0) = 0.$$

Ya que la aplicación Φ es lineal, se tiene

$$\Phi(x_n - x_0) = \Phi(x_n) - \Phi(x_0)$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{n \to \infty} [\Phi(x_n) - \Phi(x_0)] = 0, \quad \text{de donde} \quad \lim_{n \to \infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0).$$

De este modo, la aplicación Φ es continua en todo punto $x_0 \in X_1$. □

Definición 10. *La aplicación Φ de un espacio lineal con convergencia X_1 en otro espacio lineal con convergencia X_2 se denomina continua en X_1, si es continua en todo punto del espacio X_1.*

Para todo espacio lineal con convergencia X tienen sentido los conceptos de serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, de serie convergente y de suma de ésta. Estos conceptos se introducen por analogía con el caso de los espacios lineales normalizados. Esto resulta posible, por cuanto en las definiciones correspondientes de las propiedades de una norma se emplea sólo aquella que atestigua que en todo espacio normalizado queda definido el concepto de sucesión convergente.

Los ejemplos de aplicaciones lineales y continuas de los espacios con convergencia se darán en el p. 59.6 y en el 59.7.

59.3. DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS. ESPACIOS D Y D'

Definamos, ante todo, un espacio lineal de funciones D que será el concepto principal en nuestros razonamientos. Con este fin consideraremos las funciones que vienen dadas en el conjunto de todos los números reales R y que toman valores complejos.

El espacio D, que nos interesa, se compone de las funciones finitas infinitamente derivables (véase en el p. 55.2 la definición de funciones finitas). Todas las funciones finitas, siendo definidas del modo natural las operaciones de su sumación y multiplicación por un número, forman un espacio lineal, y las funciones finitas infinitamente derivables forman un subespacio de dicho espacio. Introduzcamos en este subespacio el concepto de convergencia de las sucesiones.

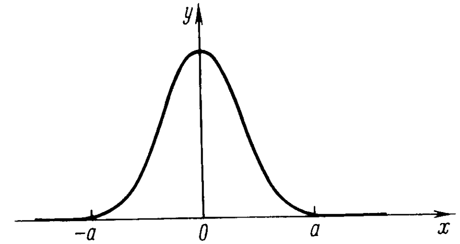


Fig. 244

Definición 11. *Una sucesión de las funciones finitas infinitamente derivables φ_n, $n = 1, 2, \dots$, se llama convergente hacia la función finita infinitamente derivable φ, si:*

1) existe un segmento $[a, b]$, fuera del cual todas las funciones ψ_n, $n = 1, 2, \dots$, y ψ se anulan⁾.*

2) en dicho segmento la sucesión de funciones φ_n, $n = 1, 2, \dots$, y las sucesiones de todas sus derivadas $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \dots$, convergen uniformemente hacia la función φ y a sus correspondientes derivadas $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, respectivamente.

Una totalidad de las funciones finitas infinitamente derivables con la operación introducida de paso límite constituye un espacio lineal con convergencia. Esto se deduce inmediatamente de las propiedades de los límites de funciones y de las propiedades de las sucesiones uniformemente convergentes.

Definición 12. *Un espacio de funciones finitas infinitamente derivables con convergencia introducida lleva el nombre de espacio D de funciones principales.*

Evidentemente, si $\varphi \in D$, toda derivada de la función φ pertenecerá también al espacio D.

Diremos además que si $\{\varphi_n\}$ converge hacia φ en D, entonces la sucesión $\{\varphi_n^{(k)}\}$ de las derivadas de cualquier orden $k = 1, 2, \dots$ converge hacia $\varphi^{(k)}$ en D. Esta propiedad proviene directamente de la definición de convergencia en el espacio D.

Como ejemplo trivial de una función del espacio D sirve la función igual a cero en todo el eje y como ejemplo menos trivial, la función $\varphi_a(x)$ (fig. 244).

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & \text{si} \quad |x| < a, \\ 0, & \text{si} \quad |x| \geqslant a. \end{cases} \tag{59.13}$$

---

*⁾ El segmento $[a, b]$ contiene los portadores de todas las funciones φ, φ_n, $n = 1, 2, \dots$.

Ejercicios. 2. Demuéstrese que la función (59.13) es infinitamente derivable en todo el eje numérico (compárese con (37.25)).

3. Demuéstrese que con miras de lograr que para la función $\varphi \in D$ exista una función $\psi \in D$ tal que sea $\varphi = \psi'$, es necesario y suficiente que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 0$.

Definición 13. *Toda funcional continua lineal f, definida sobre D, recibe el nombre de función generalizada.*

Definición 14. *Una funcional f, definida en todo el eje real, se denomina localmente integrable, si es absolutamente integrable en cualquier segmento finito.*

Si f es una función localmente integrable y $\varphi \in D$, el producto f_φ es absolutamente integrable en todo el eje. En efecto, sea supp $\varphi \subset [a, b]$ (véase en el p. 55.2 la definición del portador supp φ de la función φ); la función φ es, obviamente, acotada: $|\varphi(x)| \leqslant C$, $-\infty < x < +\infty$, por lo cual

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\,\varphi(x)|\,dx = \int\limits_a^b |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant C \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Definamos, para la función localmente integrable f, la funcional (f, φ) sobre D mediante la igualdad

$$(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{59.14}$$

Esta funcional es lineal y continua. Su linealidad es obvia; demostremos su continuidad. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ en D. En este caso existe un segmento $[a, b]$ tal que para todo $n = 1, 2, \ldots$, tienen lugar las inclusiones supp $\varphi_n \subset [a, b]$ y supp $\varphi \subset [a, b]$; por eso

$$|(f, \varphi) - (f, \varphi_n)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx \leqslant \sup_{[a,b]} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \to 0$$

para $n \to \infty$. De este modo, a toda función localmente integrable $f(x)$ le corresponde una función generalizada (f, φ)*); en este sentido toda función localmente integrable puede considerarse como una función generalizada.

Una función constante, es decir, tal función generalizada f que $(f, \varphi) = c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, c es una constante, $\varphi \in D$ (en particular, la función nula), se genera por una función localmente integrable $f(x) = c$, $-\infty < x < +\infty$.

*) En este caso suele decirse también que la función generalizada (f, φ) se genera por la función f.

Recordemos que por funcional lineal se entiende siempre una funcional lineal homogénea. Por esta razón, la funcional f, que es igual a una misma constante c, en todos los elementos de cierto espacio lineal X, aunque es una función lineal, no es, sin embargo, homogénea: si $x \in X$, $y \in X$, λ y μ son unos números, entonces para la funcional mencionada tendremos $f(x) = f(y) = f(\lambda x + \mu y) = c$. Si fuera lineal homogénea, debería verificarse $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = (\lambda + \mu)c$. Por cuanto para $\lambda + \mu \neq 1$ se tiene $f(\lambda x + \mu y) \neq \lambda f(x) + \mu f(y)$, entonces la funcional f no es linealmente homogénea. Por consiguiente, una funcional, igual a una constante, no pertenece a la clase de funcionales que se considera.

Ejercicio 4. Demuéstrese que dos funciones continuas en un eje numérico son distintas cuando, y sólo cuando, son distintas las funciones generalizadas engendradas por las primeras.

A veces, las funciones generalizadas se designan mediante el símbolo $f(x)$. Esta designación es simbólica pura; no significa ni mucho menos el valor de la función generalizada en el punto $x \in R$, sino sólo refleja el hecho de que las funciones generalizadas son, en el sentido señalado más arriba, una generalización de las funciones (localmente integrables) ordinarias; no se presupone ningún valor de la función generalizada en el punto x.

Para denotar el valor de la función generalizada f en el punto $\varphi = \varphi(x)$ del espacio D, a la par con la notación (f, φ) se usa también la inscripción

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{59.15}$$

De este modo, por definición,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = (f, \varphi).$$

Esta igualdad constituye la definición del símbolo (59.15), el cual se lee formalmente como "integral del producto de f por φ". Dicha notación refleja el hecho de que las funciones generalizadas son una generalización de las funcionales (59.14), donde f es una función localmente integrable.

Ejercicio 5. Demuéstrese que la funcional $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$, $\varphi \in D$, es una función generalizada $\left(\textit{se denota habitualmente } \mathscr{P}\frac{1}{x}\right)$.

A título de otro ejemplo de una función generalizada consideraremos una funcional designada por $\delta = \delta(x)$ y llamada función delta (véase 59.1).

Definición 15. *Una funcional definida por la fórmula*

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \varphi \in D,$$

se denomina función delta.

La linealidad y continuidad de dicha funcional se comprueban fácilmente. No puede ser representada en la forma (59.14), cualquiera que sea la función localmente integrable f. Efectivamente, si se encontrara una función localmente integrable f tal que

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D,$$

entonces para esta función f y para la función φ, dada mediante la fórmula (59.13), tendríamos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \frac{1}{e}. \tag{59.16}$$

Mas, por ser la función f absolutamente integrable,

$$\lim_{a \to 0} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0$$

(¿por qué?).

Luego, al observar que $e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} < \frac{1}{e}$, $-a \leqslant x \leqslant a$, obtenemos

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \right| = \left| \int_{-a}^{a} f(x) e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} dx \right| \leqslant \frac{1}{e} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx,$$

razón por la cual el primer miembro de la igualdad (59.16) tiende a cero cuando $a \to 0$. mientras que el segundo miembro no tiende a cero. La contradicción obtenida demuestra precisamente nuestra afirmación. De este modo, la reserva de funciones generalizadas en el sentido indicado es mayor que el de funciones ordinarias.

Definición 16. *Una funcional que a toda función $\varphi \in D$ le pone en correspondencia un número $\varphi(x_0)$, donde x_0 es fijo, también se llama función delta y se denota mediante $\delta(x - x_0)$.*

Recurriendo a la notación (59.15), podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0), \quad \varphi \in D.$$

Definición 17. *Una totalidad de funciones generalizadas, al igual que toda totalidad de funcionales, definidas sobre un espacio lineal con convergencia (véase el p. 59.2), forma un espacio lineal con convergencia conjugado de D. Se llama espacio de funciones generalizadas y se denota con D'.*

Así pues, la convergencia de una sucesión de funciones generalizadas f_n, $n = 1, 2, \ldots$, hacia la función generalizada f significa que

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$$

para cualquier función $\varphi \in D$.

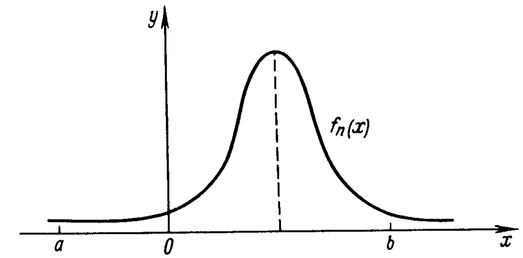


Fig. 245

Problema 40. Sea $f_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$, y supongamos que para cualquier función $\varphi \in D$ existe un límite de la sucesión numérica (f_n, φ). Pongamos $F(\varphi) = \lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi)$. Demuéstrese que $F(\varphi)$ es una función generalizada.

En el p. 59.1 se han considerado las funciones $\delta_\varepsilon(x)$ que son, con evidencia, localmente integrables. Hemos visto que poseen la propiedad de que para cualquier función continua en todo el eje φ, y por lo tanto, para cualquier función $\varphi \in D$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (\delta_\varepsilon, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Desde el punto de vista de las funciones generalizadas esto significa que en D'.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \delta_\varepsilon = \delta\,^{*)}.$$

De este modo, la función delta en el espacio D' es un límite de una sucesión de funciones generalizadas engendradas por las funciones localmente integrables.

Ejercicios. 6. Supongamos que la sucesión de funciones absolutamente integrables $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, es tal que

a) cualquiera que sea el número $M > 0$, para $|a| < M$, $|b| < M$, las magnitudes

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx \right|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

están acotadas por una constante que no depende de a, b, n (sólo depende de M);

b) cualesquiera que sean a y b fijos y distintos de cero,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad a < b < 0 \text{ y } 0 < a < b, \\ 1 & \text{para} \quad a < 0 < b. \end{cases}$$

Las sucesiones de este género se denominan *sucesiones en delta* (fig. 245).

[*] Al igual que en el caso de las funciones ordinarias, el símbolo $\varepsilon \to +0$ significa que la relación límite mencionada tiene lugar para cualquier sucesión $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, que tiende a cero.

Demuéstrese que para cualquier función continua φ y cualquier sucesión en delta $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0);$$

en otras palabras, $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (\delta, \varphi)$

7. Sea $f_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t}}$. Demuéstrese que en el espacio D' se verifica la igualdad $\lim\limits_{t\to+0} f_t(x) = \delta(x)$.

8. Demuéstrese que en el espacio D' existe el límite $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{x \pm iy}$ $\left(\text{se denota con } \dfrac{1}{x \pm i0}\right)$ y que son válidas las fórmulas

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathscr{P}\frac{1}{x}.$$

(estas fórmulas llevan el nombre de Sojotski *)).

Problema 41. Demuéstrese que toda función generalizada singular es el límite de funciones regulares (en este sentido un espacio de las funciones generalizadas es el "complemento" del espacio de funciones ordinarias).

Como ya hemos visto, el concepto de función generalizada no se reduce al de función de un punto, por lo cual, en general, no hay sentido en hablar del valor de una función generalizada en el punto dado, en particular, de la reducción de esta función a cero en dicho punto. Sin embargo, se puede introducir un concepto natural de reducción a cero de una función generalizada en un intervalo.

Definición 18. *Diremos que una función generalizadad f se reduce a cero en el intervalo (a, b), si $(f, \varphi) = 0$ para cualquier $\varphi \in D$, que dispone de un portador contenido dentro del intervalo (a, b).*

Ejercicio 9. Demuéstrese que con el fin de lograr que una función continua se reduzca a cero en todo punto de un intervalo, es necesario y suficiente que se reduzca a cero en dicho intervalo como una función generalizada.

Definición 19. *Las funciones generalizadas f y g se llaman iguales en el intervalo (a, b), si $f - g = 0$ en (a, b).*

59.4. DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS

Determinemos ahora la derivada de una función generalizada. Aclaremos, ante todo, qué representa en sí la derivada de una función ordinaria f, continuamente derivable en todo el eje numérico, cuando dicha derivada se considera como la funcional (f', φ) en D. Esto tiene sentido, por cuanto la derivada f', siendo continua en todo el eje numérico, es una función localmente integrable.

Integrando por partes, por ser finita la función $\varphi \in D$, obtendremos

*) Yu. V. Sojotski (1842—1929), matemático ruso.

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi'), \tag{59.17}$$

donde, como se sabe, $\varphi' \in D$. De este modo, la derivada f' es una funcional sobre D cuyos valores se expresan en términos de los valores de la función f, considerada como una funcional, por medio de la fórmula (59.17). Esto hace natural la siguiente definición.

Definición 20. *Se llama derivada de la función generalizada f una funcional sobre D, denotada con f' y determianda por la igualdad*

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in D. \tag{59.18}$$

En otras palabras, el valor de la funcional f' en cualquier punto φ del espacio D es igual al valor de la funcional f en el punto $\varphi' \in D$ tomada con el signo opuesto.

Así pues, cualquier función generalizada tiene una derivada. De aquí proviene que toda función localmente derivable también tiene derivada en el sentido de la definición 20.

De la fórmula (59.17) se deduce que la derivada en el sentido habitual de una función continuamente derivable en todo el eje numérico, considerada como funcional sobre D, coincide con la derivada de dicha función en el sentido de las funciones generalizadas.

La operación de cálculo de la derivada de una función generalizada la llaman, por analogía con el caso de las funciones ordinarias, derivación.

Lema 4. *La funcional f' es lineal continua y, por lo tanto, constituye una función generalizada.*

DEMOSTRACIÓN. Comprobemos la linealidad:

$$(f', \lambda\varphi + \mu\psi) = -(f, (\lambda\varphi + \mu\psi')) = -(f, \lambda\varphi' + \mu\psi') =$$
$$= -\lambda(f, \varphi') - \mu(f, \psi') = \lambda(f', \varphi) + \mu(f', \psi), \quad \varphi \in D, \quad \psi \in D.$$

Para comprobar la continuidad de la funcional f, recordemos que si $\varphi \in D$, $\varphi_k \in D$, $k = 1, 2, \dots$, y $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ en D, entonces, en virtud de la definición de convergencia en el espacio D, también $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k' = \varphi'$ en D; por ello, si $\varphi_k \to \varphi$ en D, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} (f', \varphi_k) = -\lim\limits_{k\to\infty} (f, \varphi_k') = -(f, \varphi') = (f', \varphi)$.

De este modo, si $f \in D'$, entonces f' existe siempre y $f' \in D'$. □

Las derivadas de órdenes superiores de una función generalizada se determinan sucesivamente, al igual que en el caso de las funciones ordinarias:

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \dots,$$

en general

$$f^{(k)} = (f^{k-1})' \quad k = 1, 2, \dots, f^{(0)} = f.$$

Por inducción se comprueba con facilidad que

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k(f, \varphi^{(k)}), \quad \varphi \in D, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Conforme a esta definición, las funciones generalizadas tienen derivadas de cualesquiera órdenes o, como se dice a veces, son infinitamente derivables.

Ejemplos. 1. Sea

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función $\theta(x)$ lleva el nombre *de Heaviside* (véase (59.10)) o de función unidad. Es localmente integrable y por esta razón puede considerarse como una función generalizada. Hallemos su derivada. De acuerdo con la definición (59.18),

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= \varphi(0) = (\delta, \varphi), \quad \varphi \in D,$$

es decir, $\theta' = \delta$ (compárese con el p. 59.1).

2. Calculemos, a título de otro ejemplo, las derivadas de la función delta

$$(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k(\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^k\varphi^{(k)}(0).$$

Ejercicios. 10. Sean f y g las funciones generalizadas y sean λ y μ unos números. Demuéstrese que

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

11. Demuéstrese que $\left(\dfrac{d}{dx} + \lambda\right) \theta(x)e^{-\lambda x} = \delta(x)$.

12. Demuéstrese que $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) \dfrac{\theta(x) \operatorname{sen} \omega x}{\omega} = \delta(x)$.

