CAOS ... EN EL C.C.H.

PONENCIA PRESENTADA POR :

M. EN C. GUILLERMO GOMEZ A.

EL 4 DE MARZO DE 1992 EN EL PLANTEL VALEJO DEL

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

ELABORADA POR EL COLECTIVO DE AUTORES:

GOMEZ A. G. DEL DEPTO. DE MATEMATICAS, FAC. CIENCIAS, U.N.A.M.

GOMEZ N. R. DEL DEPTO. DE MATEMATICAS, FAC. CIENCIAS, U.N.A.M.

HERNANDEZ G.L.M. DEL DEPTO. DE MATEMATICAS, FAC. CIENCIAS, U.N.A.M.

VEGA R. E. DEL DEPTO. DE MATEMATICAS, FAC. CIENCIAS, U.N.A.M.

Y DE LA UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL, UNIDAD AJUSCO.

Con el título **" Caos ... en el C.C.H."** el M. en C. Guillermo Gómez A. se presentó el 14 de marzo en el C.C.H. Vallejo, introduciendo a los alumnos en la **Teoría del Caos,** como el estudio de ciertas funciones, cuyo comportamiento se asemeja a ciertos fenómenos naturales o sociales, entre los que mencionó a las tormentas y terremotos, y al comportamiento de la bolsa de valores y el tráfico vehicular, a los que caracterizó de impredecibles.

Los conceptos utilizados por el M. en C. Gómez, fueron nuevos para los alumnos. Entre estos destacan el de **función, el proceso de iteración de una función, la gráfica de una función y el concepto del Caos.**

Presentamos a continuación la ponencia sustentada por el M. en C. Guillermo Gómez A. y elaborada por el Colectivo de Autores.

CAOS... EN EL C.C.H.

POR COLECTIVO DE AUTORES*

La idea generalizada de Ciencia como sinónimo de predicción, exactitud y precisión ha quedado muy en entredicho a partir de la detección de procesos en movimiento tales como la predicción del clima, el comportamiento de un tornado, la predicción de un sismo, el comportamiento del mercado de valores sobre todo en México, la turbulencia producida por una caída de agua, el comportamiento del humo de un cigarro a partir de un instante dado, la parte superior de la flama de una veladora, el comportamiento del flujo vehicular, por ejemplo en el periférico (embotellamiento) y muchísimos fenómenos más, donde la característica más importante es precisamente que tales fenómenos son intrínsecamente **impredecibles.**

La llamada **Teoría del Caos** estudia el comportamiento de tales fenómenos.

*) Gómez[1] A.G., Gómez[1] N.R., Hernández[1] G.L.M., Vega[1,2] R.E.
1) Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.
2) Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco.

La idea de esta plática consiste en introducir a las técnicas matemáticas que dan sustento a tal **Teoría del Caos** y que pueden ser susceptibles de ser manejadas en la enseñanza de las matemáticas desde el **nivel medio superior** e incluso desde antes, con la ventaja explícita de que estaríamos hablando de temas incluidos en los programas de estudio, pero no necesariamente enrelación a problemas de la época de los Griegos, o de la época del nacimiento del Cálculo Diferencial e Integral, o en el mejor de los casos del siglo pasado, sino en relación a problemas que han nacido en los últimos años, que son problemáticas **contemporáneas** y adicionalmente muy ligadas al instrumento típico para cálculos numéricos tediosícimos , para visualizaciones gráficas y para manipulaciones de tipo lógico simbólicos, a saber: La **computadora.**

El concepto matemático básico a usarse es el de **función**, en particular funciones elementales tipo X, $\sqrt{X}$, X^2 , **sen X**, etc., todas ellas son tratadas a nivel preparatoria aunque esencialmente son tratadas junto con sus gráficas como instatáneas fotográficas, es decir como esquemas fijos: La **idea fija de función.**

