

# **Ecuaciones diferenciales implícitas**

Ana Margarita Guzmán  
Facultad de Ciencias, UNAM

15 de marzo de 1995

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
1.1	Enfoque clásico. . . . .	2
1.2	El espacio de 1-jets. . . . .	3
1.3	Sistemas de ecuaciones como variedades, y sus soluciones geométricas. . . . .	4
1.4	El trabajo de Rabier. . . . .	5
<b>2</b>	<b>Las ecuaciones <math>f \dot{z} = H</math></b>	<b>8</b>
2.1	Equivalencia . . . . .	8
2.2	El caso más sencillo. . . . .	9
2.3	Los conjuntos $S^l$ . . . . .	11
2.4	Los operadores $S$ y los puntos singulares k-regulares. . . . .	13
2.5	Genericidad . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Ecuaciones diferenciales implícitas.</b>	<b>22</b>
3.1	Acerca de la relación de equivalencia. . . . .	22
3.2	Puntos doblez . . . . .	26
3.2.1	La forma normal y las curvas integrales . . . . .	27
3.2.2	Complejidad de la estructura de las curvas integrales . . . . .	32
3.3	Puntos cúspide. . . . .	39
3.3.1	La forma normal . . . . .	39
3.3.2	Curvas integrales y su relación con $\hat{E}$ . . . . .	45
<b>A</b>	<b>Deformaciones versales</b>	<b>58</b>
A.1	Genericidad. . . . .	65
<b>A</b>	<b>Curvas (3-4) y mapeos doblez y cúspide.</b>	<b>70</b>
A.1	Curvas (3-4) . . . . .	70
A.2	Mapeos doblez y cúspide . . . . .	74
	<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Enfoque clásico.

Clásicamente un sistema de ecuaciones diferenciales lo podemos representar de la forma

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

en este trabajo tomaremos  $\mathbf{F} \in C^\infty$ .

Se dice que una función  $\mathbf{x}$ , definida en un intervalo, es solución al sistema de ecuaciones si se cumple que para toda  $t$  en ese intervalo  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{0}$ .

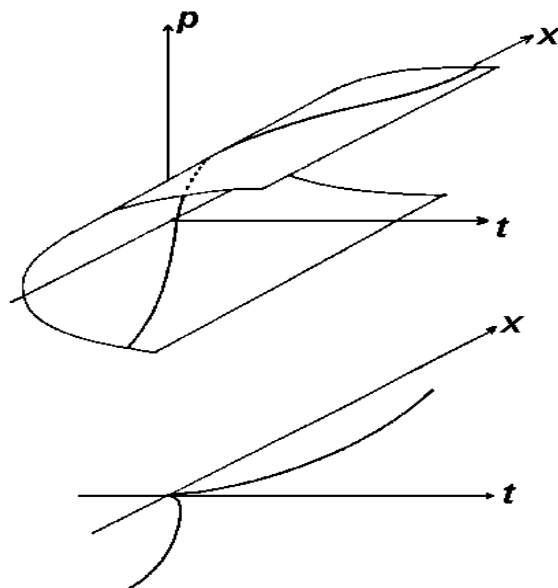
Si de la ecuación (1.1) se puede despejar  $\mathbf{p}$  como una función suave que depende de  $(t, \mathbf{x})$ , tendremos que hay una única solución al sistema que cumple condiciones iniciales dadas. Esto lo podemos garantizar localmente, si el rango de la matriz formada por las parciales de  $\mathbf{F}$  con respecto a las coordenadas de  $\mathbf{p}$  es máximo. A esta matriz la denotaremos por  $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}$ .

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento de las posibles soluciones en el caso en que no podamos aplicar el teorema de existencia y unicidad. Diremos que un sistema es *singular* en el punto  $(t_o, \mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$  si el rango de  $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}(t_o, \mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$  no es máximo. En estos términos lo que estudiaremos son los sistemas singulares.

Un ejemplo sencillo es el dado por la ecuación

$$p^2 - t = 0$$

Como la definición clásica de solución no permite incluir funciones que no sean diferenciables, tenemos que este ejemplo no tiene ninguna solución que cumpla que  $x(0) = 0$ .



Sin embargo la curva  $9x^2 - 4t^3 = 0$  es una integral de la ecuación. Notese que ésta no es una curva lisa, sin embargo se puede ver como la proyección de una curva lisa construida de la siguiente manera: consideremos la función  $x(t) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$ .  $x$  y  $-x$  definidas en  $R^+$  son soluciones a la ecuación diferencial. Las imágenes de las curvas parametrizadas por:  $t \mapsto (t, \pm x(t), \pm \dot{x}(t))$  completadas por el cero forman una 1-variedad (suave) en  $R^3$  cuya proyección a sus dos primeras coordenadas es la curva integral mencionada.

Es común en sistemas de ecuaciones singulares que ocurra este fenómeno, esa es una de las razones por las cuales se ha desarrollado un enfoque más moderno bajo el cual se trabaja en el espacio de 1-jets.

## 1.2 El espacio de 1-jets.

El espacio de m-jets de aplicaciones de  $R$  a  $R^n$ , que denotaremos por  $J^m$ , se define como el espacio de n-adas de polinomios de grado menor ó igual a m.

Dado una aplicación de  $R$  a  $R^n$  y un punto de su dominio, se le asocia un elemento de  $J^m$  haciendole corresponder las n-adas de sus polinomios de Taylor de orden m centrados en dicho punto. A este elemento de  $J^m$  se le denomina el m-jet de la aplicación en el punto dado. El m-jet de una aplicación es la curva formada por los m-jets de la aplicación en todos los puntos de su dominio.

El m-jet de una aplicación es una curva especial en  $J^m$ , o sea, no cualquier curva en  $J^m$  es un m-jet de una aplicación, para caracterizar a las que si lo son se construye la estructura de contacto natural de  $J^m$ . [7] Aquí solo lo haremos para el caso  $m=1$ .

Para facilitar esta construcción le daremos coordenadas a  $J^1$  asociando a cada n-ada de polinomios  $\mathbf{x}_o + \mathbf{p}_o(t - t_o)$  el punto  $(t_o, \mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$  de  $R^{2n+1}$ .

Consideremos las 1-formas en  $J^1$  definidas por  $\alpha_i = dx_i - p_i dt$  y denotemos por  $K_i$  a su nucleo respectivo y por  $K$  a la intersección de éstos. La estructura de contacto natural de  $J^1$  es el campo de  $n+1$ -planos en  $T(J^1)$  determinado por  $\mathbf{z} \mapsto K(\mathbf{z})$ .

Se dice que una variedad es una integral de esta estructura si su espacio tangente en  $\mathbf{z}$  está contenido en  $K(\mathbf{z})$ .

En estos términos podemos dar una caracterización de los 1-jets de aplicaciones como las integrales de esta estructura cuya proyección a  $J^o$  es una inmersión.

### 1.3 Sistemas de ecuaciones como variedades, y sus soluciones geométricas.

Con las siguientes definiciones se busca expresar los conceptos de ecuación diferencial y de solución dentro del espacio de 1-jets.

**Definición:** Una *ecuación diferencial*<sup>1</sup> es una  $n+1$ -variedad  $E$  contenida en  $J^1$ .

Nótese que se pide que la dimensión de  $E$  sea  $n+1$  para que la ecuación no esté "sobredeterminada" ni "subdeterminada". En este caso tenemos que  $E$  se puede expresar localmente como los ceros de una submersión  $\mathbf{F} : J^1 \rightarrow R^n$ .

**Definición:** Una *solución geométrica*  $\mathcal{C}$ , a una ecuación diferencial  $E$ , es una curva integral de la estructura de contacto natural de  $J^1$  contenida en  $E$ .

La definición de solución geométrica, abarca en cierto sentido a las soluciones clásicas, puesto que el 1-jet de cualquier solución clásica es una solución geométrica, pero

---

<sup>1</sup>Por brevedad, bajo este término incluiremos también a los sistemas de ecuaciones diferenciales.

además incluye a curvas en  $J^1$  que sean la cerradura de la unión de 1-jets de soluciones clásicas. Esta definición permite hablar de soluciones que pasan por puntos singulares.

**Definición:** Una *curva integral* de una ecuación es la proyección a  $J^0$  de una solución geométrica de la ecuación.

En este trabajo solo vamos a estudiar el comportamiento de algunas ecuaciones diferenciales singulares, de hecho las más sencillas. La primera hipótesis que vamos a pedir es que la estructura de contacto restringida a  $E$  nos de un campo de líneas, esto garantiza que las soluciones geométricas sean curvas suaves y que por cada punto de  $E$  pase una y solo una solución geométrica. Precizando ésto, hacemos la siguiente

**Hipótesis:** En este trabajo  $E$  será una ecuación diferencial que cumpla que  $\dim[T_z E \cap K(\mathbf{z})] = 1$  para todo  $\mathbf{z} \in E$ . Esto equivale a que  $T_z E \not\wedge K(\mathbf{z})$ .

## 1.4 El trabajo de Rabier.

Rabier [10] aborda el problema de describir el comportamiento local de las soluciones a sistemas de la forma (1.1) en la cercanía de los puntos singulares mas sencillos.

El método que sigue Rabier, parte de la observación de que el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1 \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{p} \\ d\mathbf{F}(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde  $\mathbf{z} = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  tiene como soluciones clásicas a funciones cuya imagen es el 1-jet de una solución clásica de la familia de ecuaciones  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{c}$ .

Utilizando las dos primeras igualdades de (1.2) la tercera se puede expresar como:

$$\mathbf{F}_p \dot{\mathbf{p}} = -(\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_x \mathbf{p})$$

donde  $\mathbf{F}_p$ ,  $\mathbf{F}_x$  y  $\mathbf{F}_t$  son las submatrices correspondientes de la matriz jacobiana de  $d\mathbf{F}$ .

Por otro lado, se tiene que la matriz adjunta,  $A^*$  de una matriz  $A$ , definida como la transpuesta de la matriz de cofactores, cumple que  $A^*A = \det(A)I = AA^*$ . Aplicando

esta propiedad se tiene que, si  $f$  no se anula en ningún abierto, la ecuación anterior equivale a:

$$f\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{F}_p^*(\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_x\mathbf{p})$$

donde  $f = \det \mathbf{F}_p$ .

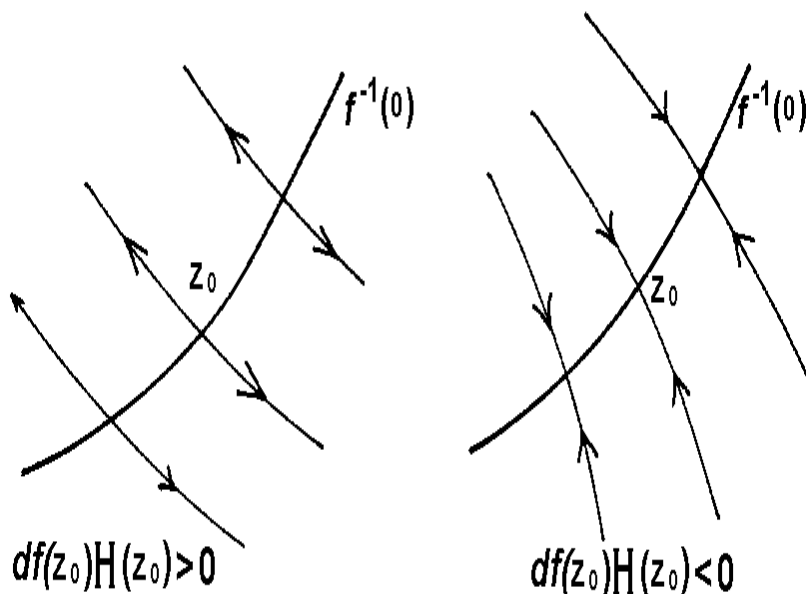
Con esto se obtiene que el sistema (1.2) se puede expresar de la forma:

$$f(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}(\mathbf{z}) \quad (1.3)$$

donde

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{z}) \\ f(\mathbf{z})\mathbf{p} \\ -\mathbf{F}_p^*(\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_x\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad y \quad f(\mathbf{z}) = \det \mathbf{F}_p(\mathbf{z}) \quad (1.4)$$

Posteriormente en el mismo trabajo, Rabier se plantea estudiar los sistemas en general de la forma (1.3), o sea que no necesariamente cumplan (1.4). Él llega a describir el comportamiento de las soluciones en la cercanía de lo que llama un punto *singular estandar*, o sea un punto  $\mathbf{z}_0$ , que cumple que  $f(\mathbf{z}_0) = 0$  y  $df(\mathbf{z}_0)\mathbf{H}(\mathbf{z}_0) \neq \mathbf{0}$ . Éste puede ser de dos tipos. Localmente  $f^{-1}(0)$  es una hipersuperficie que atrae o repele a las soluciones, dependiendo del signo de  $df(\mathbf{z}_0)\mathbf{H}(\mathbf{z}_0)$ .



Más precisamente, Rabier demuestra que si  $df(\mathbf{z}_0)\mathbf{H}(\mathbf{z}_0) > 0$ , entonces existen dos

soluciones definidas en un intervalo de la forma  $(0, T)$ , (con  $T > 0$ ), tales que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0$$

Además éstas cumplen que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\| = \infty$$

y la unión de sus imágenes completada por  $\mathbf{z}_0$  es una curva cuyo espacio tangente en  $\mathbf{z}_0$  es el generado por  $\mathbf{H}(\mathbf{z}_0)$ , por lo que es transversal a  $f^{-1}(0)$ .

El caso en que  $df(\mathbf{z}_0)\mathbf{H}(\mathbf{z}_0) < 0$  es análogo, solo que las soluciones mencionadas están definidas en un intervalo de la forma  $(-T, 0)$ .

En el caso de que el sistema (1.3) provenga de uno de la forma (1.1) y  $\mathbf{z}_0 = (t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$  sea un punto singular estandar, Rabier demuestra que los puntos singulares de (1.1) forman (localmente) una  $n$ -variedad, cuya proyección a  $J^0$  es una inmersión. Además como en los puntos singulares la proyección de  $\mathbf{H}(\mathbf{z}_0)$  es  $\mathbf{0}$ , la curva formada por las imágenes de las dos soluciones de (1.3) mencionadas anteriormente, no se proyecta a una curva suave, Rabier sugiere que ésta tiene la forma de una cúspide, hecho que está en concordancia con lo que se sabe para  $n=1$ .

En nuestro trabajo retomamos la idea de Rabier de estudiar los sistemas de la forma (1.3) y llegamos a dar una lista de formas normales que describen los comportamientos locales genericamente posibles en el caso de que  $\mathbf{H}$  nunca se anule. Utilizando esta información, también damos formas normales para (1.1) en una vecindad de algunos tipos de puntos singulares.



## Capítulo 2

# Las ecuaciones $f \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}$

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones de la forma

$$f(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}(\mathbf{z})$$

donde  $f$  es una función de  $R^N$  a  $R$ , (con  $N$  arbitraria) y  $\mathbf{H}$  es un campo de  $R^N$  que no se anula. Ambos entes los tomaremos  $C^\infty$ .

Nos interesa el comportamiento de las imágenes de las soluciones en la cercanía de un punto en donde  $f$  se anula. El resultado al que llegamos es que genericamente estas imágenes son difeomorfas, localmente, a las imágenes de alguna de las ecuaciones

$$f_k \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{e}_1$$

donde  $k \leq N$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ ,  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$  y

$$f_k(\mathbf{z}) = z_1^k + z_1^{k-2} z_2 + z_1^{k-3} z_3 + \dots + z_1 z_{k-1} + z_k$$

### 2.1 Equivalencia

Las soluciones clásicas a este tipo de ecuaciones están bien definidas, siempre y cuando sus imágenes no toquen los ceros de  $f$ . Además sus imágenes están contenidas en las curvas integrales de  $\mathbf{H}$ , por lo que, si  $\mathbf{H}$  nunca se anula, la única patología que puede tener una solución  $\mathbf{z}$  definida en un intervalo  $(t_o, t_1)$  y acotada, es que no se pueda extender para  $t \leq t_o$  (o  $t \geq t_1$ ). En este caso  $\lim_{t \rightarrow t_o} \mathbf{z}(t)$  existe y está en los ceros de  $f$  y  $\lim_{t \rightarrow t_o} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\| = \infty$ .

Buscando que se conserven estas propiedades y tomando en cuenta que nos interesa el comportamiento local, daremos la siguiente relación de equivalencia en el producto del espacio de gérmenes de aplicaciones de  $R^N$  a  $R$  por el espacio de gérmenes de campos de  $R^N$ .

**Definición:** Diremos que  $(f, \mathbf{H})$  en  $\mathbf{z}_o$  es equivalente a  $(\hat{f}, \hat{\mathbf{H}})$  en  $\hat{\mathbf{z}}_o$ , y lo denotaremos  $(f, \mathbf{H}, \mathbf{z}_o) \sim (\hat{f}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{z}}_o)$ , si existe un germen de difeomorfismo  $\Psi : (R^N, \mathbf{z}_o) \rightarrow (R^N, \hat{\mathbf{z}}_o)$  y gérmenes de funciones  $\alpha$  y  $\lambda$  que no se anulan y que cumplan

$$\begin{aligned}\hat{f} \circ \Psi &= \alpha f \\ d\Psi \mathbf{H} &= \lambda \hat{\mathbf{H}} \circ \Psi\end{aligned}\tag{2.1}$$

De aquí en adelante denotaremos a los ceros de  $f$  por  $S$

Bajo la hipótesis de que  $df(\mathbf{z}_o) \neq \mathbf{0}$  y  $d\hat{f}(\hat{\mathbf{z}}_o) \neq \mathbf{0}$  la relación de equivalencia que definimos equivale a que en una vecindad de  $\mathbf{z}_o$  se cumpla que  $\gamma$  es la imagen de una solución clásica de la ecuación original si y solo si  $\Psi(\gamma)$  lo es, de la ecuación equivalente, y que  $\Psi(S) = \hat{S}$

Nótese que con esta relación de equivalencia no estamos tomando en cuenta la forma en que debe estar parametrizada una solución, ni siquiera su dirección, esto lo hacemos así pues, como veremos más adelante, esto no es relevante para el análisis de las ecuaciones de la forma (1.1).

## 2.2 El caso más sencillo.

**Ejemplo 1:** La ecuación mas sencilla de la forma (1.3) para la cual  $f$  se anula en algún punto es

$$z_1 \dot{z} = \mathbf{e}_1$$

En este caso  $\mathbf{e}_1$  no es tangente a  $S$ , y de hecho esta propiedad la caracteriza. Más precisamente:

**Proposición 1:** Si  $f$  y  $\mathbf{H}$  cumplen que  $f(\mathbf{z}_o) = 0$  y  $df(\mathbf{z}_o)\mathbf{H}(\mathbf{z}_o) \neq 0$ , entonces  $(f, \mathbf{H}, \mathbf{z}_o) \sim (z_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{0})$ .

**Demostración:** Sea  $S = f^{-1}(0)$  y  $\hat{S} = \{\mathbf{z} \mid z_1 = 0\}$  y  $\lambda(\mathbf{z}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{z})$ . En una vecindad de  $\mathbf{z}_0$ ,  $\mathbf{H}$  es transversal a  $S$  y en una vecindad de  $\mathbf{0}$   $\lambda \mathbf{e}_1$  es transversal a  $\hat{S}$ , por lo que el teorema de caja de flujo para campos vectoriales garantiza la existencia de un difeomorfismo  $\Psi : (R^N, \mathbf{z}_0) \rightarrow (R^N, \mathbf{0})$  cuyo germen cumple

$$\Psi(S) = \hat{S} \quad (2.2)$$

$$d\Psi(\mathbf{z})\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{z})\mathbf{e}_1 \quad (2.3)$$

Sea  $\hat{f} = f \circ \Psi^{-1}$ . Con esto tenemos que  $(f, \mathbf{H}, \mathbf{z}_0) \sim (\hat{f}, \mathbf{e}_1, \mathbf{0})$ . Veremos que  $\hat{f}(\mathbf{z}) = z_1$  en una vecindad de  $\mathbf{z}_0$ .

De (2.2) se sigue que localmente  $\hat{f}(0, z_2, \dots, z_N) = 0$  y de (2.3) se obtiene que  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial z_1}(\mathbf{z}) = 1$  por lo que  $\hat{f}(\mathbf{z}) = z_1$ .  $\diamond$

**Comentario:** Otra forma de demostrar el teorema de Rabier, mencionado anteriormente, es dado  $\mathbf{z}_0$  un punto singular estandar de  $(f, \mathbf{H})$ , construir un difeomorfismo local  $\Psi$  que cumpla que  $\Psi \circ \mathbf{z}$  sea una solución clásica a  $\pm z_1 \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{e}_1$  para cualquier solución clásica  $\mathbf{z}$  a (1.3). Esta propiedad se puede expresar como:

$$\hat{f} \circ \Psi \quad d\Psi \quad \mathbf{H} = f \hat{\mathbf{H}} \circ \Psi \quad (2.4)$$

donde  $\hat{f} = \pm z_1$  y  $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_1$ . Aquí lo haremos para el caso en que  $df(\mathbf{z}_0) \quad \mathbf{H}(\mathbf{z}_0) > 0$ .

**Proposición 2:** Si  $f(\mathbf{z}_0) = 0$  y  $df(\mathbf{z}_0) \quad \mathbf{H}(\mathbf{z}_0) > 0$ , entonces se cumple (2.4) donde  $\hat{f}(\mathbf{z}) = z_1$  y  $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{z}) = \mathbf{e}_1$ .

**Demostración:** Sea  $\phi : (R^N, \mathbf{z}_0) \rightarrow (R^N, \mathbf{0})$  un germen de difeomorfismo que cumpla

$$\begin{aligned} \phi(S) &= \{\mathbf{z} \mid z_1 = 0\} \\ d\phi \quad \mathbf{H} &= \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

y  $\xi$  de la forma  $\xi(z_1, \mathbf{z}_2) = (\xi_1(\mathbf{z}), \mathbf{z}_2)$ , Posteriormente diremos quien es  $\xi_1$ . Sea  $\Psi = \xi \circ \phi$

Tenemos que

$$\Psi_1 \quad d\Psi \quad \mathbf{H} = \xi_1 \circ \phi \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial z_1} \circ \phi \quad \mathbf{e}_1$$

por lo que para que se cumpla (2.4) basta que

$$\xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial z_1} = f \circ \phi^{-1}$$

o sea

$$\frac{\partial \xi_1^2}{\partial z_1} = 2f \circ \phi^{-1}$$

Sea

$$\xi_1(\mathbf{z}) = \text{signo}(z_1) \left[ 2 \int_0^{z_1} f \circ \phi^{-1}(s, \mathbf{z}_2) ds \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

Notese que  $\text{signo}(f \circ \phi^{-1}(\mathbf{z})) = \text{signo}(z_1)$  pues  $d(f \circ \phi^{-1})(\mathbf{0}) \mathbf{e}_1 = df(\mathbf{z}_0) \mathbf{H}(\mathbf{z}_0) > 0$  por lo que  $\xi_1$  está bien definida.

Veremos que  $\xi_1$  es suave. Como  $f \circ \phi^{-1}(0, \mathbf{z}_2) = 0$ , entonces existe un germen de función suave,  $f_1$ , tal que

$$f \circ \phi^{-1}(\mathbf{z}) = z_1 f_1(\mathbf{z})$$

Sustituyendo esta igualdad en (2.5) y expresando la integral en términos de la variable  $\tau = \frac{s}{z_1}$  se obtiene que

$$\xi_1(\mathbf{z}) = z_1 \left[ 2 \int_0^1 f_1(\tau z_1, \mathbf{z}_2) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}$$

Esta función es suave y además  $\xi$  es un difeomorfismo pues

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial z_1}(\mathbf{0}) &= \left[ \frac{1}{2} f_1(\mathbf{0}) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial z_1}(\mathbf{0}) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[ \frac{1}{2} df(\mathbf{z}_0) \mathbf{H}(\mathbf{z}_0) \right]^{\frac{1}{2}} \neq 0 \end{aligned}$$

Con esto queda demostrada la proposición.  $\diamond$

## 2.3 Los conjuntos $S^l$

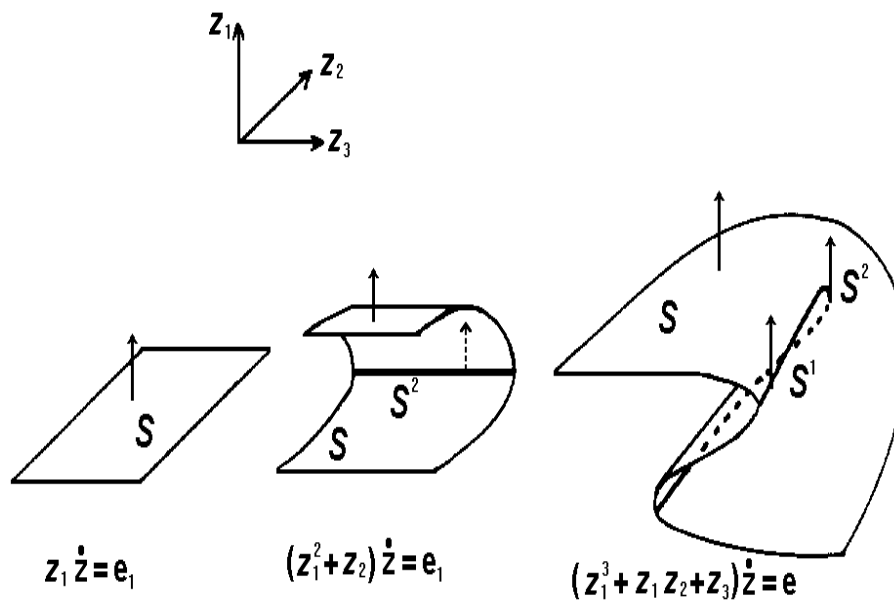
Empezaremos analizando algunos ejemplos.