13. Si $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{para } |x| < \dfrac{\varepsilon}{2}; \\ 0 & \text{para } |x| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}; \end{cases}$, entonces en el espacio de las funciones generalizadas

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x) \quad \text{y} \quad \delta_\varepsilon'(x) = \frac{\delta\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \delta\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}.$$

14. Sea $f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ para } x < x_0, \\ f_2(x) \text{ para } x > x_0 \end{cases}$ donde las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son continuamente derivables y existen los límites $f'(x_0 \pm 0)$. Hállese la derivada $f'(x)$ en el espacio D

15. Sea $f(x)$ una función continuamente derivable en todo el eje numérico. Hállese la derivada $(\theta f)'$ en el espacio D'.

16. Demuéstrese que en el espacio D' es válida la fórmula $\mathscr{P}\dfrac{1}{x} = (\ln|x|)'$ (véase el ejercicio 5).

17. Demuéstrese que en el espacio D' se verifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Indicación: hágase uso de la fórmula (véase el ejemplo 3 en el p. 55.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Lema 5. *Sea $f_n \in D'$, $f \in D'$ y*

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f; \tag{59.19}$$

en este caso también

$$\lim_{n \to \infty} f_n' = f', \tag{59.20}$$

es decir, para toda sucesión de funciones generalizadas convergente en D' la derivada de la función límite es igual al límite de la sucesión de las derivadas.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier función $\varphi \in D$

$$(f', \varphi) - (f_n', \varphi) = -[(f, \varphi') - (f_n, \varphi')] \to 0 \text{ para } n \to \infty,$$

pues $\varphi' \in D$. □

Pueden considerarse también las series de las funciones generalizadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{59.21}$$

donde $u_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$. La suma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

se llama *suma parcial de n-ésimo orden* ($n = 1, 2, \ldots$) de la serie (59.21). La serie (59.21) se llama *convergente*, si en D' existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

La función generalizada s lleva el nombre de suma de la serie (59.21); se escribe en este caso

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Lema 6. *Una serie convergente de las funciones generalizadas puede derivarse término por término tantas veces como se quiera:*

$$s^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Esto se deduce del lema 5.

59.5. ESPACIO DE LAS FUNCIONES PRINCIPALES S Y ESPACIO DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS S'.

Designemos con S el conjunto de todas las funciones de valores complejos infinitamente derivables en todo el eje numérico, las cuales, al igual que todas las derivadas suyas, tienden a cero, para $x \to \infty$, más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{x}$. En otras palabras, el conjunto S se compone de aquellas, y sólo aquellas, funciones infinitamente derivables φ, para las cuales se cumple la condición

$$\lim_{x \to \infty} x^n \varphi^{(m)}(x) = 0, \tag{59.22}$$

cualesquiera que sean n y m enteros y no negativos. La condición de pertenencia de la función φ al conjunto S puede formularse de una manera algo diferente: una función infinitamente derivable φ pertenece a S cuando, y sólo cuando, para cualesquiera n y m enteros y no negativos se tiene

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n \varphi^{(m)}(x)| = c_{n,m} < \infty. \tag{59.23}$$

En efecto, si esto es así, entonces, al sustituir en (59.23) n por $n + 1$, obtendremos $|x^{n+1}\varphi^{(m)}(x)| \leqslant c_{n+1,m}$, por lo cual

$$|x^n \varphi^{(m)}(x)| \leqslant \frac{c_{n+1,m}}{|x|},$$

de donde proviene (59.22). Viceversa, de (59.22) y del hecho de que $x^n \varphi^{(m)}(x)$ es acotada en cualquier segmento, se deduce (59.23).

Es evidente que el conjunto S es un espacio lineal. En tal caso si $\varphi \in S$, entonces cualquier derivada de la función φ también pertenece al espacio S.

Definición 21. *Una sucesión de funciones $\varphi_k(x) \in S$, $k = 1, 2, \dots$, se llama convergente en S hacia la función $\varphi(x) \in S$, si para cualesquiera n y m enteros y no negativos toda sucesión $x^n \varphi_k^{(m)}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, converge uniformemente en todo el eje hacia la función $x^n \varphi^{(m)}(x)$.*

Es evidente que $\lim_{k \to \infty} \varphi_k = \varphi$ en S cuando, y sólo cuando, para cualesquiera n y m enteros y no negativos se verifica

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{-\infty < x < +\infty} |x^n [\varphi_k^{(m)}(x) - \varphi^{(m)}(x)]| = 0. \tag{59.24}$$

Ha de notarse que si $\varphi_k \to \varphi$ en S, entonces para las derivadas de cualquier orden $\varphi_k^{(m)} \to \varphi^{(m)}$ en S, $m = 1, 2, \dots$. El espacio lineal S con la operación introducida de paso límite será un espacio lineal con convergencia.

Evidentemente, $D \hookrightarrow S$, en particular, la sucesión de funciones $\varphi_k \in D$, $k = 1, 2, \dots$, convergente en D hacia la función φ, converge a la función φ también en S. Además, $D \neq S$, pues $e^{-x^2} \in S$, pero $e^{-x^2} \notin D$.

Problema 42. Demuéstrese que el espacio D es denso en S, es decir, cualquier función $\varphi \in S$ es un límite en S para cierta sucesión de funciones $\varphi_k \in D$, $k = 1, 2, \dots$.

Definición 22. *Una funcional continua lineal, definida sobre el espacio S, se denomina función generalizada de crecimiento lento. Un conjunto de todas las funcionales de esta índole se llama espacio de funciones generalizadas de crecimiento lento y se denota por S'.*

Toda funcional $f \in S'$, considerada sólo en el conjunto D, es una función generalizada, por consiguiente, un elemento del conjunto S' puede ser interpretado como prolongación de cierta funcional continua lineal desde el conjunto D a S (véase el p. 59.2). Por ejemplo, la funcional δ, definida en el p. 59.3 sobre el espacio D mediante la fórmula $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in D$, puede ser prolongada con ayuda de la misma fórmula al espacio S.

Se puede mostrar que no toda función generalizada de D' puede ser prolonga da a S y en este sentido podemos decir que S' constituye una parte esctricta de D'.

Ejercicio 18. Demuéstrese que una función generalizada, engendrada por la función localmente integrable e^x, no puede ser prolongada al elemento del espacio S

Toda función localmente integrable $f(x)$, para la cual en cierto entorno de ∞ se verifica la estimación

$$|f(x)| \leqslant A|x|^k \tag{59.25}$$

(A y k son unas constantes no negativas) *), en particular, cualquier polinomio engendra una funcional del espacio D prolongable a la funcional continua lineal sobre S. Ésta se determina según la fórmula

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in S. \tag{59.26}$$

Efectivamente, de las condiciones (59.22) y (59.25) proviene que $f(x)\varphi(x) \to 0$, para $x \to \infty$, más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{x}$, y por lo tanto, la integral (59.26) existe.

Demos a conocer, además, que toda función $f(x)$, absolutamente integrable en todo el eje numérico, genera también, según la fórmula (59.26), una funcional continua lineal sobre S. En efecto, por cuanto toda función $\varphi \in S$ está acotada, la existencia de la integral (59.26) en este caso se infiere de la desigualdad

$$\int_{-\infty}^{+} |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant \sup_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

Ejercicios. 19. Demuéstrese que la funcional (59.26) es lineal y continua sobre el espacio S (tanto en el caso en que la función f es de crecimiento lento en el infinito, como cuando sea absolutamente integrable en todo el eje numérico).

20. Demuéstrese que la función generalizada $\frac{1}{x + i0} \in D'$ (véase el ejercicio 8) es prolongable al elemento de espacio S.

---

*) Tales funciones se llaman funciones de crecimiento lento, de donde proviene el término "funciones generalizadas de crecimiento lento"

El conjunto S' forma un espacio lineal con convergencia, conjugado de S (véase el p. 59.2).

Por cuanto para cualquier función $\varphi \in S$ tendremos $\varphi' \in S$, entonces para las funciones generalizadas del espacio S', al igual que para las funciones generalizadas de D', puede hallarse la derivada f' según la fórmula

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in S.$$

De este modo, para cualquier función generalizada $f \in S'$ la derivada f' siempre existe y $f' \in S'$. Además, las derivadas de la función generalizada f en el elemento $\varphi \in D$, consideradas como derivadas en los espacios D' y S', respectivamente, coinciden. Igual que en el caso del espacio D', en el espacio S' la derivada del límite siempre existe y es igual al límite de las derivadas.

59.6. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER EN EL ESPACIO *S*

Toda función $\varphi \in S$ es absolutamente integrable. Más aún, si $\varphi \in S$, entonces, cualquiera que sea $k = 1, 2, \dots$, la función $x^k\varphi(x)$ es también absolutamente integrable en todo el eje numérico. En efecto, por cuanto para la función $\varphi \in S$ se cumple la condición (59.23), se tiene

$$|x^k\varphi(x)| \leqslant c_{k,0},$$

$$x^2|x^k\varphi(x)| = |x^{k+2}\varphi(x)| \leqslant c_{k+2,0}$$

y, por esta razón,

$$|x^k\varphi(x)| \leqslant \frac{c_{k,0} + c_{k+2,0}}{1 + x^2}. \tag{59.27}$$

En el segundo miembro de esta desigualdad figura una función absolutamente integrable en todo el eje numérico, por consiguiente, de acuerdo con el criterio de comparación para las integrales impropias, la función $x^k\varphi(x)$ es también absolutamente integrable para todo $k = 0, 1, 2, \dots$. De aquí se desprende que para las funciones $\varphi \in S$ existe la transformación clásica de Fourier

$$\hat{\varphi} = F[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ixy}\,dx, \; \varphi \in S \tag{59.28}$$

como también la transformación de Fourier inversa

$$F^{-1}[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)e^{ixy}\,dy, \quad \varphi \in S.$$

El carácter clásico de la transformación de Fourier se entiende aquí en el sentido de que las integrales escritas son ordinarias y absolutamente convergentes, y no son integrales en el sentido del valor principal (véase el p. 56.3). Sobre S son válidas las fórmulas de inversión para la transformación directa e inversa de Fourier (véase el p. 56.5):

$$F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi, \quad F^{-1}[F[\varphi]] = \varphi, \quad \varphi \in S. \tag{59.29}$$

Observemos que, por ejemplo, la segunda de estas fórmulas en la forma integral tiene por expresión

$$F^{-1}[\hat{\varphi}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(y)e^{ixy}\,dy = \varphi(x).$$

Teorema 1. *La transformación de Fourier y la transformación de Fourier inversa aplican el espacio S sobre sí de manera biunívoca, lineal y continua.*

DEMOSTRACIÓN. Señalemos que si $\varphi \in S$, entonces también $\hat{\varphi} \in S$.

Ante todo, de lo que para toda función $\varphi \in S$ la función $x^k\varphi(x)$ con $k = 0, 1, 2, \dots$ es, según se ha probado anteriormente, absolutamente integrable en todo el eje numérico, proviene, de acuerdo con el teorema 4 del p. 56.10, que la transformación de Fourier $\hat{\varphi} = F[\varphi]$ de la función φ existe y represneta en sí una función infinitamente derivable.

Estimemos ahora la función $|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)|$, donde n y m son los números enteros no negativos. Aplicando las fórmulas para la derivada de la transformación de Fourier (véase el p. 56.10) y para la transformación de Fourier de la derivada (véase el p. 56.8), obtendremos

$$|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)| = |y^nF^{(m)}[\varphi]| = |y^nF[x^m\varphi]| =$$

$$= |F[(x^m\varphi)^{(n)}]| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^m\varphi(x))^{(n)}e^{-ixy}\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |(x^m\varphi(x))^{(n)}|\,dx.$$

Observemos que la expresión $[x^m\varphi(x)]^{(n)}$ representa, en virtud de las reglas de derivación, una combinación lineal de las expresiones del tipo $x^p\varphi^{(q)}(x)$, donde p y q son enteros no negativos y, de acuerdo con lo notado anteriormente, $\varphi^{(q)} \in S$. Por ello (véase (59.27)), las funciones $(1 + x^2)x^p\varphi^{(q)}$ están acotadas en todo el eje numérico, por lo cual está acotada también la función $(1 + x^2)\,[x^m\varphi(x)]^{(n)}$, es decir,

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} (1 + x^2)|[x^m\varphi(x)]^{(n)}| < +\infty.$$

Ahora, dividamos y multipliquemos la expresión subintegral obtenida por $1 + x^2$, entonces, teniendo presente que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$, llegamos a que

$$|y^n\hat{\varphi}^{(m)}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_x (1 + x^2)|(x^m\varphi(x))^{(n)}| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1 + x^2)|(x^m(x))^{(n)}|. \tag{59.30}$$

Ya que a la derecha figura una magnitud finita, entonces $\hat{\varphi} \in S$.

Así pues, la transformación de Fourier aplica S en S y esta aplicación es biunívoca (véase el lema 3 en el p. 56.5).

Análogamente se demuestra también que la transformación de Fourier inversa F^{-1} aplica S en S y, además, biunívocamente. Es fácil convencerse de que estas aplicaciones se realizan en realidad sobre el espacio S, es decir, son las biyecciones. Esto se deduce directamente de las fórmulas de reciprocidad (59.29) para las transformaciones directa e inversa de Fourier *).

Efectivamente, probemos que $F(S)$ coincide con todo el espacio S. Sea $\psi \in S$ y pongamos $\varphi = F^{-1}[\psi]$.

En este caso

$$F[\varphi] = F[F^{-1}[\psi]] = \psi.$$

De un modo semejante se demuestra también que

$$F^{-1}(S) = S.$$

La linealidad de la transformación de Fourier se ha demostrado antes (véase el lema 2 en el p. 56.5).

Demostremos ahora la continuidad de la aplicación F.

Probemos al principio su continuidad en el cero. Sea $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$ en S. Entonces, de (59.30) se deduce que

$$|y^n \hat{\varphi}_k^{(m)}(y)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1 + x^2) |x^m \varphi_k(x))^{(n)}|, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Pero de (59.24) (para $\varphi(x) = 0$) tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \sup_x (1 + x^2) \, |(x^m \varphi_k(x))^{(n)}| = 0;$$

por lo cual

$$\lim_{k\to\infty} \sup_y |y^n \hat{\varphi}_k^{(m)}(y)| = 0, \text{ es decir, } \lim_{k\to\infty} \hat{\varphi}_k = 0 \text{ en } S.$$

Por cuanto la transformación de Fourier es una aplicación lineal del espacio lineal S en sí mismo, continua en el cero, será continua también en todos los puntos de este espacio (véase el lema 3 en el p 59.2).

De este modo, la transformación de Fourier F aplica continuamente S sobre S.

Del modo enteramente análogo se demuestra la continuidad de la transformación de Fourier inversa F^{-1}. □

*) Observemos en adición que de lo que $F(S) = F^{-1}(S) = S$ se deduce que en las fórmulas (59.29) todas las integrales existen en el sentido habitual, y no sólo en el sentido del valor principal (compárese con el p. 56.5)

59.7. TRANSFORMACIÓN DE FOURIER DE LAS FUNCIONES GENERALIZADAS

Demostremos previamente una igualdad integral. Supongamos que la función f es continua y absolutamente integrable en todo el eje numérico y sea $\varphi \in S$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\, dx. \tag{59.31}$$

Esto se deduce del teorema 7 del p. 54.3. En efecto, la integral reiterada en el primer miembro existe, pues existe la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy}\, dy \right| dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, dy.$$

Si $[a, b]$ es un segmento arbitrario, la función f, siendo continua, está acotada en $[a, b]$: $|f(x)| \leqslant M$; por esta razón

$$|f(y)\varphi(x) e^{-ixy}| \leqslant M |\varphi(x)|, \quad a \leqslant y \leqslant b.$$

De aquí, por ser convergente la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)|\, dx$, proviene la convergencia uniforme de la integral $f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\, dx$ en el segmento $[a, b]$.

Luego, $|\varphi(x)| \leqslant c_{0,0}$, $-\infty < x < +\infty$ (véase (59.23)); por eso $|\varphi(x) f(y) e^{-ixy}| \leqslant c_{0,0} \, |f(y)|$, y, como la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, dy$ converge, la integral

$$\varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy}\, dy$$

converge uniformemente en todo el eje.

Por fin, la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) f(y) e^{-ixy}|\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy$$

es finita, razón por la cual en el caso que se considera están cumplidas todas las condiciones del teorema 7 (p. 54.3) y, por ende, puede permutarse el orden de integración. La igualdad (59.31) queda demostrada.

Si la función $F[f]$ engendra cierta funcional sobre S (por ejemplo, satisface la condición (59.25) o es absolutamente integrable en todo el eje numérico), entonces, al multiplicar la igualdad (59.31) por $1/\sqrt{2\pi}$, obtendremos

$$(F[f], \varphi) = (f, F([\varphi]), \quad \varphi \in S. \tag{59.32}$$

Esta fórmula la tomaremos como definición de la transformación de Fourier de funciones generalizadas pertenecientes al espacio S'

Definición 23. *Se llama transformación de Fourier de una función generalizada $f \in S'$ una funcional $F[f]$ definida por la fórmula* (59.32).

Así pues, para cualquier función generalizada f de S' está definida su transformación de Fourier $F[f]$: el valor de la funcional $F[f]$ en todo punto φ del espacio S es igual al valor de la funcional f en el punto $F[\varphi] \in S$.

Como ejemplo, hallemos la transformación de Fourier de la unidad, considerándola como una función generalizada. Evidentemente, $1 \in S'$. Tenemos

$$(\hat{1}, \varphi) = (1, \hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{iy(t-x)}\, dx \Big|_{t=0} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \varphi(t) \Big|_{t=0} = \sqrt{2\pi}\, (\delta, \varphi)$$

(aquí hemos aprovechado el lema 1 del p. 56.5). De este modo, $1 = \sqrt{2\pi}\delta$.