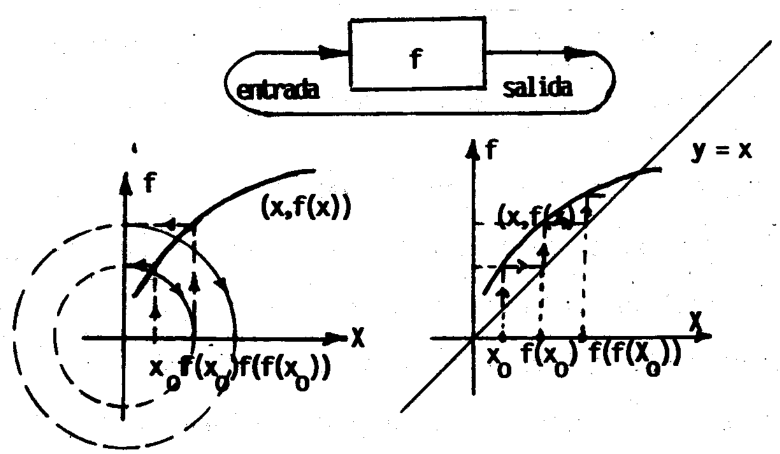
En contrposición a la anterior concepción **la idea dinámica de función** se genera introduciendo una operación, que a diferencia de las operaciones algebráicas (+, - , X , ÷) entre funciones, tal operación llamada **composición de funciones**, efectivamente nos genera -

una dinámica*.

Más aún nos restringiremos a la operación de **componer a una función consigo misma**, es decir de iterar la misma función, esto es de repetir una y otra vez el mismo procedimiento.

- Esquemáticamente tendríamos que :

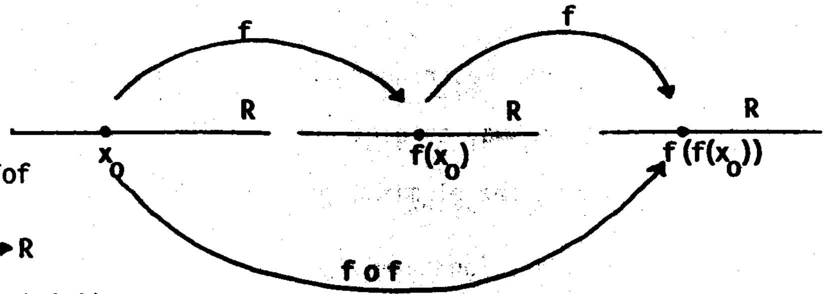
En un sistema ortogonal de coordenadas cartesianas la **composición de una función consigo misma**, se vería como en la gráfica adjunta :



* Esto se debe a que tal operación de composición nos genera una estructura algebráica suficientemente rica, que es la de **grupo**.

Dada una función f

$$\begin{cases} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ y = f(x) \end{cases}$$



Su composición fof

$$\begin{cases} fof : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ (fof)(x) = f(f(x)) \end{cases}$$

y la notación que se usa es la siguiente: $(fof)(x) \overset{def}{=} f(f(x)) \overset{not}{=} f^2(x)$

$(fofof)(x) \overset{def}{=} f(f(f(x)) \overset{not}{=} f^3(x)$

- -

$\underbrace{(fofo\ldots of)}_{n \text{ veces}}(x) \overset{def}{=} \underbrace{f(f(\ldots (f(x))}_{n \text{ veces}} \ldots) \overset{not}{=} f^n(x)$

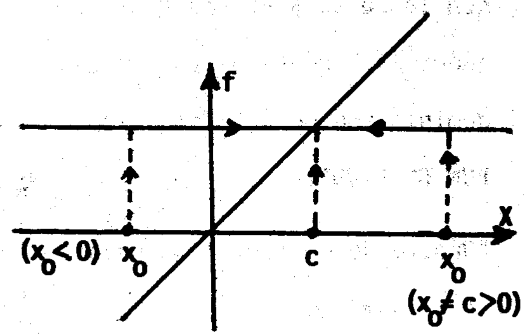
Las cuales se léen : $f^2(x)$; $f^3(x),\ldots,$ $f^n(x)$ como segunda composición, tercera composición,..., n-ésima composición de f en x.