**Ejemplo 2:** Consideremos la ecuación

$$(z_1^2 + z_2) \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{e}_1$$

En este caso el campo  $\mathbf{H} = \mathbf{e}_1$  es tangente a  $S$  para puntos de la subvariedad

$$S^1 = \{\mathbf{z} \in S \mid z_1 = 0\}$$



La proposición 1 asegura que para  $z \in S - S^1$  esta ecuación es equivalente en  $z$  a  $z_1 \dot{z} = e_1$  en  $\mathbf{0}$ .

Nótese que en este ejemplo el campo  $\mathbf{H}$  no es tangente a  $S^1$ .

**Ejemplo 3:** Analizaremos la ecuación

$$(z_1^3 + z_1 z_2 + z_3) \dot{z} = e_1$$

Sean

$$S^1 = \{z \in S \mid 3z_1^2 + z_2 = 0\}$$

$$S^2 = \{z \in S^1 \mid z_1 = 0\}$$

$\mathbf{H}$  es tangente a  $S$  en puntos de  $S^1$  y también lo es a  $S^1$  en puntos de  $S^2$ . Además  $\mathbf{H}$  no es tangente a  $S^2$ .

Estos ejemplos muestran una forma en que se pueden ir haciendo mas complejas las ecuaciones que estudiamos. Aquí juegan un papel clave los conjuntos  $S^l$  dados por la siguiente

**Definición:** Llamaremos el *conjunto l-singular* de una pareja  $(f, \mathbf{H})$  al conjunto  $S^l$  dado por

$$S^o = S$$

$$S^l = \left\{ \mathbf{z} \in S^{l-1} \mid \mathbf{H}(\mathbf{z}) \in T_{\mathbf{z}} S^{l-1} \right\} \quad (2.6)$$

$S^l$  está bien definida en el caso de que  $S^{l-1}$  sea una variedad.

Los conjuntos l-singulares son respetados por ecuaciones equivalentes, o sea

**Proposición 3:** Si  $(f, \mathbf{H}, \mathbf{z}_o) \sim (\hat{f}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{z}}_o)$  y  $\Psi$  es un germen de difeomorfismo que realiza la equivalencia, entonces (localmente)  $\Psi(S^l) = \hat{S}^l$ .

La demostración es inmediata.

**Ejemplo 4:** Para  $k \leq N$  consideremos la función definida por:

$$f_k(\mathbf{z}) = z_1^k + z_1^{k-2} z_2 + z_1^{k-3} z_3 + \dots + z_1 z_{k-1} + z_k \quad (2.7)$$

y tomemos  $\mathbf{H} = \mathbf{e}_1$ .

En este caso los conjuntos  $S^l$  están dados por los ceros del mapeo

$$\mathbf{z} \longmapsto \left( f, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial^l f}{\partial z_1^l} \right)$$

. Si  $l < k$  este mapeo se anula en  $\mathbf{0}$  y 0 es un valor regular de él, por lo que  $S^l$  es localmente una  $(N - l - 1)$ -variedad que contiene a cero (de hecho en este caso es global). Además  $\frac{\partial^k f_k}{\partial z_1^k}(\mathbf{0}) \neq 0$  por lo que  $S^k = \emptyset$ .

## 2.4 Los operadores $S^l$ y los puntos singulares k-regulares.

Para cada  $l$  definiremos un operador  $S_l$  tal que, localmente, los ceros de  $S_l(f, \mathbf{H})$  sea  $S^{l-1}$  y en términos de estos se caracterizarán a los puntos singulares que llamaremos k-regulares de  $(f, \mathbf{H})$

Veremos mas adelante que las parejas  $(f, \mathbf{H})$  genéricas estan representadas en sus puntos singulares por alguna de las mencionadas en el ejemplo 4 en la cercanía del cero, por lo que daremos la siguiente

**Definición:** Diremos que  $\mathbf{z}$  es un punto *singular, k-regular* de  $(f, \mathbf{H})$  si  $(f, \mathbf{H}, \mathbf{z}) \sim (f_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{0})$ , donde  $f_k$  está definida por (2.7).

Denotaremos por  $D_H^l f$  a la  $l$ -ésima derivada de  $f$  en la dirección del campo  $\mathbf{H}$ . Ésta queda definida por

$$\begin{aligned} D_H f &= df \mathbf{H} \\ D_H^l f &= d(D_H^{l-1} f) \mathbf{H} \end{aligned}$$

**Definición :** Llamaremos  $\mathcal{S}_\dagger$  al operador

$$\begin{aligned} S_l : C^\infty(R^N, R) \times \chi^\infty(R^N) &\longrightarrow R^l \\ (f, \mathbf{H}) &\longmapsto (f, D_H, \dots, D_H^{l-1}) \end{aligned}$$

Nótese que si  $\mathbf{z}_o \in S^{l-1}$  y  $\mathcal{S}_\dagger(f, \mathbf{H})$  es una submersión en  $\mathbf{z}_o$ , entonces restringiéndonos a una vecindad de  $\mathbf{z}_o$ ,  $S^l$  está dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\dagger(f, \mathbf{H})(\mathbf{z}) &= \mathbf{0} \\ d(\mathcal{S}_\dagger(f, \mathbf{H}))(\mathbf{z}) \mathbf{H}(\mathbf{z}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

las cuales son equivalentes a

$$\mathcal{S}_{\dagger+\infty}(f, \mathbf{H})(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$$

con lo que tenemos que en condiciones genéricas (y localmente)

$$S^l = \mathcal{S}_{\dagger+\infty}(f, \mathbf{H})^{-1}(\mathbf{0})$$

Nótese que además que si  $\mathbf{z} \in S^{k-1} - S^k$  entonces  $D_H^k f(\mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$ .

De estas observaciones se sigue que

**Proposición 4:** Si se cumple

$$\begin{aligned} D_H^k f(\mathbf{z}_o) &\neq \mathbf{0} \\ \mathcal{S}_\parallel(f, \mathbf{H})(\mathbf{z}_o) &= \mathbf{0} \\ \mathcal{S}_\parallel(f, \mathbf{H}) &\text{ es una submersión en } \mathbf{z}_o \end{aligned} \tag{2.8}$$

entonces restringiéndonos a una vecindad de  $\mathbf{z}_o$ , se cumple que

- a) Para  $l < k$   $S^l$  es una subvariedad de dimensión  $N-l-1$ .  
 b)  $S^k = \emptyset$ .

De hecho las condiciones (2.8) caracterizan a los puntos singulares  $k$ -regulares

**Teorema 5:**  $\mathbf{z}$  es un punto singular  $k$ -regular de  $(f, \mathbf{H})$  si y solo si se cumple (2.8)

Antes de demostrar este teorema se demostrará el siguiente

**Lema 6:** Sean  $f$  y  $\tilde{f}$  funciones definidas en un abierto  $U$  de  $R^N$  y  $\mathbf{H}$  y  $\tilde{\mathbf{H}}$  campos en  $U$ . Si  $\phi$  es un difeomorfismo tal que

$$\begin{aligned} d\phi \mathbf{H} &= \tilde{\mathbf{H}} \circ \phi \\ f &= \tilde{f} \circ \phi \end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{S}_1(f, \mathbf{H}) = \mathcal{S}_1(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{H}}) \circ \phi$$

**Demostración :** Basta que demostrar que bajo las hipótesis del lema se tiene que

$$D_H^l f = (D_{\tilde{H}}^l \tilde{f}) \circ \phi$$

Esto es inmediato para  $l = 0$ . Suponiéndolo válido para  $l - 1$  se tiene que

$$D_H^l f(\mathbf{z}) = d[(D_{\tilde{H}}^l \tilde{f}) \circ \phi] \mathbf{H}(\mathbf{z}) = (D_{\tilde{H}}^l \tilde{f})(\phi(\mathbf{z}))$$

Este lema permite asegurar que los resultados que aquí damos para parejas  $(f, \mathbf{H})$  definidas en abiertos de  $R^N$  son válidos también en variedades.

**Demostración del Teorema 5:** En el apéndice A se definen lo que son las deformaciones  $d$ -versales y se dan algunas de sus propiedades. De la proposición 1, el



teorema 2 y el corolario 4 de ese apéndice se sigue que son equivalentes las siguientes propiedades.

A)  $\mathcal{S}_{||}(g, \mathbf{e}_1)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  ,  $D_{\mathbf{e}_1}^k g(\mathbf{0}) \neq 0$  y  $\mathcal{S}_{||}(g, \mathbf{e}_1)$  es una submersión en cero.

B) Existe un difeomorfismo local  $\xi : (R^N, \mathbf{0}) \rightarrow (R^N, \mathbf{0})$  y una función que no se anula  $\mu$  tales que  $g = f_k \circ \xi$  y  $d\xi \mathbf{e}_1 = \mu \mathbf{e}_1$

Con este antecedente demostraremos el teorema. Supongamos que se cumple(2.8).

Sea  $\phi : (R^N, \mathbf{z}) \rightarrow (R^N, \mathbf{0})$  tal que

$$d\phi \mathbf{H} = \mathbf{e}_1 \quad (2.9)$$

y sea

$$g = f \circ \phi \quad (2.10)$$

por el lema tenemos que

$$\mathcal{S}_{||}(f, \mathbf{H}) = \mathcal{S}_{||}(g, \mathbf{e}_1) \circ \phi$$

por lo que  $g$  cumple la propiedad A y por tanto B. El difeomorfismo  $\psi = \xi \circ \phi$  realiza la equivalencia  $(f, \mathbf{H}, \mathbf{z}) \sim (f_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{0})$

$$\begin{array}{ccccc} & & (R, 0) & & \\ & f \nearrow & \uparrow g & \nwarrow f_k & \\ (R^N, \mathbf{z}) & \rightarrow & (R^N, \mathbf{0}) & \rightarrow & (R^N, \mathbf{0}) \\ & \phi & & \xi & \end{array}$$

Ahora supongamos que  $(f, \mathbf{H}, \mathbf{z}) \sim (f_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{0})$ . Otra vez tomemos  $\phi$  que cumpla (2.9) y tomemos  $g$  como en (2.10), por el lema basta demostrar que  $g$  cumple con la propiedad A.

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ (R^N, \mathbf{z}) & \rightarrow & (R, 0) & & \\ \phi \downarrow & g \nearrow & \uparrow \beta f_k & \nwarrow f_k & \\ (R^N, \mathbf{0}) & \rightarrow & (R^N, \mathbf{0}) & \rightarrow & (R^N, \mathbf{0}) \\ & \psi & & \eta & \\ & & \xi & & \end{array}$$

Nótese que  $(g, \mathbf{e}_1, \mathbf{0}) \sim (f_k, \mathbf{e}_1, \mathbf{0})$  por lo que existe un difeomorfismo  $\psi : (R^N, \mathbf{0}) \rightarrow (R^N, \mathbf{0})$  tal que

$$\begin{aligned} d\psi \mathbf{e}_1 &= \lambda \mathbf{e}_1 \\ g &= \alpha f_k \circ \psi \end{aligned}$$

Sea  $\beta = \alpha \circ \psi^{-1}$  Claramente  $\mathcal{S}_{\parallel}(\beta f_k, \mathbf{e}_1)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y  $D_{\mathbf{e}_1}^k(\beta f_k)(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$  La matriz jacobiana de  $d(\mathcal{S}_{\parallel}(\beta f_k, \mathbf{e}_1))(\mathbf{0})$  es de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdot & 0! \beta(\mathbf{0}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \cdot & * & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & (k-2)! \beta(\mathbf{0}) & * & \cdot & * & 0 & \cdots & 0 \\ k! \beta(\mathbf{0}) & * & \cdots & * & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que  $(\beta f_k, \mathbf{e}_1)$  cumple A y por tanto existe un difeomorfismo local  $\eta$  tal que

$$d\eta \cdot \mathbf{e}_1 = \nu \mathbf{e}_1 \text{ y } \beta f_k = f_k \circ \eta$$

Tomando  $\xi = \eta \circ \xi$  y  $\mu = \lambda \circ \nu \circ \psi$ , tenemos que se cumple B y por lo tanto A.  $\diamond$

En el siguiente corolario se describen las propiedades de los conjuntos  $l$ -singulares en la cercanía en un punto singular  $k$ -regular.

**Corolario 7:** En una vecindad de un punto singular  $k$ -regular se cumple

- a) Si  $l < k$ ,  $S^l$  es una variedad de dimensión  $N-l-1$  y  $S^k = \emptyset$
- b) El conjunto de puntos singulares  $l$ -regulares es  $S^{l-1} - S^l$

**Demostración:** El inciso a) se sigue de la proposición 4 y del teorema 5. El inciso b) es consecuencia de la proposición 3 y de que ésto se cumple para  $(f_k, \mathbf{e}_1)$   $\diamond$

El siguiente corolario se usará en el capítulo 2

**Corolario:8**

- a)  $\mathbf{z}$  es un punto singular 1-regular de  $(f, \mathbf{H})$ , si y solo si  $f(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ , y  $D_H f(\mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$ .
- b)  $\mathbf{z}$  es un punto singular 2-regular de  $(f, \mathbf{H})$  si y solo si  $f(\mathbf{z}) = D_H f(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$   $D_H^2 f(\mathbf{z}) / \neq \mathbf{0}$  y  $df(\mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$ .

**Demostración:** a) es inmediato, también es inmediato que si  $\mathbf{z}$  es singular 2-regular se cumplen las condiciones dadas sobre  $f$  y sus derivadas.

Para demostrar (b) solo hace falta ver que estas son suficientes, de hecho basta ver que  $\mathcal{S}_\infty(f, \mathbf{H})$  es submersión en  $\mathbf{z}$ . Nótese que

$$d(\mathcal{S}_\infty(f, \mathbf{H}))(\mathbf{z}) \quad \mathbf{H}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} D_H f(\mathbf{z}) \\ D_H^2 f(\mathbf{z}) \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ D_H^2 f(\mathbf{z}) \end{pmatrix} \in \text{Im} \quad d(\mathcal{S}_\infty(f, \mathbf{H}))(\mathbf{z})$$

Tomando  $v \notin \text{gen} \quad \mathbf{H}(\mathbf{z})$  tenemos que  $df(\mathbf{z})v \neq 0$ , por lo que también

$$\begin{pmatrix} df(\mathbf{z})v \\ d(D_H f)(\mathbf{z})v \end{pmatrix} \in \text{Im} \quad d(\mathcal{S}_\infty(f, \mathbf{H}))(\mathbf{z})$$

por lo que  $df(\mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$  y  $D_H^2 f(\mathbf{z}) \neq 0$  implican que  $\mathcal{S}_\infty(f, \mathbf{H})$  es submersión en  $\mathbf{z} \diamond$

## 2.5 Genericidad

El siguiente teorema garantiza que los puntos singulares k-regulares sean los que aparecen en parejas  $(f, \mathbf{H})$  genéricas.

Sea  $U$  un abierto de  $R^N$  y sea  $\Lambda$  el subconjunto de  $C^\infty(U, R) \times \chi^\infty(U)$  formado por las parejas  $(f, \mathbf{H})$  tales que todos sus puntos singulares sean k-regulares para alguna  $k \leq N$ .

**Teorema 9:**  $\Lambda$  es un abierto y denso con la topología fina de Whitney.<sup>1</sup>

**Demostración:** Primero veremos que  $\Lambda$  es un abierto. Sea  $\Lambda_\circ$  el subconjunto de  $C^\infty(U, R) \times \chi^\infty(U)$  formado por las parejas  $(f, \mathbf{H})$  tales que  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}+\infty}(f, \mathbf{H})$  nunca se anulan en  $U$

Para  $k \in \{1, \dots, N\}$  sea  $\Delta_k$  el conjunto de parejas  $(f, \mathbf{H})$  tales que  $\mathcal{S}_{||}(f, \mathbf{H})$  nunca se anula en  $U$  o que  $\mathbf{0}$  sea valor regular  $\mathcal{S}_{||}(f, \mathbf{H})$ .

Tenemos que

$$\Delta = \bigcap_{k=0}^N \Delta_k$$

---

<sup>1</sup>De hecho es un abierto con la topología fina  $C^N$  y denso con la topología fina  $C^\infty$ .

Veremos que  $\Delta_k$  es un abierto. Para  $k \geq 1$  consideremos el operador  $\mathcal{O}_{\parallel} : C^{\infty}(U, R) \times \chi^{\infty}(U) \rightarrow C^{\infty}(U, R)$  que a cada  $(f, \mathbf{H})$  le asocia la función dada por

$$\sum_{i=0}^{k-1} (D_H^i f)^2 + \sum \left[ \frac{\partial(\mathcal{S}_{\parallel}(f, \mathbf{H}))}{\partial(z_{i_1} \dots z_{i_k})} \right]^2$$

donde  $\frac{\partial(G)}{\partial(z_{i_1} \dots z_{i_k})}$  denota el determinante de la matriz formada por las columnas  $i_1 \dots i_k$  de la matriz jacobiana de  $G$ .

Este operador es continuo con la topología fina  $C^N$  y además  $\Delta_k$  es la imagen inversa bajo  $\mathcal{O}_{\parallel}$  de las funciones que nunca se anulan en  $U$ , este conjunto es un abierto, por lo que  $\Delta_k$  también lo es.

Análogamente se ve que  $\Delta_{\circ}$  es un abierto.

**DENSIDAD:** Se demostrará que si  $\mathbf{H}$  es un campo de  $U$  cuyos ceros son puntos aislados, entonces el conjunto

$$B_H^U = \{f \in C^{\infty}(U; R) \mid (f, \mathbf{H}) \in \Delta\}$$

es denso en  $C^{\infty}(U; R)$ . Claramente esto garantiza la densidad de  $\Delta$  en  $C^{\infty}(U, R) \times \chi^{\infty}(U)$  pues la propiedad que se le pide  $\mathbf{H}$  es densa en  $\chi^{\infty}(U)$ .

**AFIRMACIÓN 1:** Se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $\mathbf{H}$  nunca se anula en  $U$ .

**Demostración:** Supondremos que ya se demostró la densidad en este caso. Sea  $W$  un abierto de  $R^N$  y  $\mathbf{H}$  un campo que solo se anula en los puntos  $\{\mathbf{z}_i\}_{i \in A}$  y estos puntos son aislados.

Sea  $f \in C^{\infty}(W, R)$  y  $\mathcal{N}$  una vecindad de  $f$ . Se puede suponer que  $f(\mathbf{z}_i) \neq 0$ .

Sea  $U = W - \{\mathbf{z}_i\}_{i \in A}$ . Como  $\mathbf{H}$  no se anula en  $U$ , podemos escoger  $g \in C^{\infty}(U, R)$  arbitrariamente cercana a  $f$  y que este en  $B_H^U$ , también podemos suponer que  $\mathbf{z}_i$  no es punto de acumulación de  $g^{-1}(0)$ .

Nótese de que las condiciones de que  $g \in B_H^U$  solo depende de los gérmenes de  $g$  en los puntos de  $g^{-1}(0)$ , por lo que se puede perturbar  $g$  en una familia de bolas  $\{B_i\}_{i \in A}$  tales que  $\mathbf{z}_i \in B_i$ , que no se intersecten por parejas y que no intersecten a  $g^{-1}(0)$ . Esta perturbación de  $g$ , se puede hacer de tal forma que se pueda extender a una función  $C^{\infty}$

en  $W$ , que esté en  $\mathcal{N}$  y que no se anule en  $\cup B_i$ . Claramente una perturbación con estas características está en  $B_H^W$ .

La técnica para realizar esto es escoger, para cada  $i$ , una función  $\lambda_i \in C^\infty(W, [0, 1])$  con soporte contenido en  $B_i$  y que valga 1 en una vecindad de  $\mathbf{z}_i$ , y tomar la perturbación mencionada como

$$\tilde{g} = \sum_{i \in A} \lambda_i f + (1 - \lambda_i)g$$

El hecho de que  $g$  sea suficientemente cercano a  $f$  garantiza que  $\tilde{g} \in \mathcal{N}$  y que  $\tilde{g}^{-1}(0) = g^{-1}(0)$

**AFIRMACIÓN 2.** Para cada  $\mathbf{z} \in U$  existe una vecindad de  $\mathbf{z}$ ,  $V$  tal que  $B_H^V$  es denso en  $C^\infty(V, R)$ .

**Demostración:** Por la afirmación 1 podemos suponer que  $\mathbf{H}$  no se anula por lo que para cada  $\mathbf{z} \in U$  existe una vecindad de  $\mathbf{z}$ ,  $V$  y un difeomorfismo

$$\phi : (V, \mathbf{z}) \longrightarrow (\phi(V), \mathbf{0})$$

tal que

$$d\phi \mathbf{H} = \mathbf{e}_1$$

Nótese que  $f \in C^\infty(V, R)$  está en  $B_H^V$  si y solo si  $f \circ \phi^{-1}$  es una deformación d-versal en cada punto  $(f \circ \phi^{-1})^{-1}(0)$ .

Consideremos el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{O} : C^\infty(V, R) &\longrightarrow C^\infty(\phi(V), R) \\ f &\mapsto f \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

Este operador es un homeomorfismo con la topología fina de Whitney[9], por lo que preserva la densidad. En el apéndice A, se demuestra que las deformaciones que son d-versales en sus ceros forman un conjunto denso por lo que  $B_H^V$  también lo es.

**AFIRMACION 3:** Para cualquier compacto  $K$ , contenido en  $U$ , el conjunto de funciones  $g \in C^\infty(U, R)$  tales que  $g|_K \in B_H^K$  es denso en  $C^\infty(U, R)$ .

Demostración: Sea  $\mathcal{N}$  un abierto de  $C^\infty(U, R)$ .  $K$  se puede cubrir con un número finito de abiertos  $\{V_i\}_{i=1}^m$  tales que cada  $B_H^{V_i}$  sea denso en  $C^\infty(V_i, R)$ . Tomemos  $\{K_i\}_{i=1}^m$  una colección de compactos que cubran a  $K$  y tales que  $K_i \subset V_i$

Sea  $W_1$  un abierto tal que  $K_1 \subset W_1 \subset \bar{W}_1 \subset V_1$

Del hecho de que  $B_H^{V_1}$  es denso en  $C^\infty(V_1, R)$  se sigue que existe  $g_1 \in C^\infty(U; R)$  tal que  $g_1 \in \mathcal{N}$  y  $g_1|_{W_1} \in B_H^{W_1}$

Construiremos  $g \in C^\infty(U, R)$  tal que  $g \in \mathcal{N}$  y  $g_1|_{K_1 \cup K_2} \in B_H^{K_1 \cup K_2}$

Sea  $\lambda \in C^\infty(U, [0, 1])$  una función con soporte compacto contenido en  $V_2$  tal que  $\lambda|_{K_2} = 1$ . Escogeremos  $g_2 \in C^\infty(U, R)$  tal que  $g_2|_{K_2} \in B_H^{K_2}$  de tal forma que la función

$$g = (1 - \lambda)g_1 + \lambda g_2$$

cumpla las propiedades enunciadas.

Nótese que  $g - g_1 = \lambda(g_2 - g_1)$ , por lo que para que  $g \in \mathcal{N}$  basta que<sup>2</sup>

$$\|g_2 - g_1\|_{r, \text{sup}\lambda} < \alpha_1 \quad (2.11)$$

para algún real positivo  $\alpha_1$  adecuado.

Es inmediato que  $g|_{(K_1 - \text{sup}\lambda) \cup K_2} \in B_H^{(K_1 - \text{sup}\lambda) \cup K_2}$ . Tenemos que  $B_H^{W_1}$  es un abierto, por lo que para que  $g_1|_{K_1 \cup K_2} \in B_H^{K_1 \cup K_2}$  basta que

$$\|g_2 - g_1\|_{r', k_1 \cap \text{sup}\lambda} < \alpha_2 \quad (2.12)$$

para alguna  $\alpha_2$  adecuada.

Como  $B_H^{V_2}$  es denso, siempre se puede escoger  $g_2 \in B_H^{V_2}$  de tal forma que se cumplan (2.11) y (2.12).