Observemos que la transformación de Fourier $F[\varphi]$ de la función $\varphi \in D$, no pertenece, en el caso general, al espacio D, por cuanto $F[\varphi]$ no es siempre una función finita. Por eso la fórmula (59.32) tiene sentido no para todas las $f \in D'$. Precisamente debido a esta circunstancia, al considerar la transformación de Fourier de las funciones generalizadas, tuvimos que hacer más estrecha la clase de funciones generalizadas introducidas anteriormente, limitándonos sólo a las funciones generalizadas de crecimiento lento.

La transformación de Fourier $F[f]$ de una función generalizada f se designará por el símbolo $\hat{f}$ o el símbolo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx.$$

De este modo, la igualdad

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx = F[f] \tag{59.33}$$

es, cuando f es una función generalizada, la definición del símbolo que figura en el primer miembro de esta igualdad.

Al definir la transformación de Fourier para todas las funciones generalizadas de S', hemos definido también, en particular, la transformación de Fourier para las funciones ordinarias f que satisfacen la condición (59.25), es decir, para las funciones de una clase mucho más amplia en comparación con lo hecho anteriormente (véase el p. 56.5 y 58.7*). Esto constituye una ciercunstancia más que justifica la conveniencia de introducción del concepto de funciones generalizadas.

Mostremos que la transformación de Fourier de las funciones generalizadas posee toda una serie de propiedades análogas a las de la transformación de Fourier clásica, es decir, de la transformación de Fourier de las funciones absolutamente integrables.

Lema 7. *La transformación de Fourier $F[f]$ de una función generalizada $f \in S'$ es también una función generalizada de la clase S', es decir, $F[f]$ es una funcional continua y lineal sobre el espacio S.*

DEMOSTRACIÓN. Comprobemos la linealidad de la transformación de Fourier, es decir, probemos que, cualquiera que sea la función generalizada $f \in S'$, para cualesquiera funciones $\varphi \in S$, $\psi \in S$ y cualesquiera números λ y μ se verifica la igualdad

$$(F[f], \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(F[f], \varphi) + \mu(F[f], \psi).$$

En efecto,

$$(F[f], \lambda\varphi + \mu\psi) = (f, F[\lambda\varphi + \mu\psi]) =$$
$$= (f, \lambda F[\varphi] + \mu F[\psi]) = \lambda(f, F[\varphi]) + \mu(f, F[\psi]) =$$
$$= \lambda(F[f], \varphi) + \mu(F[f], \psi).$$

Comprobemos la continuidad de la transformación de Fourier. Sea $f \in S'$, $\varphi \in S$, $\varphi_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$, y por lo tanto (véase el teorema 1 del p. 59.6),

$$\lim_{n \to \infty} F[\varphi_n] = F[\varphi].$$

Entonces, por ser la funcional f continua en S, obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} (F[f], \varphi_n) = \lim_{n \to \infty} (f, F[\varphi_n]) = (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi).$$

Hemos probado, pues que si $f \in S'$, entonces también $F[f] \in S'$. □

Del modo natural se define también la transformación de Fourier inversa $F^{-1}[f]$ del elemento $f \in S'$, como una funcional del espacio S', definida por la fórmula

$$(F^{-1}[f], \varphi) = (f, F^{-1}[\varphi]), \quad \varphi \in S.$$

Si f es una función absolutamente integrable, dicha igualdad se verifica para esta función en el sentido corriente. Esto se comprueba igual que en el caso de la fórmula (59.31). Por definición, se presupone también que (compárese con (59.33))

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy}\, dx = F^{-1}[f]. \tag{59.34}$$

Lo mismo que en el caso de una transformación de Fourier directa F, se muestra que si $f \in S'$, entonces también $F^{-1}[f] \in S'$.

Teorema 2. *La transformación de Fourier F y la transformación de Fourier inversa F^{-1} aplican lineal, biunívoca y continuamente el espacio S' sobre sí mismo; además, para cualquier elemento $f \in S'$ se verifican las igualdades*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f. \tag{59.35}$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos primero las fórmulas (59.35). Para cualquier elemento $\varphi \in S$ se tiene

$$(F^{-1}[F[f]], \varphi) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) = (f, \varphi).$$

Por analogía,

$$(F[F^{-1}[f]], \varphi) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (f, \varphi).$$

Mostremos ahora que la transformación de Fourier F aplica el espacio S' sobre todo el espacio S': $F(S') = S'$. Sea $g \in S'$, entonces si $f = F^{-1}[g]$, se tiene $F[f] = F[F^{-1}[g]] = g$, es decir, realizándose la transformación de Fourier F, en cualquier elemento de S' se aplica cierto elemento de S'.

Mostremos que F es biunívoca. Si $f_1 \in S'$, $f_2 \in S'$ y $F[f_1] = F[f_2]$, entonces también $F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]]$, de donde, en virtud de (59.35), se tiene $f_1 = f_2$.

Señalemos que la aplicación F es lineal, es decir, que para cualesquiera funciones generalizadas $f \in S'$, $g \in S'$ y cualesquiera números λ y μ se verifica la igualdad

$$F[\lambda f + \mu g] = \lambda F[f] + \mu F[g].$$

Con el fin de convencernos de la validez de esta igualdad, comprobémosla para cualquier elemento $\varphi \in S$, siempre que sea éste fijo.

$$(F[\lambda f + \mu g], \varphi) = (\lambda f + \mu g, F[\varphi]) = \lambda(f, F[\varphi]) + \mu(g, F[\varphi]) =$$
$$= \lambda(F[f], \varphi) + \mu(F[g], \varphi) = (\lambda F[f] + \mu F[g], \varphi).$$

Por fin, demostremos que F es una aplicación continua. En efecto, sea $f \in S'$, $f_n \in S'$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim f_n = f$, y, por consiguiente, para cualquier $\varphi \in S$ se verifica la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$. En tal caso

$$\lim_{n\to\infty} (F[f_n], \varphi) = \lim_{n\to\infty} (f_n F[\varphi]) = (f, F[\varphi]) = (F[f], \varphi).$$

Análogamente se demuestra que también F^{-1} aplica continua y biunívocamente S' sobre S'. □

Ejemplos. Hallemos $F[\delta] = \hat{\delta}$. Tenemos

$$(\hat{\delta}, \varphi) = (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy}\, dx \Big|_{y=0} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi\right), \quad \varphi \in S,$$

por lo cual $F[\delta] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, y por lo tanto, $F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta$ (observemos que la transformación de Fourier inversa clásica $F^{-1}[1]$, al igual que la transformación directa $F[1]$, no existen). Con ayuda de las integrales (59.33) y (59.34) estas fórmulas

pueden escribirse en la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ixy}\, dx = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, dx = \delta(y).$$

De modo igual se halla también la transformación de Fourier inversa de la función delta:

$$F^{-1}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = F[\delta],$$

de donde

$$F[1] = F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta.$$

Al hacer uso de la notación basada sobre las igualdades (59.33) y (59.34), estas fórmulas pueden escribirse en la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\, dx = \delta(y), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{ixy}\, dx = 1.$$

Calculemos ahora la transformación de Fourier de la derivada de una función generalizada y la derivada de la transformación de Fourier. Previamente hemos de introducir el concepto de producto de una función generalizada $f \in S'$ por una función habitual infinitamente derivable $\psi(x)$ que posee la propiedad de que para cualquiera de sus derivadas $\psi^{(n)}(x)$ existen unas constantes $\beta_n > 0$ y $\alpha_n > 0$, $n = 0, 1, \dots$, tales que para todos los x se verifica la desigualdad

$$|\psi^{(n)}(x)| \leqslant \beta_n (1 + |x|)^{\alpha_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .^{*)} \tag{59.36}$$

Señalemos que todos los polinomios satisfacen esta condición.

Si la función ψ es del tipo (59.36) y $\varphi \in S$, entonces $\psi\varphi \in S$. Si la función f es localmente sumable y satisface la condición (59.25), mientras que la función ψ satisface la condición (59.36), entonces ψf satisface también la condición (59.25) y

$$(f, \psi\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x)\varphi(x)\, dx = (\psi f, \varphi).$$

Supongamos que ψ satisface la condición (59.36) y $f \in S'$. Definamos ahora la funcional sobre S, igual al producto ψf, mediante la fórmula

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi\varphi), \quad \varphi \in S.$$

Es fácil comprobar que $\psi f \in S'$ **), es decir, ψf es una funcional lineal continua de-

*) En virtud de esta condición (para $n = 0$), $\psi(x)$ puede considerarse como una función generalizada del espacio S' (véase (59.25)).

**) Las complicaciones que aparecen al determinar el producto de las funciones generalizadas se deben a que el producto de las funcionales lineales en el sentido habitual como un producto de funciones (es decir, como producto de los valores de factores en todo punto) no es una funcional lineal.

finida sobre el espacio S.

Ejercicio 21. Supongamos que la función $\psi = \psi(x)$ satisface la condición (59.36) y la función generalizada $f \in S'$. Demuéstrese que $\psi f \in S'$.

Demostraremos en conclusión las fórmulas

$$F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f], \tag{59.37}$$

$$i^n F^{(n)}[f] = F[x^n f], \quad f \in S'. \tag{59.38}$$

Tenemos (véase el p. 56.8):

$$(F[f^{(n)}], \varphi) = (f^{(n)}, F[\varphi]) = (-1)^n (f, F^{(n)}[\varphi]) =$$

$$= (-1)^n \left(f, \frac{1}{i^n} F[x^n \varphi]\right) = i^n (F[f], \quad x^n \varphi) = ((ix)^n F[f], \varphi), \quad \varphi \in S.$$

La fórmula (59.37) está demostrada.

Demostremos (59.38) (véase el p. 56.10):

$$(F^{(n)}[f], \varphi) = (-1)^n (F[f], \varphi^{(n)}) = (-1)^n (f, F[\varphi^{(n)}]) =$$

$$= (-1)^n (f, (ix)^n F[\varphi]) = \frac{1}{i^n} (x^n f, F[\varphi]) = \left(\frac{1}{i^n} F[x^n f], \varphi\right). \ \square$$

Ejemplo. Hallemos la transformación de Fourier de la función $f(x) = x$:

$$F[x] = F[x \cdot 1] = iF'[1] = i\sqrt{2\pi}\delta'$$

Ejercicio 22. Hállese la transformación de Fourier de un polinomio.

Al calcular una transformación de Fourier de las funciones generalizadas resulta a veces conveniente elegir una sucesión de funciones ordinarias que en el espacio S' tienden a una función (generalizada) dada, hallar la transformación de Fourier de los términos de dicha sucesión y después calcular la transformación de Fourier buscada de la función dada pasando al límite y aprovechando la continuidad de la transformación de Fourier. Así por ejemplo, para calcular la transformación de Fourier $F[\theta]$ de la función de Heaviside $\theta(x)$, hallemos primero la transformación de Fourier de la función $\theta(x)e^{-tx}$ $(t > 0)$.

$$F[\theta(x)e^{-tx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x(t+iy)}\,dx = -\frac{e^{-x(t+iy)}}{\sqrt{2\pi}(t+iy)}\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(t+iy)} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}(y-it)}. \tag{59.39}$$

Probemos ahora que en S'

$$\lim_{t \to +0} \theta(x)e^{-tx} = \theta(x) \tag{59.40}$$

En efecto, para toda función $\varphi \in S$ y cualquier número A se tiene

$$|(\theta(x), \varphi(x)) - (\theta(x)e^{-tx}, \varphi(x))| = \left|\int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_0^A (1 - e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} (1 - e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|. \tag{59.14}$$

Fijemos la función $\varphi \in S$ y un número cualquiera $\varepsilon > 0$. Por ser la función φ absolutamente integrable, existe un número $A > 0$ tal que

$$\int_A^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2};$$

entonces

$$\left|\int_A^{+\infty} (1 - e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \int_A^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{59.42}$$

Elijamos ahora $t_0 > 0$ de modo tal que para $0 < t < t_0$ sea válida la desigualdad

$$(1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

y, por consiguiente,

$$\left|\int_0^A (1 - e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right| < (1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{59.43}$$

Entonces, para $0 < t < t_0$, de (59.41), (59.42) y (59.43) obtenemos

$$|(\theta(x), \varphi(x)) - (\theta(x)e^{-tx}, \varphi(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La fórmula (59.40) queda demostrada.

Por ser la transformación de Fourier continua, tenemos

$$\lim_{t \to +0} F[\theta(x)e^{-tx}] = F[\theta(x)]; \tag{59.44}$$

de aquí y de (59.39) tenemos

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \to +0} \frac{i}{y - it},$$

con la particularidad de que de (59.44) proviene que el límite en el segundo miembro existe (en el espacio S'), este límite se designa, corrientemente, por $\dfrac{i}{y - i0}$ (véase el ejercicio 8).

De este modo,

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{y - i0}.$$

Ejercicio 23. Hállese la transformación de Fourier de las funciones $x^k\theta(x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

COMPLEMENTO

§ 60. ALGUNOS PROBLEMAS DE LOS CÁLCULOS APROXIMADOS

60.1. APLICACIÓN DE LA FÓRMULA DE TAYLOR PARA EL CÁLCULO APROXIMADO DE LOS VALORES DE FUNCIONES E INTEGRALES

Para calcular los valores de las funciones resulta cómodo servirse de la fórmula de Taylor o serie de Taylor. Aclaremos esto con los ejemplos.

1. Cálculo del valor del seno.

La fórmula de Taylor para la función sen x tiene por expresión

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_n(x),$$

donde

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \operatorname{sen}^{(2n+1)} \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

(el término residual se ha tomado en la forma de Lagrange). Por esto

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \qquad (60.1)$$

Supongamos que se pide hallar sen 20° con un error inferior a 10^{-3}. A 20° medidos en radianes corresponde la magnitud $\frac{\pi}{9}$, por lo cual elijamos el número n de modo tal que sea

$$\left| r_n\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| < \frac{1}{10^3}; \qquad (60.2)$$

entonces el valor del polinomio de Taylor de orden n en el punto $x = \frac{\pi}{9}$ nos dará la aproximación buscada de sen 20°. En virtud de la desigualdad (60.1), para que se cumpla la condición (60.2), es suficiente que se verifique la desigualdad

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+1} < \frac{1}{10^3}. \qquad (60.3)$$

COMPLEMENTO

§ 60. ALGUNOS PROBLEMAS DE LOS CÁLCULOS APROXIMADOS

60.1. APLICACIÓN DE LA FÓRMULA DE TAYLOR PARA EL CÁLCULO APROXIMADO DE LOS VALORES DE FUNCIONES E INTEGRALES

Para calcular los valores de las funciones resulta cómodo servirse de la fórmula de Taylor o serie de Taylor. Aclaremos esto con los ejemplos.

1. Cálculo del valor del seno.

La fórmula de Taylor para la función sen x tiene por expresión

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_n(x),$$

donde

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \operatorname{sen}^{(2n+1)} \theta x, \; 0 < \theta < 1$$

(el término residual se ha tomado en la forma de Lagrange). Por esto

$$|r_n(x)| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{60.1}$$

Supongamos que se pide hallar sen 20° con un error inferior a 10^{-3}. A 20° medidos en radianes corresponde la magnitud $\frac{\pi}{9}$, por lo cual elijamos el número n de modo tal que sea

$$\left| r_n\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| < \frac{1}{10^3}; \tag{60.2}$$

entonces el valor del polinomio de Taylor de orden n en el punto $x = \frac{\pi}{9}$ nos dará la aproximación buscada de sen 20°. En virtud de la desigualdad (60.1), para que se cumpla la condición (60.2), es suficiente que se verifique la desigualdad

$$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+1} < \frac{1}{10^3}. \tag{60.3}$$

Cuando $n = 1$, esta desigualdad no se verifica:

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 > \frac{1}{6}\,\frac{1}{3^3} = \frac{1}{162} > \frac{1}{10^3},$$

pero, cuando $n = 2$, sí se cumple:

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 < \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840} < \frac{1}{10^3}.$$

Por eso, sen 20° con un error inferior a 10^{-3} se halla según la fórmula

$$\operatorname{sen} 20° \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{9}\right)^{3*)}. \tag{60.4}$$

Si tomamos π de las tablas con un error inferior a 10^{-4}, sustituimos este valor en la fórmula (60.4), realizamos las operaciones dictadas por la fórmula y redondeamos el resultado con exactitud hasta de 10^{-3}, obtendremos la aproximación buscada de sen 20°:

$$\operatorname{sen} 20° \approx 0{,}343^{**)}.$$

Calculando los valores de un seno se puede emplear, en lugar de la fórmula de Taylor, una serie de Taylor la que es alternada para el argumento real y admite, por esta razón, una estimación sencilla del resto: no es superior, en valor absoluto, al valor absoluto del primer término del resto (véase el p. 35.9). Esto nos da, naturalmente, el mismo resultado que antes, puesto que conduce a la estimación (60.3) la cual se ha obtenido partiendo de otros razonamientos.

2. Cálculo de los valores de logaritmos naturales.

La serie de Taylor para un logaritmo

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1, \tag{60.5}$$

puede ser utilizado de inmediato sólo para calcular logaritmos de los números que no sobrepasan dos. Sin embargo, de la serie (60.5) pueden obtenerse otros desarrollos que permiten calcular los logaritmos de cualesquiera números. Al sustituir en (60.5) x por $-x$ y sustraer la serie obtenida de (60.5), obtendremos

*) Mediante el signo $\approx$ se denota la igualdad aproximada con el grado prefijado de exactitud.

**) Señalemos que en nuestro caso se establece con facilidad una desigualdad más fuerte aún: $r_2\left(\frac{\pi}{9}\right) < \frac{1}{3}\,10^{-3}$, mientras que siendo prefijado el número de signos de π, el error, que se obtiene al calcular el segundo miembro de la fórmula (60.4), en todo caso no sobrepasa $\frac{2}{3}\cdot 10^{-3}$, por lo cual el error total será no superior a 10^{-3}.