Las gráficas de las iteraciones resultan ser conjuntos que ayudan a caracterizar la dinámica generada por la función **f**. Tales conjuntos resultan ser nuevos entes matemáticos como el llamado **Conjunto de Julia**, que es el conjunto de puntos en $\mathbf{R}$ que generan impredictibilidad ("caos") o el **Conjunto de Mandelbrot** que se revela como el diccionario de cuadros de todos los posibles **Conjuntos de Julia**.

Pero empecemos con las funciones más simples:

$$f(x) = \; C \text{ (constante)}$$

Se trata de clasificar los puntos del dominio de la función que lleven a comportamientos cualitativamente distintos.



Si $X_0 = C$ bajo f siempre toma el valor C

Si $X_0 \neq C$ bajo f van a dar al valor C

Esto se dice así: "Orbita de X_0 bajo f" $= \left\{X_0,\ f(x_0),\ f^2(x_0),\ \dots,\ f^n(x_0),\ \dots\right\}$

En nuestro caso:

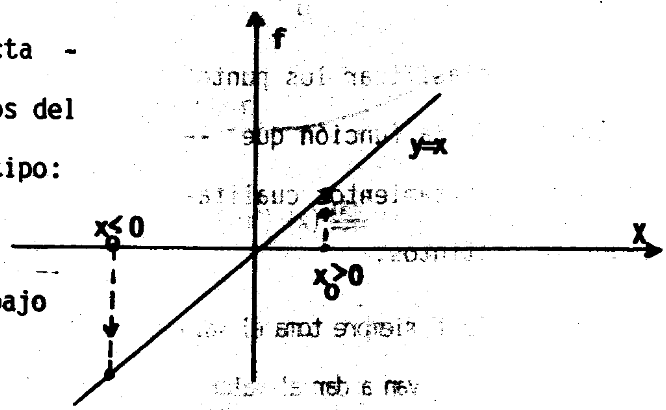
"Orbita de $X_0 = C$ bajo $f(x) = C$" $\equiv \{C, C, C, \dots, C, \dots\}$, (a un tal punto se le llama **PUNTO FIJO de f**

Mientras que:

"Orbita de $X_0 \neq C$ bajo $f(x) = C$" $\Rightarrow \{X_0, C, C, \dots, C, \dots\}$

$$f(x) = x$$

- En este caso cuando la función idéntica $f(x) = x$ coincide con la recta a 45º la recta idéntica, todos los puntos del dominio son de un mismo tipo: **PUNTOS FIJOS.**



"Orbita de cualquier Xo bajo $f(x) = x$" $\equiv$

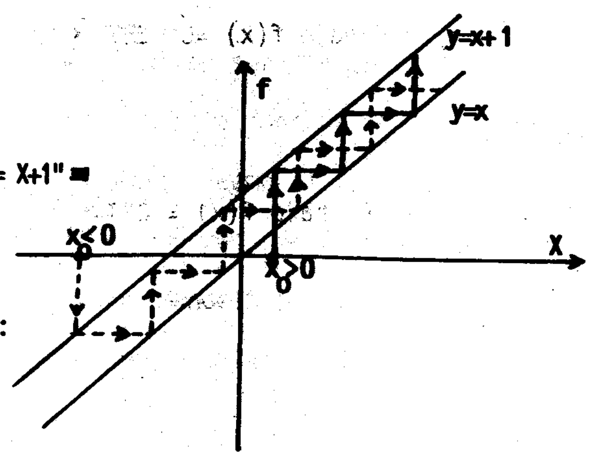
$\equiv \{Xo, Xo, Xo, \ldots, Xo, \ldots\}$

$$f(x) = x + 1$$

- Aquí el comportamiento de todos los puntos del dominio de la función también es único.