Este proceso se puede repetir un número finito de veces hasta construir  $g \in \mathcal{N}$  tal que  $g|_K \in B_H^K$ .

**DEMOSTRACIÓN DE LA DENSIDAD:** De la afirmación 3 y usando el mismo argumento que se usó en el apéndice A para demostrar que  $\mathcal{V}$  es denso, se sigue que  $B_H^U$  también lo es.  $\diamond$

---

<sup>2</sup>En el apéndice A se puede ver esto con mas detalle.

## Capítulo 3

# Ecuaciones diferenciales implícitas.

En este capítulo trabajaremos con algunos sistemas de ecuaciones implícitos de primer orden. Los que cumplen que sus soluciones geométricas dan una foliación de la ecuación.

A través del análisis que hicimos para parejas  $(f, \mathbf{H})$ , caracterizaremos localmente los dos primeros tipos de singularidades, dando formas normales para estos.

Es interesante notar que los resultados que hay para ecuaciones escalares, no se generalizan para sistemas. Por ejemplo, en el caso del primer tipo de singularidad se tiene que cualquier ecuación escalar de este tipo, es equivalente a la ecuación dada por

$$p^2 + t = 0$$

a través de un difeomorfismo en  $J^0$ . Veremos que para sistemas esto no ocurre. Es más, si se quisiera clasificar de esta forma, habría demasiadas clases.

Nosotros usamos una relación de equivalencia más débil, a través de cierto tipo de difeomorfismos en  $J^1$ . A pesar de esto, sí podemos obtener alguna información de lo que ocurre en  $J^0$ .

### 3.1 Acerca de la relación de equivalencia.

Como dijimos en la introducción, Rabier asocia a cada ecuación  $E$  dada por

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

una ecuación de la forma

$$f(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}(\mathbf{z})$$

donde

$$f = \det \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \quad y \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} f \\ f\mathbf{p} \\ -\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_x\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

y  $\mathbf{z} = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$

Daremos una relación de equivalencia para ecuaciones de la forma (3.1) adaptada de la correspondiente para parejas  $(f, \mathbf{H})$  bajo la cual ya describimos el comportamiento de casi cada clase en el caso de que  $\mathbf{H}$  no se anule.

Nótese que dadas las ecuaciones  $E = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$  y  $\hat{E} = \hat{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{0})$ , no basta pedir que  $(f, \mathbf{H}) \sim (\hat{f}, \hat{\mathbf{H}})$ , pues esto solo garantiza que cada solución geométrica de  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{c})$  sea mapeada por un difeomorfismo a una solución geométrica de  $\hat{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{k})$  para alguna  $\mathbf{k}$  que depende de la primera solución mencionada. En la sección 2.3 daremos un ejemplo en el cual las parejas  $(f, \mathbf{H})$  correspondientes a dos ecuaciones son equivalentes, sin embargo ningún difeomorfismo que realice la equivalencia manda una ecuación en la otra.

**Definición:** Diremos que la ecuación  $E$  es equivalente en  $\mathbf{z}_0$  a la ecuación  $\hat{E}$  en  $\hat{\mathbf{z}}_0$  y lo denotaremos  $(E, \mathbf{z}_0) \sim (\hat{E}, \hat{\mathbf{z}}_0)$  si

- i) Existen submersiones locales tales que  $E = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$  y  $\hat{E} = \hat{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{0})$  y  $(f, \mathbf{H}, \mathbf{z}_0) \sim (\hat{f}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{z}}_0)$ .
- ii) Existe un difeomorfismo  $\Psi$  que realiza esta equivalencia y que cumple (localmente) que  $\Psi(E) = \hat{E}$ .

De aquí en adelante, supondremos que  $E$  es foliada por sus soluciones geométricas, o sea  $\dim(T_{\mathbf{z}}E \cap K(\mathbf{z})) = 1$ <sup>1</sup> lo que equivale a que  $T_{\mathbf{z}}E \not\cap K(\mathbf{z})$ . Veremos que esto es lo mismo que pedir que  $\mathbf{H}$  no se anule. También veremos que este comportamiento se puede caracterizar dentro de  $J^0$ . Sea  $\pi$  la proyección natural de  $J^1$  a  $J^0$ .

**Proposición 1:** Las siguientes propiedades son equivalentes

- a)  $\mathbf{H}(\mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$
- b)  $T_{\mathbf{z}}E \not\cap K(\mathbf{z})$
- c)  $d\pi(\mathbf{z})(T_{\mathbf{z}}E) + R(1, \mathbf{p}) = T_{(t, \mathbf{x})}J^0$

---

<sup>1</sup> $\mathbf{z} \mapsto K(\mathbf{z})$  denota la estructura de contacto natural de  $J^1$ . Ver la introducción.



**Demostración:**

a $\Leftrightarrow$ b) Tenemos que  $T_{\mathbf{z}}E \cap K(\mathbf{z})$  queda caracterizado por

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_x \mathbf{p})\delta t + \mathbf{F}_p \delta \mathbf{p} &= \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{x} - \mathbf{p} \delta t &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

por lo que, para demostrar la proposición basta demostrar que  $\mathbf{H}(\mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$  si y solo si  $r(\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_x \mathbf{p}, \mathbf{F}_p) = n$ . Esto es inmediato si  $\mathbf{z} \notin S$ .

Se puede ver que si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  entonces que  $r(A) = n - 1$  equivale a que  $A^* \neq 0$  y  $r(A) < n$ . En cuyo caso  $\ker A^* = \text{Im}(A)$ .

Si  $\mathbf{z} \in S$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$  si y solo si  $\mathbf{F}_p^*(\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_x \mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ , lo que equivale a que  $\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_x \mathbf{p} \notin \text{Im}(\mathbf{F}_p)$  y  $r(\mathbf{F}_p) = n - 1$ . O sea  $r(\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_x \mathbf{p}, \mathbf{F}_p) = n$ .

c $\Leftrightarrow$ b) Nótese que  $d\pi(\mathbf{z}) K(\mathbf{z}) = R(1, \mathbf{p})$ , por lo que c) equivale a

$$d\pi(\mathbf{z}) (T_{\mathbf{z}}E + K(\mathbf{z})) = T_{(t, \mathbf{x})}J^o$$

lo cual es equivalente a

$$\ker d\pi(\mathbf{z}) + T_{\mathbf{z}}E + K(\mathbf{z}) = T_{\mathbf{z}}J^1$$

Como  $\ker d\pi(\mathbf{z}) \subset K(\mathbf{z})$ , ésto último equivale a b). $\diamond$

**Comentario:** Varios autores como Arnold y Chaperon utilizan equivalencias dadas a través de contactomorfismos que son difeomorfismos de  $J^1$  que conservan la estructura de contacto natural de  $J^1$ . Más precisamente, un contactomorfismo es un difeomorfismo  $\Psi : J^1 \rightarrow J^1$  tal que

$$d\Psi(\mathbf{z}) K(\mathbf{z}) = K(\Psi(\mathbf{z})) \tag{3.3}$$

Cualquier difeomorfismo de  $J^o$ , induce un contactomorfismo en un abierto de  $J^1$ . A este tipo de contactomorfismos les llamaremos propios.

Un contactomorfismo propio es de la forma

$$\Psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = (T(t, \mathbf{x}), \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})) \tag{3.4}$$

donde  $(T, \mathbf{X})$  es un difeomorfismo de  $J^o$  y

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{X}_t + \mathbf{X}_x \mathbf{P}}{T_t + T_x \mathbf{P}} \quad (3.5)$$

Si  $n > 1$  cualquier contactomorfismo es un contactomorfismo propio. Si  $n=1$  hay más contactomorfismos.

Se puede ver esto más ampliamente en [5], [6], [7],[1].

Los difeomorfismos de  $J^1$  que realizan la equivalencia con la cual nosotros trabajamos, es una clase más amplia que la de los contactomorfismos propios. Más precisamente, tenemos la siguiente

**Proposición 2:** Si  $\Psi : (J^1, \mathbf{z}_o) \rightarrow (J^1, \hat{\mathbf{z}}_o)$  es un contactomorfismo propio tal que, localmente,  $\Psi(E) = \hat{E}$ , entonces  $(E, \mathbf{z}_o) \sim (\hat{E}, \hat{\mathbf{z}}_o)$  y  $\Psi$  es un difeomorfismo que realiza esta equivalencia.

**Demostración:** Sea  $\mathbf{F}$  submersión tal que  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0}) = E$ , y sea  $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \Psi^{-1}$ . Para cada  $\mathbf{c} \in R^n$  denotemos  $E_{\mathbf{c}} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{c})$  y  $\hat{E}_{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{c})$ . Notese que  $\Psi(E_{\mathbf{c}}) = \hat{E}_{\mathbf{c}}$ .

De la forma de  $\Psi$  (ver (3.4)) se obtiene que  $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \circ \Psi^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{p}}$ . Además  $\det \mathbf{P}_{\mathbf{p}} \neq 0$  pues  $\Psi$  es un difeomorfismo y

$$\Psi_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ P_p \end{pmatrix}$$

Con esto tenemos que

$$\hat{f} = \alpha f \circ \Psi^{-1}$$

donde  $\alpha = \det \mathbf{P}_{\mathbf{p}} \neq 0$ .

Por otro lado, utilizando (3.3) y que  $\Psi(E) = \hat{E}$  se sigue que

$$d\Psi(\mathbf{z})(T_{\mathbf{z}}(E_{\mathbf{c}}) \cap K(\mathbf{z})) = T_{\Psi(\mathbf{z})}(\hat{E}_{\mathbf{c}}) \cap K(\Psi(\mathbf{z}))$$

Como estamos suponiendo que  $\mathbf{H}(\mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$  la dimensión de estos espacios es igual a 1. De hecho  $\mathbf{H}$  ó  $\hat{\mathbf{H}} \circ \Psi^{-1}$  los generan, por lo que existe  $\lambda$  que no se anula tal que

$$d\Psi \mathbf{H} = \lambda \hat{\mathbf{H}} \circ \Psi^{-1}$$

Con esto queda demostrada la proposición.  $\diamond$

Como veremos en la siguiente sección hay muchos casos en los cuales  $E \sim \hat{E}$  y el difeomorfismo que realiza esta equivalencia no es un contactomorfismo.

Los difeomorfismos que nosotros usamos conservan sólo la intersección de la forma de contacto con la ecuación, o sea cumplen que

$$d\Psi(\mathbf{z})(T_{\mathbf{z}}(E) \cap K(\mathbf{z})) = T_{\Psi(\mathbf{z})}(\hat{E}) \cap K(\Psi(\mathbf{z}))$$

puesto que  $\mathbf{H}$  ó  $\hat{\mathbf{H}} \circ \Psi^{-1}$  generan a los espacios correspondientes.

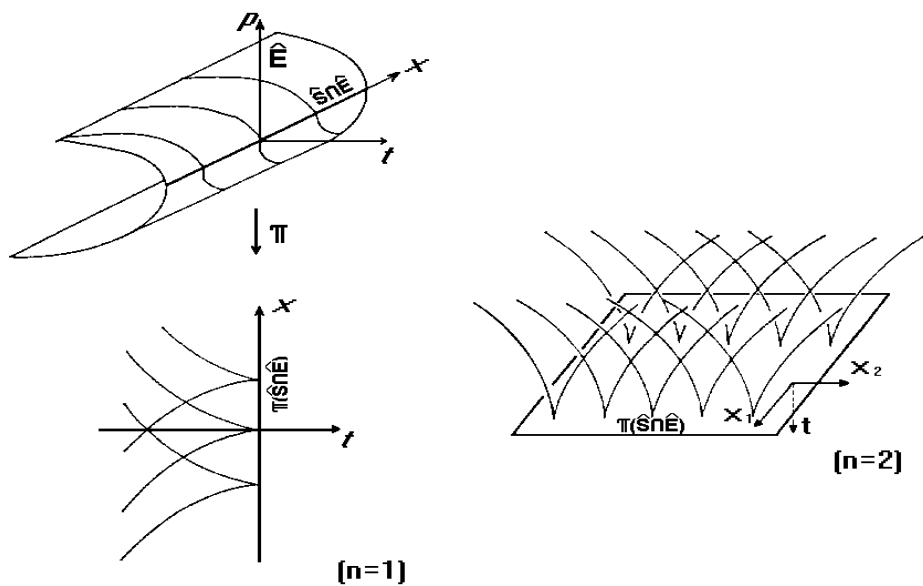
### 3.2 Puntos doblez

En esta sección analizaremos, localmente, el tipo de ecuaciones para las cuales alguna de sus parejas correspondientes  $(f, \mathbf{H})$  (de hecho cualquiera) tenga un punto singular 1-regular. Veremos que éstas son equivalentes, en dicho punto a la ecuación  $\hat{E}$ , (en el  $\mathbf{0}$ ) dada por los ceros de

$$\hat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}_1, p_n^2 + t)$$

donde estamos denotando  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, p_n)$ .

Veremos también que las curvas entegrales de una ecuación con estas características son cúspides, cuyos vértices se encuentran en una hipersuperficie de  $J^o$ , pero que la estructura que pueden tener es muy diversa.



### 3.2.1 La forma normal y las curvas integrales

Al principio de este trabajo, ya vimos esta ecuación para el caso escalar. Su comportamiento para más dimensiones lo podemos resumir así :

Sea  $\pi$  la proyección natural de  $J^1(R, R^n)$  a  $J^0(R, R^n)$ .

i)  $\pi|_{\hat{E}}$  es un dobléz cuyos puntos singulares son  $\hat{S} \cap \hat{E} = \{\mathbf{z} \in J^1 \mid t = 0, p_n = 0\}$ .

ii) Las curvas integrales de  $\hat{E}$  son cúspides contenidas en  $\pi(\hat{E}) = \{(t, \mathbf{x}) \in J^0 \mid t \leq 0\}$  con vértices en  $\pi(\hat{S} \cap \hat{E}) = \{(t, \mathbf{x}) \in J^0 \mid t = 0\}$ . Éstas están contenidas en las superficies dadas por  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}$ .

**Definición:** Diremos que  $E$  tiene un *punto dobléz en  $\mathbf{z}_0$*  si  $\mathbf{z}_0$  es un punto singular, 1-regular de alguna de sus parejas  $(f, \mathbf{H})$  correspondientes.

Esta definición realmente no depende de la pareja  $(f, \mathbf{H})$ , sino es algo intrínseco de  $E$ , como veremos en la siguiente

**Proposición 3:** Si  $\mathbf{z}_0$  es un punto dobléz de  $E$  y  $\tilde{F}$  es una submersión tal que  $\tilde{F}^{-1}(\mathbf{0}) = E$ , entonces  $\mathbf{z}_0$  es un punto singular 1-regular de  $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{H}})$ .

**Demostración:** Sea  $F$  una submersión tal que  $\mathbf{z}_0$  sea un punto singular, 1-regular de  $(f, \mathbf{H})$  y que  $E = F^{-1}(\mathbf{0})$ .

Por otro lado tenemos que ,para  $\mathbf{z} \in E$ , tanto  $\mathbf{H}(\mathbf{z})$  como  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{z})$  generan a  $T_{\mathbf{z}}E \cap K(\mathbf{z})$  por lo que existe  $\lambda : E \rightarrow R$  que no se anula tal que

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{z}) \quad (3.6)$$

La primera entrada de esta igualdad es

$$f(\mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{z}) \tilde{f}(\mathbf{z}) \quad (3.7)$$

De estas dos igualdades se sigue que si  $(f, \mathbf{H})$  cumple  $f(\mathbf{z}_0) = 0$  y  $df(\mathbf{z}_0) \mathbf{H}(\mathbf{z}_0) \neq \mathbf{0}$  entonces también  $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{H}})$  lo cumple, por lo que usando el corolario 8 del capítulo 1 se sigue lo enunciado.  $\diamond$

**Teorema 4:**  $E$  tiene un punto dobléz en  $\mathbf{z}_o$  si y solo si  $(E, \mathbf{z}_o) \sim (\hat{E}, \mathbf{0})$ .

**Demostración:** La equivalencia de las ecuaciones claramente implica que  $\mathbf{z}_o$  sea punto dobléz de  $E$ . Veremos que también es una condición necesaria.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mathbf{z}_o = \mathbf{0}$ . Si no fuese así, podemos componer con el contactomorfismo dado por

$$(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \longmapsto (t - t_o, \mathbf{x} - \mathbf{x}_o - \mathbf{p}_o(t - t_o), \mathbf{p} - \mathbf{p}_o) \quad (3.8)$$

Como ya vimos que los contactomorfismos conservan las equivalencias, esto no afecta el resultado.

Notese que si logramos construir un germen de difeomorfismo que realice la equivalencia de  $(f, \mathbf{H}, \mathbf{z}_o)$  con  $(\hat{f}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{0})$  tal que  $\Psi(E \cap S) = \hat{E} \cap \hat{S}$ , éste cumplirá que  $\Psi(E) = \hat{E}$ , pues  $\mathbf{H}$  y  $\hat{\mathbf{H}}$  son, respectivamente, campos tangentes a  $E$  o  $\hat{E}$  y transversales a  $S$  o  $\hat{S}$ .

Del hecho de que  $\mathbf{0}$  sea un punto dobléz tenemos que  $\dim S = 2n$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{0}) \notin T_o(S)$ , como además  $\mathbf{H}$  es un campo tangente a  $E$ , se sigue que  $E \not\cap S$  en  $\mathbf{0}$ . Esto último implica que  $E \cap S$  es localmente una variedad de dimensión  $n$ .

Lo anterior garantiza que existe un germen de difeomorfismo  $\psi : (S, \mathbf{0}) \rightarrow (\hat{S}, \mathbf{0})$  que cumpla que  $\psi(S \cap E) = \hat{S} \cap \hat{E}$ .

Este lo podemos extender a otro germen de difeomorfismo  $\Psi : (J^1, \mathbf{0}) \rightarrow (J^1, \mathbf{0})$  que cumpla

$$d\Psi \mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} \circ \Psi \quad (3.9)$$

definiendo  $\Psi$  de la siguiente manera.

Denotemos  $\Xi_{\mathbf{K}}(\tau, \mathbf{z}_o)$  el flujo del campo  $\mathbf{K}$  al tiempo  $\tau$

Restringiendo  $\Xi_{\mathbf{H}}$  a  $R \times S$ , se obtiene un difeomorfismo local de  $(R \times S, \mathbf{0})$  a  $(J^1, \mathbf{0})$  pues  $\mathbf{H}(\mathbf{0}) \notin T_o(S)$ .

Sea  $\Psi$  definida por

$$\Psi(\Xi_{\mathbf{H}}(\tau, \mathbf{z}_o)) = \Xi_{\hat{\mathbf{H}}}(\tau, \psi(\mathbf{z}_o))$$

Claramente se cumple (3.9).

Por otro lado, como  $\hat{S}$  está dado por la ecuación  $p_n = 0$ , y  $\Psi(S) = \hat{S}$ , entonces

$$f \circ \Psi^{-1}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_1, 0) = 0$$

por lo que existe  $\beta \in C^\infty(J^1, R)$  cuyo germen cumple

$$f \circ \Psi^{-1} = \beta \hat{f}$$

Diferenciando, aplicando a  $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{0})$  y utilizando (3.9) se obtiene que  $\beta(\mathbf{0}) = -df(\mathbf{0})\mathbf{H}(\mathbf{0})$ . Esto es distinto de 0, pues  $\mathbf{0}$  es un punto dobléz de  $E$ .  $\diamond$

Veremos que a pesar de tener una relación de equivalencia a través de difeomorfismos en  $J^1$ , La ecuación modelo  $\hat{E}$  da información acerca de las curvas integrales de  $E$ . Esta información es transmitida a través del mapeo  $\pi \circ \Psi$ , donde  $\Psi$  realiza la equivalencia de  $\hat{E}$  con  $E$ .

**Teorema 5:** Bajo las condiciones del teorema 4, si  $\Psi$  realiza la equivalencia de  $(\hat{E}, \mathbf{0}) \sim (E, \mathbf{z}_o)$  entonces el germen de mapeo  $\pi \circ \Psi |_{\hat{E}}$  es un dobléz.

**Demostración:**

AFIRMACIÓN 1:

i)  $\pi |_{S \cap E}$  es un difeomorfismo local sobre su imágen

ii) Sea  $\pi_{\mathbf{x}} : J^o \rightarrow R^n$  la proyección dada por  $(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x}$ . Si  $\mathbf{0} \in E \cap S$ ,  $\pi_{\mathbf{x}} |_{E \cap S}$  es un difeomorfismo en una vecindad de  $\mathbf{0}$  sobre su imágen.

Demostración: En la demostración del teorema anterior se vió que  $E \hat{\cap} S$ , por lo que

$$d\pi(T_{\mathbf{z}_o}(E \cap S)) = d\pi(T_{\mathbf{z}_o}E) \cap d\pi(T_{\mathbf{z}_o}S)$$

Como  $T_{\mathbf{z}_o}S + R\mathbf{H}(\mathbf{z}_o) = T_{\mathbf{z}_o}J^1$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{z}_o) \in \ker d\pi(\mathbf{z}_o) \cap T_{\mathbf{z}_o}E$ , entonces

$$d\pi(T_{\mathbf{z}_o}(E \cap S)) = d\pi(T_{\mathbf{z}_o}E)$$

Por la proposición 1, estos espacios tienen dimensión igual a  $n$ , de donde se sigue (i).

Tomando  $\mathbf{z}_o = \mathbf{0}$ , y usando la misma proposición se obtiene que

$$T_{\mathbf{0}}(\pi(E \cap S)) + R(1, \mathbf{0}) = T_{\mathbf{0}}J^o$$

de donde se sigue (ii).

AFIRMACIÓN 2:

Sea  $\Psi = (T, \mathbf{X}, \mathbf{P})$  un germen de difeomorfismo que realiza la equivalencia de  $\hat{E}$  con  $E$  tal que  $\Psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , se tiene que

- i)  $\mathbf{X}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0})$  tiene rango  $n$ .
- ii)  $\frac{\partial^2 T}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) - \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{0}) = \lambda^2(\mathbf{0}) \, df(\mathbf{0})\mathbf{H}(\mathbf{0}) \neq 0$ .
- iii)  $\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

Demostración:

i) tenemos que se cumple que  $\Psi(\hat{S} \cap \hat{E}) = S \cap E$ , por lo que, utilizando que  $\hat{S} \cap \hat{E} = \{\mathbf{z} \mid t = 0 \text{ y } \mathbf{p} = \mathbf{0}\}$  se obtiene que

$$T_{\mathbf{0}}(\pi(S \cap E)) = \text{Im } d_{\mathbf{x}}(T, \mathbf{X})(\mathbf{0})$$

Del inciso (ii) de la afirmación anterior se sigue (i).

ii) y iii) Sabemos que se cumple

$$d\Psi(\mathbf{z})\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{z}) \, \mathbf{H}(\Psi(\mathbf{z}))$$

Derivando esta igualdad con respecto a  $p_n$ , evaluando en  $\mathbf{0}$  y utilizando que  $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{z}) = (p_n, p_n \mathbf{p}, -\mathbf{e}_n)$ , se obtiene que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{0}) - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) = \frac{\partial \lambda}{\partial p_n}(\mathbf{0}) \, \mathbf{H}(\mathbf{0}) + \lambda(\mathbf{0}) \, d\mathbf{H}(\mathbf{0}) \frac{\partial \Psi}{\partial p_n}(\mathbf{0}) \quad (3.10)$$

Además tenemos que

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial p_n}(\mathbf{0}) = d\Psi(\mathbf{0})\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{0}) = \lambda(\mathbf{0}) \, \mathbf{H}(\mathbf{0})$$

y utilizando que  $(H_1, \mathbf{H}_2) = (f, f\mathbf{p})$  se obtiene que

$$d(H_1, \mathbf{H}_2)(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} df(\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo estas dos últimas igualdades en las 1+n primeras entradas de (3.10) se obtiene lo enunciado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$  si no fuese así, tomemos  $\Phi = (\phi, \mathbf{P})$  el contactomorfismo dado por (3.8). Si

$\pi \circ \Phi \circ \Psi |_{\hat{E}}$  es un dobléz, como  $\pi \circ \Phi \circ \Psi = \phi \circ \pi \circ \Psi$  y  $\phi$  es un difeomorfismo, entonces  $\pi \circ \Psi |_{\hat{E}}$  es un dobléz.

Sea

$$\alpha(\mathbf{x}, p_n) = \left( \frac{-p_n^2}{2}, \mathbf{x}, \mathbf{0}, p_n \right)$$

$\alpha$  es una parametrización de  $\hat{E}$ , por lo que  $\pi \circ \Psi |_{\hat{E}}$  es dobléz si y solo si el mapeo definido por  $\mathcal{D} = \pi \circ \Psi \circ \alpha$  lo es.

Sea  $\delta = \det d\mathcal{D}$ . Una caracterización de un germen de un mapeo dobléz es que el germen de  $(\mathcal{D}, \delta)$  sea una inmersión.