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad |x| < 1. \tag{60.6}$$

Cuando x varía desde -1 hasta 1, la expresión $\frac{1+x}{1-x}$ toma todos los valores positivos. Por ello, la fórmula (60.6) puede utilizarse para calcular logaritmos de cualesquiera números positivos. Surge naturalmente una pregunta ¿cuántos términos se deben tomar en la serie (60.6), para que se obtenga el logaritmo de un número con la exactitud dada? Con este fin es preciso estimar el resto de la serie (60.6). Tenemos

$$|r_n(x)| = 2\,|x|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1} < \frac{2|x|^{2n+1}}{2n+1}\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k} = \frac{2\,|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}, \quad |x| < 1. \tag{60.7}$$

Hagamos uso de esta estimación para calcular ln 2 con un error inferior a 10^{-3}. Resolviendo la ecuación

$$\frac{1+x}{1-x} = 2,$$

encontramos $x = \frac{1}{3}$. Haciendo en (60.6) $x = \frac{1}{3}$, encontramos

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^{2n}}. \tag{60.8}$$

La estimación (60.7) nos da en este caso

$$\left|r_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| < \frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}.$$

De aquí, para $n = 3$, tenemos

$$r_3\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{4\cdot 7\cdot 3^5} = \frac{1}{28\cdot 243} < \frac{1}{10^3}.$$

Por ello, para calcular ln 2 con un error inferior a 10^{-3}, es suficiente tomar los primeros tres términos de la serie (60.8):

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^4}\right) \approx 0{,}693.$$

Al calcular los valores de una función con menor exactitud, sirviéndose de la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

es a menudo suficiente limitarse sólo a la parte lineal, es decir, a los primeros dos términos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

en otras palabras, sustituir el incremento de la función por la diferencial de ésta

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x,$$

donde $\Delta x = x - x_0$.

La fórmula de Taylor permite también calcular aproximadamente los valores de ciertas integrales. Examinemos un ejemplo de esta indole.

3. Cálculo de la íntegral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

con un error inferior a 0,0001.

Escribamos la fórmula de Taylor para el integrando. Hagamos uso con este fin de la fórmula conocida de Taylor para la función sen x (véase (60.1)), en este caso obtendremos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} + \frac{r_n(x)}{x};$$

por eso

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\int_0^1 x^{2k-2}dx + \int_0^1 \frac{r_n(x)}{x}\,dx.$$

Teniendo presente la estimación (60.1), resulta

$$\left|\int_0^1 \frac{r_n(x)}{x}dx\right| \leqslant \int_0^1 \frac{|r_n(x)|}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Por cuanto, para $n = 3$,

$$\frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} = \frac{1}{7!7} = \frac{1}{35280} < \frac{1}{3}10^{-4},$$

entonces, con un error inferior a 0,0001 tenemos

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx \approx \int_0^1 dx - \frac{1}{6}\int_0^1 x^2dx + \frac{1}{120}\int_0^1 x^4dx = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0{,}9961^{*)}.$$

*) Al convertir las fracciones simples en las decimales se ha cometido un error no superior a $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, por lo cual el error total, realizado el cálculo aproximado de la integral en consideración, realmente no sobrepasa la magnitud de 10^{-4}.

Observemos que en los cálculos aproximados prácticos de las integrales la fórmula de Taylor resulta ser, por regla general, inconveniente para emplearla, por cuanto en dicha fórmula figuran las derivadas de la función dada y el cálculo de éstas conduce a la acumulación complementaria de errorres. Resulta más oportuno emplear las fórmulas aproximadas de integración en las que figuran sólo los valores de la propia función. Los métodos semejantes de la integración aproximada se considerarán en el p. 60.4.

OBSERVACIÓN. Cabe advertir que para cálculos reales de los valores de funciones o de integrales de dichas funciones, desarrollando las funciones en series, no todo desarrollo de las funciones consideradas en series será aplicable. Puede suceder que la serie obtenida convergerá de modo tan "lento" que prácticamente o bien no será útil para los cálculos o bien estos últimos serán injustificadamente engorrosos (hablando metafóricamente, en este caso la serie es "prácticamente divergente", aunque "converge teóricamente"). En tal situación se debe tratar de obtener alguna otra serie que converja lo suficientemente rápido ("mejorar la convergencia", como suele decirse en este caso) y cuya suma permitirá hallar los valores de la función en consideración. Precisamente así hemos procedido al considerar el método para calcular logaritmos. Sería, por ejemplo, inconveniente calcular incluso el valor de $\ln\frac{3}{2}$ con ayuda de la serie (60.5), aunque la serie converge cuando $x = \frac{1}{2}$; en lugar de esto se debe utilizar de la serie (60.6) para $x = \frac{1}{5}$, puesto que dicha serie converge más rápidamente.

60.2. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

Examinemos un problema en el que se resuelve la ecuación

$$f(x) = 0. \tag{60.9}$$

Si la función f es continua en el segmento $[a, b]$ y toma en los extremos del segmento los valores de signo opuesto, entonces el método, por cuyo intermedio se ha demostrado en el p. 6.2 el teorema sobre la existencia en este caso de un punto x_0, donde la función se anula, nos proporciona también el procedimiento para calcular dicho valor x_0, es decir, la raíz de la ecuación (60.9). Con este fin es suficiente dividir sucesivamente el segmento $[a, b]$ en dos partes iguales, eligiendo cada vez aquel segmento en cuyos extremos la función f adquiere valores de signo contrario (siempre que, por supuesto, no ocurre que en uno de los extremos obtenidos la función f se anule, caso en el cual la raíz buscada ya se habrá encontrado). Si se pide hallar la raíz de la ecuación (60.9) con un error inferior a $\varepsilon > 0$ dado, entonces, realizados n pasos tales que

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon,$$

los extremos del segmento obtenido nos darán precisamente la aproximación buscada de cierta raíz de la ecuación (60.9) (el extremo izquierdo por defecto y el derecho

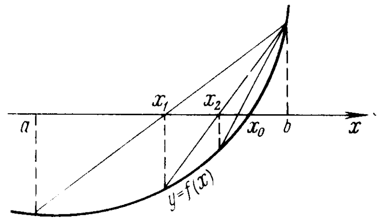


Fig. 246

por exceso). Este procedimiento de resolución aproximada de la ecuación (60.9), llamado "método de horquilla", es, en principio, muy simple, aunque bastante voluminoso. Se emplea principalmente para el "tanteo aproximado" del resultado, o sea, para la determinación "aproximada" del intervalo, en el que se halla la raíz buscada de la ecuación que se resuelve, y a continuación, con el objeto de encontrar en dicho intervalo un valor "más exacto" de la raíz se utilizan otros métodos que convergen con mayor rapidez: se aplica, corrientemente, el método de tangentes ("método de Newton") que se describe más abajo. Por regla general, tal esquema se aplica al realizar los cálculos en las máquinas calculadoras de accionamiento rápido. Naturalmente, este mismo procedimiento resulta provechoso también al calcular "a mano", en particular, con ayuda de una regla de cálculo o minicomputadores.

Analizaremos aquí los métodos de resolución de las ecuaciones que se denominan ***método de las cuerdas y método de las tangentes.*** El último método se generaliza con éxito al caso de los sistemas de ecuaciones.

En lo que sigue supondremos siempre que la función f es continua en el segmento $[a, b]$ y tiene en dicho segmento las derivadas primera y segunda*), con la particularidad de que ambas son de signo constante (en particular, distintas de cero).

Supondremos, además, que la función f toma en los extremos del segmento valores de signo opuesto. Ya que la primera derivada es de signo constante, la función f es estrictamente monótona, razón por la cual bajo las suposiciones asumidas la ecuación (60.9) tiene en el intervalo (a, b) exactamente una raíz.

MÉTODO DE LAS CUERDAS

Este método consiste en lo siguiente. La gráfica de la función f se sustituye por su cuerda, es decir, por un segmento que une los puntos extremos de la gráfica de la función f: los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La abscisa x_1 del punto de intersección de esta cuerda con el eje Ox se considera como la primera aproximación de la raíz buscada (fig. 246). Luego se toma aquel de los segmentos $[a, x_1]$ y $[x_1, b]$, en cuyos extremos la función f adquiere valores de signo opuesto (en adelante se mostrará que bajo las suposiciones asumidas $f(x_1) \neq 0$, y, por consiguiente, tal segmento

*) Para el método de cuerdas basta exigir que las derivadas primera y segunda existan sólo en el intervalo (a, b). La existencia de la derivada en los extremos del segmento $[a, b]$ se utilizará sólo en el método de las tangentes.

siempre existe), y a dicho segmento se aplica el mismo procedimiento; se obtiene la segunda aproximación de la raíz x_2, etc. De resultas, se forma una sucesión x_n, $n = 1, 2, \ldots$, la cual (como se probará más abajo) converge, con las restricciones impuestas sobre la función f, hacia la raíz de la ecuación (60.9).

No es difícil obtener las fórmulas recurrentes para los números citados x_n, $n = 1, 2, \ldots$. La ecuación de una recta que pasa por los puntos extremos de la gráfica de la función f tiene por expresión

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \tag{60.10}$$

Designemos su miembro derecho mediante $l(x)$, es decir, escribamos la ecuación (60.10) en la forma

$$y = l(x).$$

Hallemos la abscisa x_1 del punto de intersección de la recta (60.10) con el eje Ox, es decir, resolvamos la ecuación $l(x) = 0$; obtendremos

$$x_1 = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{60.11}$$

Es fácil convencerse de que

$$a < x_1 < b \tag{60.12}$$

(esto se deduce, por ejemplo, del hecho de que la función $l(x)$ es estrictamente monótona y continua y de que en los extremos del segmento $[a, b]$ la función toma valores de signo opuesto: $l(a) = f(a)$ y $l(b) = f(b)$).

Análogamente encontramos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{60.13}$$

Mostremos que la sucesión $\{x_n\}$ tiende a la raíz de la ecuación (60.9) de manera monótona. Supongamos, para concretar, que $f'(x) > 0, f''(x) > 0, a < x < b$ (véase la fig. 246). En este caso la función f es estrictamente creciente y gira su convexidad hacia las y negativas. Por consiguiente cualquier punto interior de la cuerda, que une los puntos extremos de la gráfica de la función f, se sitúa por encima del punto correspondiente de la gráfica de la función f, es decir,

$$l(x) > f(x), \ a < x < b.$$

En particular, si x_0 es la raíz de la ecuación (60.9): $f(x_0) = 0$, entonces de aquí proviene que

$$l(x_0) > 0.$$

Tenemos (véanse (60.11) y (60.12)):

$$l(x_1) = 0, \ a < x_1 < b.$$

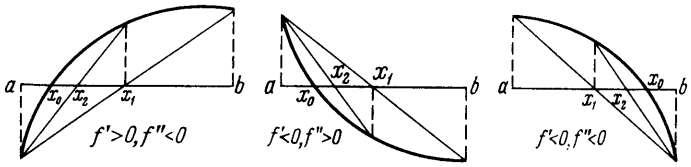


Fig. 247

De este modo,

$$l(x_1) < l(x_0), \tag{60.14}$$

pero la función lineal $l(x)$ crece de modo estrictamente monótono, pues

$$l(b) = f(b) > f(a) = l(a),$$

por lo cual de (60.14) se deduce que

$$x_1 < x_0.$$

Ahora, al sustituir el segmento $[a, b]$ por el segmento $[x_1, b]$ y observar que $f(x_1) < 0$, demostremos análogamente que

$$x_1 < x_2 < x_0.$$

Luego, por inducción, obtendremos

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n \ldots < x_0.$$

Así pues, la sucesión $\{x_n\}$ converge, puesto que es monótona y acotada. Sea $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$. Pasando en la igualdad (60.13) al límite para $n \to \infty$, obtendremos $f(c) = 0$, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia la raíz de la ecuación (60.9).

Si $|f'(x)| \geqslant m > 0$, $a < x < b$, entonces no es difícil de obtener la estimación de la velocidad con la cual converge la sucesión $\{x_n\}$ en términos de la propia función f en los puntos x_n. En efecto,

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x_0) = f'(\xi_n)(x_n - x_0),$$
$$x_n < \xi_n < x_0,\ n = 1, 2, \ldots;$$

de aquí

$$|x_n - x_0| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Los casos restantes, a saber,

$$f'(x) > 0, f''(x) < 0,$$
$$f'(x) < 0, f''(x) > 0,$$
$$f'(x) < 0, f''(x) < 0,$$

se consideran por analogía con el caso que acabamos de examinar (fig. 247).

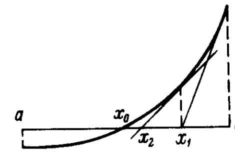


Fig. 248

MÉTODO DE LAS TANGENTES (MÉTODO DE NEWTON)

Supondremos que la función f satisface las mismas condiciones que eran vigentes al considerar el método de las cuerdas. Tracemos una tangente a la gráfica de la función f en uno de sus puntos extremos, por ejemplo, en el punto $(b, f(b))$. La abscisa x_1 del punto de intersección de la tangente con el eje Ox se considera precisamente la primera aproximación de la raíz de la ecuación (60.9). Luego, si $x_1 \in (a, b)$ (según lo expuesto más abajo, esto siempre tiene lugar para una de las tangentes en los puntos extremos de la gráfica), entonces de los dos segmentos $[a, x_1]$ y $[x_1, b]$ se elige aquel, en cuyos extremos la función f toma los valores de signo opuesto (en adelante se mostrará que $f(x_1) \neq 0$). A continuación se traza la tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_1, f(x_1))$; el punto de su intersección con el eje Ox se denota con x_2, etc. (fig. 248).

Se obtienen con facilidad fórmulas recurrentes para los números citados x_n, $n = 1, 2, \ldots$. La ecuación de la tangente que pasa por el punto $(b, f(b))$ tiene por expresión

$$y = f'(b)(x - b) + f(b).$$

Designemos su miembro derecho mediante $L(x)$, es decir, escribamos esta ecuación en la forma

$$y = L(x).$$

Hallemos la abscisa x_1 del punto de intersección de esta tangente con el eje Ox, es decir, resolvamos la ecuación $L(x) = 0$; se obtendrá:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

El punto x_1 puede disponerse, en el caso general, fuera del segmento $[a, b]$, es decir, fuera del dominio de definición de la función f. Sin embargo, si $f(b)$ y f'' son de un mismo signo, entonces $x_1 \in (a, b)$. Igual que al describir el método de las cuerdas, examinaremos más detalladamente el caso en que $f' > 0, f'' > 0$ en $[a, b]$. En este caso la función f crece de manera estrictamente monótona, por consiguiente, $f(b) > 0$; además, la función f es convexa hacia las y negativas en (a, b), por consiguiente,

$$L(x) < f(x)$$

(véase el p. 14.3).

Si $f(x_0) = 0$, $a < x_0 < b$, se tiene

$$L(x_0) < 0,$$

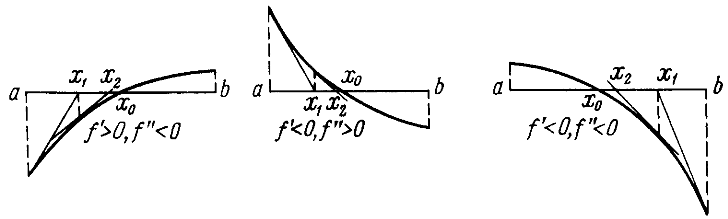


Fig. 249

pero $L(b) = f(b) > 0$, por consiguiente,

$$x_0 < x_1 < b.$$

Con ello, $f(x_1) > L(x_1) = 0$.

Razonando análogamente respecto del segmento $[a, x_1]$, obtendremos un punto x_2 tal que

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \; x_0 < x_2 < x_1,$$

y, luego,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; x_0 < x_{n+1} < x_n. \tag{60.15}$$

Por consiguiente, la sucesión $\{x_n\}$ es monótona y acotada y por esta razón converge. Sea $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$. Pasando al límite en (60.15), obtendremos $f(c) = 0$, es decir, la sucesión (60.15) converge hacia la raíz $x_0 = c$ de la ecuación (60.9).

Cuando $|f'(x)| \geqslant m \geqslant 0$, $a < x < b$, por el procedimiento utilizado en el método de las cuerdas, obtendremos la estimación

$$|x_n - c| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \; n = 1, 2, \ldots .$$

De un modo semejante se examinan también los demás casos de combinaciones diferentes de los signos que tienen las derivadas primera y segunda (fig. 249).

He aquí una estimación más de la velocidad de convergencia del método de las tangentes, de la que se ve claramente la ventaja del método mencionado. Supongamos que para la función f en el intervalo que se considera se cumplen las desigualdades

$$|f'(x)| \geqslant m > 0, \; |f''(x)| \leqslant M, \; a < x < b.$$

Desarrollemos la función f en el entorno del punto x_n según la fórmula de Taylor, por ejemplo, con el término residual en la forma de Lagrange

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_n)^2,$$

donde $\xi = x_n + \theta(x - x_n)$, $0 < \theta < 1$. Si $f(c) = 0$, entonces, al sustituir $x = c$ en la fórmula escrita, obtendremos

$$f(x_n) + f'(X_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(c - x_n)^2 = 0.$$

De aquí

$$x_n - c = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2,$$

o bien, en virtud de la fórmula (60.15),

$$|x_{n+1} - c| = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(c - x_n)^2.$$

Por consiguiente,

$$|x_{n+1} - c| \leqslant \frac{M}{2m}|x_n - c|^2,$$

de donde

$$\frac{M}{2m}|x_{n+1} - c| \leqslant \left(\frac{M}{2m}|x_n - c|\right)^2, \; n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Aplicando sucesivamente esta desigualdad, tendremos:

$$\frac{M}{2m}|x_n - c| \leqslant \left(\frac{M}{2m}|x_{n-1} - c|\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\frac{M}{2m}|x_{n-2} - c|\right)^2\right]^2 \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{M}{2m}|b - c|\right)^{2^n}.$$

Si la aproximación inicial b se elige de modo tal que sea $q \overset{\text{def}}{=} \frac{M}{2m}|b - c| < 1$, se obtendrá

$$|x_n - c| < \frac{2m}{M} q^{2^n}, \; n = 1, 2, \ldots ,$$

es decir, la velocidad de convergencia de las soluciones aproximadas x_n hacia la raíz $x = c$ es considerablemente superior a la de decrecimiento de la progresión geométrica cuyo denominador es, en valor absoluto, menor que la unidad.