"Orbita de cualquier Xo bajo $f(x) = X+1$" $\equiv$

$\equiv \{Xo, Xo+1, Xo+2, \ldots, Xo+n, \ldots\}$



Todos sus puntos se alejan a $+\infty$:

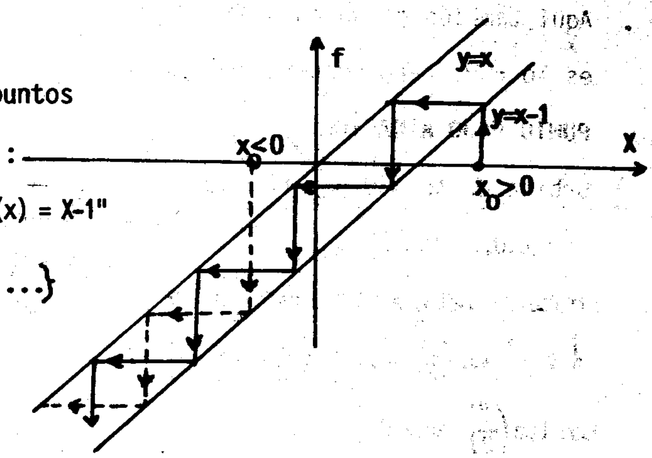
$$\lim_{n \to +\infty} (Xo+n) = +\infty$$

Con la calculadora: $\boxed{Xo}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ ...

$f(x) = x - 1$

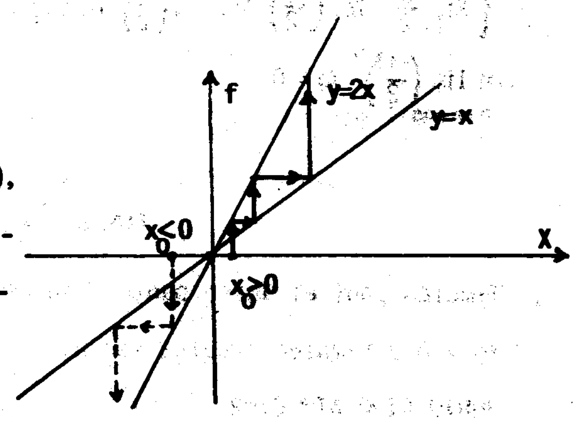
Para esta función todos los puntos del dominio se alejan a $-\infty$: "Orbita de cualquier Xo bajo f(x) = X-1"

$\Rightarrow \{Xo,\ Xo-1,\ Xo-2, \ldots,\ Xo-n, \ldots\}$



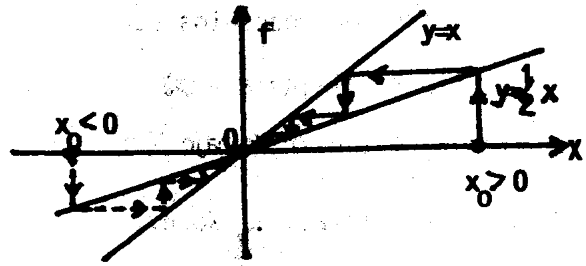
$f(x) = 2x$

En esta función por primera vez en forma explícita aparece un punto "impredecible", a saber el único punto fijo de la función 2x (2x = x), o sea Xo = 0, ya que una pequeña perturbación si es positiva o negativa -- hace que la órbita respectivamente se aleje a $+\infty$ o a $-\infty$ (Xo = 0 PUNTO FIJO REPULSOR)..