Se puede ver que la matriz jacobiana de  $\mathcal{D}$  es

$$d\mathcal{D} = \begin{pmatrix} T_{\mathbf{x}} \circ \alpha & -p_n T_t \circ \alpha + T_{p_n} \circ \alpha \\ \mathbf{X}_{\mathbf{x}} \circ \alpha & -p_n \mathbf{X}_t \circ \alpha + \mathbf{X}_{p_n} \circ \alpha \end{pmatrix}$$

Y la de  $(\mathcal{D}, \delta)$  en  $\mathbf{0}$  es

$$d(\mathcal{D}, \delta)(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} T_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) & \mathbf{0} \\ \delta_{\mathbf{x}} & \frac{\partial \delta}{\partial p_n}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

donde

$$\frac{\partial \delta}{\partial p_n}(\mathbf{0}) = \det \begin{pmatrix} T_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) & \frac{\partial^2 T}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) - \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{0}) \\ \mathbf{X}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) & \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

Utilizando la afirmación 2 se sigue que  $r(d(\mathcal{D}, \delta)(\mathbf{0})) = n + 1$  por lo que  $\pi \circ \Psi |_{\hat{E}}$  es un dobléz.  $\diamond$

**Teorema 6:** Si  $\mathbf{z}_o = (t_o, \mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$  es un punto dobléz de  $E$ , entonces las curvas integrales de la restricción de  $E$  a una vecindad de  $\mathbf{z}_o$  son cúspides. Éstas están dispuestas de la siguiente manera

$\pi(S \cap E)$  es una  $n$ -variedad formada por los vértices de dichas cúspides. Esta variedad divide a una vecindad de  $(t_o, \mathbf{x}_o)$  en  $J^o$  en dos regiones, por cada  $(t, \mathbf{x})$  en una de ellas pasan dos curvas integrales de  $E$ , mientras que por la otra no pasan curvas integrales.

**Demostración:** De el teorema 5, tenemos que  $\pi |_E$  es un dobléz cuyo conjunto singular es  $S \cap E$ . De aquí que  $\pi(S \cap E)$  sea una  $n$ -variedad que divide a  $J^o$  en dos regiones:



la formada por los puntos donde  $\pi|_E$  tiene dos preimágenes y la que no tiene preimagen. De esto se sigue la segunda parte del teorema.

Veremos que las soluciones geométricas de  $E$  que pasan por  $S \cap E$  se proyectan a cúspides.

Supongamos que  $\mathbf{0} \in S \cap E$  y que  $\gamma = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  es una parametrización de una solución geométrica tal que  $\gamma(0) = \mathbf{0}$  y  $\gamma'(0) \neq \mathbf{0}$  (Esto se puede hacer pues las soluciones geométricas son curvas lisas en nuestro caso).

Como  $\gamma'(0)$  es paralela a  $\mathbf{H}(\mathbf{0})$  y  $\mathbf{0} \in S \cap E$  se tiene que  $(t, \mathbf{x})'(0) = \mathbf{0}$ . Usando esto, que  $\mathbf{x}'(s) = t'(s)\mathbf{p}(s)$  y que  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$  se obtiene que

$$\begin{aligned}(t, \mathbf{x})'(0) &= \mathbf{0} \\ (t, \mathbf{x})''(0) &= (t''(0), \mathbf{0}) \\ (t, \mathbf{x})'''(0) &= (t'''(0), 2\mathbf{p}'(0)t''(0))\end{aligned}$$

En el apéndice B se ve que el orden por curvas de un mapeo doblez es 2, por lo que  $t''(0) \neq 0$ , además  $\mathbf{p}'(0) \neq \mathbf{0}$ , pues  $\gamma'(0) \neq \mathbf{0}$ . Esto implica que  $(t, \mathbf{x})''(0)$  y  $(t, \mathbf{x})'''(0)$  son linealmente independientes por lo que la imagen de  $(t, \mathbf{x})$  es una cúspide.  $\diamond$

### 3.2.2 Complejidad de la estructura de las curvas integrales

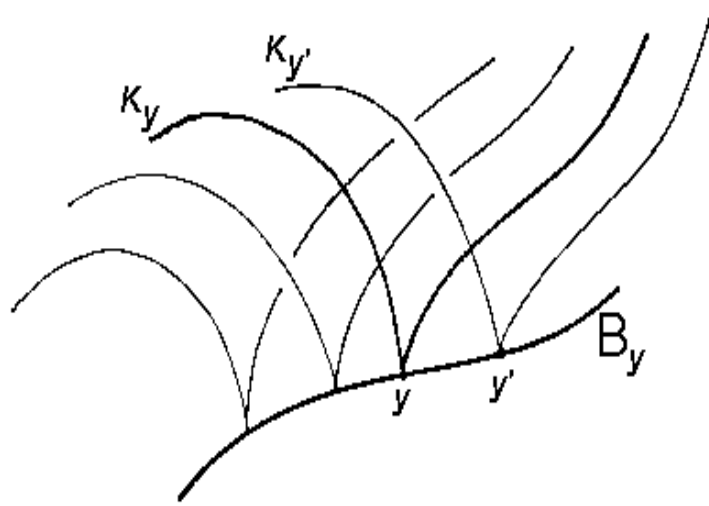
Como mencionamos al principio de este capítulo, en el caso de una ecuación escalar  $E$  que tenga un punto doblez, hay un resultado más fuerte.[8], [5],[?]. En este caso se garantiza la existencia de un contactomorfismo propio que transforma, localmente, la ecuación  $p^2 + t = 0$  en  $E$ . Este contactomorfismo se proyecta a un difeomorfismo de  $J^o$  que manda las curvas integrales de  $p^2 + t = 0$  en las curvas integrales de  $E$ .

Esto no se puede generalizar para más dimensiones. El problema radica en que las curvas integrales de la ecuación  $\hat{E}$  están contenidas en las hojas de una foliación bidimensional de  $J^o$ , y como veremos este fenómeno no ocurre en general.

Consideremos una ecuación  $E$  con un punto doblez. Sabemos que por cada punto de  $\pi(E - S)$  pasan dos curvas integrales de la ecuación, las cuales son cúspides con vértices en  $\pi(S \cap E)$ .

Dada una de estas cúspides, consideremos las cúspides que la intersectan, las que intersectan a estas últimas, y así sucesivamente.

Mediante este proceso, en el caso de la ecuación  $\hat{E}$  se forma una cadena unidimensional dada por las cúspides con vértices en una recta.



Sin embargo la forma en que están entrelazadas las curvas integrales de  $E$  puede ser más compleja. Asociemosle a cada punto de una cúspide dada la otra cúspide que pasa por él. Veremos que no necesariamente se intersectan entre si las cúspides asociadas a dos puntos de la cúspide original. Si este fenómeno se repite obtendremos que la cadena formada como describimos arriba será una familia a más de un parámetro de cúspides.

Nótese que es imposible que exista un difeomorfismo (ni siquiera una biyección) que mande las curvas integrales de  $\hat{E}$  en las de una ecuación con estas características.

Para formalizar lo anterior haremos la siguiente construcción.

Para cada  $\mathbf{y} \in \pi(S \cap E)$  sea  $\kappa_{\mathbf{y}}$  la curva integral de  $E$  que pasa por  $\mathbf{y}$  y sea  $\mathbf{B}_{\mathbf{y}}$  el conjunto definido por

$$\mathbf{B}_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{y}' \in \pi(S \cap E) \mid \kappa_{\mathbf{y}} \cap \kappa_{\mathbf{y}'} \neq \emptyset\}$$

$\mathbf{B}_{\mathbf{y}}$  es una curva (no necesariamente lisa) pues por cada punto de  $\kappa_{\mathbf{y}}$  distinto de  $\mathbf{y}$ , pasa una sola cúspide distinta de  $\kappa_{\mathbf{y}}$ .

En el caso del modelo  $\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{y}}$  es la recta que pasa por  $\mathbf{y} = (0, \mathbf{x})$  con dirección  $0 \times \mathbf{e}_n$ .

Claramente si existiese un difeomorfismo  $\phi$  de  $J^o$  que conserve curvas integrales de las ecuaciones, éste debería cumplir que

$$\phi(\hat{\mathbf{B}}_{(0, \mathbf{x})}) = \mathbf{B}_{\phi(0, \mathbf{x})} \quad (3.11)$$

Construiremos ejemplos de ecuaciones para las cuales la familia de curvas  $\mathbf{B}_{\mathbf{y}}$  determina una red mucho más compleja que la del modelo, de tal forma que no existe ni siquiera una biyección que cumpla (3.11).

Consideremos una ecuación para  $n=2$  con un punto singular doblez en  $\mathbf{0}$  y supongamos que  $\pi(S \cap E) = \{(t, \mathbf{x}) \in J^\circ \mid t = 0\}$ . Supongamos también que la ecuación no depende de la variable espacial  $\mathbf{x}$ . En este caso las curvas  $\mathbf{B}_{(0, \mathbf{x})}$ , que para abreviar denotaremos  $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}$ , viven en  $R^2$  y son traslaciones de  $\mathbf{B}_{\mathbf{0}}$ .

Además  $\mathbf{B}_{\mathbf{0}}$  es simétrica con respecto a  $\mathbf{0}$  por lo siguiente: Tomemos  $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_{\mathbf{0}}$ , ésto significa que  $\kappa_{\mathbf{0}} \cap \kappa_{\mathbf{x}} \neq \emptyset$  por lo que  $\mathbf{0} \in \mathbf{B}_{\mathbf{x}}$ . Como  $\mathbf{B}_{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{B}_{\mathbf{0}}$  entonces  $-\mathbf{x} \in \mathbf{B}_{\mathbf{0}}$ .

Veremos que dentro de estas restricciones todas las familias  $\{\mathbf{B}_{\mathbf{x}}\}$  de curvas lisas<sup>2</sup> en  $R^2$  con las propiedades

i)  $\mathbf{B}_{\mathbf{0}}$  es una curva simétrica con respecto a  $\mathbf{0}$ , que contiene a  $\mathbf{0}$ .

ii)  $\mathbf{B}_{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{B}_{\mathbf{0}}$

son realizables por una ecuación.

En la demostración se supondrá que  $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}$  puede ser parametrizada a través de una función de la forma  $y \mapsto (x(y), y)$ , en caso de que no sea así se puede modificar un poco la ecuación de tal forma que lo anterior siga siendo válido.

**Proposición 7:** Sea  $x : (R, 0) \rightarrow (R, 0)$  una función impar.

Si  $h : (R, 0) \rightarrow R$  cumple que su parte impar está dada por

$$\frac{h(p_2) - h(-p_2)}{2} = p_2 x' \left( \frac{2}{3} p_2^3 \right)$$

entonces la ecuación

$$\begin{aligned} p_1 - h(p_2) &= 0 \\ \frac{p_2^2}{2} + t &= 0 \end{aligned}$$

cumple que

o)  $(0, \mathbf{0}, 0, h(0))$  es un punto singular doblez

i)  $\pi(S \cap E) = \{(t, \mathbf{x}) \in J^\circ \mid t = 0\}$

ii)  $\mathbf{B}_{\mathbf{0}}$  es la imagen de  $y \mapsto (x(y), y)$ .

iii)  $\mathbf{B}_{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{B}_{\mathbf{0}}$

**Demostración:** Tomando  $h$  arbitraria, se cumplen (o), (i) y (iii).

Para checar (ii) haremos lo siguiente:

---

<sup>2</sup>Se puede pedir algo menos que ser lisas.

Tomemos la parametrización de  $\kappa_{(o, \mathbf{x}_o)}$  dada por  $\kappa_{\mathbf{x}_o} = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  donde

$$\begin{aligned} t(p_2) &= -\frac{p_2^2}{2} \\ x_1(p_2) &= x_{o_1} + \int_o^{p_2} \frac{dx_1}{dt} \frac{dt}{dp_2} dp_2 = x_{o_1} - \int_o^{p_2} h(s) ds \\ x_2(p_2) &= x_{o_2} - \frac{p_2^3}{3} \end{aligned}$$

Una parametrización  $\beta$  de  $\mathbf{B}_{(o, \mathbf{x}_o)}$  queda definida implícitamente por

$$\kappa_{\beta(p_2)}(-p_2) = \kappa_{\mathbf{x}_o}(p_2)$$

Despejando se obtiene que

$$\beta(p_2) = \mathbf{x}_o - \left( \int_{-p_2}^{p_2} h(s) ds, \frac{2}{3} p_2^3 \right)$$

Otra parametrización de  $\mathbf{B}_{(o, \mathbf{x}_o)}$  es de la forma  $\mathbf{x}_o + (x(y), y)$ , donde  $x$  queda caracterizada por

$$x\left(\frac{2}{3} p_2^3\right) = \int_{-p_2}^{p_2} h(s) ds$$

Lo que equivale a que

$$p_2 x'\left(\frac{2}{3} p_2^3\right) = \frac{h(p_2) - h(-p_2)}{2} y x(0) = 0$$

Con lo que queda demostrada la proposición.  $\diamond$

De lo anterior se sigue que hay más de una clase, módulo contactomorfismos<sup>3</sup> dentro de las ecuaciones con un punto singular doblez. De hecho una clasificación de este tipo no sería manejable pues hay demasiadas clases.

**Teorema 8:** Hay un espacio de dimensión infinita formado por ecuaciones que no son equivalentes bajo contactomorfismos.

Esto se debe a que la geometría de la red formada por las curvas  $\mathbf{B}_y$  es muy rígida. El teorema es una consecuencia inmediata de la proposición anterior y del siguiente

---

<sup>3</sup>En mas de una dimensión todos los contactomorfismos son propios.

**Lema 9:** Sean  $\mathbf{B}_0$  y  $\hat{\mathbf{B}}_0$  curvas lisas en  $R^2$ , que contienen a  $\mathbf{0}$ , simétricas con respecto a  $\mathbf{0}$  y con curvatura que no se anula en una vecindad agujerada alrededor de  $\mathbf{0}$ .

Sean  $\mathbf{B}_x = \mathbf{x} + \mathbf{B}_0$  y  $\hat{\mathbf{B}}_x = \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}}_0$

Si existe un difeomorfismo  $\phi : (R^2, \mathbf{0}) \rightarrow (R^2, \mathbf{0})$  tal que  $\phi(\mathbf{B}_x) = \hat{\mathbf{B}}_{\phi(x)}$  entonces  $\phi$  es lineal.

**Demostración:**

AFIRMACIÓN 1: Si  $\mathbf{v} \in T_0 \mathbf{B}_0$  y  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  y  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{B}_0$  y  $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}_0} \mathbf{B}_0$  entonces:

i)  $d\phi(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nu(\mathbf{x})d\phi(\mathbf{0})\mathbf{v}$

ii)  $d\phi(\mathbf{x})\mathbf{w} = \xi(\mathbf{x})d\phi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)\mathbf{w}$

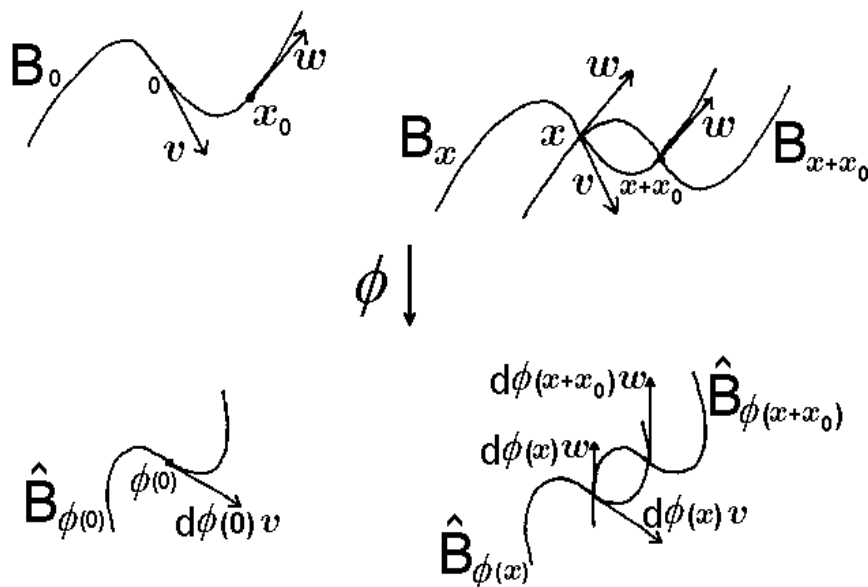
para alguna  $\nu : R^2 \rightarrow R - \{0\}$  y alguna  $\xi : R^2 \rightarrow R - \{0\}$ .

Demostración:

i)  $d\phi(\mathbf{x})\mathbf{v}$  es tangente  $\hat{\mathbf{B}}_{\phi(x)}$ , además  $\hat{\mathbf{B}}_{\phi(x)} = \phi(x) + \hat{\mathbf{B}}_0$ , por lo que la dirección  $d\phi(\mathbf{x})\mathbf{v}$  es independiente de  $\mathbf{x}$ , de donde se sigue (i)

ii) Tenemos que  $\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \in \mathbf{B}_x$  y  $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{x} + \mathbf{x}_0} \mathbf{B}_x$ . Además por la simetría de  $\mathbf{B}_0$  :

$\mathbf{x} \in \mathbf{B}_{\mathbf{x} + \mathbf{x}_0}$  y  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}} \mathbf{B}_{\mathbf{x} + \mathbf{x}_0}$  por lo que  $d\phi(\mathbf{x})\mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}(\mathbf{B}_{\phi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)})$  y por el argumento anterior  $d\phi(\mathbf{x})\mathbf{w}$  es paralelo a  $d\phi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)\mathbf{w}$ , o sea se cumple (ii)



AFIRMACIÓN 2: Bajo cambios de variables lineales en el dominio y contrado-

minio se tiene que

$$\text{i)} d\phi_1(x, y) = dx + \lambda(y)dy$$

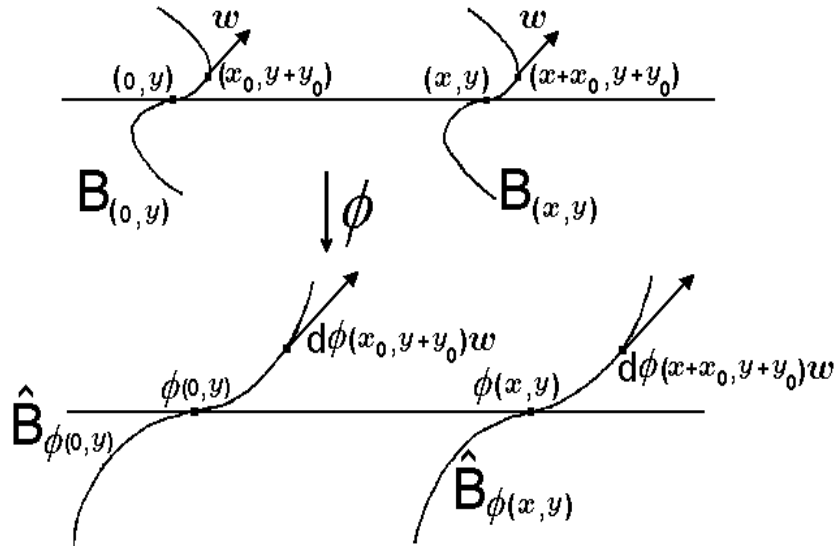
$$\text{ii)} d\phi_2(x, y) = \mu(y)dy$$

Demostración: Haciendo este tipo de cambios de variables, podemos suponer que  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$  y que  $d\phi(0) = id$ .

$d\phi_2$  es múltiplo de  $dy$  pues  $d\phi(x, y)\mathbf{e}_1 = \lambda(x, y)\mathbf{e}_1$  y  $\mu$  solo depende de  $y$  pues  $d\phi_2$  es exacta. Con esto queda demostrado (ii).

Para demostrar (i) observemos lo siguiente:

$\phi$  manda rectas horizontales en rectas horizontales, por lo que  $\hat{\mathbf{B}}_{\phi(x, y)}$  es una traslación horizontal de  $\hat{\mathbf{B}}_{\phi(0, y)}$ , por lo que si tomamos  $(x_o, y_o) \in \mathbf{B}_o$  y  $\mathbf{w} \in T_{(x_o, y_o)}\mathbf{B}_o$ , entonces:



$$d\phi(x + x_o, y + y_o)\mathbf{w} = c(x, y)d\phi(x_o, y + y_o)\mathbf{w}$$

Ahora, aplicando (ii) de la afirmación 1 tenemos que:

$$\begin{aligned} d\phi(x, y)\mathbf{w} &= \xi(x, y)d\phi((x, y) + (x_o, y_o))\mathbf{w} = \\ &= \xi(x, y)c(x, y)d\phi(x_o, y + y_o)\mathbf{w} = \\ &= \frac{\xi(x, y)c(x, y)}{\xi(0, y)}d\phi(0, y)\mathbf{w} \end{aligned}$$

Por el inciso (ii) de este lema tenemos que la segunda entrada de esta última igualdad es:

$$\mu(y)w_2 = \frac{\xi(x, y)c(x, y)}{\xi(0, y)}\mu(y)w_2$$

por lo que

$$d\phi(x, y)\mathbf{w} = d\phi(0, y)\mathbf{w} \quad (3.12)$$

Además, como  $\mathbf{B}_o$  no es una recta, podemos escoger otro punto  $(x'_o, y'_o)$  de  $\mathbf{B}_o$  y  $\mathbf{w}' \in T_{(x'_o, y'_o)}\mathbf{B}_o$  tales que  $\mathbf{w}'$  y  $\mathbf{w}$  sean linealmente independientes. Claramente la propiedad (3.12) también se cumple para  $\mathbf{w}'$  por lo que

$$d\phi(x, y) = d\phi(0, y)$$

con lo que

$$d\phi_1(x, y) = \nu(y)dx + \lambda(y)dy$$

como esta es una forma exacta entonces  $\nu$  es una constante, de hecho  $\nu = 1$  pues  $d\phi(\mathbf{0}) = id$

**AFIRMACIÓN 3:** Con las coordenadas de la afirmación anterior,  $\lambda \equiv 0$  y  $\mu \equiv 1$ .

**Demostración:** Utilizando la propiedad (ii) de la afirmación 1 y expresandola en las coordenadas dadas por la afirmación 2, se obtiene que si  $\mathbf{w} = (1, w_2) \in T_{(x_o, y_o)}\mathbf{B}_o$ , entonces se cumple que

$$w_2(\mu(y)\lambda(y + y_o) - \lambda(y)\mu(y + y_o)) = \mu(y + y_o) - \mu(y)^4 \quad (3.13)$$

Substituyendo  $y = 0$  y utilizando que  $\lambda(0) = 0$  y  $\mu(0) = 1$  se obtiene que

$$w_2\lambda(y_o) = \mu(y_o) - 1 \quad (3.14)$$

Sea  $y_o$  suficientemente pequeña de tal forma que  $\mu(y_o) \neq 0$ . Substituyendo  $y = y_o$  en (??) y utilizando (3.14) se obtiene

$$w_2\lambda(2y_o) = \mu(2y_o) - 1 \quad (3.15)$$

---

<sup>4</sup>Nótese que  $w_2$  no depende de  $y$ , sólo de  $y_o$ .

Como  $\mathbf{B}_o$  tiene tangente horizontal en  $\mathbf{0}$  y curvatura no nula fuera de  $\mathbf{0}$ , entonces localmente  $\mathbf{B}_o$  es la gráfica de una función  $y = y(x)$  tal que  $y''(x) \neq 0$  fuera de  $0$ . De aquí que para  $y_o > 0$  y suficientemente pequeña quede definida  $w_2$  como una función inyectiva y no nula de  $y_o$ .

Expresando (3.14) para  $y_o$  y (3.15) para  $\frac{1}{2}y_o$  se obtiene que

$$\begin{aligned} w_2(y_o)\lambda(y_o) &= \mu(y_o) - 1 \\ w_2(\frac{1}{2}y_o)\lambda(y_o) &= \mu(y_o) - 1 \end{aligned}$$

Como  $w_2$  es no nula y monótona para  $y_o > 0$  se obtiene que

$$\lambda(y_o) = 0 \quad y \quad \mu(y_o) = 1$$

Claramente esto también se cumple para  $y_o \leq 0$  suficientemente pequeña.  $\diamond$

### 3.3 Puntos cúspide.

En esta sección estudiaremos las ecuaciones cuyas parejas asociadas,  $(f, \mathbf{H})$ , tengan un punto singular, 2-regular. Daremos una forma normal, la cual es equivalente localmente a casi todas las ecuaciones de este tipo y veremos que consecuencias tiene esto en  $J^\circ$ .