Ejemplo. Apliquemos el método de Newton para el cálculo aproximado de una raíz de k-ésimo grado del número $a > 0$, k es entero y positivo. En este caso se trata de la solución aproximada de la ecuación $x^k - a = 0$, es decir, la fórmula (60.15) se la debe aplicar a la función $f(x) = x^k - a$.

Tenemos $f'(x) = kx^{k-1}$, y, por lo tanto, para los valores aproximados sucesivos x_n de la raíz $\sqrt[k]{x}$ existe la siguiente fórmula recurrente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}},$$

o bien

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right].$$

Con esta fórmula nos hemos encontrado para $k = 2$ en el p. 4.9.

60.3. INTERPOLACIÓN DE LAS FUNCIONES

Sea dada en el segmento $[a, b]$ una función f y sean fijos $n + 1$ valores del argumento x_i, $i = 1, 2, \dots, n + 1$:

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leqslant b. \tag{60.16}$$

Uno de los más sencillos problemas de interpolación consiste en la búsqueda de un polinomio $P(x)$, de grado no superior al número dado m, el cual para los valores del argumento $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, llamados *nudos de interpolación,* toma los mismos valores que la función dada f, es decir, tienen lugar las igualdades

$$f(x_i) = P(x_i), i = 1, 2, \dots, n + 1. \tag{60.17}$$

Tal polinomio $P(x)$ se denomina *polinomio de interpolación* que interpola la función f en los nudos dados de interpolación.

Con el objeto de investigar la cuestión de existencia del polinomio interpolador $P(x)$ que satisfaga las condiciones (60.17), escribámoslo con los coeficientes indeterminados a_j, $j = 0, 1, \dots, m$;

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

y sustituyámoslo en el sistema (60.17). Obtendremos un sistema de $(n + 1)$ ecuaciones lineales con $m + 1$ incógnitas $a_0, a_1, \dots, a_m$:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_1^m &= f(x_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ a_0 + a_1x_{n+1} + \dots + a_mx_{n+1}^m &= f(x_{n+1}). \end{aligned} \tag{60.18}$$

El *determinante* formado de los coeficientes de este sistema, ubicados en las primeras k líneas y las primeras k columnas, $k \leqslant \min\{m + 1, n + 1\}$ (el número de las líneas es $n + 1$, el de las columnas es $m + 1$) lleva el nombre *de Vandermonde* y es conocido a partir del curso de álgebra:

$$W(x_1, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \dots x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 \dots x_2^{k-1} \\ \dots & \dots\dots\dots \\ 1 & x_k \dots x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (x_j - x_i).$$

En el caso dado este determinante es distinto de cero, pues todos los nudos de interpolación son diferentes. Por eso el rango de la matriz de coeficientes del sistema (60.18) es igual al mínimo de los dos números $m + 1$ y $n + 1$. Si $n > m$, el sistema (60.18), en el caso general, no tiene solución. Si $n \leqslant m$, la solución del sistema (60.18) siempre existe, con la particularidad de que, cuando $n = m$, la solución es única, y cuando $n < m$, hay una infinidad de soluciones. De este modo, *cualesquiera que sean los valores dados en $n + 1$ nudos* (60.16), *siempre existe un polinomio (y, además, el único) de grado no superior a n, que toma en los nudos mencionados los valores dados.*

Para hallar el polinomio de interpolación $P(x)$, se puede resolver el sistema (60.18). Sin embargo, puede utilizarse también otro procedimiento, más corto. Examinemos un polinomio

$$P_i(x) = \frac{(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_{n+1})}{(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_{n+1})}, i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Es evidente que $P_i(x)$ es un polinomio de grado n y que

$$P_i(x_i) = 1,\ P_i(x_j) = 0,$$
$$i = 1, 2, \dots, n + 1, j = 1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n + 1. \tag{60.19}$$

Por eso el polinomio de interpolación buscado puede ser escrito en la forma

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)P_i(x). \tag{60.20}$$

En efecto, la expresión escrita es un polinomio de grado no superior a n, y, en virtud de (60.19), satisface las condiciones (60.17).

El *polinomio de interpolación* escrito en la forma (60.20) lleva el nombre *de Lagrange.*

Investiguemos ahora la diferencia entre la función y el polinomio de interpolación:

$$R(x) = f(x) - P(x)$$

que se denomina *término residual de la interpolación*. Supongamos que la función f es $n + 1$ veces derivable en el segmento $[a, b]$. Entonces esta misma propiedad la posee también el resto $R(x)$, con la particularidad de que

$$R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), a \leqslant x \leqslant b, \tag{60.21}$$

pues $P^{(n+1)}x \equiv 0$. Pongamos

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n+1}),$$

fijemos $x \in [a, b]$ y analicemos una función auxiliar

$$\varphi(t) = R(t) - \frac{R(x)}{\omega(x)}\omega(t), a \leqslant t \leqslant b.$$

La función $\varphi(t)$, evidentemente, es también n + 1 veces derivable en el segmento $[a, b]$, además de (60.21) y de lo que $\omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ tenemos

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{R(x)}{\omega(x)}. \qquad (60.22)$$

Ahora, la función $\varphi(t)$ se anula en $n + 2$ puntos $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$; por eso, en virtud del teorema de Rolle, su derivada se reduce a cero por lo menos en $n + 1$ puntos del segmento $[a, b]$, la segunda derivada en n puntos, etc. Por inducción llegamos a que la $(n + 1)$-ésima derivada de la función φ se reduce a cero por lo menos una vez dentro del segmento $[a, b]$. Sea $\varphi^{(n+1)}(\zeta) = 0$, $a < \zeta < b$, entonces de (60.22) obtendremos

$$R(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\zeta),$$

o bien, más detalladamente,

$$R(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n+1})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta), \quad a \leqslant x \leqslant b,\ a < \zeta < b.$$

De aquí proviene la estimación del término residual

$$|R(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})| \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Hemos de notar que en general, incluso para las funciones analíticas en el segmento $[a, b]$, el término residual de interpolación no tiende a cero en dicho segmento para $n \to \infty$, es decir, los polinomios de interpolación no convergen hacia la propia función. La construcción de los ejemplos correspondientes es bastante engorrosa, razón por la cual no nos detendremos en esta afirmación.

60.4. FÓRMULAS DE CUADRATURA

Consideraremos ahora algunos métodos de la integración aproximada de las funciones. Las fórmulas para los valores aproximados de las integrales se denominan *fórmulas de cuadratura.*.

Supongamos que en el segmento $[a, b]$ se ha dado una función f. Dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales mediante los puntos x_k, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b; x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Las fórmulas de cuadratura a considerar se obtendrán sustituyendo en el proceso de integración, la función f en cada segmento $[x_{k-1}, x_k]$ por un polinomio de interpolación de grado n. Estudiaremos los casos de $n = 0, 1, 2$. Los valores aproximados

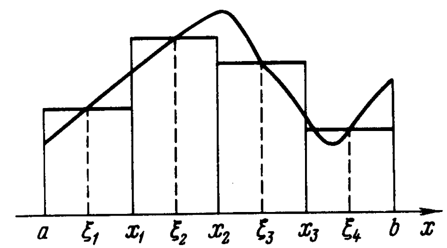


Fig. 250

correspondientes de la integral de la función f de designarán mediante el símbolo $L_n(f)$, $n = 0, 1, 2$. En el primer caso (cuando $n = 0$) la fórmula de cuadratura correspondiente se denomina *fórmula de los rectángulos,* en el segundo caso (cuando $n = 1$), *fórmula de los trapecios,* en el tercer caso (cuando $n = 2$), *fórmula de las parábolas* o, con mayor frecuencia, *fórmula de Simpson.*

FÓRMULA DE LOS RECTÁNGULOS

Para interpolar la función f en el segmento $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, mediante un polinomio de grado nulo, es suficiente prefijar un solo nudo. Tomemos a título de nudo el centro del segmento $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

El polinomio de interpolación será una constante

$$P_k(x) = f(\xi_k), k = 1, 2, \ldots, n.$$

Con tal interpolación sustituimos la función dada f por una "función escalonada", con más precisión, por un surtido de funciones, que son constantes en cada segmento $[x_{k-1}, x_k]$ e iguales al valor de la función f en el centro de dicho segmento (fig. 250). En lugar de la integral $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ tomemos otra integral $\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx$, es decir, sustituyamos el área del trapecio curvilíneo por la del rectángulo correspondiente.

Escribamos ahora la fórmula de cuadratura de los rectángulos:

$$L_0[f] = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k); \qquad (60.23)$$

así pues,

$$L_0[f] = \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{a+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+b}{2}\right)\right].$$

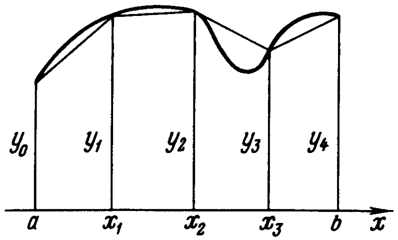


Fig. 251

FÓRMULA DE LOS TRAPECIOS

Tomemos en cada segmento $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, un polinomio interpolador $P_k(x)$ de primer grado determinado por los nudos de interpolación x_{k-1} y x_k. Suponiendo $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, obtendremos (véase (60.20))

$$P_k(x) = \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} y_{k-1} + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} y_k, \; k = 1, 2, \dots, n.$$

De este modo sustituimos la función dada f por una función lineal a trozos. En lugar de la integral $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ tomemos otra integral $\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx$, es decir, sustituyamos el área del trapecio curvilíneo por el área correspondiente de un trrapecio ordinario (fig. 251).

Observando que

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx = \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \frac{b-a}{n}, \; k = 1, 2, \dots, n$$

obtendremos la fórmula de cuadratura de los trapecios

$$L_1[f] = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2}, \qquad (60.24)$$

o bien

$$L_1[f] = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\right].$$

FÓRMULA DE SIMPSON

Tomemos en cada segmento $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, un polinomio de interpolación $P_k(x)$ de segundo grado determinado por los nudos de interpolación x_{k-1},

$\xi_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$ y x_k. Entonces

$$P_k(x) = \frac{(x - \xi_k)(x - x_k)}{(x_{k-1} - \xi_k)(x_{k-1} - x_k)} f(x_{k-1}) +$$

$$+ \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(\xi_k - x_{k-1})(\xi_k - x_k)} f(\xi_k) + \frac{(x - x_{k-1})(x - \xi_k)}{(x_k - x_{k-1})(x_k - \xi_k)} f(x_k).$$

Por el cálculo directo nos convencemos de que

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x - \xi_k)(x - x_k)}{(x_{k-1} - \xi_k)(x_{k-1} - x_k)} dx = \frac{1}{6}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{6}\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(\xi_k - x_{k-1})(\xi_k - x_k)} dx = \frac{2}{3}(x_k - x_{k-1}) = \frac{2}{3}\frac{b-a}{n},$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x - x_{k-1})(x - \xi_k)}{(x_k - x_{k-1})(x_k - \xi_k)} dx = \frac{1}{6}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{6}\frac{b-a}{n},$$

por lo cual

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6}f(x_{k-1}) + \frac{2}{3}f(\xi_k) + \frac{1}{6}f(x_k)\right].$$

Ahora ya no será difícil escribir la fórmula de cuadratura de Simpson:

$$L_2[f] = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{6}f(x_{k-1}) + \frac{2}{3}f(\xi_k) + \frac{1}{6}f(x_k)\right] \qquad (60.25)$$

o bien

$$L_2[f] = \frac{b-a}{6n}\{f(a) + f(b) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] +$$

$$+ 4[f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)]\}.$$

60.5. ERROR DE LAS FÓRMULAS DE CUADRATURA*)

Hemos visto que en todos los tres casos examinados las fórmulas de cuadratura (véanse (60.23), (60.24), (60.25)) tienen por expresión

*) En este punto seguimos las ideas desarrolladas en la monografía de S. M. Nikolski "Fórmulas de cuadratura".

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k(f), \tag{60.26}$$

donde

$$l_k(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{m} p_i f(\xi_{ki}), \tag{60.27}$$

$x_{k-1} \leqslant \xi_{ki} \leqslant x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, $i = 0, 1, \dots, m$ mientras que p_i son ciertos números.

Para el caso de la fórmula de los rectángulos tuvimos

$$m = 0, p_0 = 1, \xi_{k0} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2};$$

para el caso de la fórmula de los trapecios

$$m = 1, p_0 = p_1 = \frac{1}{2}, \xi_{k0} = x_{k-1}, \xi_{k1} = x_k;$$

y en el caso de la fórmula de Simpson

$$m = 2, p_0 = p_2 = \frac{1}{6}, p_1 = \frac{2}{3}, \xi_{k0} = x_{k-1}, \xi_{k1} = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \xi_{k2} = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ahora, sean dados algunos números p_i, llamados *pesos* y supongamos que en el segmento $[0, 1]$ viene dado un sistema de los puntos ξ_i, $i = 0, 1, \dots, m$, llamados *nudos*. Supongamos también, como hasta ahora, que el segmento $[a, b]$ está dividido mediante los puntos x_k, $k = 0, 1, \dots, n$, en n segmentos iguales $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, y los puntos ξ_{ki} se obtienen de los nudos ξ_i en el transcurso de una aplicación lineal del segmento $[0, 1]$ sobre el segmento $[x_{k-1}, x_k]$, durante el cual el punto cero pasa al punto x_{k-1}, es decir, en el proceso de la aplicación $x = (x_k, \dots, x_{k-1})t + x_{k-1}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

La expresión (60.26) se denomina en este caso fórmula de cuadratura correspondiente a los nudos ξ_i y los pesos p_i, $i = 0, 1, \dots, m$.

Toda fórmula de cuadratura (60.26) posee la propiedad de linealidad: para cualesquiera dos funciones f y g, definidas en el segmento $[a, b]$ y para cualesquiera dos números λ y μ se verifica evidentemente, la igualdad

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda L(f) + \mu L(g).$$

Definición. *La fórmula* $L(f) = \sum_{k=1}^{n} l_k(f)$ *se llama exacta para los polinomios de grado r, si para todo polinomio P(x) de grado no superior a r, para cualquier segmento* $[a, b]$ *y para todo número n (es decir, para cualquier partición del segmento* $[a, b]$ *en segmentos iguales) se verifica la igualdad*

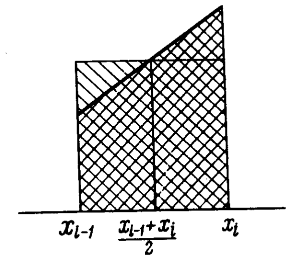


Fig. 252

$$L(P(x)) = \int_a^b P(x)\,dx.$$

Ejercicio. Demuéstrese que para que la fórmula de cuadratura $L[f]$, correspondiente a los nudos ξ_i y los pesos p_i, $i = 0, 1, \dots, m$, sea exacta para los polinomios de grado r, es necesario y suficiente que para cualquier polinomio $P(x)$ de grado no superior a r se verifique la igualdad

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m} p_i P(\xi_i).$$

Por cuanto el polinomio de interpolación de orden r coincide, para un polinomio de grado r, con el propio polinomio, las fórmulas de cuadratura de los rectángulos, trapecios y de Simpson son exactas para los polinomios de primero, segundo y tercer grados, respectivamente.

No obstante, más aún, la fórmula de cuadratura de los rectángulos es exacta para los polinomios de primer grado, y la fórmula de Simpson, para los polinomios de tercer grado. Demostrémoslo. En efecto, en el caso de la fórmula de los rectángulos (véanse (60.23) y (60.27))

$$l_k(f) = f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)(x_k - x_{k-1}).$$

El cálculo directo deja constancia de que para toda función lineal se verifica la igualdad

$$l_k(Ax + B) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (Ax + B)\,dx. \tag{60.28}$$

Esto se infiere claramente de la fig. 252. Al sumar las igualdades (60.28) según k desde l hasta n, obtendremos

$$L_0(Ax + B) = \int_a^b (Ax + B)\,dx,$$

lo que precisamente significa la exactitud de la fórmula de cuadratura de los rectángulos para los polinomios de primer grado.

En el caso de la fórmula de Simpson (véanse (60.25) y (60.27))

$$l_k(f) = \frac{b-c}{n}\left[\frac{1}{6}f(x_{k-1}) + \frac{2}{3}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + \frac{1}{6}f(x_k)\right]. \tag{60.29}$$

Basta mostrar que para cualquier polinomio de tercer grado $P(x)$ en este caso

$$l_k(P(x)) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)dx,\ k = 1, 2, \dots, n. \tag{60.30}$$

Efectivamente, siendo demostradas estas igualdades, obtendremos, al sumarlas según k desde l hasta n:

$$L_2(P(x)) = \int_a^b P(x)dx,$$

es decir, la fórmula de Simpson resulta ser exacta para los polinomios de tercer grado.

Sea $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Pongamos $Q(x) = Bx^2 + Cx + D$, entonces $P(x) = Ax^3 + Q(x)$. Por ello

$$l_k(P(x)) = Al_k(x^3) + l_k(Q(x)),$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)dx = A\int_{x_{k-1}}^{x_k} x^3dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} Q(x)dx,\ k = 1, 2, \dots, n. \tag{60.31}$$

En virtud de que la fórmula de Simpson es exacta para los polinomios de segundo grado, tenemos

$$l_k(Q(x)) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} Q(x)dx,\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Por otra parte, por cálculos inmediatos nos convencemos de que

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} x^3dx = \frac{x_k^4 - x_{k-1}^4}{4},$$

$$l_k(x^3) = (x_k - x_{k-1})\left[\frac{x_{k-1}^3}{6} + \frac{2}{3}\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)^3 + \frac{x_k^3}{6}\right] = \frac{x_k^4 - x_{k-1}^4}{4}.$$

Esto demuestra precisamente la igualdad (60.30).

El orden del error de las fórmulas de cuadratura resulta relacionado con el grado de los polinomios, para de los cuales resulta exacta la fórmula de cuadratura en consideración.