$f(x) = \frac{1}{2}x$

- Aquí también el único punto fijo es $X_o = 0$, pero resulta ser un -- **PUNTO FIJO ATRACTOR:**



"Órbita de $X_o = 0$ bajo $f(x) = \frac{1}{2}x$" $\equiv$ $\{0,0,0,\ldots,0,\ldots\}$

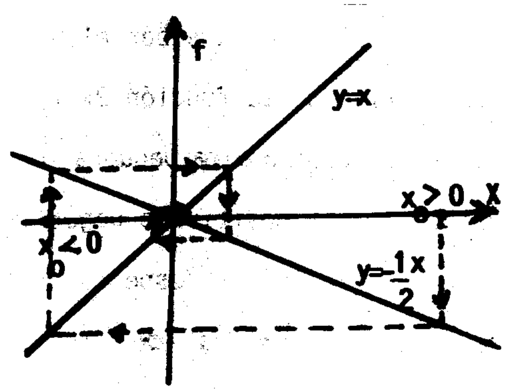
"Órbita de cualquier $X_o>0$ bajo $\frac{1}{2}x$" $\equiv$ $\left\{X_o, \frac{1}{2}X_o, \left(\frac{1}{2}\right)^2 X_o, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n X_o, \ldots\right\}$,

con $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n X_o = 0$

"Órbita de cualquier $X_o<0$ bajo $\frac{1}{2}X$" $\equiv$ $\left\{X_o, \frac{1}{2}X_o, \left(\frac{1}{2}\right)^2 X_o, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n X_o, \ldots\right\}$,

con $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n X_o = 0$

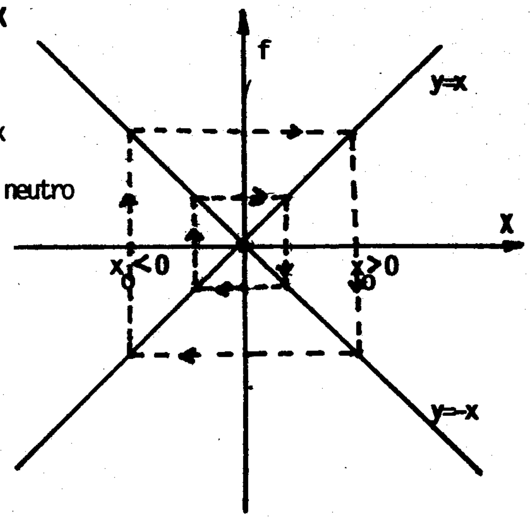
$f(x) = -\frac{1}{2}X$



- También aquí el único punto fijo es $X_o = 0$ y también resulta ser un **PUNTO FIJO ATRACTOR:**

"Órbita de $X_o = 0$ bajo $-\frac{1}{2}X$" $\equiv$ $\{0,0,0,\ldots,0,\ldots\}$ y las órbitas para $X_o > 0$ y $X_o < 0$ se comportan asentóticamente (cuando $n \to +\infty$) tendiendo a 0, pero de una manera distinta al caso anterior: no en escalera, sino en caracol.

$f(x) = -x$



- Por último la función lineal $f(x) = -x$ tiene por un lado un punto fijo $X_o = 0$ neutro (ni tractor ni repulsor), pero la "Orbita de cualquier $X_o \neq 0$ bajo $-x$" $\equiv$ $\equiv \{X_o, -X_o, X_o, -X_o, \ldots, X_o, -X_o, \ldots\}$ **ORBITA PERIODICA de PERIODO 2.**

- La transición al caso no lineal puede realizarse con funciones tales como $\sqrt{X}$, cos X, $X^2 + 1$ y en general basta con analizar la función cuadrática $X^2 + C$, con $-2 \leq C \leq \frac{1}{4}$ para obtener comportamientos tan complicados como se quiera, en particular para C = -2 las iteraciones de $X^2 + C$ nos lleva al **CAOS**. Esto intuitivamente significa que las iteraciones incluye puntos periódicos de todos los periódos, que el conjunto de puntos periódicos es denso y que hay una especie de transitividad, es decir que tomadas dos vecindades de dos puntos cualesquiera e iterando via la función de una de las vecindades existirá un número finito de iteraciones luego de lo cual la 1ª vecindad tiene una intersección no vacia con la 2ª y finalmente alta sensibilidad respecto a las condiciones iniciales, esto de nuevo caracterizará al caos.