#### 3.3.1 La forma normal

Veremos que la forma normal está dada por el germen en  $\mathbf{0}$  de la ecuación  $\hat{E}$  definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{0} \\ \frac{1}{3}p_n^3 + x_n p_n + t &= 0 \end{aligned}$$

donde estamos denotando  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, p_n) = (p_1, \dots, p_n)$

$\hat{E}$  tiene las siguientes propiedades

i)  $\hat{S} \cap \hat{E}$  es una n-variedad determinada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_n^2 + x_n &= 0 \\ 4x_n^3 - 9t^2 &= 0 \end{aligned}$$

la cual se proyecta en un cilindro cuspidal.



ii)  $\hat{S}^1 \cap E$  es la  $n-1$ -variedad dada por

$$\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

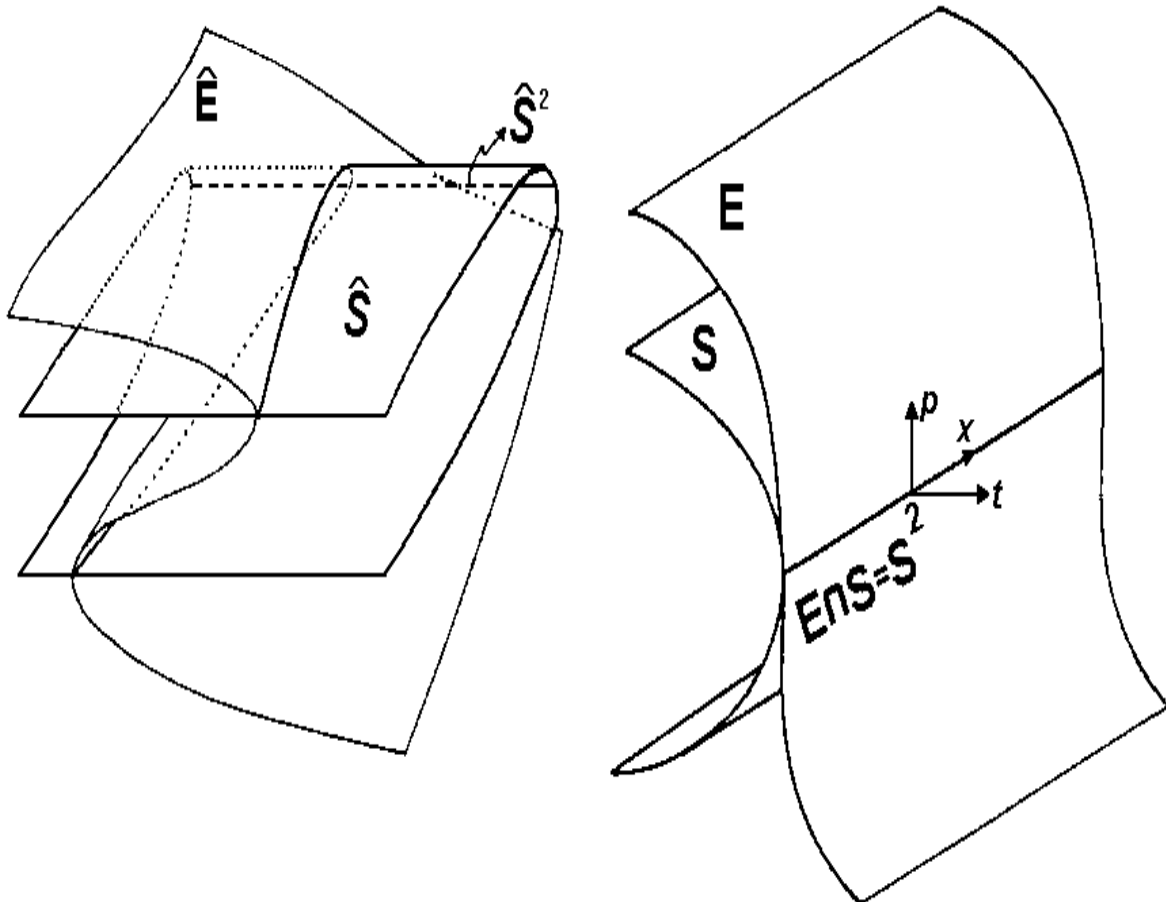
$$t = 0$$

$$x_n = 0$$

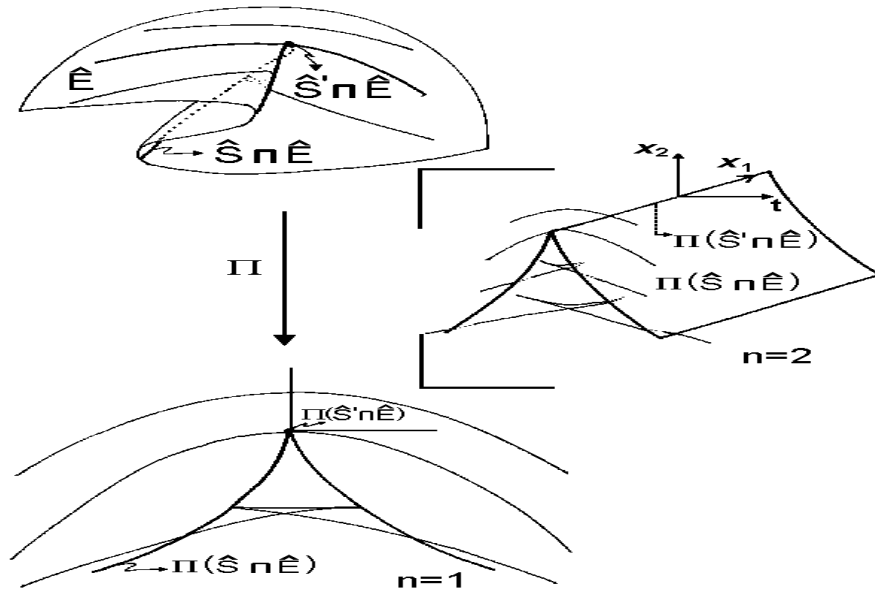
cuya proyección a  $J^o$  es un difeomorfismo.

iii)  $\pi|_{\hat{E}}$  es un mapeo cúspide.

iv) Las soluciones geométricas que pasan por  $(\hat{S} - \hat{S}^1) \cap \hat{E}$  se proyectan a cúspides y las que pasan por  $\hat{S}^1 \cap \hat{E}$  se proyectan a curvas que llamaremos curvas (3,4). Éstas son curvas difeomorfas en una vecindad de su punto singular a la imagen de  $s \mapsto (s^3, s^4)$  en una vecindad de  $\mathbf{0}$ . (En el apéndice B se da una caracterización de estas curvas).



En este caso el hecho de que las parejas  $(f, \mathbf{H})$  correspondientes a dos ecuaciones sean equivalentes, no implica que las ecuaciones lo sean, pues un difeomorfismo puede



mandar soluciones geométricas de  $E_c = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{c})$  en soluciones geométricas de  $\hat{E}_k = \hat{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{k})$  sin conservar la estructura de  $E_c$ .

**Ejemplo 1:** Consideremos las ecuaciones  $\hat{E} = \hat{F}^{-1}(0)$  y  $E = F^{-1}(0)$  donde

$$\hat{F}(t, x, p) = \frac{p^3}{3} + xp + t$$

$$F(t, x, p) = \frac{p^3}{3} + tp + t$$

Usando el corolario 8 del capítulo 1 se ve que  $\mathbf{0}$  es un punto singular, 2-regular para las parejas  $(f, \mathbf{H})$  asociadas a ambas ecuaciones, por lo que estas parejas son equivalentes en  $\mathbf{0}$ .

Veremos que sin embargo  $\hat{E}$  no es equivalente a  $E$  en  $\mathbf{0}$ .

Esto se debe a que de la equivalencia de parejas  $(f, \mathbf{H})$  se sigue que si  $\Psi$  es un difeomorfismo que realiza esa equivalencia, entonces  $\Psi(\hat{S}^l) = S^l$  por lo que si fuesen equivalentes se cumpliría que

$$\Psi(\hat{S}^1 \cap \hat{E}) = S^1 \cap E$$

Sin embargo esto es imposible pues  $\hat{S}^1 \cap \hat{E} = \{\mathbf{0}\}$ , mientras que  $S^1 \cap E$  es la 1-variedad dada por  $t = 0$  y  $p = 0$ .

Sin embargo, veremos que, si aumentamos la hipótesis de que  $S$  y  $E$  se intersecten transversalmente, entonces la equivalencia de parejas si implica la equivalencia de ecuaciones. Por lo que daremos la siguiente

**Definición:**  $\mathbf{z}_o$  es un punto *cúspide de  $E$*  si para alguna pareja  $(f, \mathbf{H})$  asociada a  $E$  se cumple que  $S \hat{\cap} E$  en  $\mathbf{z}_o$  y éste es un punto singular 2-regular de  $(f, \mathbf{H})$ .

Al igual que pasa para los puntos doblez, la definición anterior no depende de la pareja  $(f, \mathbf{H})$  escogida.

**Proposición 10:** Si  $\mathbf{z}_o$  es un punto cúspide de  $E$  entonces para cualquier pareja  $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{H}})$  asociada a  $E$  se tiene que  $\tilde{S} \hat{\cap} E$  y que  $\mathbf{z}_o$  es un punto singular, 2-regular de  $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{H}})$ .

**Demostración:** Sean  $\mathbf{F}$  y  $\tilde{\mathbf{F}}$  dos submersiones tales que, localmente  $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{0}) = E$ , en la proposición 3 se vio que existe  $\lambda : (E, \mathbf{z}_o) \rightarrow R - \{0\}$  tal que en una vecindad de  $\mathbf{z}_o$  y para  $\mathbf{z} \in E$  se cumple

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= \lambda(\mathbf{z}) \tilde{f}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{z}) &= \lambda(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

De aquí se sigue que  $(f, \mathbf{H})$  cumple

$$f(\mathbf{z}_o) = D_{\mathbf{H}}f(\mathbf{z}_o) = 0, \quad D_{\mathbf{H}}^2f(\mathbf{z}_o) \neq 0 \quad \text{y} \quad df(\mathbf{z}_o) \neq \mathbf{0}$$

si y solo si también lo cumple  $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{H}})$  lo cual implica, por el corolario 8 del capítulo 1 que  $\mathbf{z}_o$  es un punto singular 2-regular de  $(f, \mathbf{H})$  si y solo si lo es de  $(\tilde{f}, \tilde{\mathbf{H}})$ .

Nótese que la condición de que  $E \hat{\cap} S$  en  $\mathbf{z}_o$  equivale a que  $d(f|_E)(\mathbf{z}_o) \neq \mathbf{0}$ , por lo que también es cierto que  $E \hat{\cap} S$  en  $\mathbf{z}_o$  si y solo si  $E \hat{\cap} \tilde{S}$  en  $\mathbf{z}_o$ .  $\diamond$

$\hat{E}$  es una forma normal para las ecuaciones con punto cúspide en el siguiente sentido

**Teorema 11:**  $\mathbf{z}_o$  es un punto cúspide de  $E$  si y solo si  $(E, \mathbf{z}_o) \sim (\hat{E}, \mathbf{0})$ .

Claramente  $(E, \mathbf{z}_o) \sim (\hat{E}, \mathbf{0})$  implica que  $\mathbf{z}_o$  sea punto cúspide de  $E$ . La idea para demostrar la otra implicación es tomar cualquier difeomorfismo  $\zeta$  que realice la equivalencia

de  $(f, \mathbf{H})$  con  $(\hat{f}, \hat{\mathbf{H}})$  y construir otro difeomorfismo  $\phi$  que haga  $(f, \mathbf{H})$  equivalente a si mismo y que además cumpla que  $\phi(\zeta(E)) = \hat{E}$ . Tomando  $\psi = \phi \circ \zeta$  obtenemos lo deseado.

La construcción de  $\phi$  equivale a resolver un sistema de ecuaciones formado por una ecuación funcional y un sistema de ecuaciones parciales, con datos dados por el hecho de que  $\phi(\zeta(E)) = \hat{E}$ . Este problema se puede transformar en un problema de Cauchy para un sistema de ecuaciones parciales. Para hacerlo usaremos lo siguiente

**Proposición 12:** Si  $\mathbf{z}_0$  es un punto cúspide de  $E$  entonces  $E \not\wedge S^1$  en  $\mathbf{z}_0$ .

**Demostración:** Sin pérdida de generalidad supondremos que  $\mathbf{0}$  es un punto singular 2-regular de  $(f, \mathbf{H})$ , de aquí que  $S$  sea una  $2n$ -variedad y  $S^1$  una  $2n-1$ -subvariedad de  $S$ , además  $\mathbf{H}(\mathbf{0}) \in T_{\mathbf{0}}S - T_{\mathbf{0}}S^1$ , por lo que

$$T_{\mathbf{0}}S = T_{\mathbf{0}}S^1 + R\mathbf{H}(\mathbf{0}) \quad (3.16)$$

Como  $\mathbf{H}(\mathbf{0}) \in T_{\mathbf{0}}E$  se tiene que

$$T_{\mathbf{0}}E + T_{\mathbf{0}}S^1 = T_{\mathbf{0}}E + R\mathbf{H}(\mathbf{0}) + T_{\mathbf{0}}S^1$$

Usando (3.16) y que  $S \not\wedge E$  en  $\mathbf{0}$  se obtiene lo enunciado.  $\diamond$

**Lema 13:** Sea  $S = \{\mathbf{y} \in R^m \mid y_1 = 0\}$ . Si  $V$  es una  $k$ -variedad en  $R^m$  que contiene a  $\mathbf{0}$  y transversal a  $S$  en  $\mathbf{0}$ , entonces existe un germen de difeomorfismo  $\xi : (R^m, \mathbf{0}) \rightarrow (R^m, \mathbf{0})$  tal que

- i)  $\xi(V) = \{\mathbf{y} \in R^m \mid (y_{k+1}, \dots, y_m) = \mathbf{0}\}$
- ii)  $\xi_1(\mathbf{y}) = y_1$

**Demostración:** Sea  $G$  una submersión tal que  $G^{-1}(\mathbf{0}) = V$ . La transversalidad de  $V$  y  $S$  equivale a que el mapeo  $(G, y_1)$  sea una submersión en  $\mathbf{0}$ , por lo que  $r(\frac{\partial G}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial y_m})(\mathbf{0}) = m - k$ .

Sean  $y_{i_1}, \dots, y_{i_m}$  una permutación de las entradas de  $\mathbf{y}$ , con  $y_{i_1} = y_1$  tales que  $r(\frac{\partial G}{\partial y_{i_{k+1}}}, \dots, \frac{\partial G}{\partial y_{i_m}})(\mathbf{0}) = m - k$ .

De aquí tenemos que  $V$  está determinado localmente por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} y_{i_{k+1}} &= Y_{k+1}(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) \\ &\vdots \\ y_{i_m} &= Y_m(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) \end{aligned}$$

Sea  $\xi$  definido por

$$\xi_{i_j} = \begin{cases} y_{i_j} & \text{si } j \leq k \\ y_{i_j} - Y_j & \text{si } j > k \end{cases}$$

Claramente  $\xi$  es un difeomorfismo que cumple con lo enunciado.  $\diamond$

**Demostración del Teorema 11:** Sin pérdida de generalidad supondremos que  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ . Sea  $\zeta : (J^1, \mathbf{0}) \rightarrow (J^1, \mathbf{0})$  un germen de difeomorfismo tal que  $d\zeta \mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} \circ \zeta$  y  $f = \alpha \hat{f} \circ \zeta$  para algunas  $\lambda$  y  $\alpha$  funciones que no se anulen.

Para demostrar el teorema basta que exista un germen de difeomorfismo  $\phi : (J^1, \mathbf{0}) \rightarrow (J^1, \mathbf{0})$  tal que

- i)  $d\phi \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}} \circ \phi$
- ii)  $\hat{f} = \hat{f} \circ \phi$
- iii)  $\phi(\zeta(E)) = \hat{E}$

pues tomando  $\psi = \phi \circ \zeta$  obtenemos que  $E \sim \hat{E}$  mediante  $\psi$ .

Usando que  ${}^t\hat{\mathbf{H}} = (\hat{f}, \hat{f}^t \mathbf{p}, {}^t\hat{\mathbf{H}}_3)$  y denotando  $\phi = (\phi_1, \phi_{2_1}, \dots, \phi_{2_n}, \phi_{3_1}, \dots, \phi_{3_n})$ , las ecuaciones (i) y (ii) toman la forma

$$\begin{aligned} \nabla \phi_1 \cdot \hat{\mathbf{H}} &= \hat{f} \circ \phi \\ \nabla \phi_{2_i} \cdot \hat{\mathbf{H}} &= \hat{f} \circ \phi \phi_{3_i} \\ \nabla \phi_{3_i} \cdot \hat{\mathbf{H}} &= \hat{H}_{3_i} \circ \phi \\ \hat{f} &= \hat{f} \circ \phi \end{aligned}$$

Tenemos que  $\hat{f} = x_n + p_n^2$  y  ${}^t\hat{\mathbf{H}}_3 = -(1 + p_n^2)\mathbf{e}_n$  por lo que las funciones  $\phi_{2_n} = x_n$  y  $\phi_{3_n} = p_n$  son soluciones a las ecuaciones correspondientes, con esto eliminamos la ecuación funcional y nuestro problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones parciales lineales para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} \nabla \phi_1 \cdot \hat{\mathbf{H}} &= \hat{f} \\ \nabla \phi_{2_i} \cdot \hat{\mathbf{H}} &= \hat{f} \phi_{3_i} \\ \nabla \phi_{3_i} \cdot \hat{\mathbf{H}} &= 0 \end{aligned}$$

Éste tiene una solución única que es suave si se dan datos de Cauchy en una variedad no característica (o sea una  $2n$ -variedad transversal a  $\hat{\mathbf{H}}$ ).

Sea  $W = \{(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in J^1 \mid p_n = 0\}$ . Ésta es una variedad no característica. Daremos los datos de Cauchy sobre  $W$  de tal manera que se cumpla que  $\phi(\zeta(E) \cap W) = \hat{E} \cap W$ .

Sean  $V = \zeta(E) \cap W$  y  $\hat{V} = \hat{E} \cap W = \{(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in J^1 \mid t = 0, \mathbf{p} = \mathbf{0}\}$

Usaremos el lema 13 para asegurar que existe un germen de difeomorfismo  $\xi : (W, \mathbf{0}) \rightarrow (W, \mathbf{0})$  tal que  $\xi(V) = \hat{V}$  y  $\xi_{2n} = x_n$ .

Como  $\hat{S}^1 = \{(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in J^1 \mid x_n = 0, p_n = 0\}$ , basta checar que  $\hat{S}^1$  y  $V$ , vistas como subvariedades de  $W$ , son transversales en  $\mathbf{0}$ . (A este hecho la denotaremos por  $\hat{S}^1 \pitchfork_W V$ ).

Por la proposición 12,  $E \pitchfork S^1$ , por lo que  $(E \cap \zeta^{-1}(W)) \pitchfork_{\zeta^{-1}(W)} (S^1 \cap \zeta^{-1}(W))$ . Como  $\zeta$  conserva las propiedades de transversalidad y  $\zeta(S^1) = \hat{S}^1$ , entonces  $\hat{S}^1 \pitchfork_W V$ , por lo que existe  $\xi$  con las características mencionadas.

Tomemos los datos de Cauchy definidos por

$$\begin{aligned}\phi_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_1, 0) &= \xi_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_1) \\ \phi_{2_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_1, 0) &= \xi_{2_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_1) \\ \phi_{3_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_1, 0) &= \xi_{3_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}_1)\end{aligned}$$

para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Sea  $\phi$  definida por  $\phi_{2_n} = x_n$ ,  $\phi_{3_n} = p_n$  y sus otras coordenadas dadas por la solución al problema de Cauchy mencionado. Claramente  $\phi|_W = \xi \times 0$  y como  $d\phi_{3_n} = dp_n$  entonces  $\phi$  es un difeomorfismo; además  $\phi(\zeta(E) \cap W) = \hat{E} \cap W$ . Veremos que esto último implica que  $\phi(\zeta(E)) = \hat{E}$  con lo que quedaría demostrado el teorema.

Esto se sigue de que  $\zeta(E) \cap W$  y  $\hat{E} \cap W$  son subvariedades de  $\zeta(E)$  y  $\hat{E}$  - respectivamente- de codimensión 1, las cuales no tienen como vector tangente a  $\hat{\mathbf{H}}$ . Además las curvas integrales de  $\hat{\mathbf{H}}$  son una foliación de  $\zeta(E)$  y de  $\hat{E}$ . Como  $\phi$  preserva estas curvas entonces  $\phi(\zeta(E)) = \hat{E}$ .  $\diamond$

### 3.3.2 Curvas integrales y su relación con $\hat{E}$

En esta parte estudiaremos las curvas integrales de una ecuación  $E$  en la cercanía de la proyección de un punto cúspide.

Veremos como se puede transmitir la información que se tiene en  $J^1$  acerca de las relaciones entre la ecuación  $E$  y el modelo  $\hat{E}$ , al espacio  $J^0$ . Para esto analizaremos las

propiedades que tiene el mapeo

$$\hat{\pi} = \pi \circ \Psi |_{\hat{E}}$$

donde  $\Psi$  es un difeomorfismo que realiza la equivalencia de la ecuaciones (con  $\Psi(\hat{E}) = E$ ).

Las curvas integrales de  $E$  son las imágenes bajo  $\hat{\pi}$  de las soluciones geométricas de  $\hat{E}$ . Utilizando una caracterización de los mapeos cúspide dada en el apéndice B, veremos que  $\hat{\pi}$  es un mapeo cúspide. Este hecho y algunas propiedades de las soluciones geométricas implican que las curvas integrales de  $E$  sean curvas regulares, cúspides o curvas (3-4).

### Los conjuntos $\Sigma^l$

Empezaremos por ver cuales son las propiedades de las restricciones a  $E$  de los conjuntos  $S^l$  definidos por (2.6) en la sección 1.3, así como de sus proyecciones a  $J^\circ$ .

Sea

$$\Sigma^l = S^l \cap E$$

Nótese que una de las propiedades que pedimos para que  $\mathbf{z}_o$  sea un punto singular cúspide es que  $S \not\perp E$  en  $\mathbf{z}_o$ , en cuyo caso  $S^1$  también es transversal a  $E$  (Ver la proposición 12) lo que garantiza que  $\Sigma$  y  $\Sigma^1$  son, localmente, subvariedades de  $E$  de dimensiones  $n$  y  $n-1$  respectivamente. Además como  $\mathbf{z}_o$  es un punto singular, 2-regular de  $(f, \mathbf{H})$ , tenemos que  $\Sigma^2 = \emptyset$ . (Ver el corolario 7 del capítulo 1).

Ahora caracterizaremos a los conjuntos  $\Sigma^l$  a través de propiedades relacionadas con  $\pi |_E$ . Para  $\mathbf{z} \in E - \Sigma$ ,  $\pi |_E$  es una inmersión en  $\mathbf{z}$ , pues  $f = \det \mathbf{F}_\mathbf{p}$ , de hecho se cumple que

$$\Sigma = \{\mathbf{z} \in E \mid \pi |_E \text{ no es inmersión en } \mathbf{z}\}$$

El campo  $\mathbf{H}$  juega un papel relevante en tanto a dicha proyección, pues para  $\mathbf{z} \in \Sigma$

$$RH(\mathbf{z}) = \ker d(\pi |_E)(\mathbf{z}) \quad (3.17)$$

Esto se debe a lo siguiente: Claramente en  $\Sigma$ ,  $\mathbf{H} \in \ker d(\pi |_E)$  pues  $\mathbf{H} \in T_\mathbf{z} E$  y es de la forma  ${}^t \mathbf{H} = (f, f^t \mathbf{p}, {}^t \mathbf{H}_3)$ . Además vimos en la proposición 1 de 2.1 que

$$d\pi(\mathbf{z})(T_\mathbf{z} E) + R(1, \mathbf{p}) = T_\mathbf{z}(J^\circ) \quad (3.18)$$

por lo que  $\pi|_E$  es de corranjo 1 en  $\Sigma$ , lo que garantiza (3.17).

Se puede ver usando (3.17) y propiedades de la transversalidad de  $S$  y  $S^1$  que  $\mathbf{z} \in \Sigma^l$  si y solo si  $\ker d(\pi|_E)(\mathbf{z}) \subset T_{\mathbf{z}}(\Sigma^{l-1})$ , por lo que para  $l \in \{1, 2\}$ , denotando  $\Sigma^0 = \Sigma$

$$\Sigma^l = \left\{ \mathbf{z} \in \Sigma^{l-1} \mid \pi|_{\Sigma^{l-1}} \text{ no es inmersión en } \mathbf{z} \right\}$$

Como  $\Sigma^2 = \emptyset$ , tenemos que  $\pi|_{\Sigma^1}$  es una inmersión, en particular  $\pi(\Sigma^1)$  es una  $(n-1)$ -variedad.

Resumiendo algunos de los puntos que acabamos de ver, tenemos la siguiente

**Proposición 14:** Si  $\mathbf{z}_0$  es un punto cúspide de  $E$  y  $\Sigma^l = S^l \cap E$ , entonces

- a)  $\Sigma$  y  $\Sigma^1$  son variedades de dimensión  $n$  y  $n-1$  respectivamente y  $\Sigma^2 = \emptyset$ .
- b)  $\pi|_E$  es un mapeo de corranjo menor o igual que 1. En particular para  $\mathbf{z} \in \Sigma$

$$RH(z) = \ker d(\pi|_E)(z)$$

- c)  $\pi|_{\Sigma}$  no es una inmersión y  $\pi|_{\Sigma^1}$  si lo es.