Teorema. *Sea f una función r veces continuamente derivable en el segmento $[a, b]$ y sea el número $M > 0$ de tal índole que*

$$|f^{(r)}(x)| \leqslant M,\ a \leqslant x \leqslant b.$$

Si la fórmula de cuadratura (60.26) es exacta para los polinomios de grado $r - 1$ ($r = 1, 2, \dots$), entonces existe una constante $c_r > 0$, que no depende de la función f, tal que se verifica

$$\left|\int_a^b f(x)dx - L(f)\right| \leqslant \frac{c_r M(b-a)^{r+1}}{n^r}. \tag{60.32}$$

DEMOSTRACIÓN. Representemos la función f en cada segmento $[x_{k-1}, x_k]$, de acuerdo con la fórmula de Taylor, en la forma

$$f(x) = P_k(x) + r_k(x),\ k = 1, 2, \dots, n,$$

donde

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(x_{k-1})}{j!}(x - x_{k-1})^j$$

es un polinomio de Taylor de grado $r - 1$, y, por consiguiente, $r_k(x)$ es el término residual de la fórmula de Taylor que se escribirá en la forma de Lagrange

$$r_k(x) = \frac{f^{(r)}[x_{k-1} + \theta_k(x - x_{k-1})]}{r!}(x - x_{k-1})^r, \tag{60.33}$$

$$0 < \theta_k < 1,\ k = 1, 2, \dots, n;$$

entonces

$$\int_a^b f(x)dx - L(f) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^n l_k(f) =$$

$$= \sum_{k=1}^n\left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx - l_k(P_k(x))\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^n\left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} r_k(x)dx - l_k(r_k(x))\right]. \tag{60.34}$$

En virtud de que la fórmula de cuadratura dada es exacta para los polinomios de grado $r - 1$, se verifica la igualdad

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_k(x)dx - l_k(P_k(x)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n^{*)}.$$

Por esto de (60.34) se infiere que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L(f) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |r_k(x)|\,dx + \sum_{k=1}^{n} |l_k(r_k(x))|. \tag{60.35}$$

Luego, de (60.33) tenemos

$$|r_k(x)| \leqslant \frac{M}{r!}\left(\frac{b-a}{n}\right)^r, \; k = 1, 2, \dots, n.$$

Aplicando esta desigualdad, obtenemos

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |r_k(x)|\,dx \leqslant \frac{M(b-a)^r}{r!n^r}\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx = \frac{M(b-a)^{r+1}}{r!\,n^{r+1}}.$$

Suponiendo $p = \max\limits_{i=0,1,\dots,m} |p_i|$ (véase (60.27)), tenemos

$$|l_k(r_k(x))| \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{m} |p_i|\,|r_k(\xi_{ki})| \leqslant \frac{(m+1)(b-a)^{r+1}pM}{r!\,n^{r+1}}.$$

Sustituyendo estas estimaciones en (60.35) e introduciendo las designaciones

$$c_r = \frac{1 + (m+1)p}{r!}$$

obtendremos la desigualdad (60.32). □

De la fórmula (60.32) se deduce, en particular, que al calcular las integrales con ayuda de las fórmulas de cuadratura de los rectángulos y trapecios (estas fórmulas, como se sabe, son exactas para los polinomios de primer grado, a consecuencia de lo cual podemos tomar para ellas $r = 2$) el error es de orden $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, y al calcular las integrales con ayuda de la fórmula de Simpson (ésta es exacta ya para los polinomios de tercer grado y podemos tomar $r = 4$) el error constituye esta vez sólo la magnitud $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

---

*) Efectivamente, eso se deduce de la definición (véase la pág. 554) de exactitud de la fórmula de cuadratura respecto de los polinomios de grado dado, si en dicha definición a título de segmento $[a, b]$ se toma el $[x_{k-1}, x_k]$ y se pone $n = 1$.

Observemos que empleando el método citado de calcular las constantes c_r, no obtuvimos sus valores mínimos. Lo último puede lograrse perfeccionando los métodos de su cálculo.

Problema 43. Demuéstrese que para la fórmula de los rectángulos puede tomarse $c_2 = \frac{1}{24}$, para la fórmula de los trapecios $c_2 = \frac{1}{12}$, y para la fórmula de Simpson $c_4 = \frac{1}{2880}$.

60.6. CÁLCULO APROXIMADO DE LAS DERIVADAS

El cálculo aproximado de las derivadas se efectúa a base de las fórmulas que las definen. Por ejemplo, dado que

$$f'(x) = \lim_{n \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

la así llamada razón aritmética

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{60.36}$$

proporciona el valor aproximado de la derivada. Esta expresión, además, permite calcular la derivada con cualquier grado de precisión a cuenta de la elección adecuada de h, lo que se infiere de la definición de límite.

Estimemos el orden de aproximación de una derivada, calculada según la fórmula (60.36), respecto de h. Supongamos que la función f tiene en el entorno del punto x derivada acotada de segundo orden. Entonces, por la fórmula de Taylor,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2}f''(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1;$$

de aquí

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2}f''(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

es decir,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + O(h), \quad h \to 0. \; \square$$

Es obvio que si en el punto x existe una derivada, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

Resulta que el cálculo aproximado de la derivada en un punto según la fórmula aproximada

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} \tag{60.37}$$

asegura un orden más elevado de pequeñez del error respecto de h. Mostrémoslo. Supongamos que la función f tiene en el entorno del punto x la tercera derivada acotada. En este caso, según la fórmula de Taylor se tiene

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x + \theta_1 h)h^3,\ 0 < \theta_1 < 1,$$

$$f(x - h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x + \theta_2 h)h^3,\ 0 < \theta_2 < 1.$$

Restando la segunda igualdad de la primera y dividiendo por $2h$, obtendremos:

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x) + \frac{1}{6}[f'''(x + \theta_1 h) + f'''(x + \theta_2 h)]h^2 =$$

$$= f'(x) + O(h^2),\ h \to 0.$$

De este modo, la razón aritmética (60.37) aproxima la derivada en un orden mejor que (60.36).

Para el cálculo aproximado de la segunda derivada en el punto x se puede proceder de la manera siguiente: calcular aproximadamente la primera derivada en los puntos x y $x + h$, por ejemplo, según la fórmula (60.36):

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h},\ f'(x + h) \approx \frac{f(x + 2h) - f(x + h)}{h};$$

entonces

$$\frac{f'(x + h) - f'(x)}{h} \approx \frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)}{h^2}.$$

La razón aritmética, que figura en el segundo miembro de la fórmula obtenida, interviene como valor aproximado de la segunda derivada en el punto x.

Cuando la función f tiene en el entorno del punto x la tercera derivada acotada, entonces al desarollar el numerador según la fórmula de Taylor, obtendremos

$$\frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)}{h^2} = f''(x) + O(h),\ h \to 0. \tag{60.38}$$

Por analogía con el caso de la primera deriv[illegible]a se [illegible]de probar (en el supuesto de que la cuarta derivada en el entorno del punto x [illegible]tada) que

$$\frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x) + O(h^2),\ h \to 0, \tag{60.39}$$

es decir, el error de la fórmula aproximada (60.39) para el cálculo de la segunda derivada es en un orden mejor que el de la fórmula (60.38).

Del modo análogo se calculan las derivadas de órdenes superiores y las derivadas parciales de las funciones de varias variables.

§ 61. PARTICIÓN DEL CONJUNTO EN CLASES DE ELEMENTOS EQUIVALENTES

Varias veces en nuestro curso hemos tropezado con el concepto de equivalencia: funciones equivalentes infinitamente pequeñas e infinitamente grandes (p. 8.3), aplicaciones equivalentes de un segmento (p. 16.2) y de una región (p. 50.1), sucesiones fundamentales equivalentes de los espacios métricos (p. 57.1), funciones equivalentes en la construcción del espacio $\widetilde{RL}_2$ (p. 57.10), etc. En todos los casos mencionados la relación de equivalencia disponía de las siguientes tres propiedades: si los elementos de un conjunto en consideración se designan mediante las letras x, y, z, ... , y los elementos equivalentes x e y, mediante el símbolo $x \sim y$, entonces:

1. Todo elemento del conjuntio en consideración es equivalente a sí mismo: $x \sim x$ (reflexividad).
2. Si $x \sim y$, entonces también $y \sim x$ (simetría).
3. Si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$ (transitividad).

Siempre se suponía sin ninguna duda que un conjunto de tales o cuales elementos en el que se ha introducido el concepto de equivalencia y que posee las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad se descompone en las clases disjuntas de elementos equivalentes. Esto es asi en realidad. Enunciemos y demostremos esta afirmación para el caso general.

Sean dados un conjunto $A = \{x, y, z, \dots\}$ y un subconjunto del conjunto de pares ordenados de sus elementos que posee las siguientes propiedades: si el par (x, y) pertenece a dicho subconjunto, los elementos x e y se llaman equivalentes y se escribe $x \sim y$, con la particularidad de que se cumplen las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad. En tal caso suele decirse que en el conjunto A se ha dado una relación de equivalencia.

Teorema. *Si en un conjunto se ha dado una relación de equivalencia, dicho conjunto es la suma de sus subconjuntos disjuntos dos a dos de los elementos equivalentes entre sí.*

DEMOSTRACÍON. Sea $A = \{x, y, z, \dots\}$ un conjunto en el cual se ha dado una relación de equivalencia. Para todo elemento $x \in A$ designemos mediante A_x el conjunto de todos los elementos del conjunto A equivalentes al elemento x. Mostremos que

$$A = \bigcup_{x \in A} A_x \tag{61.1}$$

y que la representación [illegible]el conjunto A en forma de una suma de los subconjuntos A_x es la que se bu[illegible], es decir, que los sumandos A_x son disjuntos dos a dos.

Ante todo, en virtud de que la relación de equivalencia posee la propiedad de reflexividad, para todo $x \in A$ tenemos $x \sim x$, y, por lo tanto, $x \in A_x$, es decir, todo elemento del conjunto A pertenece a cierto A_x, por lo cual

$$A \subset \bigcup_{x \in A} A_x. \tag{61.2}$$

Por otra parte, todo elemento del conjunto A_x es, debido a la propia construcción, un elemento del conjunto A. Por consiguiente, $A_x \subset A$ y por esta razón

$$\bigcup_{x \in A} A_x \subset A. \tag{61.3}$$

De las inclusiones (61.2) y (61.3) se deduce la igualdad (61.1).

Demostraremos ahora que cualesquiera dos elementos de cada uno de los conjuntos A_x son equivalentes entre sí. Efectivamente, sea $y \in A_x$, $z \in A_x$; esto significa que $y \sim x$ y $z \sim x$. Por ser simétrica la relación de equivalencia, de aquí se infiere que $x \sim z$, de donde, gracias a la transitividad, $y \sim z$.

Probemos por fin que los sumandos en el segundo miembro de la igualdad (61.1) son disjuntos dos a dos. A saber, mostremos que para cualesquiera dos elementos x' y x'' los conjuntos $A_{x'}$ y $A_{x''}$ o bien coinciden, o bien no se intersecan. En efecto, supongamos que los conjuntos $A_{x'}$ y $A_{x''}$ tengan por lo menos un elemento común: $y \in A_{x'} \cap A_{x''}$ y sea $z \in A_{x'}$. Por cuanto ya tenemos demostrado el hecho de que para todo elemento del conjunto A_x sus dos elementos cualesquiera son equivalentes, entonces $z \sim y$, $y \sim x''$, y, por ende, $z \sim x''$, es decir, $z \in A_{x''}$. El elemento z es un elemento arbitrario del conjunto $A_{x'}$, razón por la cual

$$A_{x'} \subset A_{x''}; \tag{61.4}$$

análogamente

$$A_{x''} \subset A_{x'}. \tag{61.5}$$

De (61.4) y (61.5) se sigue que

$$A_{x'} = A_{x''}.$$

De este modo, si los conjuntos $A_{x'}$ y $A_{x''}$ tienen por lo menos un elemento común, ellos coinciden; si tal elemento está ausente, los conjuntos citados son, evidentemente, disjuntos.

Así pues, la representación (61.2) posee en realidad todas las propiedades enunciadas en el teorema. ☐

§ 62*. LÍMITE SEGÚN UN FILTRO

Al estudiar el curso del análisis nos encontramos con dos conceptos de límite: el límite de una función (límite de una sucesión, como caso particular del límite citado) y el de las sumas integrales. Resulta que existe un concepto de límite más general, llamado límite según un filtro, el cual contiene en sí mismo ambos conceptos mencionados de límite como casos particulares. La existencia de tal concepto nos ofrece, por supuesto, una satisfacción estética, razón por la cual daremos a conocer en este párrafo su definición. No obstante, la introducción de este concepto no proporciona, en esencia, ventajas algunas para el estudio del análisis matemático, por lo que se explica el hecho de que dicho concepto viene al final del curso.

62.1. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Definición 1. *Supongamos que X es cierto conjunto y en él viene dado un sistema $\Omega = \{G\}$ de subconjuntos que satisfacen las siguientes condiciones:*

1°. La intersección de un número finito de conjuntos del sistema Ω pertenece a este sistema.

2°. La unión de cualquier totalidad de conjuntos del sistema Ω pertenece a este sistema.

3°. $X \in \Omega$, $\varnothing \in \Omega$.

En estas condiciones el conjunto X se llama espacio topológico, el sistema Ω lleva el nombre de su topología y los conjuntos del sistema Ω son sus subconjuntos abiertos.

Para cualquier punto $x \in X$, todo conjunto $G \in \Omega$ que contiene dicho punto se llama entorno de éste.

Si cualesquiera dos puntos de un espacio topológico tienen entornos que no se intersecan, el espacio lleva el nombre de Hausdorff).*

A título de espacio topológico de Hausdorff interviene todo espacio métrico, puesto que sus subconjuntos abiertos forman un sistema que satisface las condiciones 1°, 2°, 3° de la definición 1 (véase el p. 57.1). Existen también los así llamados espacios topológicos no metrizables (véase "Introducción a la teoría de los conjuntos y la topología general" de P.S. Alexándrov, M., 1977).

Para cualquier punto $x \in X$, todo entorno de x no es, a ciencia cierta, un conjunto vacío, puesto que contiene por lo menos un elemento, a saber, el propio punto x.

Definición 2. *Todo subsistema $\mathfrak{B}$ del sistema Ω de conjuntos abiertos de un espacio topológico recibe el nombre de base de la topología del espacio citado, siempre que cualquier conjunto abierto no vacío del espacio (es decir, un conjunto no vacío del sistema Ω) es una unión de cierta totalidad de conjuntos de $\mathfrak{B}$.*

Así por ejemplo, en un espacio métrico la base de la topología la constituye el conjunto $\mathfrak{B}$ de todos los ε-entornos de todos los puntos de este espacio. Efectivamente, cualquiera que sea el conjunto abierto no vacío G del espacio métrico dado, para todo su punto $x \in G$ existe tal $\varepsilon > 0$ que el ε-entorno de este punto está contenido en G: $U(x, \varepsilon) \subset G$. Elijamos y fijemos para todo punto $x \in G$ uno de tales entornos, entonces el conjunto G será, evidentemente, su unión:

$$G = \bigcup_{x \in G} U(x, \varepsilon).$$

*) F. Hausdorff (1868 — 1942), matemático alemán.

Ejercicio 1. Demuéstrese que en cualquier espacio métrico el conjunto de todos los ε-entornos (con ε racional) de todos los puntos de este espacio forma su base de topología.

La topología puede ser definida con ayuda de la base de topología. A saber, si $\mathfrak{B} = \{A\}$ es la base de topología Ω del espacio X, entonces, de conformidad con la definición 2, Ω es el sistema de todos los subconjuntos del espacio X, cada uno de los cuales o bien es una unión de cierta totalidad de conjuntos de $\mathfrak{B}$, o bien es vacío.

Definición 3. *El sistema $\mathfrak{B}(x)$ de entornos del punto x de un espacio topológico X se llama base local de la topología en dicho punto, si, cualquiera que sea el entorno V del punto x en el espacio X, existe tal entorno $U \in \mathfrak{B}(x)$ que*

$$U \subset V.$$

Es obvio que la totalidad de todos los entornos del punto dado forma su base local de la topología. Para cualquier punto de un espacio métrico su base local de la topología la forman también, por ejemplo, todos sus ε-entornos de radio $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

La unión de bases locales de la topología en todos los puntos forma la base de la topología de todo el espacio, pues cualquier conjunto abierto no vacío puede representarse como una unión de los entornos (pertenecientes al conjunto) de sus puntos, donde los entornos mencionados se toman de las bases locales de la topología en consideración. De este modo, la topología en un conjunto puede prefijarse definiendo las bases locales de la topología en cada uno de los puntos del conjunto.

Con ayuda del concepto de entorno para los espacios topológicos se introducen (textualmente, al igual que para los espacios métricos, véanse el p. 57.1 y p. 18.2) nociones de puntos adherente, límite y aislado, como también la de conjunto cerrado.

62.2. FILTROS

En lo sucesivo mediante $\mathfrak{B}(X)$ se designará el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto X.

Definicion 4. *Sea X un conjunto no vacío. El conjunto $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}(X)$ recibe el nombre de filtro (o, más detalladamente, filtro en el conjunto X), siempre que:*

1°. *Para cualesquiera $A' \in \mathfrak{F}$ y $A'' \in \mathfrak{F}$ existe tal $A \in \mathfrak{F}$ que*

$$A \subset A' \cap A''.$$

2°. $\varnothing \notin \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \neq \varnothing$.

De las propiedades 1° y 2° se desprende que la intersección de cualquier número finito de conjuntos pertenecientes al filtro no es vacío.

Ejemplos. 1. Sea $X \neq \varnothing$, $X \supset A_0 \neq \varnothing$. Entonces, el conjunto $\mathfrak{F} = \{A : A_0 \subset A \in \mathfrak{B}(X)$ es un filtro en X. Efectivamente, es evidente que $A_0 \notin \mathfrak{F}$, y si $A' \in \mathfrak{F}$ y $A'' \in \mathfrak{F}$, se tiene $A' \cap A'' \supset A_0 \neq \varnothing$, es decir, ambas condiciones 1° y 2° de la definición 4 quedan cumplidas.