### ¿Que tan singular es $\hat{\pi}$ ?

Como dijimos anteriormente el mapeo

$$\hat{\pi} = \pi \circ \Psi|_{\hat{E}} \tag{3.19}$$

manda las soluciones geométricas de la ecuacion modelo en las curvas integrales de la ecuación  $E = \Psi(\hat{E})$ .

De las propiedades de  $\Psi$  se sigue que el campo  $\hat{\mathbf{H}}$  genera al  $\ker d\hat{\pi}$ , cuando este último es distinto de  $\{\mathbf{0}\}$  (o sea en  $\hat{\Sigma}$ ), por lo que es de esperarse que una medida de que tan singular sea  $\hat{\pi}$ , esté dada por la forma en que se anula  $d\hat{\pi}\hat{\mathbf{H}}$ .

El hecho de que  $\hat{f}$  y  $d\Psi\hat{\mathbf{H}}$  sean, respectivamente múltiplos no nulos de  $f \circ \Psi$  y  $\mathbf{H} \circ \Psi$  implica que

$$d\hat{\pi}\hat{\mathbf{H}} = \mu\hat{f}(1, \Psi_3)$$

donde  $\mu$  es un germen de función no nula.

Notese que sabemos explícitamente los valores de  $\hat{f}$ , por lo que la expresión anterior nos permite estimar que tan fuertemente se anula  $d\hat{\pi}\hat{\mathbf{H}}$



En la segunda parte de la siguiente proposición traducimos esta expresión en términos de la expresión de  $\hat{\pi}$  bajo un determinado sistema de coordenadas de  $\hat{E}$  para el caso específico con el que estamos trabajando.

**Proposición 15:** Si  $(\hat{E}, \mathbf{0}) \sim (E, \mathbf{z}_0)$  y  $\hat{\pi}$  está dada por (3.19), entonces existe una función no nula  $\mu$  tal que

$$d\hat{\pi}\hat{\mathbf{H}} = \mu\hat{f}(1, \Psi_3)$$

Si además  $\hat{E}$  es la ecuación modelo, y  $\eta$  es la parametrización de  $\hat{E}$  dada por

$$\eta(\mathbf{x}, p_n) = \left( -\frac{p_n^3}{3} - x_n p_n, \mathbf{x}, \mathbf{0}, p_n \right)$$

y definimos el mapeo

$$(T, \mathbf{X}) = \hat{\pi} \circ \eta \tag{3.20}$$

se cumple que

$$\frac{\partial(T, \mathbf{X})}{\partial p_n}(\mathbf{x}, p_n) = (p_n^2 + x_n)(\alpha(\mathbf{x}, p_n) \cdot \beta(\mathbf{x}, p_n))$$

donde  $\alpha(\mathbf{0}) \neq 0$ .

**Demostración:** La primera parte se demostró en el texto. Consideremos el campo  $\hat{G}$  determinado por

$$d\eta\hat{G} = \hat{\mathbf{H}} \circ \eta$$

Por la primera parte de este lema, se cumple que

$$d(T, \mathbf{X})\hat{G} = \mu \circ \eta \hat{f} \circ \eta (1, \Psi_3 \circ \eta) \tag{3.21}$$

Utilizando que

$$\hat{f} = p_n^2 + x_n y \hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{f}\mathbf{p} \\ -(1 + p_n^2)\mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

se obtiene que

$${}^t\hat{G} = (0, \dots, 0, (p_n^2 + x_n)p_n, -(1 + p_n^2))$$

por lo que

$$d(T, \mathbf{X})\hat{G} = (p_n^2 + x_n)p_n \frac{\partial(T, \mathbf{X})}{\partial x_n} - (1 + p_n^2) \frac{\partial(T, \mathbf{X})}{\partial p_n}$$

Utilizando (3.21) se puede despejar

$$\frac{\partial(T, \mathbf{X})}{\partial p_n} = (p_n^2 + x_n)(\alpha, \beta)$$

donde  $\alpha = \frac{p_n \frac{\partial T}{\partial x_n} - \mu \circ \eta}{1 + p_n^2}$ , por lo que  $\alpha(\mathbf{0}) = \mu(\mathbf{0}) \neq 0$ .  $\diamond$

$\hat{\pi}$  es un mapeo cúspide.

Para demostrar que  $\hat{\pi}$  es un mapeo cúspide usaremos una caracterización de este tipo de mapeos, la cual involucra la siguiente

**Definición:** Sea  $M$  una variedad y  $G : (M, z_o) \rightarrow R^m$ . El orden por curvas de  $G$  en  $z_o$ , que denotaremos  $o_G(z_o)$  es el máximo de los ordenes en 0 de las curvas de la forma  $G \circ \alpha$ , donde  $\alpha$  es cualquier curva en  $M$  que cumpla que  $\alpha(0) = z_o$  y  $\alpha'(0) \neq \mathbf{0}$ .

La caracterización de la que hablamos se demuestra en el apéndice B y es la siguiente

**Teorema:** El mapeo  $G : (R^m, z_o) \rightarrow R^m$  es cúspide si y solo si se cumplen las siguientes condiciones

- i)  $G$  es de corrancho 1 en  $z_o$ .
- ii)  $\det(dG)$  es submersión en  $z_o$ .
- iii)  $o_G(z_o) = 3$ .

**Teorema 16:** Si  $\mathbf{z}_o$  es un punto cúspide de  $E$ , entonces  $\hat{\pi}$  (definido en 3.19) es un mapeo cúspide.

**Demostración:** La demostración la haremos primero en un caso particular y después veremos que este caso implica los demás.

CASO 1: Supondremos que

$$\hat{\pi}(0, \mathbf{x}, \mathbf{0}) = (0, \mathbf{x}) \tag{3.22}$$

En este caso demostraremos que el mapeo  $(T, \mathbf{X})$  definido en (3.20) es un mapeo cúspide en  $\mathbf{0}$ .

Claramente  $(T, \mathbf{X})$  es de corrancho 1 en  $\mathbf{0}$ , pues  $\pi$  lo es en  $\mathbf{z}_0$ . (Ver proposición 14), por lo que basta demostrar las condiciones (ii) y (iii) de la caracterización que acabamos de mencionar.

Primero traduciremos las condiciones (ii) y (iii) en términos de las parciales de  $(T, \mathbf{X})$  y después checaremos que  $(T, \mathbf{X})$  las cumple.

AFIRMACIÓN 1: Si  $(\mathbf{x}, p_n) \mapsto (T, \mathbf{X})$  define cualquier mapeo que cumple

$$(T, \mathbf{X})_{p_n}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

$$T_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}y\mathbf{X}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = id \quad (3.24)$$

entonces se tiene que

a)  $\det d(T, \mathbf{X})$  es una submersión en  $\mathbf{0}$  si y solo si  $\frac{\partial T}{\partial p_n}$  lo es también en  $\mathbf{0}$ .

b)  $o_{(T, \mathbf{X})}(\mathbf{0}) = 3$  si y solo si

$$\frac{\partial^2 T}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) = 0y \frac{\partial^3 T}{\partial p_n^3}(\mathbf{0}) \neq \left( \frac{\partial T}{\partial p_n} \right)_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial p_n}(\mathbf{0}) \quad (3.25)$$

Demostración:

a) Desarrollando por menores respecto a la última columna se tiene que

$$\det d(T, \mathbf{X}) = \frac{\partial T}{\partial p_n} \det \mathbf{X}_{\mathbf{x}} + \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial p_n} \delta_i$$

donde  $\delta_i$  es el determinante del menor correspondiente.

Utilizando (3.23) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\det d(T, \mathbf{X}))(\mathbf{0}) &= \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial p_n}(\mathbf{0}) \det \mathbf{X}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) + \sum_i \frac{\partial^2 X^i}{\partial y \partial p_n}(\mathbf{0}) \delta_i(\mathbf{0}) \\ &= \det \begin{pmatrix} T_{\mathbf{x}} & \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial p_n} \\ \mathbf{X}_{\mathbf{x}} & \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial y \partial p_n} \end{pmatrix}(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

Por lo que, usando (3.24), se obtiene que

$$\nabla \det d(T, \mathbf{X})(\mathbf{0}) = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial p_n}, \dots, \frac{\partial^2 T}{\partial x_n \partial p_n}, \frac{\partial^2 T}{\partial p_n^2} \right)(\mathbf{0})$$

con lo que se demuestra (a).

b) Nótese que  $\ker(T, \mathbf{X})(\mathbf{0}) = \mathbf{e}_{n+1}$  por lo que  $o_{(T, \mathbf{X})}(\mathbf{0}) \geq 1$  y además para medir el orden de  $(T, \mathbf{X})$  basta usar curvas de la forma

$$\alpha(p_n) = (\mathbf{x}(p_n), p_n) \text{ donde } \mathbf{x}'(0) = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

pues si una curva es tal que  $\alpha'(0) \neq \mathbf{0}$  y  $((T, \mathbf{X}) \circ \alpha)'(0) = \mathbf{0}$ , entonces  $\alpha'(0) = (\mathbf{0}, \alpha_o) \neq \mathbf{0}$ , por lo que se puede reparametrizar de la forma (3.26).

Expresaremos  $((T, \mathbf{X}) \circ \alpha)''(0)$  y  $((T, \mathbf{X}) \circ \alpha)'''(0)$  en términos de las parciales de  $(T, \mathbf{X})$ . Para esto usaremos que si  $h : R^m \rightarrow R$  y  $\alpha : (R, 0) \rightarrow (R^m, \mathbf{0})$  entonces

$$(h \circ \alpha)''(0) = d^2h(\mathbf{0})(\alpha'(0), \alpha'(0)) + dh(\mathbf{0})\alpha''(0)$$

$$(h \circ \alpha)'''(0) = d^3h(\mathbf{0})(\alpha'(0), \alpha'(0), \alpha'(0)) + 3d^2h(\mathbf{0})(\alpha'(0), \alpha''(0)) + dh(\mathbf{0})\alpha'''(0)$$

Aplicando esto a las entradas de  $(T, \mathbf{X})$  y utilizando (3.23), (3.24) y (3.26) se obtiene que

$$((T, \mathbf{X}) \circ \alpha)''(0) = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}), \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) + \mathbf{x}''(0) \right)$$

$$((T, \mathbf{X}) \circ \alpha)'''(0) = \left( \frac{\partial^3 T}{\partial p_n^3}(\mathbf{0}) + \left( \frac{\partial T}{\partial p_n} \right)_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x}''(0), \beta + \mathbf{x}'''(0) \right)$$

para algún  $\beta \in R^n$ . Por lo que  $o_{(T, \mathbf{X})}(\mathbf{0}) > 2$  si y solo si  $\frac{\partial^2 T}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) = 0$  y bajo este supuesto  $o_{(T, \mathbf{X})}(\mathbf{0}) = 3$  si y solo si  $\frac{\partial^3 T}{\partial p_n^3}(\mathbf{0}) - \left( \frac{\partial T}{\partial p_n} \right)_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) \neq 0$ . El "si" es inmediato, el "solo si" se debe a que si no fuese así, entonces cualquier curva  $\alpha$  de la forma (3.26) tal que  $\mathbf{x}''(0) = -\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial p_n^2}(\mathbf{0})$  y  $\mathbf{x}'''(0) = -\beta$  cumpliría que el orden de  $(T, \mathbf{X}) \circ \alpha$  en 0 sería mayor que 3.

Ahora vemos que el mapeo  $(T, \mathbf{X})$  definido en (3.20) es cúspide. Por la hipótesis (3.22),  $(T, \mathbf{X})$  cumple (3.23) y (3.24), por lo que basta checar que  $\nabla \frac{\partial T}{\partial p_n}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$  y (3.25). Esto es una consecuencia inmediata de la proposición 15.

Tenemos que

$$\frac{\partial T}{\partial p_n}(\mathbf{x}, p_n) = (p_n^2 + x_n) \alpha(\mathbf{x}, p_n)$$

donde  $\alpha(\mathbf{0}) \neq 0$ .

De aquí que la curva

$$p_n \mapsto \frac{\partial T}{\partial p_n}(\mathbf{0}, p_n)$$

tenga orden 2 en 0, lo que garantiza que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) = 0y \frac{\partial^3 T}{\partial p_n^3}(\mathbf{0}) \neq 0 \quad (3.27)$$

Análogamente, usando también el lema 4 se obtiene que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_n \partial p_n}(\mathbf{0}) \neq 0y \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial p_n^2}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

lo que aunado a (3.27) implica  $\nabla \frac{\partial T}{\partial p_n}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$  y (3.25), con lo que queda demostrado el caso 1.

CASO 2. (El complemento del caso 1). Notese que el teorema es válido para una ecuación  $E$  particular si y solo si lo es para una de la forma  $E' = C_\phi(E)$ , donde  $C_\phi$  es el contactomorfismo propio inducido por  $\phi$ . Esto se debe a la proposición 2 y a que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} & & \Psi & & C_\phi \\ \hat{E} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E' \\ & & \hat{\pi} \searrow & \downarrow \pi & \downarrow \pi \\ & & & J^\circ & \longrightarrow & J^\circ \\ & & & & & \phi \end{array}$$

por lo que  $\hat{\pi}$  es cúspide si y solo si  $\pi \circ (C_\phi \circ \Psi)$  lo es.

De aquí que para demostrar este caso basta checar que dada cualquier ecuación  $E$  equivalente a  $\hat{E}$  en  $\{\mathbf{z}_o, \mathbf{0}\}$  existe un difeomorfismo  $\phi : (J^\circ, (t_o, \mathbf{x}_o)) \rightarrow (J^\circ, \mathbf{0})$  tal que  $\phi \circ \hat{\pi}$  sea como en el caso 1 y además se pueda levantar a un contactomorfismo definido en una vecindad de  $\mathbf{z}_o$ . Esto último queda garantizado por que  $\phi_t^1(\mathbf{z}_o) + \phi_x^1(\mathbf{z}_o) \cdot \mathbf{p}_o \neq 0$  (Ver (3.4) y (3.5) en la sección 2.1).

Construiremos  $\phi$  con esas características. Sin pérdida de generalidad supondremos que  $\mathbf{z}_o = \mathbf{0}$ . Sea  $R = \{(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in J^1 \mid t = 0, \mathbf{p} = \mathbf{0}\}$ .  $R$  es una subvariedad de  $\hat{E}$  que cumple que cumple que  $\hat{\mathbf{H}}$  no es tangente a  $R$ , y utilizando el lema 3, obtenemos que en  $\hat{\Sigma}$ ,  $gen \{\mathbf{H}\} = \ker d\hat{\pi}$ , por lo que  $\hat{\pi}|_R$  es una inmersión en  $\mathbf{0}$ . Además usando (3.18) y que estamos suponiendo que  $\mathbf{p}_o = \mathbf{0}$ , se obtiene que  $\hat{\pi}(R)$  se puede parametrizar de la forma

$$\mathbf{X} \longmapsto (T(\mathbf{X}), \mathbf{X})$$

y a través de esta parametrización la inversa local de  $\hat{\pi}|_R$  se puede expresar de la forma

$$(\hat{\pi}|_R)^{-1}(T(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = (0, \mathbf{x}(\mathbf{X}), \mathbf{0}) \quad (3.28)$$

donde  $\mathbf{x} : (R^n, \mathbf{0}) \rightarrow (R^n, \mathbf{0})$  es un difeomorfismo local.

Sea  $\phi$  definida por

$$\phi(T, \mathbf{X}) = (T - T(\mathbf{X}), \mathbf{x}(\mathbf{X})) \quad (3.29)$$

Como  $\mathbf{X} \mapsto (0, \mathbf{x}(\mathbf{X}), \mathbf{0})$  es una parametrización local de  $R$ , usando (3.28) y (3.29) se sigue que  $\phi \circ \hat{\pi}(0, \mathbf{x}, \mathbf{0}) = (0, \mathbf{x})$  además  $\phi_t^1 = 1$ , por lo que  $\phi$  se puede levantar a un contactomorfismo definido en una vecindad de  $\mathbf{0}$ . Con esto tenemos que la ecuación  $E' = C_\phi(E)$  entra dentro del primer caso y por tanto  $\hat{\pi}$  es un mapeo cúspide.  $\diamond$

### Propiedades de las curvas integrales.

El siguiente teorema da algunas propiedades referentes a las curvas integrales de una ecuación que tiene un punto singular cúspide. Unas son en torno a su comportamiento microscópico individual y otras en tanto a la forma en que están estructuradas en  $J^\circ$

**Teorema 17:** Si  $\mathbf{z}_o$  es un punto cúspide de  $E$  entonces, restringiendo  $E$  a una vecindad de  $\mathbf{z}_o$  se tiene

a)  $\pi(\Sigma^1)$  es una  $(n-1)$ -variedad y  $\pi(\Sigma)$  es difeomorfo a un cilindro cuspidal.

b)  $\pi(\Sigma)$  divide a una vecindad de  $J^\circ$  en dos regiones, por cada punto de una de ellas pasa una única curva integral, la cual es lisa, y por cada punto de la otra pasan tres curvas integrales, también lisas. Por cada punto de  $\pi(\Sigma - \Sigma^1)$  pasan dos curvas integrales: una cúspide y otra lisa y por cada punto de  $\pi(\Sigma^1)$  pasa una curva (3,4).

**Demostración:** Sabemos que  $\pi|_E$  es un mapeo cúspide en  $\mathbf{z}_o$  y por tanto un mapeo doblez en puntos de  $\Sigma - \Sigma^1$ . De esto se siguen las propiedades enunciadas a excepción de la referente a la forma local de las curvas integrales que pasan por  $\pi(\Sigma^1)$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mathbf{z}_o = \mathbf{0}$ . Sea  $\gamma = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  la parametrización de la solución geométrica que pasa por  $\mathbf{0}$  que cumple  $\gamma' = \mathbf{H} \circ \gamma$  y  $\gamma(0) = \mathbf{0}$ . Por la forma de  $\mathbf{H}$  se tiene que

$$(t, \mathbf{x})' = f \circ \gamma(1, \mathbf{p})$$

Como  $\mathbf{0}$  es un punto singular, 2-regular de  $(f, \mathbf{H})$  el orden de  $f \circ \gamma$  en 0 es dos,

(ver el corolario 8 del capítulo 1) por lo que derivando la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned}(t, \mathbf{x})''(0) &= \mathbf{0} \\ (t, \mathbf{x})'''(0) &= (f \circ \gamma)''(0) (1, \mathbf{0}) \\ (t, \mathbf{x})^{IV}(0) &= (f \circ \gamma)'''(0) (1, \mathbf{0}) + 3(f \circ \gamma)''(0) (1, \mathbf{p}'(0))\end{aligned}$$

Como además  $\mathbf{p}'(0) \neq \mathbf{0}$  los dos últimos vectores son linealmente independientes, por lo que  $(t, \mathbf{x})$  es una curva (3,4), como lo garantiza el teorema 1 del apéndice B.  $\diamond$

Dentro de las limitaciones impuestas por este teorema, puede haber una gran variedad de comportamientos distintos de las curvas integrales, esto se debe a que el tipo de relación de equivalencia que estamos usando no induce un difeomorfismo en  $J^\circ$ . Veremos algunos ejemplos que muestran la diversidad que hay en la estructura de las curvas integrales de una ecuación en la cercanía de un punto cúspide.

Una de las características de la ecuación modelo es que sus curvas integrales están contenidas en los planos dados por  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}$ , esto determina una foliación de  $J^\circ$ , cuyas hojas contienen a las curvas integrales de la ecuación. El hecho de que la dimensión de las hojas sea dos es atípico.

El espacio tangente a cada una de las hojas de una foliación como la mencionada debe contener a los vectores de la forma  $(1, \mathbf{p})$  donde  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  es un punto de la ecuación. En el caso de que  $E$  tenga un punto cúspide, hay una región de  $J^\circ$  donde  $\pi|_E$  es 3 a 1 por lo que es de esperarse que, en general, las hojas de dicha foliación sean al menos tridimensionales.

Analizaremos algunas ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 - \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, p_n) &= \mathbf{0} \\ \frac{p_n^3}{3} + p_n x_n + t &= 0\end{aligned}\tag{3.30}$$

las cuales tienen un punto singular en  $\mathbf{0}$  si  $\mathbf{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

**Ejemplo 2:** Sea  $E$  como en (3.30) donde  $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}, p_n) = \mathbf{P}(p_n)$ . Veremos que en general las curvas integrales de  $E$  no están contenidas en las hojas de una foliación bidimensional.

En este caso, si  $x_n < 0$  entonces  $(0, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in E$  si y solo si

$$(1, \mathbf{p}) \in \{(1, \mathbf{0}), (1, \mathbf{P}(q), q), (1, \mathbf{P}(-q), -q)\}$$

donde  $\frac{q^2}{3} + x_n = 0$ .

Se puede ver que el generado por este conjunto tiene dimensión 2 si y solo si todas las entradas de  $\mathbf{P}$  son funciones impares, lo que es un comportamiento inestable.

**Ejemplo 3:** Ahora tomaremos  $E$  como en (3.30), con  $n=2$  y  $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = a(t)p_2$ .

En este caso para  $(t, \mathbf{x})$  que cumplan  $9t^2 + 4x_2^3 < 0$ , el espacio generado por

$$\{(1, \mathbf{p}) \mid (t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in E\} \tag{3.31}$$

tiene dimensión 2. Sin embargo esto no garantiza que las curvas integrales de la ecuación estén contenidas en una foliación bidimensional.

Para ver esto construiremos una unoforma  $\beta$  tal que su nucleo sea el espacio generado por (3.31). una condición equivalente a que la estructura inducida por  $\ker \beta$  sea integrable es que  $d\beta|_{\ker \beta}$  sea nula.

En nuestro caso se puede ver que el nucleo de la unoforma

$$\beta = dx_1 - a(t)dx_2$$

contiene a (3.31). Además

$$d\beta = -a'(t)dt \wedge dx_2$$

la cual evaluada en vectores del nucleo de  $\beta$  da

$$d\beta((\delta t, a\delta x_2, \delta x_2), (\delta t', a\delta x_2', \delta x_2')) = (\delta t'\delta x_2 - \delta t\delta x_2') a'(t)$$

Con esto obtenemos que una condición necesaria y suficiente para que las curvas integrales de las ecuaciones de este ejemplo estén contenidas en una familia de superficies bidimensionales es que  $a$  sea constante.

Con el siguiente ejemplo se muestra que ni siquiera cada curva integral vista individualmente es homeomorfa a alguna curva integral del modelo en vecindades que contengan a un punto cúspide.



**Ejemplo 4:** Tomemos la ecuación (3.30) con  $n=2$  y  $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}, p_2) = p_2^2 + x_2$ .

Las soluciones geométricas de la ecuación se pueden parametrizar por  $p_2$ , puesto que  $\mathbf{H} \cdot (0, \mathbf{0}, \mathbf{e}_2) \neq 0$ . Sea  $p_2 \mapsto (t(p_2), x_1(p_2), x_2(p_2))$  una parametrización de una curva integral de la ecuación. Tenemos que

$$\frac{dx_1}{dp_2} = p_1 \frac{dt}{dp_2} = -\frac{(p_2^2 + x_2)^2}{p_2^2 + 1}$$

Como esto siempre es menor o igual que 0, las curvas integrales de esta ecuación no se autocruzan, mientras que todas las del modelo que pasen por puntos de  $\pi(\hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}^1)$  sí lo hacen.

Finalmente daremos un ejemplo de una ecuación cuyas curvas integrales están contenidas en las hojas de una foliación bidimensional y sin embargo no existe un homeomorfismo que las mande a las curvas integrales del modelo.

**Ejemplo 5:** Sea  $E$  la ecuación dada por

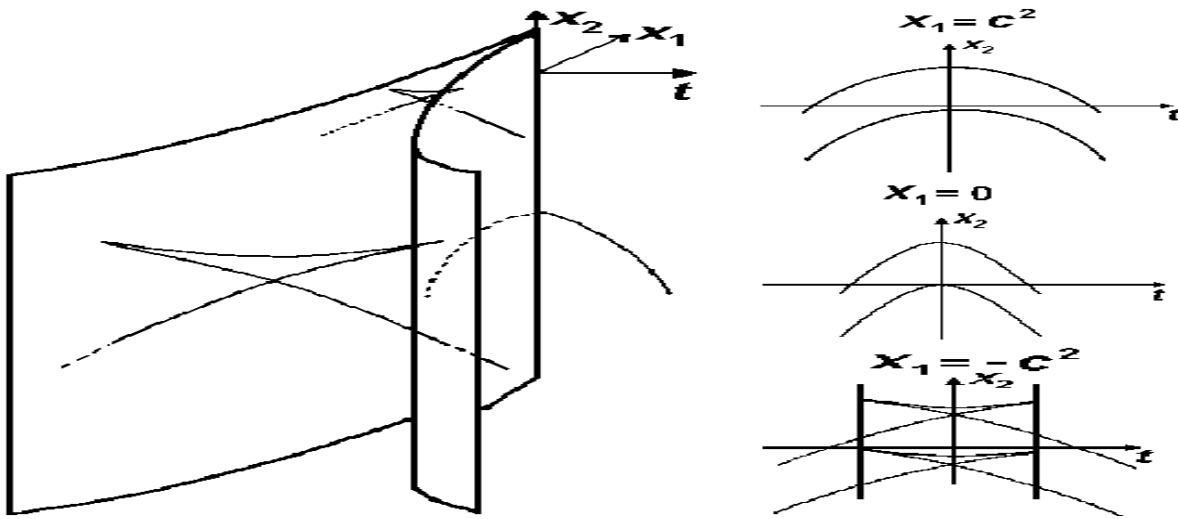
$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ \frac{p_2^3}{3} + x_1 p_2 + t &= 0 \end{aligned}$$

Se puede ver que  $\mathbf{0}$  es un punto cúspide, y que

$$\begin{aligned} \pi(\Sigma) &= \{(t, \mathbf{x}) \mid 9t^2 + 4x_1^3 = 0\} \\ \pi(\Sigma^1) &= \{(t, \mathbf{x}) \mid t = 0 \quad yx_1 = 0\} \end{aligned}$$

Además las curvas integrales de  $E$  están contenidas en los planos  $x_1 = c$  y un esquema de éstas es como se muestra en la figura. Es claro que no puede existir un homeomorfismo que mande las curvas integrales de  $E$  en las del modelo  $\hat{E}$ .

## Curvas integrales de $E$



## Curvas integrales de $\hat{E}$



## Appendix A

# Deformaciones versales

*En este apéndice daremos una idea intuitiva de lo que son las deformaciones versales de un germen  $g : (R, x_o) \rightarrow R$  y mencionaremos los resultados acerca de este tema que necesitamos para nuestro trabajo.*

*Consideremos una función  $g$  y una familia a  $m$  parámetros,  $\{g_\mu\}$  a la cual pertenece  $g$ , digamos que  $g = g_{\mu_o}$ . Esta familia la tomaremos suave en el sentido de que la función definida por  $G(x, \mu) = g_\mu(x)$  es suave. Al germen de  $G$  basado en  $(x_o, \mu_o)$  se le llama una deformación de  $g$ .*

*Una deformación versal corresponde a una familia máxima en el siguiente sentido: Consideremos el espacio de funciones definidas en un intervalo que contiene a  $x_o$  y una acción, por ejemplo la de componer por la derecha con un difeomorfismo<sup>1</sup>. Una de las condiciones que se pide para la versalidad de  $G$ , es que la unión de orbitas de  $g_\mu$  cubran una vecindad de  $g$ . Si ocurre esto, cualquier otra familia suave debe poder ponerse en términos de  $\{g_\mu\}$  a través de una familia de cambios de variable en el dominio y modificando de forma adecuada los parámetros, de hecho se pide que esto se realice suavemente en alguna vecindad de  $(x_o, \mu_o)$ .*

**Definición:** *Se dice que una deformación  $G$  de  $g$  es  $d$ -versal si para cualquier otra deformación de  $g$ ,  $G'$ , existen un germen  $\phi : (R \times R^l, (x_o, \lambda_o)) \rightarrow (R, x_o)$  de una función tal*

---

<sup>1</sup>Otra acción puede ser la de componer por la derecha y por la izquierda con dos difeomorfismos, en este caso hablaremos de deformaciones  $d,i$ -versales.

que  $\phi(x, \lambda_0) = x$  y un germen de mapeo  $\xi : (R^l, \lambda_0) \rightarrow (R^m, \mu_0)$  tales que:

$$G'(x, \lambda) = G(\phi(x, \lambda), \xi(\lambda))$$

**Ejemplo 1:** *Cualquier función cercana a  $x^2$  está en la órbita de  $x^2 + c$ , para alguna  $c$ . Veremos que  $G(x, \mu) = x^2 + \mu$  es una deformación  $d$ -versal de  $x^2$ . Sea  $G'$  otra deformación de  $x^2$  y supongamos que  $G'(x, 0) = x^2$ . Para  $\lambda$  pequeño existe una función  $\lambda \mapsto x(\lambda)$  tal que  $\frac{\partial G'}{\partial x}(x(\lambda), \lambda) = 0$ . Sea  $\psi$  el difeomorfismo definido por  $\psi(x, \lambda) = (x - x(\lambda), \lambda)$  y definamos  $H = G' \circ \psi^{-1}$ . Se cumple que  $H(x, 0) = x^2$  y que  $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda) = 0$ ; de aquí que  $H(x, \lambda) - H(0, \lambda) = x^2 H_1(x, \lambda)$  para alguna función suave  $H_1$  que no se anula en una vecindad de  $\mathbf{0}$ , por lo que  $H(x, \lambda) - H(0, \lambda)$  es el cuadrado de una función suave  $\phi$ . Con esto tenemos que  $G'(x, \lambda) = G[\phi(x - x(\lambda)), G'(x(\lambda), \lambda)]$ , o sea  $G$  es una deformación  $d$ -versal.*

Poner un dibujo

**Ejemplo 2:** *La deformación de  $x^2$  dada por  $G'(x, \lambda) = x^2 + \lambda^3$ , a pesar de que toda función cercana a  $x^2$  está en la órbita de  $G'(\cdot, \lambda)$  para alguna  $\lambda$ , no es  $d$ -versal, ya que si  $G$  es la deformación del ejemplo anterior, claramente no se puede poner  $G$  en términos de  $G'$ , con  $\xi$  suave.*

**Ejemplo 3:**  *$G(x, \lambda) = x^2 + \lambda x$  no es una deformación  $d$ -versal de  $x^2$  pues los valores críticos de  $g_\lambda$  son no-positivos, por lo que a pesar de que  $\epsilon$  sea arbitrariamente pequeño,  $x^2 + \epsilon^2$  no es  $d$ -equivalente a ninguna  $g_\lambda$ .*

**Ejemplo 4:**  *$G(x, \mu) = x^2 + \mu_1 x + \mu_2$  es una deformación  $d$ -versal de  $x^2$  pues la deformación del primer ejemplo es  $d$ -versal y "está contenida" en ésta.*

**Observación:** *Aunque la definición de  $d$ -versalidad está dada en términos de gérmenes, el hecho de que  $G$  sea una deformación  $d$ -versal de  $g$ , no significa que si  $G'$  es una función cuyo germen es otra deformación de  $g$ , entonces exista un mapeo local  $\xi$  entre*

los espacios de parámetros, tal que el germen de  $g'_\lambda$  en  $x_o$  sea  $d$ -equivalente al germen de  $g_{\xi(\lambda)}$  en  $x_o$ .

Esto lo podemos interpretar como que los gérmenes de  $\{g_\lambda\}$  en  $x_o$  no son suficientes para completar, módulo  $d$ -equivalencias, el espacio de los gérmenes de funciones cercanas a  $g$ .

**Ejemplo 5:** Sea  $g(x) = x^3$  y  $G(x, \mu_1, \mu_2) = x^3 + \mu_1 x + \mu_2$  mas adelante demostraremos que  $G$  es una deformación  $d$ -versal de  $g$ .

Notese que para  $\mu \neq 0$ , los gérmenes de  $g_\mu$  en cero, son de orden 1 y para  $\mu = 0$ , es de orden 3. Consideremos la familia dada por  $g'_\lambda(x) = x^3 + \lambda x^2$ , si  $\lambda \neq 0$ , éstas son de orden 2 en cero, por lo que sus gérmenes en 0 no pueden ser equivalentes al germen en 0 de ninguna  $g_\mu$ .

A continuación se definirá lo que significa que una deformación sea infinitesimalmente  $d$ -versal, y como veremos mas adelante, quedará caracterizada en términos mas sencillos y se verá que es equivalente a la  $d$ -versalidad.

La idea es definir adecuadamente lo que es el espacio tangente a la órbita y a una deformación de  $g$ , si la deformación es  $d$ -versal, es de esperarse que estos espacios sumen el total.

**Definición:** Las velocidades iniciales de una deformación  $G$ , en  $g$  y en  $x_o$ , son los gérmenes en  $x_o$  dados por:

$$\dot{G}_i = \frac{\partial G}{\partial \mu_i}(\cdot, \mu_o)$$

donde  $G(x, \mu_o) = g(x)$ .

**Definición:** El espacio tangente a la órbita de  $g$  (en  $g$  y en  $x_o$ ) es el  $R$ -espacio vectorial formado por las velocidades iniciales de las deformaciones de  $g$ , de la forma  $g \circ \phi$ , donde  $\phi$  es una deformación a un parámetro de la identidad.

**Observación:** Aquí cuando hablamos de la órbita de  $g$ , nos referimos a ésta en el espacio de funciones definidas en un intervalo, en este sentido, si  $\phi$  es un representante de

una deformación de la identidad, entonces para  $\mu \approx \mu_o$ , la familia  $g_\mu = g \circ \phi(\cdot, \mu)$  está en la órbita de  $g$ . Con la definición dada el espacio tangente a la órbita de  $g$  es una aproximación lineal de ésta. Sin embargo el espacio tangente está contenido en el espacio de gérmenes; más adelante veremos por que se define ahí .

**Definición:** Una deformación de  $g$  es infinitesimalmente versal si el espacio tangente a la órbita de  $g$  junto con las velocidades iniciales de la deformación generan al espacio de gérmenes.

Las deformaciones infinitesimalmente  $d$ -versales se pueden caracterizar de la siguiente manera

**Proposición 1:** Los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $G$  es una deformación infinitesimalmente  $d$ -versal de  $g$ .
- ii) Cualquier germen en  $x_o$ ,  $\alpha$ , se puede representar de la forma

$$\alpha = \dot{g} h + \sum_{i=1}^m c_i \dot{G}_i$$

donde  $h$  es algún germen y  $c_i \in \mathbb{R}$ .

iii)  $g$  es de orden finito en  $x_o$  y  $(G, \frac{\partial G}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}})$  es una submersión en  $(x_o, \mu_o)$ , donde  $k$  es el orden de  $g$  en  $x_o$ .

**Demostración:** La equivalencia entre (i) y (ii) es inmediata.

Si se cumple ii), entonces  $g$  es de orden finito, pues si  $g$  fuese plana, entonces la serie de Taylor de cualquier  $\alpha$  sería una combinación lineal de las series correspondientes a  $\dot{G}_i$ , lo que es imposible.

Sea  $k$  el orden de  $g$  en  $x_o$  y sean  $P_i$  gérmenes de los polinomios de Taylor centrados en  $x_o$  de orden  $k-2$  de  $\dot{G}_i$  y  $r_i$  gérmenes tales que:

$$\dot{G}_i(x) = P_i(x) + (x - x_o)^{k-1} r_i(x)$$

Análogamente, para cada  $\alpha$ , sean  $P$  y  $r$  tales que:

$$\alpha(x) = P(x) + (x - x_o)^{k-1} r(x)$$

Sea  $g_1$  tal que:

$$\dot{g}(x) = (x - x_o)^{k-1} g_1(x)$$

Con esta notación tenemos que  $G$  es infinitesimalmente  $d$ -versal si y solo si para cualquier  $P$  y para cualquier  $r$ , existen números reales,  $c_i$ , y un germen  $h$  tales que:

$$P = \sum c_i P_i$$

$$r = g_1 h + \sum c_i r_i$$

Como la segunda igualdad siempre se cumple para cualquier  $c_i$ , pues  $g_1(x_o) \neq 0$ , entonces es equivalente que  $G$  sea infinitesimalmente  $d$ -versal a que los polinomios  $P_i$  generen, como espacio vectorial a los polinomios de grado menor o igual que  $k - 2$ .

Esta última condición equivale a que la siguiente matriz, evaluada en  $x_o$ , tenga rango  $k-1$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \mu_1} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial \mu_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{k-1} G}{\partial \mu_1 \partial x^{k-2}} & \cdots & \frac{\partial^{k-1} G}{\partial \mu_m \partial x^{k-2}} \end{pmatrix}$$

Como  $g$  es de orden  $k$  en  $x_o$ , esto equivale a que se cumpla (iii).  $\diamond$

Es fácil ver que cualquier deformación  $d$ -versal es infinitesimalmente  $d$ -versal, ahora daremos un ejemplo que muestra que si se hubiese definido el espacio tangente a una órbita como un subconjunto del espacio de funciones definidas en un intervalo  $I$ , esto no sería cierto.

**Ejemplo 6:** Sea  $I = (-a, a)$  y  $g(x) = x^2 + \frac{2}{a}x^3$ ,  $G(x, \mu) = g(x) + \mu$ .

Veremos que  $G$  es una deformación  $d$ -versal de  $g$ , en  $x_o = 0$  :

Nótese que la  $d$ -versalidad es una propiedad de gérmenes, por lo que a ese nivel,  $g = \zeta^2$  para algún germen de difeomorfismo  $\zeta$ . Por otro lado es fácil ver que si  $F$  es una deformación  $d$ -versal de  $f$  y  $\zeta$  es un germen de difeomorfismo, entonces  $F(\zeta(x), \mu)$  es una deformación  $d$ -versal de  $f \circ \zeta$ . Aplicando esto, tomando como  $F(x, \mu) = x^2 + \mu$  se obtiene lo enunciado.

Sin embargo no es cierto que cualquier función  $\alpha$ , definida en el intervalo  $I$ , se pueda representar de la forma

$$\alpha = \dot{g}h + c\dot{G}$$

donde  $h$  es una función definida en  $I$ , y  $c$  una constante, pues como  $g(-\frac{a}{3}) = 0$ , las funciones representables de esa manera cumplen que  $\alpha(0) = \alpha(-\frac{a}{3})$ .

Las deformaciones  $d$ -versales reflejan la forma en que se "desdobla" un punto singular de una función, por lo que se refieren a propiedades locales. Sin embargo no se ha trabajado exclusivamente en el espacio de gérmenes, al menos en la discusión, pues las transformaciones admisibles para la  $d$ -equivalencia en este espacio son muy pocas. Por otro lado, el espacio de funciones definidas en un intervalo, es demasiado grande para poderlo cubrir con la suma de los espacios tangentes a la órbita de  $g$  y a una deformación  $d$ -versal de  $g$ , si es que éstos se piensan como subespacios de  $C^\infty(I, \mathbb{R})$ , pues, como dijimos, las deformaciones  $d$ -versales, se refieren a propiedades locales.

Dos teoremas importantes, que usaremos son: el que se refiere a la equivalencia de los conceptos de  $d$ -versalidad y  $d$ -versalidad infinitesimal, y el que se refiere a la  $d$ -equivalencia de deformaciones  $d$ -versales de funciones  $d$ -equivalentes (a un número fijo de parámetros). Las demostraciones se pueden ver en [?, ?].

**Teorema 2:** Una deformación  $G$  es  $d$ -versal en  $(x_o, \mu_o)$  si y solo si es infinitesimalmente  $d$ -versal en  $(x_o, \mu_o)$ .

**Ejemplo 7:** La deformación de  $x^k$ , a  $m$  parámetros, dada por:

$$G_k(x, \mu) = x^k + \mu_{k-2}x^{k-2} + \mu_{k-3}x^{k-3} + \dots + \mu_1x + \mu_{k-1}$$

es  $d$ -versal. Esto se puede ver checando que para toda  $l < k$ ,  $(G_k, \dots, \frac{\partial^l G_k}{\partial x^l})$  es submersión y  $G_k(\cdot, \mu)$  no tiene puntos de orden mayor que  $k$ .

**Teorema 3:** Si  $g$ , en  $x_o$  es  $d$ -equivalente a  $f$  en  $y_o$ , y  $G$  y  $F$  son deformaciones  $d$ -versales a  $m$  parámetros de  $f$  y  $g$  respectivamente, entonces existen gérmenes  $\phi : (R \times R^m, (x_o, \mu_o)) \rightarrow (R, y_o)$  y  $\xi : (R^m, \mu_o) \rightarrow (R^m, \nu_o)$  tales que:

- i)  $(\phi, \xi)$  es un germen de difeomorfismo.
- ii)  $G = F \circ (\phi, \xi)$



Una consecuencia de estos teoremas es el siguiente

**Corolario 4:** Si  $G$  es una deformación  $d$ -versal de  $g$  y el orden de  $g$  en  $x_0$  es igual a  $k$ , entonces existen  $\phi$  y  $\xi$  como en el teorema anterior tales que

$$G = G_k \circ (\phi, \xi)$$

donde  $G_k$  está definida en el ejemplo 7.

El concepto de deformación versal depende de la acción que se escoja. Hasta ahora se tomó como la acción el componer por la derecha con un difeomorfismo. En el caso de que la acción sea componer con difeomorfismos por la derecha y por la izquierda, se obtienen resultados similares, los que utilizamos en este trabajo son los siguientes.

**Definición:** Se dice que una deformación  $G$  de  $g$  es  $d, i$ -versal si para cualquier otra deformación de  $g$ ,  $G'$  se tiene que

$$G'(x, \lambda) = \psi(G(\phi(x, \lambda), \xi(\lambda)), \lambda)$$

donde  $\phi : R \times R^l \rightarrow R$ ,  $\xi : R^l \rightarrow R^m$ ,  $\psi : R \times R^l \rightarrow R$  y cumplen que  $\phi(x, 0) \equiv x$ ,  $\psi(y, 0) \equiv y$  y  $\xi(0) = 0$ .

**Teorema 5:** Sea  $g : (R, 0) \rightarrow R$  con orden  $k$  en  $0$  y  $G$  una deformación de  $g$ , entonces

A)  $G$  es  $d, i$ -versal si y solo si el mapeo definido por

$$(x, \mu) \mapsto \left( \frac{\partial G}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}} \right) (x, \mu)$$

es una submersión en  $\mathbf{0}$ .

B) Para  $k \leq m - 2$  sea  $\tilde{G}_k : R \times R^m \rightarrow R$  definida por

$$\tilde{G}_k(x, \mu) = x^k + \mu_{k-2} x^{k-2} + \mu_{k-3} x^{k-3} + \dots + \mu_1 x$$

Si  $G$  es una deformación a  $m$  parámetros de  $g$  entonces  $G$  es  $d, i$ -versal si y solo si a nivel de gérmenes se cumple

$$\psi(G(\phi(x, \mu), \xi(\mu)), \mu) = \tilde{G}_k(x, \mu)$$

donde  $\psi : (R \times R^m, (g(0), 0)) \rightarrow (R, 0)$ ,  $\phi : (R \times R^m, 0) \rightarrow (R, 0)$ ,  $\xi : (R^m, 0) \rightarrow (R^m, 0)$ , y  $\psi(\cdot, 0)$  y  $(\phi, \xi)$  son difeomorfismos.

## A.1 Genericidad.

Sea  $U$  un abierto de  $R^N$ , diremos que una propiedad de funciones en  $C^\infty(U, R)$  es genérica si las funciones que la cumplen forman un abierto y denso de  $C^\infty(U, R)$  con alguna de las topologías  $C^r$  de Whitney (finas).

Estas topologías se contruyen de la siguiente manera. Dado  $\epsilon \in C^0(U, R^+)$ , una  $(\epsilon, r)$ -vecindad de  $f$  es el conjunto de  $g \in C^\infty(U, R)$  tales que

$$\left| \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_N} f}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_N^{i_N}}(z) - \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_N} g}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_N^{i_N}}(z) \right| < \epsilon(z)$$

para todo  $z \in U$  y  $i_1, \dots, i_N$  tales que  $\sum i_j \leq r$ .

Si  $r$  es finito, una base de la topología fina  $C^r$  es la formada por las  $(\epsilon, r)$ -vecindades. La topología fina  $C^\infty$  es la generada por las topologías  $C^r$  con  $r$  en los naturales.

Un resultado que necesitamos en este trabajo es el siguiente:

Sea  $U$  un abierto de  $R \times R^m$  y denotemos por  $\mathcal{V}$  al subconjunto de  $C^\infty(U, R)$  de las funciones  $F$  que cumplen que para todo  $(x_o, \mu_o) \in F^{-1}(0)$  el germen de  $F$  en  $(x_o, \mu_o)$  es una deformación  $d$ -versal de  $x \mapsto F(x, \mu_o)$

**Teorema 6:**  $\mathcal{V}$  es un abierto y denso con la topología fina  $C^{\infty 2}$

---

<sup>2</sup>De hecho  $\mathcal{V}$  es un abierto con la topología fina  $C^{m+1}$ , lo que implica que también lo es con la topología fina  $C^r$  con  $r \geq m + 1$  y denso con la topología fina  $C^\infty$  por lo que también es denso con cualquier otra topología fina

**Demostración:** Aquí solo demostraremos la densidad. Para ver que  $\mathcal{V}$  es un abierto se puede hacer algo análogo a lo que se hizo en el capítulo 1 para demostrar que  $\Delta$  es un abierto.

**DENSIDAD** Dado  $F \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  daremos una deformación de  $F$  a  $m+2$  parámetros,  $\mathcal{F}(x, \mu, \alpha)$  de tal forma que para valores de  $\alpha$  arbitrariamente pequeños la transformación  $(x, \mu) \mapsto \mathcal{F}(x, \mu, \alpha)$  este en  $\mathcal{V}$ .

Veremos que esto permite asegurar que para cada compacto  $K$  contenido en  $U$ , hay elementos de  $\mathcal{V}$  que son arbitrariamente  $C^\infty$ -ceranos a  $F$  en puntos de  $K$ . Esto junto con el hecho de que  $\mathcal{V}$  es un abierto permitirá garantizar la densidad de  $\mathcal{V}$  con la topología fina

Para cada  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+2}) \in \mathbb{R}^{m+2}$  denotaremos por

$$F^\alpha(x, \mu) = F(x, \mu) + \sum_{i=1}^{m+2} \alpha_i x^{i-1}$$

**Afirmación** El conjunto de  $\alpha \in \mathbb{R}^{m+2}$  tales que  $F^\alpha \notin \mathcal{V}$  tiene medida cero.

**Demostración:** Denotaremos por  $\mathcal{M}_k$  al conjunto de  $\alpha \in \mathbb{R}^{m+2}$  tales que para algun  $(x, \mu) \in U$  se cumple que

$$\begin{aligned} \left( F^\alpha, \dots, \frac{\partial^{k-1} F^\alpha}{\partial x^{k-1}} \right) (x, \mu) = \mathbf{0} \quad y \\ \left( F^\alpha, \dots, \frac{\partial^{k-1} F^\alpha}{\partial x^{k-1}} \right) \text{ no es submersión en } (x, \mu) \end{aligned}$$

Claramente  $\mathcal{V}^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$ . Demostraremos que  $\mathcal{M}_k$  tiene medida cero.

Tomemos primero el caso en que  $k \leq m+1$

Sea  $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m+2} \rightarrow \mathbb{R}^k$  definido por

$$\psi(x, \mu, \alpha) = \left( F^\alpha, \dots, \frac{\partial^{k-1} F^\alpha}{\partial x^{k-1}} \right) (x, \mu)$$

En términos de este mapeo  $\alpha \in \mathcal{M}_k$  si y solo si para alguna  $(x, \mu)$

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu, \alpha) = \mathbf{0} \quad y \\ r(\psi_{(x, \mu)})(x, \mu, \alpha) < k \end{aligned}$$

donde estamos denotando por  $\psi_{(x, \mu)}$  a la submatriz de la matriz jacobiana de  $\psi$  correspondiente a las variables  $(x, \mu)$ .

Nótese que los ceros de  $\psi$  están dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x, \mu) + \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{m+2} x^{m+1} &= 0 \\ F_x(x, \mu) + \alpha_2 + \dots + (m+1)\alpha_{m+2} x^m &= 0 \\ &\vdots \\ F_{x^{k-1}}(x, \mu) + (k-1)!\alpha_k + \dots + \frac{(m+1)!}{(m-k+2)!} \alpha_{m+2} x^{m-k+2} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que se puede despejar  $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$  como función de  $(x, \mu, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{m+2})$ . Denotemos por  $\alpha_1 = (\alpha_1 \dots \alpha_k)$  y  $\alpha_2 = (\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{m+2})$ . Con esta notación tenemos que los ceros de  $\psi$  se pueden caracterizar por

$$\alpha_1 = \phi(x, \mu, \alpha_2)$$

Veremos que la siguiente transformación tiene como valores críticos a las  $\alpha \in \mathcal{M}_k$ . Sea

$$\xi(x, \mu, \alpha_2) = (\phi(x, \mu, \alpha_2), \alpha_2)$$

Se tiene que  $(\alpha_1, \alpha_2)$  es valor crítico de  $\xi$  si y solo si

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \phi(x, \mu, \alpha_2) & y \\ r(\phi_{(x, \mu)})(x, \mu, \alpha_2) &< K \end{aligned}$$

Para estimar el rango de  $\phi_{(x, \mu)}$  usaremos que

$$\psi(x, \mu, \phi(x, \mu, \alpha_2), \alpha_2) \equiv 0$$

por lo que

$$\psi_{(x, \mu)}(x, \mu, \phi, \alpha_2) + \psi_{\alpha_1}(x, \mu, \phi, \alpha_2) \phi_{(x, \mu)}(x, \mu, \alpha_2) \equiv 0$$

Se puede ver que  $\psi_{\alpha_1}$  es una matriz invertible, por lo que

$$r(\psi_{(x, \mu)})(x, \mu, \phi, \alpha_2) = r(\phi_{(x, \mu)})(x, \mu, \alpha_2)$$

Con esto se tiene que  $\alpha$  es un valor crítico de  $\xi$  si y solo si  $\alpha \in \mathcal{M}_k$ . Por lo que  $\mathcal{M}_k$  tiene medida cero

El análisis del caso  $k \geq m+2$ . Primero observemos que en este caso  $(F^\alpha, \dots, \frac{\partial^{k-1} F^\alpha}{\partial x^{k-1}})$  no es submersión por lo que  $\mathcal{M}_{m+2} \supset \mathcal{M}_k$  de aquí que basta tomar  $k = m+2$ .