2. Sea $x \in X$. El conjunto $\mathfrak{F} = \{A : x \in A \in \mathfrak{B}(X)\}$ es un filtro en X. Este filtro es un caso particular del filtro considerado en el ejemplo antecedente en que el conjunto A_0 se componía de un solo punto x.

3. Sea $X = N$ un conjunto de todos los números naturales y

$$A_n = \{m : m \in N, m > n\}, n \in N. \tag{62.1}$$

Entonces el conjunto A_n forma un filtro, designado por $F_N = \{A_n\}$ y llamado *filtro natural*.

Comprobemos que F_N es un filtro. En efecto, $N \in F_N$ y, por consiguiente $F_N \neq \varnothing$, todos los $A_n \neq \varnothing$, y si $m < n$, se tiene $A_n \cap A_m = A_n \in F_N$.

4. Sea de nuevo $X = N$. El sistema de subconjuntos $\mathfrak{F}_N$ del conjunto N, cada uno de los cuales es un complemento al subconjunto finito del conjunto N, forma también un filtro en N, llamado *filtro de Fréchet* y continente en si el filtro natural F_N.

Mostremos que $\mathfrak{F}_N$ es, de hecho, un filtro. Si $A \in \mathfrak{F}_N$, y $B \in \mathfrak{F}_N$, designemos mediante $n \in N$ el mayor de los números que integran el conjunto $(N \setminus A) \cup (N \setminus B)$. Tal número existe, puesto que el conjunto indicado se compone, en virtud de la definición de $\mathfrak{F}_N$, sólo de un conjunto finito de números. Entonces el conjunto $A_n \in F_N$ (véase (62.1)) está contenido en $A \cap B$. Luego, por cuanto el conjunto de números naturales N es numerable, mientras que $N \setminus A$, donde $A \in \mathfrak{F}_N$ es, por definición del conjunto $\mathfrak{F}_N$, finito, entonces $A \neq \varnothing$. Por fin, $N \in \mathfrak{F}_N$ y, por consiguiente, $\mathfrak{F}_N \neq \varnothing$. De este modo, $\mathfrak{F}_N$ es un filtro.

5. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. La base local de la topología $\mathfrak{B}(x)$ forma un filtro. En efecto, ante todo, es evidente que para cualquier entorno $U \in \mathfrak{B}(x)$ se tiene $x \in U$, y por esta razón $U \neq \varnothing$. Luego, para cualesquiera $U \in \mathfrak{B}(x)$ y $V \in \mathfrak{B}(x)$ la intersección $U \cap V$ es un conjunto abierto en el que se contiene el punto x, por lo cual, de conformidad con la definición de la base local de una topología, existe tal entorno $W \in \mathfrak{B}(x)$ que $W \subset U \cap V$.

6. Supongamos que X es un espacio topológico, x es el punto límite del espacio X, $\mathfrak{B}(x)$, la base local de la topología en este punto y $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$, un conjunto de todos los "entornos reducidos" de dicha base local de la topología, es decir, $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ se compone de los conjuntos

$$\mathring{U}(x) \stackrel{\text{def}}{=} U(x) \setminus \{x\}, \; U(x) \in \mathfrak{B}(x).$$

Bajo estas condiciones $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ forma un filtro. Efectivamente, si $\mathring{U} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$, entonces por cuanto el punto x es límite para el espacio X, existe un punto $y \in \mathring{U}$, y, por ende, $\mathring{U} \neq \varnothing$. Luego, para cualesquiera $\mathring{U} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$ y $\mathring{V} \in \mathring{\mathfrak{B}}(x)$ tenemos, de acuerdo con su definición: $\mathring{U} = U \setminus \{x\}$, $\mathring{V} = V \setminus \{x\}$, $U \in \mathfrak{B}(x)$, $V \in \mathfrak{B}(x)$. La intersección $U \cap V$ es un entorno del punto x, por lo cual existe tal entorno $W \in \mathfrak{B}(x)$ que $W \subset U \cap V$ y por esta razón $\mathring{W} = W \setminus \{x\} \subset \mathring{U} \cap \mathring{V}$. Así pues, $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ es, de hecho, un filtro.

Definición 5. *El filtro $\mathfrak{F}_1 = \{A\}$ en el conjunto X lleva el nombre de filtro más fuerte que el filtro $\mathfrak{F}_2 = \{B\}$ en el mismo conjunto, si para cualquier conjunto $B \in \mathfrak{F}_2$ existe tal $A \in \mathfrak{F}_1$ que $A \subset B$.*

Definición 6. *Si el filtro $\mathfrak{F}_1$ es más fuerte que el filtro $\mathfrak{F}_2$; y $\mathfrak{F}_2$ es más fuerte que $\mathfrak{F}_1$, los filtros $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ se denominan equivalents.*

Ejemplo 7. Sea $\mathfrak{B}(x)$ una base local de la topología del punto x de un espacio metrico, compuesta de todos sus ε-entornos, y sea $\mathfrak{B}_0(x)$ su base local de la topología que contiene sólo los entornos de radio $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Los filtros $\mathfrak{B}(x)$ y $\mathfrak{B}_0(x)$ son equivalentes.

Ejercicio 2. Demuéstrese que los filtros en los ejemplos 3 y 4 son equivalentes.

Definición 7. *El filtro $\mathfrak{F}_1$ se llama subfiltro del filtro $\mathfrak{F}_2$, si todo elemento del filtro $\mathfrak{F}_1$ es también un elemento del filtro $\mathfrak{F}_2$, es decir, si $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$.*

Es obvio que un filtro es más fuerte que cualquiera de sus subfiltros.

Definición 8. *Todo subfiltro de un filtro, equivalente al propio filtro, se denomina base del filtro.*

En el ejemplo 7 el filtro $\mathfrak{B}_0(x)$ es la base del filtro $\mathfrak{B}(x)$, mientras que el filtro natural F_N es la base del filtro de Fréchnet $\mathfrak{F}_N$, construido en el ejemplo 4.

A veces resulta cómodo considerar los filtros que satisfacen una condición adicional más.

Definición 9. *El filtro $\mathfrak{F}$ en un conjunto X se denomina completo, si de las condiciones*

$$A \in \mathfrak{F},\ B \in \mathfrak{P}(X) \text{ y } A \subset B$$

se deduce que

$$B \in \mathfrak{F}.$$

En los ejemplos 1, 2 y 4, considerados más arriba, los filtros eran completos. En el ejemplo 4 (filtro de Fréchnet) esto se deduce de lo que si $A \in \mathfrak{F}_N$ y, por consiguiente, su complemento en el conjunto de números naturales N es finito, entonces cualquier subconjunto de números naturales B, contenido en A, tiene también un complemento finito en N, pues, si $A \subset B \subset N$, entonces $N \setminus B \subset N \setminus A$.

Entre tanto, los filtros, considerados en los ejemplos 3, 5 y 6, ya no son completos. En el ejemplo 3 el filtro natural F_N no es completo, puesto que no todo subconjunto A (que contiene un conjunto del tipo A_n, véase (62.1)) del conjunto de números naturales es del mismo tipo, es decir, pertenece al filtro natural F_N. Los filtros, considerados en los ejemplos 5 y 6, no son completos, puesto que no todo conjunto, que contiene un conjunto abierto, es por sí mismo necesariamente abierto.

A veces en la literatura matemática el filtro completo se llama sencillamente filtro, mientras que el filtro en el sentido de la definición 4, base del filtro. Esto se justifica por la validez de la siguiente afirmación.

Lema 1. *Todo filtro es una base de cierto filtro completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathfrak{F} = \{A\}$ un filtro en el conjunto X. Definamos el conjunto $\mathcal{G}$ como un conjunto de todos los subconjuntos B del conjunto X de tal género que cada uno de los subconjuntos citados tenga, a título de su subconjunto, un cierto elemento del filtro $\mathfrak{F}$. Más brevemente, $B \in \mathcal{G}$ cuando, y sólo cuando, existe tal $A \subset \mathfrak{F}$ que $A \subset B$. Mostremos que $\mathcal{G}$ es un filtro completo y el filtro $\mathfrak{F}$ es la base de $\mathcal{G}$.

Si $B' \in \mathcal{G}$, $B'' \in \mathcal{G}$, entonces existen tales $A' \in \mathfrak{F}$ y $A'' \in \mathfrak{F}$ que $A' \subset B'$, $A'' \subset B''$. Por cuanto $\mathfrak{F}$ es un filtro, se encontrará tal $A \in \mathfrak{F}$ que $A \in A' \cap A''$. Al notar que $A' \cap A'' \subset B'' \cap B'$, obtendremos $A \subset B' \cap B''$, y, por lo tanto, de acuerdo con la definición de $\mathcal{G}$, el conjunto $B' \cap B''$ será su elemento: $B' \cap B'' \in \mathcal{G}$. De este modo se cumple la condición 1° de la definición 4.

Si fuera $\varnothing \in \mathcal{G}$, entonces nuevamente, por defición de $\mathcal{G}$, se encontraría tal $A \in \mathfrak{F}$ que $A \subset \varnothing$, pero en tal caso $A \neq \varnothing$, es decir, el conjunto vacío resultaría ser un elemento de $\mathfrak{F}$ que contradiría a que $\mathfrak{F}$ es un filtro. Por consiguiente, $\varnothing \in \mathcal{G}$. Además, puesto que $A \subset A$, todo conjunto $A \in \mathfrak{F}$ es también un elemento de $\mathcal{G}$, es decir, $\mathfrak{F} \subset \mathcal{G}$, y por cuanto $\mathfrak{F}$, como cualquier otro filtro, no es vacío: $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, tampoco será vacío el conjunto $\mathcal{G} : \mathcal{G} \neq \varnothing$. De este modo, $\mathcal{G}$ satisface todas las condiciones de la definición 4, es decir, es un filtro. Su completitud también se deduce inmediatamente de la definición de este filtro. En efecto, si $B \in \mathcal{G}$, entonces existe tal $A \in \mathfrak{F}$, que $A \subset B$. Por eso, para cada conjunto B' tal que $B \subset B' \subset X$ será válida tambien la inclusión $A \subset B'$ la que significa precisamente que $B' \in \mathcal{G}$.

Por fin, $\mathfrak{F}$ es la base del filtro completo $\mathcal{G}$. Efectivamente, por un lado, como ya se ha señalado, $\mathfrak{F} \subset \mathcal{G}$, es decir, el filtro $\mathfrak{F}$ es un subfiltro de $\mathcal{G}$; mientras tanto, se ha notado anteriormente que todo filtro es más fuerte que cualquiera de sus subfiltros. Por otra parte, la definición del filtro $\mathcal{G}$ significa precisamente que el filtro $\mathfrak{F}$ es más fuerte que el $\mathcal{G}$: cualquiera que sea $B \in \mathcal{G}$, existe un $A \in \mathfrak{F}$ tal que $A \subset B$ (véase la definición 5). Así pues, los filtros $\mathfrak{F}$ y $\mathcal{G}$ son equivalentes. □

Lema 2. *Sea $\mathfrak{F}_1$ un filtro en el conjunto X_1 y sea $\mathfrak{F}_2$ un filtro en el conjunto X_2 y*

$$\mathfrak{F} \overset{\text{def}}{=} \{C : C = A \times B, A \in \mathfrak{F}_1, B \in \mathfrak{F}_2\}; \tag{62.2}$$

en este caso $\mathfrak{F}$ es un filtro sobre el producto $X_1 \times X_2$ de los conjuntos X_1 y X_2.

El filtro $\mathfrak{F}$ definido por la igualdad (62.2) se llama **producto** de los filtros $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$. Si $\mathfrak{F}$ es un producto de los filtros $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$, se escribe $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $C_1 \in \mathfrak{F}_1$ y $C_2 \in \mathfrak{F}_2$, entonces, de acuerdo con la definición (62.3), existen tales $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_1$ y $B_1 \in \mathfrak{F}_2$, $B_2 \in \mathfrak{F}_2$, que $C_1 = A_1 \times B_1$ y $C_2 = A_2 \times B_2$. Por cuanto $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ son filtros, se encontrarán tales $A \in \mathfrak{F}_1$ y $B \in \mathfrak{F}_2$ que

$$A \subset A_1 \cap A_2, B \subset B_1 \cap {}_2. \tag{62.3}$$

En virtud de la misma definición (62.2) : $A \times B \in \mathfrak{F}$, además de (62.3) se deduce que

$$A \times B \subset (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2),$$

pues, si $(x, y) \in A \times B$, se tiene $x \in A$, $y \in B$. Por consiguiente, en virtud de (62.3), $x \in A_1 \cap A_2$, $y \in B_1 \in \cap B_2$, por lo cual $(x, y) \in A_1 \times B_1$ y $(x, y) \in A_2 \times B_2$, es decir,

$$(x, y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2).$$

Por fin, todo $C = A \times B \neq \varnothing$, $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$, pues, de conformidad con la definición del filtro, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. De lo que $\mathfrak{F}_1 \neq \varnothing$ y $\mathfrak{F}_2 \neq \varnothing$, se infiere que también $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \neq \varnothing$.

De este modo, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ satisface la definición del filtro. □

Lema 3. *Sean X e Y unos conjuntos, $f : X \to Y$, la aplicación de X en Y y $\mathfrak{F} = \{A\}$, un filtro en el conjunto X. Entonces la totalidad de todas las imágenes $f(A)$ de los conjuntos, pertenecientes a $\mathfrak{F}$, es un filtro en el conjunto Y.*

El filtro $\{f(A)\}$, $A \in \mathfrak{F}$, *se denomina imagen del filtro* $\mathfrak{F}$ *en la aplicación* f *y se designa mediante*

$$f(\mathfrak{F}) = \{f(A)\}, A \in \mathfrak{F}. \tag{62.4}$$

Demostremos que $f(\mathfrak{F})$ es realmente un filtro. Sea $f(A) \in f(\mathfrak{F})$, $f(B) \in f(\mathfrak{F})$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$. En este caso existe tal elemento C del filtro $\mathfrak{F}$: $C \in \mathfrak{F}$, que $C \subset A \cap B$. Por cuanto $f(C) \subset f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, y, además, por definición del sistema $f(\mathfrak{F})$ tenemos $f(C) \in f(\mathfrak{F})$, entonces la primera condición de la definición de filtro (véase la definición 4) queda cumplida. La segunda condición está también cumplida, dado que $f(\mathfrak{F})$ se compone sólo de los elementos del tipo $f(A)$, donde $A \in \mathfrak{F}$. Por consiguiente, $f(A) \neq \varnothing$, puesto que $A \neq \varnothing$. Por fin, de lo que $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, se deduce que también $f(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$. □

62.3. LÍMITE DE UN FILTRO

Definición 10. *Sea* X *un espacio topológico,* $x \in X$ *y sea* $\mathfrak{F}$ *un filtro en* X. *El punto* x *se llama límite del filtro* $\mathfrak{F}$ *o su punto límite, si el filtro* $\mathfrak{F}$ *es más fuerte que* $\mathfrak{B}(x)$ *que constituye una base local de la topología en este punto.*

Si el punto x es límite del filtro $\mathfrak{F}$, se escribe

$$x = \lim \mathfrak{F}.$$

Ejemplos. Sea $X = N$ un conjunto de todos los números naturales que se considera, como siempre, con una topología discreta: todo punto $n \in N$ se entiende como conjunto abierto (en otras palabras, cualquier punto es aislado), entonces el filtro natural F_N (véase el ejemplo 3 en el p. 62.2) no tiene límite en N.

Efectivamente, ningún número $n \in N$ es un límite del filtro F_N, pues para cualquier número $n_0 \in N$ existe una base local de la topología compuesta sólo de este número n_0 y no existe $A \in F_N$, contenido en el conjunto de un solo punto $\{n_0\}$, por cuanto todo $A \in F_N$ contiene una infinidad de elementos. De este modo, el filtro F_N no es más fuerte que la base local de la topología de cualquier número $n_0 \in N$.

2. Sea $X = N \cup \{+\infty\}$, es decir, el conjunto X se ha obtenido por adición de un "punto infinito" $+\infty$ al conjunto de los números naturales N, con la particularidad de que la base local de la topología $\mathfrak{B}(+\infty)$ se compone de toda una serie de conjuntos A_n (véase (61.1)), mientras que las bases locales $\mathfrak{B}(n)$, $n \in N$, están compuestas (como hasta ahora) por el único punto n. La base de la topología en X se define como una unión de bases locales de todos sus puntos.

En el espacio $N \cup \{+\infty\}$ el filtro natural F_N tiene por límite $+\infty$. En efecto, para cualquier entorno $A_n \in \mathfrak{B}(+\infty)$ a título de elemento $A \in F_N$ tal que $A \subset A_n$ (véase la definición 10) puede tomarse el propio elemento A_n, pues $A_n \subset F_N$.

Problema 44. Demuéstrese que para que todo filtro de un espacio topológico tenga no más de un límite, es necesario y suficiente que el espacio sea de Hausdorff.

Teorema 1. *Para que el punto* x *sea un límite del filtro* $\mathfrak{F}$ *del espacio topológico* X, *es necesario que este punto sea un límite de cada su base y suficiente que dicho punto sea un límite por lo menos de una base del filtro.*

DEMOSTRACIÓN DE LA NECESIDAD. Supongamos que un subfiltro $\mathfrak{F}_0$ es la base del filtro $\mathfrak{F}$ del espacio X y

$$x = \lim \mathfrak{F},$$

es decir, el filtro $\mathfrak{F}$ es más fuerte que la base local de la topología $\mathfrak{B}(x)$ en el punto x. Esto significa que para cualquier entorno $U \in \mathfrak{B}(x)$ existe tal $A \in \mathfrak{F}$ que $A \subset U$. Por cuanto $\mathfrak{F}_0$ es una base del filtro $\mathfrak{F}$, para $A \in \mathfrak{F}$ citado se encontrará tal $B \in \mathfrak{F}_0$ que $B \subset 2A$, y, por consiguiente, $B \subset U$, es decir, el cubfiltro $\mathfrak{F}_0$ es también más fuerte que la base local de la topología $\mathfrak{B}(x)$, por lo cual $x = \lim \mathfrak{F}_0$.

DEMOSTRACIÓN DE LA SUFICIENCIA. Supongamos que el subfiltro $\mathfrak{F}_0$ del filtro $\mathfrak{F}$ es una base del filtro y $x = \lim \mathfrak{F}_0$, a sea $\mathfrak{F}_0$ es más fuerte que la base local de la topología $\mathfrak{B}(x)$, entonces, el propio filtro $\mathfrak{F}$ es con mayor razón más fuerte que $\mathfrak{B}(x)$, pues cada elemento de un subfiltro es a la vez, un elemento del filtro. Por consiguiente, $x = \lim \mathfrak{F}$. □

62.4. LÍMITE DE LA APLICACIÓN SEGÚN UN FILTRO

El concepto general de límite se da por la siguiente definición.

Definición 11. *Sean* X *un cierto conjunto,* Y *un espacio topológico,* $f: X \to Y$ *la aplicación de* X *en* Y, f *un filtro en* X.

El punto $b \in Y$ *se llama límite de la aplicación* f *según el filtro* $\mathfrak{F}$ *y se escribe*

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = b,$$

siempre que el filtro $f(\mathfrak{F})$ *tiene como su límite en el espacio* Y *el punto* b.

De este modo,

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim (\mathfrak{F}). \tag{62.5}$$

Ejemplos. 1. Sea $X = N$ un conjunto de todos números reales, Y un espacio topológico, $f: N \to Y$, $y_n \overset{\text{def}}{=} f(n)$, $n \in N$, y supongamos que F_N es el filtro natural construido en el ejemplo 3, del p. 62.2, es decir, F_N se compone de los conjuntos (62.1). En este caso el límite de la aplicación f según el filtro F_N coincide con el límite ordinario de la sucesión $\{y_n\}$ en Y. En efecto, la condición $\lim_{F_N} f(n) = b$ es equivalente, de acuerdo con (62.5), a la condición $\lim f(F_N) = b$, donde $f(F_N) = \{f(A_n)\}, f(A_n) = \{y_m : m > n\}$. El hecho de que el límite del filtro $f(F_N)$ es igual al punto b es indicio de que para cualquier entorno $U \in \mathfrak{B}(b)$, donde $\mathfrak{B}(b)$ es una base local de la topología en el punto b, existe un elemento $f(A_{n_0})$, contenido en U, del filtro $f(F_N)$: $f(A_{n_0}) \subset U$. Por cuanto para $n > n_0$ se cumple la inclusión $n \in A_{n_0}$, y, por ende, también la inclusión $y_n = f(n) \in f(A_{n_0})$, entonces para $n > n_0$ tiene lugar la inclusión $y_n \in U$. Esto significa precisamente que $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$.

2. Sean $X = N \times N$, F_N un filtro natural, $\mathfrak{F} = F_N \times F_N$ (véase (62.2)), Y un espacio topológico, $f: N \times N \to Y$, $y_{mn} \overset{\text{def}}{=} f(m, n)$, $m \in N$, $n \in N$; en este caso el límite $\lim_{\mathfrak{F}} (m, n)$ coincide con el límite ordinario de la sucesión doble $\{y_{mn}\}$: el punto b se llama límite $\lim\limits_{(m,n) \to \infty} y_{mn}$ de la sucesión $\{y_{mn}\}$, si para cualquier entorno U del punto b existen tales m_0 y n_0 que para $m > n_0$ y $n > n_0$ se cumple la inclusión $y_{mn} \in U$. De este modo,

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(m, n) = \lim_{(m,n) \to \infty} y_{mn}.$$

3. Supongamos que E es un conjunto medible según Jordan en R^n, τ es una partición de este conjunto: $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$, $\xi_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Supongamos, ade-

más, que los elementos del conjunto X los constituyen, a su vez, toda clase de conjuntos del tipo

$$x = \{\tau\varepsilon, \xi_1, \dots, \xi_k\}. \tag{62.6}$$

Para todo $\eta > 0$ designemos mediante A_η un subconjunto del conjunto X que se compone de todos aquellos elementos x, para los cuales las finuras δ_τ de las particiones τ que las integran son inferiores a η, es decir, $\delta_\tau < \eta$.

El sistema $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ es un filtro en X.

Toda función real $f: E \to \boldsymbol{R}$ engendra una aplicación $\varphi_f: X - \boldsymbol{R}$ según la fórmula

$$\varphi_f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\mu E_i,\ x = \{\tau, \xi_1, \dots, \xi_k\}.$$

De este modo, $\varphi_f(x)$ es un valor de la correspondiente suma integral de Riemann de la función f.

El límite de la aplicación $\varphi_f: X \to \boldsymbol{R}$ según el filtro $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ coincide con el límite ordinario de las sumas integrales de Riemann de la función f, a condición de que las finuras de las particiones en consideración tienden a cero:

$$\text{lím}_{\mathfrak{F}}\varphi_f(x) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\mu E_i.$$

4. Supongamos que X e Y son unos espacios topológicos, $f: X \to Y$, $a \in X$ y $\mathfrak{F}$ es un filtro de tal género en X que lím$\mathfrak{F} = a$ (es decir, el filtro $\mathfrak{F}$ es más fuerte que cierta base local de la topología $\mathfrak{B}$ (a) en el punto a).

El límite $\lim_{\mathfrak{F}}(x)$ en este caso se denominá *límite de la aplicacion f según el filtro $\mathfrak{F}$ en el punto a.*

Elegidos adecuadamente los filtros $\mathfrak{F}$, se obtendrán, en particular, los límites en un punto dado según diferentes conjuntos. Por ejemplo, si el filtro $\mathfrak{F}$ se compone de los entornos de cierta base local de la topología $\mathfrak{B}(a)$ del punto a, entonces la existencia del límite $\text{lím}_{\mathfrak{F}} f(x)$ en el punto a según tal filtro significa la continuidad de la aplicación f en el punto a, con la particularidad de que $\text{lím}_{\mathfrak{F}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si el punto a es un punto límite del conjunto X, mientras que el filtro $\mathfrak{F}$ se compone de los entornos reducidos de cierta base local de la topología en este punto (véase el ejemplo 6 en el p. 62.2), entonces $\text{lím}_{\mathfrak{F}} f(x)$ coincide con el límite habitual $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Ha de notarse que antes el símbolo $x \to a$ no tenía para nosotros un sentido individual: toda la designación $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ se consideraba en total. Ahora, al final del curso, vemos que el símbolo $x \to a$ puede considerarse como designación del filtro $\mathring{\mathfrak{B}}(a)$ o del filtro $\mathfrak{B}(a)$, según el cual se toma el límite de una aplicación (en el primer caso se obtendrá la definición ordinaria del límite de una aplicación en el punto a, en el segundo caso, la definición de su contunuidad en dicho punto).

Así pues, todos los conceptos de límite con los que nos hemos enfrentado anteriormente son, de hecho, los casos particulares del límite de una aplicación según un filtro.

Índice alfabético de materias

Aditividad de la medida 126
Aplicación 52
— continua 53, 54, 58, 514
— derivable 67, 74
— inversa 58
— isomorfa 425, 438, 487
— lineal 61
— localmente homeomorfa 76
— natural 460
— regular 242
— uniformemente continua 56
— vectorial 60
Aproximación 478, 480
Área (medida) de la superficie 255
Axiomas de distancia 411
— — Fréchet 511

Base de la topología 563, 564
— del espacio 424, 427
Borde de la superficie 237

Campo escalar 276
— vectorial 276
— — potencial 279, 297, 300
— — solenoidal 295, 300
Cápsula lineal del conjunto 423
Cinta (banda) de Möbius 262, 263
Circulación 278, 281, 290
Coeficientes de Fourier 348, 364, 380, 392, 479, 480
— del desarrollo del elemento 445
Complementos ortogonales 108
Completación del espacio 417, 453, 465
Condición clásica de Hölder 369
— de Lipschitz 369
Conjunto acotado 437
— cuadrable 119
— cubicable 119
— denso en el espacio 416, 443, 465
— medible según Jordan 118
Constante de encaje 475
Contorno de frontera 205
— exterior 205
— interior 206
— que limita la superficie 290
— suave a trozos 210
Convergencia en media 436
Convolución de las funciones 408, 410
Coordenadas 445
— curvilíneas 187
— cilíndricas 191
— esféricas 191, 228
Criterio de Cauchy 24, 311
— — comparación 227, 361
— — convergencia uniforme de las integrales 312
— — Darboux 157
— — Dini 362
— — la diferencial total en una región conexa 220
— — Riemann 157
— — Weierstrass 310
Curva de Peano 133
— suave 196

Dependencia de un sistema de funciones 91
Derivada de la aplicación 68
Desarrollo asintótico 338
Desigualdad de Bessel 381, 481
— — Cauchy—Buniakovski 448

— — — Schwarz 446
— generalizada de Minkowski 172
— triangular 426
Desviación estándar 379
Determinante de Gram 469
— — Jacobi 43, 72
— — Vandermonde 548
Difeomorfismo 74
Diferencia de los elementos 422
Diferencial de la aplicación 68
— — — función 67
Divergencia 278, 281, 289

Ecuaciones de conexión (enlace) 97
Elemento del área 256
Elementos equivalentes 439, 449
— ortogonales 468
Encaje del espacio 475
— natural 464
Equivalencia entre las sucesiones 417
Espacio completo 415
— con convergencia 511
— conjugado 513
Espacio de Banach 441
— — dimensión finita 424
— — — infinita 426
— — funciones generalizadas 518, 525
— — Hausdorff 563
— — Hilbert 452, 477
— funcional 467
— lineal 422
— — complejo 422
— métrico 412
— normalizado 426
— — completo 441
— seminormalizado 426
— topológico 563
Extremo 27, 98
— condicionado 98

Factor de convergencia 324
Filtro 564, 565
— completo 566
— de Fréchet 565
— natural 565
Finura de la partición 134
Flujo del campo vectorial a través de la superficie 280, 301
Folio de Descartes 85
Forma métrica principal del espacio 251
Fórmula de cuadratura 550, 553
— — Green 203, 206, 207, 223
— — incrementos finitos de Lagrange 19
Fórmula de Lagrange 19
— — inversión 401
— — las parábolas 551
— — los rectángulos 551
— — — trapecios 551, 552
— — Ostrogradski—Gauss 285—289
— — Simpson 551, 552
— — Sojotski 520
— — Stirling 338
— — Stokes 290—295
— — Taylor 11, 12, 15, 19, 537—540
Frontera suave a trozos 210
Función absolutamente integrable 331, 345
— armónica 97
— beta 325
— característica 351
— de Heaviside 509, 522
— — Lagrange 102
— delta 506, 517
— escalonada finita 352, 497
— finita 351, 352, 497
— gamma 325
— generalizada 516, 519—524
— implícita 36
— incompleta 342
— integrable 136, 223
— localmente integrable 516
— *T*-periódica 349
Funcional 63, 510, 512
— lineal 63
Funciones coordenadas 52, 60

Geometría interior de la superficie 252
Gradiante de la función 248, 276
— del vector 277

Homeomorfismo 58, 76, 260
— de pegamiento 260
— — — conexo 261
Homogeneidad de la norma 426

Identificación 417, 439, 452
Igualdad de Parseval 383, 483, 484, 492, 493
Integral convergente 307, 344
— curvilínea de primera especie 193
— — — segunda especie 196
— de Darboux 153
— — Dirichlet 356, 396
— — Euler de primera especie (función beta) 325

— — — — segunda especie (función gamma) 325
— — Fourier 393
— — Laplace 404
— — Poisson 227
— — Riemann 136
— — superficie 267—275
— dependiente del parámetro 161, 301, 306
— impropia 224, 307, 330
— reiterada 161
— uniformemente convergente 308, 344
Isomorfismo 425

Jacobiano (determinante de Jacobi) 43, 72

Límite de la aplicación según un filtro 569
— — la sucesión de puntos 415, 511
— — un filtro 568
Linealidad de la transformación de Fourier 402
Líneas coordenadas 188

Matriz de Jacobi 43, 71, 91
— del operador lineal 62
Método de introducción del factor de convergencia 324
— — horquilla 547
— — las cuerdas 542
— — — tangentes (de Newton) 542, 545, 548
— — medias aritméticas 371
Medida de Jordan 118
Métrica (distancia) 413, 439
Multiíndice 18
Multiplicación escalar 445, 493
— semiescalar 445, 493
Multiplicadores de Lagrange 102

Norma 65, 426, 430, 431, 433
Normal exterior 266
— interior 266
Núcleo de Dirichlet 356
— — Fejer 371
— — la aplicación 425
Notación compleja de la integral de Fourier 400
— — — las series de Fourier 392
Nudos 554
— de interpolación 548
Números de Bernoulli 343

Operador 61
— acotado 432, 433
— continuo 514
— de Laplace 87, 223
— lineal 61, 433, 436
Orientación de la superficie 258, 264
— — — frontera 202, 206
— del borde de una superficie 265
— — contorno 202
— negativa 258
— positiva 258
Ortogonalidad 346, 468

Paralelogramo coordenado (curvilíneo) 189
Partición de la superficie 272
— del conjunto 134
Pesos 554
Plano tangente 246
Polinomio de interpolación 548, 550
— — Lagrange 549
— — Taylor 16
— trigonométrico 376
Polinomios de Legendre 470, 476
Portador de la función 351
— — — superficie 241
Potencial 276, 345
— newtoniano 345
Principio de localización 359
Producto escalar 446
— semiescalar 446
Prolongación de la función 20, 349
— — — funcional 513
Propiedad de monotonía 120
Punto autoadherente 85
— de contorno 241
— — extremo 27
— — la superficie 238, 241
— — máximo estricto 26
— — mínimo estricto 26
— — retroceso 85
— estacionario 29
— interior 241
— límite 241
— múltiple 85, 238, 241
— regular 360
— singular 77, 348
— — de la función 348

Reflexividad 561
Región elemental 286
— simplemente conexa 216, 297

Relación de equivalencia 457, 561
Representación coordenada 240
— de la superficie 237
— paramétrica 237
— vectorial 240
Rotor 278, 281, 294

Seminorma 426, 447
Serie asintótica 338
Serie convergente 444
— de Fourier 348, 362, 364, 368, 384, 389—393, 480
— — Leibniz 368
— — Stirling 343
— — Taylor 26, 537
— trigonométrica 346, 349
Símbolo de Kronecker 424
Simetría 561
Sistema cerrado 486
— completo 379, 445, 475
— linealmente dependiente 469
— — independiente 468
— ortogonal 468
— ortonormalizado 468
Subespacio 414, 423
— tendido sobre los vectores 108
Subfiltro 566
Sucesión acotada 437
— asintónica 338
— convergente 414, 436, 510, 515
— en delta 510, 519
— fundamental 415, 440
Sucesiones equivalentes 417
Suma de Darboux 144
— — Fejer 371
— — Fourier 355, 357
— — la serie 444
— integral de Riemann 135, 199
— parcial de Fourier 357
— — — *n*-ésimo orden 523
Superficie 237, 240
— continua 237
— dada implícitamente 244
— derivable 238, 243
— no orientable (unilateral) 264, 266
— orientable (bilateral) 262, 266
— orientada 259, 265
— suave 250
— — a trozos 262, 266

Teoremas de encaje 435
Término residual de la fórmula de Taylor 12, 15
— — — — interpolación 549
Transformación de Fourier 401, 403, 407, 504, 526
— inversa de Fourier 401, 403
Transitividad 561

Valor principal de la integral 399

Indice de nombres

Banach S. 441, 477
Bernoulli J. 343
Bessel F. 381, 382, 481
Buniakovski V. Ya. 448

Cantor G. 56
Cauchy A. L. 53, 66, 311, 383, 446, 447, 450, 482, 490
Cramer G. 51

Darboux G. 144, 152
Dini U. 362
Dirac P. A. 506, 510
Dirichlet L. P. G. 167, 328, 355, 356, 357, 358

Euler L. 325, 328

Fejer L. 371, 374
Fourier J. B. 346—376, 380—394, 400—412, 477—497, 526, 527—535
Frécnet M. R. 511

Gauss C. F. 285
Gram J. P. 469
Green G. 203, 206, 207, 223
Guldin P. 236

Hardy G. H. 173
Hausdorff F. 563
Heaviside O. 509, 522
Heine H. E. 53
Helmholtz H. 300
Hilbert D. 452, 477, 490
Hölder O. 368—370, 398, 435, 490

Jakobi K. G. J. 43, 71, 72, 91
Jordan C. 118, 130, 223, 225, 414

Kronecker L. 424

Lagrange J. L. 11, 19, 94, 101, 304, 331, 537, 549, 557
Laplace P. S. 87, 223, 403, 404
Lebesgue H. L. 360, 434, 466
Legendre A. M. 470—472, 476, 486
Leibniz v. G. W. 207, 304, 322, 509
Lipschitz R. 369
Littlewood J. E. 173
L'Hospital G. de 332, 339

Minkowski H. 172, 427, 434
Möbius A. F. 262, 266

Newton I. 207, 322, 345, 509, 542, 545
Nikolski S. M. 466, 553

Ostrogradski M. V. 285

Parseval M. A. 383, 483, 484, 492, 493
Peano J. G. 14, 133
Pitágoras 483
Plancherel M. 502
Poisson S. D. 227
Polya G. 173

Riemann B. 135, 223, 331, 434
Rolle M. 81, 331, 549

Schwarz K. H. 66, 386, 446, 447, 450, 490
Schwarz L. 511
Simpson T. H. 551, 552, 556, 559
Sóbolev S. L. 511
Sojotski Yu. V. 520
Stirling J. 338, 343
Stokes G. G. 290
Sylvester J. J. 32

Taylor B. 11, 12, 537—540, 557

Vandermonde A. 548

Weierstrass K. 29, 56, 310, 376, 398, 429, 476