En este caso se puede hacer la misma construcción, solo que ahora los ceros de  $\psi$  están dados por la ecuación

$$\alpha = \phi(x, \mu)$$

Nótese que  $\phi$  está definido en un abierto de  $R^{m+1}$  y su imagen está en  $R^{m+2}$ , por lo que  $\mathcal{M}_{m+2}$  también tiene medida cero.

**Nota:** La afirmación anterior garantiza la densidad de  $\mathcal{V}$  si el dominio de las funciones es un compacto  $K$ , pues en este caso dada cualquier  $(\epsilon, r)$ -vecindad de  $F$  se puede escoger  $\alpha$  fuera de un conjunto de medida cero de tal forma que  $\sum_{i=0}^{m+2}$  sea  $(\epsilon, r)$  cercana a cero en  $K$ , lo que garantiza que  $F^\alpha$  esté en  $\mathcal{V}$  intersección la vecindad dada.

**Demostración de la densidad:** Sea  $F \in C^\infty(U, R)$  y  $\mathcal{N}$  una vecindad de  $F$  construiremos una función  $G \in \mathcal{V} \cap \mathcal{N}$

Denotaremos por

$$\mathcal{V}_K = \left\{ H \in C^\infty(U, R) \mid \forall \mathbf{z} \in H^{-1}(0) \cap K, \text{el germ de } H \text{ en } \mathbf{z} \text{ es una de formación } d - \text{ versal} \right\}$$

Sea  $\{C_i\}$  una sucesión de compactos tales que  $C_i \subset C_{i+1}$  y  $\cup_0^\infty C_i = U$ .

Construiremos una sucesión  $\{G_l\}$  de funciones de  $U$  tales que  $G_l \in \mathcal{V}_{C_l} \cap \mathcal{N}$  y para

$l \geq 2$

$$G_l(\mathbf{z}) = \begin{cases} G_{l-1}(\mathbf{z}) & \text{si } \mathbf{z} \in C_{l-2} \\ F(\mathbf{z}) & \text{si } \mathbf{z} \in U - C_{l+1} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Esto permite que la función  $G$  definida por

$$G(\mathbf{z}) = \lim_{l \rightarrow \infty} G_l(\mathbf{z})$$

cumple que  $G \in \mathcal{V} \cap \mathcal{N}$

Sea  $K_0 = C_0$  y para  $i \geq 1$   $K_i = C_i - \text{int}C_{i-1}$

Tomemos  $\lambda_i \in C^\infty(U, [0, 1])$  con soporte contenido en  $K_{i-1} \cup K_i \cup K_{i+1}$  que cumplan

$\lambda_i|_{K_1 \cup K_2} = 1$  y para  $i > 1$   $\lambda_i|_{K_i} = 1$

Para cada compacto  $K$  denotaremos por

$$\|H\|_{r,K} = \max_{\mathbf{z} \in K} \left| \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_{m+1}} H}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_{m+1}^{i_{m+1}}}(\mathbf{z}) \right|$$

Sea  $\epsilon \in C^0(U, \mathbb{R}^+)$  y  $r$  en los naturales tales que la  $(\epsilon, r)$ -vecindad de  $F$  esté contenida en  $\mathcal{N}$ .

Dada cualquier función  $H_1 \in \mathcal{V}$ , la función

$$G_1 = (1 - \lambda_1)F + \lambda_1 H_1$$

está en  $\mathcal{V}_{K_0 \cup K_1}$  y coincide con  $F$  fuera de  $C_2$ . Veremos que se puede escoger  $H_1$  tal que

$$\|G_1 - F\|_{r, \{z\}} < \frac{\epsilon(\mathbf{z})}{2}$$

Para estimar esto usaremos que si  $k$  es un compacto y  $\alpha$  y  $\beta \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  entonces existe un número positivo  $A$  tal que

$$\|\alpha\beta\|_{r,K} \leq A \|\alpha\|_{r,k} \|\beta\|_{r,K} \quad (\text{A.2})$$

De aquí que, como  $G_1 - F = \lambda(H_1 - F)$  basta escoger  $H_1 \in \mathcal{V}$  tal que

$$\|H_1 - F\|_{r, K_0 \cup K_1 \cup K_2} < \frac{1}{A \|\lambda_1\|_{r, K_0 \cup K_1 \cup K_2}} \min_{K_0 \cup K_1 \cup K_2} \frac{\epsilon(\mathbf{z})}{2}$$

Escogeremos  $H_2 \in \mathcal{V}$  adecuada de tal forma que definiendo

$$G_2 = (1 - \lambda_2)G_1 + \lambda_2 H_2$$

se tenga que  $G_2 \in \mathcal{N} \cap \mathcal{V}_{K_0 \cup K_1 \cup K_2}$

Nótese que  $G_2$  coincide con  $G_1$  en  $K_0$  y con  $F$  fuera de  $C_3$ .

Aquí se utilizará que  $\mathcal{V}$  es un abierto y como  $G_1 \in \mathcal{V}_{k_1}$ , existe  $\delta_1 > 0$  y  $r'$  tal que si  $\|G_1 - H\|_{r', K_1} < \delta_1$  entonces  $H \in \mathcal{V}_{k_1}$ .

Utilizando (A.2) se puede ver que se puede escoger  $H_2 \in \mathcal{V}$  tal que

$$\|G_1 - G_2\|_{\max(r, r'), K_1 \cup K_2 \cup K_3} < \min \left\{ \delta_1, \min_{K_1 \cup K_2 \cup K_3} \frac{\epsilon(\mathbf{z})}{4} \right\}$$

Esto garantiza que  $G_2 \in \mathcal{N} \cap \mathcal{V}_{K_0 \cup K_1 \cup K_2}$

En general se escoge  $H_l \in \mathcal{V}$  adecuada de tal forma que

$$G_l = (1 - \lambda_l)G_{l-1} + \lambda_l H_l$$

esté en  $\mathcal{N} \cap \mathcal{V}_{K_0 \dots \cup K_l}$  y cumpla con (A.1), con lo que se demuestra la densidad de  $\mathcal{V}$   $\diamond$

## Appendix A

# Curvas (3-4) y mapeos doblez y cúspide.

*En la primera sección de este apéndice caracterizaremos a las curvas que son difeomorfismos a la imagen de la curva parametrizada por  $t \mapsto (t^3, t^4)$ . En la segunda sección lo haremos para los mapeos doblez y cúspide; esto último se hará en términos de tres propiedades invariantes bajo (d-i)equivalencias: el corrancho, la suavidad del conjunto singular y lo que llamaremos el orden por curvas de un mapeo.*

### A.1 Curvas (3-4)

*En este trabajo hemos llamado curvas (3-4) a aquellas que son difeomorfismos (localmente) la imagen de  $t \mapsto (t^3, t^4)$  y hemos usado que si una curva está parametrizada por una función suave de orden 3 en 0,  $\alpha$ , la cual cumple que su tercera y cuarta derivada en 0 son linealmente independientes, entonces se trata de una curva (3-4). Como cualquier curva de estas características está contenida en una variedad de dimensión 2, el siguiente teorema garantiza lo dicho anteriormente.*

**Teorema 1:** *Sea  $\alpha : (R, 0) \rightarrow R^2$  una función suave. El germen de  $\alpha$  es (d-i)equivalente al germen en 0 de  $t \mapsto (t^3, t^4)$  si y sólo si  $\alpha'(0) = \alpha''(0) = \mathbf{0}$  y  $\{\alpha'''(0), \alpha''''(0)\}$  son linealmente independientes.*

**Demostración:**

*AFIRMACIÓN 1: Bajo las hipótesis del teorema el germen de  $\alpha$  es  $(d-i)$ equivalente al germen de*

$$t \mapsto (t^3, t^4 + r_1(t)) \quad (\text{A.1})$$

par algún  $r_2$  que cumpla que  $o(r_2) \geq 5$ .<sup>1</sup>

*Demostración: Componiendo por la izquierda con una transformación lineal adecuada se obtiene que  $\alpha$  es  $i$ -equivalente a*

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

donde  $o(x) = 3$  y  $o(y) = 4$ .

Como  $x$  es  $d$ -equivalente a  $s \mapsto s^3$ , componiendo por la derecha con un difeomorfismo que realice esta equivalencia y por la izquierda con una transformación lineal adecuada se obtiene este resultado.

*AFIRMACIÓN 2: El germen de (A.1) es  $(d-i)$ equivalente al germen de*

$$s \mapsto (s^3 + r_2(s), s^4 + r_3(s)) \quad (\text{A.2})$$

donde  $o(r_2) \geq 5$  y  $o(r_3) \geq 6$ .

*Demostración: Tomemos  $\tilde{r}$  la función de orden mayor o igual que 6 y  $a \in \mathbb{R}$  tales que*

$$r_1(t) = at^5 + \tilde{r}(t)$$

Haciendo el cambio de variable  $t = s - \frac{a}{4}s^2$  se tiene que (A.1) es  $d$ -equivalente a una de la forma

$$s \mapsto \left( s^3 - \frac{3}{4}as^4 + \tilde{r}_2(s), s^4 + r_3(s) \right)$$

donde  $o(\tilde{r}_2) \geq 5$  y  $o(r_3) \geq 6$ .

Componiendo ésta última por la izquierda con la transformación dada por

$$(u, v) \mapsto \left( u + \frac{3}{4}av, v \right)$$

---

<sup>1</sup>Aquí denotaremos al orden de  $r$  en 0 por  $o(r)$ .



se obtiene lo desado.

*AFIRMACIÓN 3: El germen de (A.2) es  $d$ -equivalente al germen de*

$$\tau \longmapsto \left( \tau^3, \tau^4 + r(\tau) \right)$$

para alguna  $r$  que cumple  $o(r) \geq 6$

*Demostración: Sea  $\phi$  un difeomorfismo cuyo germen cumple*

$$(\phi(\tau))^3 + r_2(\phi(\tau)) = \tau^3 \tag{A.3}$$

*$\phi$  lo podemos expresar de la forma*

$$\phi(\tau) = a_1\tau + a_2\tau^2 + \tilde{r}(\tau)$$

con  $o(\tilde{r}) \geq 3$ . Veremos que  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 0$ . Elevando al cubo esta ultima expresión se obtiene

$$(\phi(\tau))^3 = a_1^3 \tau^3 + 3a_1^2 a_2 \tau^4 + \hat{r}(\tau)$$

donde  $o(\hat{r}) \geq 5$ . Como  $o(r_2 \circ \phi) \geq 5$ , usando (A.3) se obtiene que  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 0$ .

Por otro lado, usando (A.3) se tiene que (A.2) es  $d$ -equivalente a

$$\tau \longmapsto \left( \tau^3, (\phi(\tau))^4 + r_3(\phi(\tau)) \right)$$

Esta última expresión es de la forma enunciada pues  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 0$ .

*AFIRMACION 4: Si  $o(r) \geq 5$ , entonces existe  $S : (R^2, \mathbf{0}) \rightarrow R$  tal que  $dS(\mathbf{0})\mathbf{e}_2 = 0$  y que para  $t$  suficientemente pequeña se cumple que*

$$r(t) = S(t^3, t^4)$$

*Demostración: El lema de las funciones pares garantiza que cualquier función, en particular  $r$  se puede expresar localmente de la forma*

$$r(t) = b_o(t^2) + tb_1(t^2)$$

Aplicando esto mismo a  $b_o$  y a  $b_1$  se obtiene una expresión para  $r$  de la forma

$$r(t) = a_o(t^4) + t a_1(t^4) + t^2 a_2(t^4) + t^3 a_3(t^4)$$

Nótese que los coeficientes de la serie de Taylor de  $r$  correspondientes a los términos  $t^{4n+i}$  son los coeficientes de la serie de Taylor de  $a_i$ . Como  $o(r) \geq 5$  entonces

$$\begin{aligned} a'_o(0) &= 0 \\ a_1(0) = a'_1(0) &= 0 \\ a_2(0) &= 0 \end{aligned} \tag{A.4}$$

por lo que

$$\begin{aligned} a_1(s) &= s^2 \tilde{a}_1(s) \\ a_2(s) &= s \tilde{a}_2(s) \end{aligned}$$

Con esto tenemos que para  $t$  pequeña se cumple que

$$r(t) = a_o(t^4) + t^3 \tilde{a}_1(t^4) + t^6 \tilde{a}_2(t^4) + t^3 a_3(t^4)$$

Tomemos

$$S(u, v) = a_o(v) + u^3 \tilde{a}_1(v) + u^2 \tilde{a}_2(v) + u a_3(v)$$

Nótese que  $dS(\mathbf{0})\mathbf{e}_2 = a'_o(0) = 0$  (Ver (A.4)).

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA:** Usando las afirmaciones anteriores tenemos que el germen de  $\alpha$  es  $(d-i)$ equivalente al germen de una función de la forma

$$\tau \longmapsto (\tau^3, \tau^4 + S(\tau^3, \tau^4))$$

donde  $\frac{\partial S}{\partial v}(\mathbf{0}) = 0$ .

Sea  $\Phi(u, v) = (u, v + S(u, v))$ .  $\Phi$  es un difeomorfismo en  $\mathbf{0}$  pues  $\frac{\partial S}{\partial v}(\mathbf{0}) = 0$ . Se tiene que

$$\Phi(\tau^3, \tau^4) = (\tau^3, \tau^4 + S(\tau^3, \tau^4))$$

con lo que queda demostrado este teorema.  $\diamond$

## A.2 Mapeos doblez y cúspide

### Ejemplos y definiciones.

El mapeo doblez estandar en  $R^m$  es el mapeo definido por

$$D(x, \mathbf{y}) = (x^2, \mathbf{y})$$

donde  $(x, \mathbf{y}) \in R \times R^{m-1}$ .

Este mapeo dobla al espacio por su variedad singular dada por  $x = 0$ . la imagen de esta variedad es suave.

El mapeo cúspide estandar está definido por

$$C(x, \mathbf{y}) = \left(\frac{x^3}{3} + xy_1, \mathbf{y}\right)$$

donde  $(x, \mathbf{y}) = (x, y_1, \dots, y_{m-1}) \in R^m$ .

$C$  es un difeomorfismo local fuera de su variedad singular  $\Sigma$ , dada por  $x^2 + y_1 = 0$ . La imagen bajo  $C$  de  $\Sigma$  es el cilindro cuspidal dado por la ecuación  $9x^2 + 4y_1^3 = 0$ .

A todos los mapeos que sean (d-i)equivalentes en  $\mathbf{z}_0$  a  $D$  (ó  $C$ ) en  $\mathbf{0}$  se les llama mapeos doblez (ó cúspide). Estos forman parte del conjunto de mapeos entre variedades de la misma dimensión que tienen corrancho menor o igual que 1, y son los "menos singulares" de este conjunto.

Una forma de medir el grado de singularidad local de un mapeo es a través de orden de las imágenes de curvas regulares. Más precisamente, Si  $M$  es una  $m$ -variedad y  $G : (M, \mathbf{z}_0) \rightarrow R^m$  es un mapeo, daremos la siguiente

**Definición:** El orden por curvas de  $G$  en  $\mathbf{z}_0$  es el máximo de los ordenes de  $G \circ \alpha$  en  $0$ , donde  $\alpha$  es una curva regular tal que  $\alpha(0) = \mathbf{z}_0$ . A este orden lo denotaremos por  $o_G(\mathbf{z}_0)$ .

### Caracterización de los mapeos doblez y cúspide.

Estos mapeos están caracterizados por las siguientes propiedades

**Teorema 2:**

1.  $G : R^m \rightarrow R^m$  es un mapeo doblez en  $\mathbf{z}_0$  si y solo si se cumple
  - i) El corrancho de  $G$  en  $\mathbf{z}_0$  es igual a 1.
  - ii)  $o_G(\mathbf{z}_0) = 2$
2.  $G : R^m \rightarrow R^m$  es un mapeo cúspide en  $\mathbf{z}_0$  si y solo si se cumple (1.i) y además
  - ii)  $o_G(\mathbf{z}_0) = 3$
  - iii)  $\det(dG)$  es submersión en  $\mathbf{z}_0$ .

**Demostración:** Se puede checar facilmente que el orden por curvas del mapeo cúspide estandar es 3 y el del doblez estandar es 2 y usando sólo cálculo, que estos son invariantes bajo (d-i)equivalencias. También las otras condiciones las cumplen los mapeos doblez o cúspide; por lo que demostraremos que dichas condiciones son suficientes.

Primero se verá que cualquier mapeo  $G$  de corrancho 1 en un punto es (d-i)equivalente a uno de la forma  $H(x, \mathbf{y}) = (h(x, \mathbf{y}), \mathbf{y})$ , en este caso las propiedades enunciadas en el teorema son equivalentes a que  $h$ , vista como una deformación de  $h(x, \mathbf{0})$  sea d,i-versal donde el orden de  $h(\cdot, 0)$  es 2 ó 3 respectivamente. Llevando  $h$  a su forma estandar obtendremos lo enunciado.

**AFIRMACION 1:** El corrancho de  $G$  en  $\mathbf{z}_0$  es menor o igual que 1 si y solo si  $G$  es (d-i)equivalente en  $\mathbf{z}_0$  a un mapeo  $H : (R^m, \mathbf{0}) \rightarrow R^m$  de la forma  $H(x, \mathbf{y}) = (h(x, \mathbf{y}), \mathbf{y})$

**Demostración:** El corrancho es un invariante bajo (d-i)equivalencias, por lo que basta mostrar la suficiencia. Bajo (d-i)equivalencias se puede suponer que  $G = (G^1, G^2) : (R \times R^{m-1}, \mathbf{0}) \rightarrow (R \times R^{m-1}, \mathbf{0})$  y que cumple que el rango de  $d_{\mathbf{y}}G^2(\mathbf{0})$  es  $m-1$ , por lo que el mapeo  $\psi$  definido por  $\psi(x, \mathbf{y}) = (x, G^2(x, \mathbf{y}))$  es un difeomorfismo local.

Sea  $H = G \circ \psi^{-1}$ .  $H$  es de la forma  $(h(x, \mathbf{y}), \mathbf{y})$  pues  $\psi \circ \psi^{-1} = ((\psi^{-1})^1, G^2 \circ \psi^{-1})$ , por lo que  $G^2 \circ \psi^{-1}(x, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ .

**AFIRMACIÓN 2:** Si  $H(x, \mathbf{y}) = (h(x, \mathbf{y}), \mathbf{y})$  entonces  $o_H(\mathbf{0})$  coincide con el orden de  $h(\cdot, \mathbf{0})$  en 0.

*Demostración:* Es fácil ver que el orden por curvas de un mapeo no depende de la forma de parametrizar la curva en el dominio del mapeo, además si  $\alpha'(0) \neq \mathbf{0}$  y  $(H \circ \alpha)'(0) = \mathbf{0}$ , entonces  $\alpha_1'(0) \neq 0$ , por lo que reparametrizando se puede suponer que  $\alpha(x) = (x, \mathbf{y}(x))$ .

En este caso se puede ver que si  $\mathbf{y}$  es de orden mayor o igual que  $l$  en  $0$ , entonces

$$\begin{aligned} (h \circ \alpha)'(0) &= \frac{\partial h}{\partial x}(\mathbf{0}), \dots, (h \circ \alpha)^{(l-1)}(0) = \frac{\partial^{l-1} h}{\partial x^{l-1}}(\mathbf{0}) \\ (h \circ \alpha)^{(l)}(0) &= \frac{\partial^l h}{\partial x^l}(\mathbf{0}) + \left( \frac{\partial h}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial y_{m-1}} \right)(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{y}^{(l)}(0) \end{aligned}$$

Supongamos que  $h(\cdot, \mathbf{0})$  tiene orden  $k$  en  $0$ .

Sea  $\mathbf{y}$  cualquier función de orden mayor que  $k$ , entonces el orden de  $h \circ \alpha$  en cero es  $k$ , por lo que  $o_H(\mathbf{0}) \geq k$ .

Sea  $\alpha$  tal que  $H \circ \alpha$  tenga orden mayor que  $k-1$ , entonces  $\mathbf{y}$  también tiene orden mayor que  $k-1$ , por lo que

$$(H \circ \alpha)^{(k)}(\mathbf{0}) = \left( \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(\mathbf{0}) + \left( \frac{\partial h}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial y_{m-1}} \right)(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{y}^{(k)}(0), \mathbf{y}^{(k)}(0) \right) \neq \mathbf{0}$$

o sea  $o_H(\mathbf{0}) \leq k$ .

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA:** Solo demostraremos la parte del teorema correspondiente a mapeos cúspide, pues para el doblez se usan los mismos argumentos. Para esto usaremos las propiedades de las deformaciones  $d, i$ -versales que se encuentran en el teorema 5 del apéndice A.

Nótese que las propiedades (2.ii) y (2.iii) equivalen en el caso de mapeos de la forma  $H = (h(x, \mathbf{y}), \mathbf{y})$  a que el orden de  $h(\cdot, \mathbf{0})$  en  $0$  sea tres y que  $(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y_1}, \dots, \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y_{m-1}})(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$  lo cual a su vez equivale a que  $(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x^2})$  sea submersión en  $\mathbf{0}$  y el orden de  $h(\cdot, \mathbf{0})$  en  $0$  sea tres, o sea  $h$  vista como deformación es  $(d-i)$ -versal en  $\mathbf{0}$ , por lo que existen gérmenes  $\psi : (R^m, H(\mathbf{0})) \rightarrow (R, 0)$ ;  $\xi : (R^{m-1}, \mathbf{0}) \rightarrow (R^{m-1}, \mathbf{0})$  y  $\phi : (R^m, \mathbf{0}) \rightarrow (R^m, \mathbf{0})$  tales que  $(x, \mathbf{y}) \mapsto (\phi(x, \mathbf{y}), \xi(\mathbf{y}))$  y  $\psi(\cdot, \mathbf{0})$  son difeomorfismos y se cumple que

$$\psi(h(\phi(x, \mathbf{y}), \xi(\mathbf{y})), \mathbf{y}) = \frac{x^3}{3} + xy_1 \quad (\text{A.5})$$

Veremos que esto implica que  $H$  es  $(d-i)$ equivalente a  $C$ .

Tomemos el difeomorfismos definido por

$$\Xi(X, \mathbf{Y}) = \left( \psi(X, \xi^{-1}(\mathbf{Y})), \xi^{-1}(\mathbf{Y}) \right)$$

Usando (A.5) se obtiene que  $\Xi \circ H \circ (\phi, \xi) = C \diamond$

# Bibliografía

- [1] V.I. Arnold. *Contact geometry and wave propagation. L. Enseignement Mathématique*, **36** (1990)
- [2] V.I. Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. Spriger-Verlag. New York..* (1983)
- [3] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade y A.N. Varachenko. *Singularities of differentiable maps. Vol. 1. Birkhäuser. Boston.* (1985)
- [4] R. Bulajich y S. López de Medrano. *Apuntes sobre teoría de singularidades. Comunicaciones Internas. Facultad de Ciencias, UNAM.* (1980)
- [5] M. Chaperon. *Geometric calculus. Cambridge University Press. Versión preliminar.*
- [6] M. Chaperon. *Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques. Astérisque.* (1986)
- [7] M. Chaperon. *Singularités en géométrie de contact. Journées singulières. Dijon. Astérisque 59-60.* (1978)
- [8] L. Dara. *Singularités génériques des équations différentielles multiformes. Bol. Soc. Brasil. Mat.* **6** (1975)
- [9] M. Golubitsky y V. Guillemin. *Stable mappings and their singularities. Graduate texts in mathematics. 14. Springer-Verlag. New York.* (1973)
- [10] P.J. Pabier. *Implicit differential equations near a singular point. J. Math. Anal. App.* **144.** (1989)

- [11] *F. Struck Chavez. Catástrofes desde un punto de vista elemental. Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM. (1980)*